F2557

R

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

1
ANUL XII
1961

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

# STUDII ȘI CERCETĂRI DE
# MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

P
2537

COMITETUL DE REDACŢIE

*Redactor responsabil :*

ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri :

ACADEMICIAN N. PROFIRI ;

A. BELEŞ, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;

CR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;

R. BOGDAN, conferenţiar la Institutul de petrol, gaze şi geologie, Bucureşti ;

N. TIPEI, conferenţiar la Institutul politehnic, Bucureşti ;

M. ARCAN, şef secţie, Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor (INCERC), Bucureşti.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
APARE DE 6 ORI PE AN
*Redacţia :* INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"
**Str. Const. Mille 15, tel. 17.34 09**

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA”

# STUDII ŞI CERCETĂRI
# DE
# MECANICĂ APLICATĂ

1

ANUL XII

1961

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

1989

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
Folyóiratszám:
252/1963

**Revista**

*STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ*

*publică:*

— Studii originale *de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general științific și reflectare în practică.*

— Note (*lucrări mai scurte*) *cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.*

— Referate științifice și tehnice *în care se expune: stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observații și discuții asupra unor lucrări de mecanică aplicată.*

— Recenzii *asupra cărților și studiilor romîne sau străine.*

*Domeniile de specialitate ale revistei sînt:*

— *Aeromecanică* (*mecanica fluidelor, aerodinamică, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacție, ventilație, aeromotori*).

— *Hidromecanică* (*hidraulică, construcții hidrotehnice, irigație, turbine hidraulice și pompe, amenajări hidraulice*).

— *Construcții de mașini* (*cinematica și dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul mașinilor, automatizare, studiul suprafețelor, tehnologia mediilor solide continue*).

— *Mecanică generală* (*rezistența materialelor, elasticitate, plasticitate, vibrații și șocuri, stabilitate, analogii electrice și hidraulice*).

— *Statica și dinamica construcțiilor* (*metode pentru calculul static și dinamic al construcțiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode de executarea lucrărilor de construcții*).

— *Tehnica măsurătorilor* (*aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului și a izotopilor radioactivi în tehnică*).

*Revista urmărește stimularea activității științifice precum și difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toți specialiștii din țară și de la colaboratorii din străinătate.*

★

*Articolele vor fi redactate într-o formă concisă și clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părțile cunoscute ale problemei.*

*Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar și citeț cu cerneală. Figurile și graficele se vor desena în tuș pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar și în număr cît mai mic.*

*Literatura citată în text se va insera la sfîrșitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariție, iar pentru revistă se va indica și numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.*

*Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză și germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.*

*Aceleași norme sînt valabile și pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.*

*Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, București, str. C. Mille 15, raionul Gh. Gheorghiu-Dej.*

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

# STUDII ȘI CERCETĂRI
DE
# MECANICĂ APLICATĂ

Tomul XII, nr. 1 1961

## SUMAR

Pag.

STUDII

*CINEMATICA ȘI DINAMICA SOLIDULUI*

N. TIPEI și V. N. CONSTANTINESCU, Traiectoriile fugoide ale avioanelor de mare viteză . . . . . . . . . . 11
PETRE BRĂDEANU, Considerații asupra traiectoriei rachetelor . . . . . . . . . 27

*HIDROMECANICĂ*

GR. C. MOISIL, Observații asupra ecuațiilor liniarizate ale fluidelor vîscoase compresibile . . . . . . . . . . 41

*AEROMECANICĂ*

H. LIMBERG, Scurgerea de intrare laminară într-un canal convergent . . . . . . . 47
DAN MATEESCU, Scurgerea supersonică în jurul unei aripi trapezoidale prevăzute cu două carene conice . . . . . . . . . . 61

*TEORIA MECANISMELOR*

EUG. BUGAJEWSKI, Asupra determinării momentului redus . . . . . . . . . . 79

*ELASTICITATE – PLASTICITATE – REZISTENȚA MATERIALELOR*

G. SCHMIDT, Aplicarea teoriei ecuațiilor integrale neliniare în elastodinamică . . . 89
N. IOSIPESCU, Studiul experimental al plăcilor plane prin metoda interferențelor mecanice . . . . . . . . . . 111
LIVIU LIBRESCU, Vibrațiile structurilor elastice subțiri de formă cilindrică circulară, plasate într-un curent fluid supersonic . . . . . . . . . . 139

*MECANICA PAMÎNTURILOR*

J. LITWINISZYN, Noi cercetări teoretice și experimentale în mecanica corpurilor granulare, tratate ca medii caracterizate prin ecuații stochastice . . . . . . . 157
R. J. BALLY și I. ANTONESCU, Procesul de electroosmoză aplicat la ameliorarea pămînturilor . . . . . . . . . . 165

Pag.

*METODE DE CALCUL*

D. V. IONESCU, Integrarea numerică a ecuației integrale de tip Volterra . . . . . 175

*TEHNICA MĂSURĂTORILOR*

E. PROCOPOVICI și L. DUMITRESCU, Măsurarea presiunilor aerodinamice în tubul de șoc . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 185

I. JAKAB, A. ZAHARESCU și L. DUMITRESCU, Metodă pentru măsurarea vitezei de propagare a undelor de șoc . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 195

**REFERATE ȘTIINȚIFICE ȘI TEHNICE**

K. K. PONOMAREV, O metodă matricială pentru calculul vibrațiilor grinzilor . . . 207

**DIN ACTIVITATEA INSTITUTULUI DE MECANICĂ APLICATĂ**

* * * Consfătuirea asupra tehnicii așchierii metalelor și tehnicii rodajului . . 215

**RECENZII** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 217

**CĂRȚI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACȚIE** . . . . . . . . . . . . . . . . 227

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ „ТРАЯН ВУЯ“

# ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ
# ПО
# ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том XII, № 1 1961

## СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

**СТАТЬИ**

*КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ТВЕРДЫХ ТЕЛ*

Н. ТИПЕЙ и В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, Фугоидальные траектории быстроходных самолетов . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11
ПЕТРЕ БРЭДЯНУ, О траектории ракет . . . . . . . . . . . . . . . 27

*ГИДРОМЕХАНИКА*

Г. К. МОИСИЛ, Замечания о линеаризированных уравнениях вязких сжимаемых жидкостей . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 41

*АЭРОМЕХАНИКА*

Х. ЛИМБЕРГ, Ламинарное течение при входе в сходящийся канал. . . . . . 47
ДАН МАТЕЕСКУ, Сверхзвуковое обтекание трапецоидального крыла, предусмотренного двумя коническими обтекателями . . . . . . . . . . . 61

*ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ*

Е. БУГАЕВСКИЙ, К определению приведенного момента механизма . . . . 79

*УПРУГОСТЬ — ПЛАСТИЧНОСТЬ — СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ*

Г. ШМИДТ, Применение теории нелинейных интегральных уравнений в эластодинамике . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 89
Н. ИОСИПЕСКУ, Экспериментальное исследование плоских пластинок методом механических интерференций . . . . . . . . . . . . . . . . 111
ЛИВИУ ЛИБРЕСКУ, Колебания упругих слоистых оболочек круглой цилиндрической формы, расположенных в потоке сверхзвуковой жидкости . 139

*МЕХАНИКА ГРУНТОВ*

И. ЛИТВИНИШИН, Новые теоретические и экспериментальные исследования в механике зернистых тел, рассматриваемых как среды, характеризующиеся стохастическими уравнениями . . . . . . . . . . . . . . . . . . 157
Р. Ж. БАЛЛИ и И. АНТОНЕСКУ, Процесс электроосмоза, примененный для улучшения грунтов . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 165

Стр.

### МЕТОДЫ РАСЧЕТА

Д. В. ИОНЕСКУ, Численное интегрирование интегрального уравнения типа Вольтерра . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 175

### ТЕХНИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Е. ПРОКОПОВИЧ и Л. ДУМИТРЕСКУ, Измерение аэродинамического давления в ударной трубе . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 185
И. ЯКАБ, А. ЗАХАРЕСКУ и Л. ДУМИТРЕСКУ, Метод измерения скорости распространения ударных волн . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 195

## НАУЧНЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕФЕРАТЫ

К. К. ПОНОМАРЕВ, Матричный метод расчета колебаний балок . . . . . . 207

## ИЗ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ИНСТИТУТА ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

* * * Совещание о технике резания металлов и технике обкатки . . . . . 215
**РЕЦЕНЗИИ** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 217
**КНИГИ, ПОСТУПИВШИЕ ПУТЕМ ОБМЕНА В РЕДАКЦИЮ** . . . . . . 227

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБИЛКИ

**Журнал**

*РАБОТЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ*

*публикует :*

— Оригинальные исследования *высокого уровня, преставляющие общий научный интерес, связанный с практикой.*

— Заметки (*краткие работы*) *оригинального характера, представляющие уточнение некоторого вопроса.*

— Научные и технические рефераты, *в которых излагаются: современное состояние определенной задачи с выявлением нового подхода к ней, замечания и обсуждения некоторых работ по прикладной механике.*

— Рецензии *на румынские или зарубежные книги и исследования. В журнале публикуются работы по следующим специальностям:*

— *Аэромеханика (механика жидкостей и газов, аэродинамика, газодинамика, механика самолета, аэроупругость, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, термоаэродинамика реактивных двигателей, вентиляция ветродвигатели).*

— *Гидромеханика (гидравлика, гидромеханические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства).*

— *Машиностроение (кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей, механика сплошных твердых сред).*

— *Общая механика (сопротивление материалов, упругость, пластичность, вибрация и удары, устойчивость, электрические и гидравлические аналогии).*

— *Статика и динамика сооружений (методы статистического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, механика грунтов, устойчивость грунтов, методы производства строительных работ).*

— *Техника измерений (электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в технике).*

*Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех отечественных специалистов и зарубежных сотрудников.*

★

*Статьи должны быть написаны в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений (относящихся к уже известным частям проблемы).*

*Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала, формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует делать китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.*

*Литература, цитированная в тексте должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, заглавие, том, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов — и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.*

*Кроме текста, для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском языке или же на русском, французском, английском или немецком языках. Резюме должно составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к работам зарубежных сотрудников редактированным на русском, английском, французском или немецком языках.*

*Рукописи препровождаются по адресу: Институт прикладной механики. Бухарест, ул. Константин Милле, № 15, район Г. Георгиу-Деж.*

## Le périodique

*« STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ »*
*(« ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE »)*

*publie :*

— *des* études originales *à caractère hautement scientifique, recherches fondamentales d'intérêt général, orientées vers l'activité pratique;*

— *des* notes *(communications brèves) à caractère général, ou constituant une mise au point d'une certaine question;*

— *des* exposés scientifiques et techniques *où l'on expose : l'état actuel d'un certain problème, en soulignant son aspect nouveau; des remarques et discussions concernant certains travaux de mécanique appliquée;*

— *des* notes bibliographiques *au sujet des livres et des études roumains et étrangers.*

*Les domaines de spécialité de la revue sont les suivants :*

— *aéromécanique (mécanique des fluides, aérodynamique, dynamique des gaz, mécanique de l'avion, aéroélasticité, aérodynamique des moteurs à combustion interne, thermo-aérodynamique des moteurs à réaction, ventilation, aéromoteurs);*

— *hydromécanique (hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines hydrauliques et pompes);*

— *constructions mécaniques (cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des machines, automation, étude des surfaces, technologie des milieux solides continus);*

— *mécanique générale (résistance des matériaux, élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques);*

— *statique et dynamique des constructions (méthodes de calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilité des terrains, méthodes d'exécution des travaux de construction);*

— *technique des mesures (appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation des ultra-sons et des isotopes radioactifs en technique).*

*La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires en publiant, dans ce but, les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.*

★

*Les articles seront rédigés dans un style concis et clair, étant évitées les introductions trop longues concernant les données connues des problèmes.*

*Les manuscrits seront envoyés en trois exemplaires, dactylographiés, aux formules écrites de manière lisible, à l'encre. Les figures, ainsi que les diagrammes, seront tracés à l'encre de Chine sur du papier calque. On utilisera le nombre de figures strictement indispensable.*

*Les références bibliographiques seront mentionnées à la fin de l'article. On y indiquera le nom de l'auteur, le titre de l'ouvrage, le tome, la page, le lieu de la parution et, pour les périodiques on ajoutera le numéro auquel on se réfère. On ne fera pas mention des travaux non publiés.*

*Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé en roumain ou, éventuellement, en russe, français, anglais ou allemand (environ une page pour 20 pages dactylographiées de texte).*

*Les mêmes normes sont valables pour les collaborateurs étrangers, qui peuvent rédiger leurs travaux en russe, anglais, français ou allemand.*

*Les manuscrits seront envoyés à l'adresse suivante : Institut de Mécanique Appliquée « Traian Vuia », 15, str. Constantin Mille, Bucarest, Roumanie.*

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE «TRAIAN VUIA»

# ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome XII, nº 1 1961

## SOMMAIRE

### ÉTUDES

Page

*CINÉMATIQUE ET DYNAMIQUE DU SOLIDE*

N. TIPEI and V. N. CONSTANTINESCU, Phugoid paths of high-speed aircrafts 11
PETRE BRĂDEANU, Sur les trajectoires des fusées . . . . . . . . . . . . . . 27

*HYDROMÉCANIQUE*

GR. C. MOISIL, Observations sur les équations linéarisées des fluides visqueux compressibles . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 41

*AÉROMÉCANIQUE*

H. LIMBERG, Der laminare Einlauf einer Strömung in einen konvergenten Kanal 47
DAN MATEESCU, Supersonic flow around a trapezoidal wing fitted with two conical bodies . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 61

*THÉORIE DES MÉCANISMES*

EUG. BUGAJEWSKI, Über die Bestimmung des reduzierten Momentes eines Getriebes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 79

*ÉLASTICITÉ – PLASTICITÉ – RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX*

G. SCHMIDT, Anwendung der Theorie nichtlinearer Integralgleichungen in der Elastokinetik . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 89
N. IOSIPESCU, Étude expérimentale des plaques planes par la méthode des interférences mécaniques . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 111
LIVIU LIBRESCU, Vibrations des structures élastiques en forme de cylindre circulaire situées dans un courant fluide supersonique . . . . . . . . . . . 139

*MÉCANIQUE DES SOLS*

J. LITWINISZYN, New theoretical and experimental investigations in the mechanics of loose bodies treated as media characterized by stochastic equations . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 157
R. J. BALLY and I. ANTONESCU, Application of the electro-osmotic process to the improving of soil properties . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 165

Page

*MÉTHODES DE CALCUL*

D. V. IONESCU, Intégration numérique de l'équation intégrale du type Volterra 175

*TECHNIQUE DES MESURES*

E. PROCOPOVICI and L. DUMITRESCU, Measurement of aerodynamic pressure in the schock tube . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 185

I. JAKAB, A. ZAHARESCU and L. DUMITRESCU, Method for measuring the velocity of propagation of shock waves . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 195

**RAPPORTS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES**

K. K. PONOMAREV, Une méthode matricielle pour le calcul des vibrations des poutres . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 207

**DE L'ACTIVITÉ DE L'INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE**

* * * Conférence sur la technique du tournage des métaux et sur la technique du rodage . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 315

**REVUE BIBLIOGRAPHIQUE** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 227

**LIVRES REÇUS À LA RÉDACTION** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 117

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

# STUDII

## CINEMATICA ŞI DINAMICA SOLIDULUI

# TRAIECTORIILE FUGOIDE ALE AVIOANELOR DE MARE VITEZĂ

DE

N. TIPEI şi V. N. CONSTANTINESCU

### 1. INTRODUCERE

Mişcările fugoide [1] se studiază în ipoteza că tracţiunea este în fiecare moment egală cu rezistenţa la înaintare, apoi că incidenţa avionului este constantă iar coeficientul de stabilitate statică are o valoare infinită. Aceste ipoteze, caracteristice pentru cazul fugoidelor, vor fi menţinute mai departe. Dimpotrivă, vitezele mari, impunînd raze de curbură de asemenea mari pentru traiectoriile aflate în planul vertical, atrag diferenţe de altitudine apreciabile de care este necesar să se ţină seama; totodată, coeficienţii aerodinamici sînt variabili cu numărul Mach, $M$. Aceste elemente specifice zborului la viteze mari se vor lua în considerare în calculele următoare.

Uneori, se poate admite că momentele în jurul centrului de greutate, mereu nule, depind numai de portanţa aripii şi ampenajului. Această ipoteză este apropiată de realitate, deoarece momentul la portanta nulă a aripii este, pentru avioanele rapide, foarte mic sau egal cu zero, iar momentul dat de rezistenţa la înaintare se poate de asemenea neglija. Totuşi, pentru incidenţele mici de zbor se poate ca valorile $C_x$ şi $C_z$ să fie destul de apropiate şi în acest caz trebuie să se aibă în vedere legea de variaţie cu $M$ a fiecărui coeficient cît şi a poziţiei focarului aripii şi a lui $C_{m_0}$ (coeficientul de moment la portanţă nulă). Fie cunoscute funcţiile de incidenţa $i$ şi de $M$:

$$C_z = C_z(i, M), \qquad C_x = C_x(i, M). \tag{1}$$

Ecuaţia de momente în jurul centrului de greutate este de asemenea o funcţie de $i$, de $M$, de bracajul $\beta$ al profundorului şi de rotaţia $\omega_2$ în jurul axei de tangaj. Presupunînd că această rotaţie este redusă şi deci se poate neglija efectul său, se poate scrie pentru momentul de tangaj

$$M_2 = M_2(i, M, \beta). \tag{2}$$

Din această relație, presupunînd că în fiecare moment $M_2 = 0$ (adică neglijînd accelerațiile unghiulare $\omega_2$) și $\beta$ constant (comenzi blocate), se poate deduce din ecuația (2) incidența în funcție de numărul Mach, iar relațiile (1) $C_z(M)$ și $C_x(M)$.

De asemenea, în locul ipotezei $\beta = \text{const.}$, se poate admite o lege de comandă mai generală $\beta(t)$ sau $\beta(M)$. Din ecuația (2) se va deduce apoi funcția corespunzătoare a incidentei față de numărul Mach.

Din premisa de bază a acestui gen de mișcări și anume că tracțiunea $\mathcal{T}$ este mereu egală cu rezistența la înaintare, rezultă și legea de variație a admisiei $\alpha$ la motor pentru fiecare $M$ și înălțime $z$. Fie $S$ suprafața aripii, $\rho$ densitatea și $a$ viteza sunetului la înălțimea corespunzătoare. Se poate scrie astfel

$$\mathcal{T}(\alpha, \rho, M) = S\frac{\rho}{2}a^2 M^2 C_x(M) \tag{3}$$

de unde apoi se obține $\alpha$.

## 2. STABILIREA ELEMENTELOR MIȘCĂRII

Notînd cu $V = aM$ viteza avionului, cu $P$ portanța și cu $r$ raza de curbură a traiectoriei, forțele care acționează în centrul de greutate $G$ al solidului sînt reprezentate în figura 1, unde $G$ este greutatea avionului, iar $\varphi$ unghiul traiectoriei cu orizontala.

Dacă $z_1$ este înălțimea la care $V = 0$, și dacă se notează $Z = z_1 - z$, teoria mișcărilor fugoide dă imediat

$$a^2 M^2 = 2gZ. \tag{4}$$

Din această expresie se vede că pentru $Z \sim 5\,000$ m viteza avionului atinge viteza sunetului, deci apare necesitatea de a se introduce un calcul mai riguros pentru asemenea mișcări.

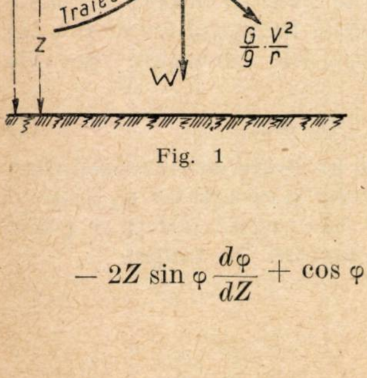


Fig. 1

Fie apoi $Z^*$, $V^*$, $\rho^*$, $a^*$, $M^*$ valorile $Z$, $V$, $\rho$, $a$, $M$ corespunzătoare înălțimii de zbor orizontal, rectiliniu și uniform, cu același bracaj $\beta$ al profundorului. Ecuația de proiecții pe normala la traiectorie se scrie

$$\frac{V^2}{r} = g\left(\frac{\rho a^2 M^2 C_z(M)}{\rho^* a^{*2} M^{*2} C_z(M^*)} - \cos\varphi\right), \tag{5}$$

sau, ținînd seama de (4) și de valoarea razei de curbură

$$r = \frac{dz}{\sin\varphi\, d\varphi} = \frac{dZ}{d(\cos\varphi)};$$

$$-2Z\sin\varphi\frac{d\varphi}{dZ} + \cos\varphi = 2\sqrt{Z}\,\frac{d\left(\cos\varphi\sqrt{Z}\right)}{dZ} = \frac{\rho a^2 M^2 C_z\left(\dfrac{Z}{a^2}\right)}{\rho^* a^{*2} M^{*2} C_z^*}. \tag{6}$$

Deoarece $\rho$ şi $a$ depind de $z$, respectiv $Z$, se poate scrie mai departe

$$\cos\varphi = \frac{1}{2\rho^* Z^* C_z^*}\frac{1}{\sqrt{Z}}\int \rho\sqrt{Z}\, C_z\left(\frac{Z}{a^2}\right) dZ + \frac{k}{\sqrt{Z}}\,. \tag{7}$$

Dacă evoluţia se face la incidenţe reduse, ceea ce este cazul de cele mai multe ori pentru avioanele de mare viteză, atunci pentru variaţia coeficientului de portanţă cu numărul Mach se poate admite legea analitică, obţinută în studiul scurgerilor în jurul suprafeţelor portante în ipoteza perturbaţiilor mici. Astfel pentru zborul subsonic cu numere Mach ce nu depăşesc numărul Mach critic se poate admite legea Prandtl-Glauert

$$C_z = \frac{C_{zi}}{\sqrt{1 - M^2}}\,. \tag{8}$$

Vom avea astfel relaţia

$$C_z = C_z^* \frac{\sqrt{1 - M^{*2}}}{\sqrt{1 - M^2}} = C_z^* \frac{\sqrt{1 - \frac{2g}{a^{*2}} Z^*}}{\sqrt{1 - \frac{2g}{a^2} Z}}\,. \tag{9}$$

În mod asemănător, pentru zboruri supersonice, admiţînd ca valabilă formula lui Ackerett

$$C_z = \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}}\, i \tag{10}$$

obţinem

$$C_z = C_z^* \frac{\sqrt{M^{*2} - 1}}{\sqrt{M^2 - 1}} = C_z^* \frac{\sqrt{\frac{2g}{a^{*2}} Z^* - 1}}{\sqrt{\frac{2g}{a^2} Z - 1}}\,, \tag{11}$$

în care se poate pune aproximativ $a \cong a^*$.

În aceste condiţii, pentru regimul subsonic de zbor, formula (7) se scrie

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{1 - \frac{2g}{a^{*2}} Z^*}}{Z^* \sqrt{Z}} \int \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{Z}{1 - \frac{2g}{a^2} Z}}\, dZ + \frac{k}{\sqrt{Z}} \tag{12}$$

iar dacă variaţiile de înălţime nu sînt prea mari, astfel încît să se poată considera $\rho$ constant

$$\cos\varphi = -\frac{\sqrt{1 - \frac{2g}{a^{*2}} Z^*}}{\rho Z^* \sqrt{Z}} \frac{a^2}{2g}\left(\sqrt{Z\left(1 - \frac{2g}{a^2} Z\right)} + \sqrt{\frac{a^2}{2g}}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{a^2}{2gZ} - 1}\right) + \frac{k}{\sqrt{Z}}\,. \tag{13}$$

În mod analog, pentru zborul supersonic rezultă

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{\frac{2g}{a^{*2}}Z^* - 1}}{Z^*\sqrt{Z}} \int \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{Z}{\frac{2g}{a^2}Z - 1}}\, dZ + \frac{k}{\sqrt{Z}} \tag{14}$$

sau

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{\frac{2g}{a^{*2}}Z^* - 1}}{\rho Z^*\sqrt{Z}} \frac{a^2}{2g}\left[\sqrt{Z\left(\frac{2g}{a^2}Z - 1\right)} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{2g}} \ln \frac{\sqrt{\frac{2g}{a^2}Z - 1} - \sqrt{\frac{2g}{a^2}Z}}{\sqrt{\frac{2g}{a^2}Z - 1} + \sqrt{\frac{2g}{a^2}Z}}\right] + \frac{k}{\sqrt{Z}}. \tag{15}$$

Raza de curbură a traiectoriei este dată de expresia (5) în care se înlocuiește valoarea lui $V^2$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2Z}\left(\frac{\rho Z C_z\left(\frac{Z}{a^2}\right)}{\rho^* Z^* C_z^*} - \cos\varphi\right) =$$
$$= \frac{1}{2Z}\left\{\frac{1}{\rho^* Z^* C_z^*}\left[\rho Z C_z\left(\frac{Z}{a^2}\right) - \frac{1}{2\sqrt{Z}}\int \rho\sqrt{Z}\, C_z\left(\frac{Z}{a^2}\right) dZ\right] - \frac{k}{\sqrt{Z}}\right\}. \tag{16}$$

Plecînd apoi de la expresia cunoscută a curburii $\frac{1}{r}(Z)$ dată de formula (16), se poate deduce traiectoria prin simple cuadraturi.

Într-adevăr, notînd cu $x$ distanțele de la un punct fix măsurate pe orizontală și cu $p = \frac{dZ}{dx} = -\operatorname{tg}\varphi$, se obține succesiv

$$\int \frac{p\, dp}{(1 + p^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} = \int \frac{1}{r}\, dZ + C_1 = \Phi(Z) + C_1 = \cos\varphi\,; \;(C_1 = 0),$$

$$\frac{dZ}{dx} = \pm\sqrt{\frac{1}{\Phi^2(Z)} - 1}, \tag{17}$$

$$x = \pm\int_{Z_{0m}}^{Z} \frac{dZ}{\sqrt{\frac{1}{\Phi^2(Z)} - 1}} + C_2 = \pm\,\psi(Z) + x_0 + qX_0$$
$$(q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

## 3. CONSIDERAŢII ASUPRA FUGOIDELOR LA VITEZE MARI: CAZUL $k > 0$

Dublul semn în ecuaţiile (17) arată că fugoidele admit întotdeauna o axă de simetrie paralelă cu aceea a ordonatelor şi corespunzînd valorilor

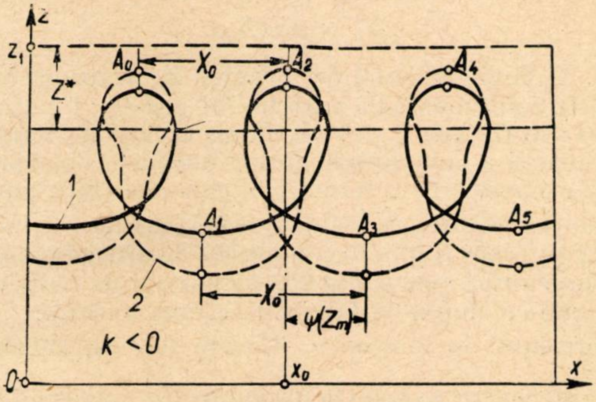


Fig. 2

$Z = Z_{0m}$, $x = x_0 + qX_0$, adică maximelor sau minimelor lui $Z$. În figurile 2 şi 3 se vede de asemenea uşor că deoarece condiţiile la momentul iniţial

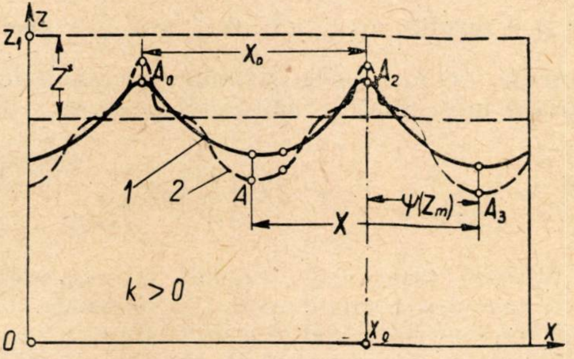


Fig. 3

nu afectează valorile lui $V$, $\varphi$, $r$ decît prin ordonata $Z_0$ a punctului în care se dă viteza în mărime şi direcţie ($V_0$, $\varphi_0$) rezultă o serie de proprietăţi ale traiectoriilor. Mărimile $V_0$, $z_0$ determină pe $z_1 = \frac{V_0^2}{2g} + z_0$, de la care se măsoară apoi $Z$ ($Z_0 = z_1 - z_0$). Totodată curbele nu pot avea decît maxime $A_0$, $A_2 \ldots$ cuprinse între două minime egale $A_1$, $A_3 \ldots$ şi invers, cu un număr de puncte de inflexiune intermediare, date de ecuaţia $\frac{1}{r} = 0$, (16). În unele din acestea este posibil totuşi ca tangenta la traiectorie să fie orizontală, $\frac{dZ}{dx} = 0$ (fig. 2 şi 3).

Mai rezultă din cele arătate că traiectoriile au un caracter de periodicitate, intervalul corespunzător $X_0$ fiind determinat de două puncte consecutive în care $Z$ și $\varphi$ au aceleași valori (fig. 2 și 3). Astfel dacă se consideră două maxime sau două minime vecine, corespunzătoare unei altitudini $Z_m$, se găsește

$$X_0 = 2\psi(Z_m). \tag{18}$$

Distanța $X_0$ depinde astfel de valoarea $Z_m$ și forma funcției $\psi$, care, la rîndul său este determinată de variația lui $\rho$ și $C_z$. Ca urmare, $X_0$ diferă de la caz la caz ; în figurile 2 și 3 s-a admis același $X_0$ numai pentru ușurința reprezentării și a comparației dintre fugoidele obișnuite (linia plină, $\rho$, $C_z$ constante) și acelea de o formă mai generală (linie punctată).

Formulele precedente (4), (7), (16) și (17) definesc complet elementele mișcării. Deși $\rho$ și $C_z$ pot fi funcții complicate de altitudine, se vede imediat că determinîndu-le după cum s-a arătat se pot obține toate datele celelalte prin integrări grafice simple și în cazul cel mai general.

Zborul orizontal la înălțimea $Z^*$ este dat de valoarea constantei $k = \frac{2}{3}\sqrt{Z^*}$, ca și pentru avioanele obișnuite. În punctul în care $\frac{1}{r} = 0$, $\cos\varphi$ trece printr-un minimum, iar altitudinea corespunzătoare este dată de relația (16), în care se anulează paranteza mare. Din (7) se vede că deoarece $Z$, $\rho$, $C_z$ sînt totdeauna pozitive, integrala este de asemenea pozitivă ; dacă și $k > 0$ rezultă $\cos\varphi > 0$, $0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}$, deci traiectoria are forma binecunoscută a unei curbe șerpuite, cu abscisele mereu crescătoare, iar $Z$ variază între diferite înălțimi $Z_m$, ($\rho_m$, $a_m$), date de soluțiile ecuației

$$Z_m = \left[\frac{1}{2\rho^* Z^* C_z^*}\left(\int \rho\sqrt{Z}\, C_z\left(\frac{Z}{a^2}\right) dZ\right)_{Z=Z_m} + k\right]^2 \tag{19}$$

Dacă se tratează traiectoriile fugoide cu raza de curbură mare ($\cos\varphi \cong 1$) pe o cale mai aproximativă [2], se poate admite că $\rho$ nu variază, deoarece diferențele de înălțime sînt reduse în acest caz. Mișcarea de bază aproximativă este cunoscută în aceste condiții, iar traiectoria este o curbă periodică cu aspect sinusoidal (curba 1, fig. 2 și 3). Peste aceasta se suprapun efectele de ordin secundar, care modifică forma traiectoriei. Astfel, ecuația de echilibru pe verticală este

$$\frac{G}{g}\ddot{z} = P - G. \tag{20}$$

Cum

$$P = G\frac{Z}{Z^*}\frac{C_z}{C_z^*}, \tag{21}$$

rezultă imediat ecuația diferențială

$$\ddot{Z} + g\frac{Z}{Z^*}\frac{C_z}{C_z^*} = g, \tag{22}$$

care, pentru regimul subsonic se scrie, ținînd seama de (9)

$$\ddot{Z} + g\frac{\sqrt{1 - \frac{2g}{a^{*2}}Z^*}}{Z^*}\frac{Z}{\sqrt{1 - \frac{2g}{a^2}Z}} = g, \tag{23}$$

iar pentru regimul supersonic (11)

$$\ddot{Z} + g\frac{\sqrt{\frac{2g}{a^{*2}}Z^* - 1}}{Z^*}\frac{Z}{\sqrt{\frac{2g}{a^2}Z - 1}} = g. \tag{24}$$

Rezolvarea ecuațiilor de mai sus permite cunoașterea variației altitudinii în funcție de timp. Pe de altă parte punînd

$$V = V^* + v, \qquad V^2 \cong V^{*2} + 2vV^*, \tag{25}$$

rezultă (4)

$$v = \sqrt{\frac{g}{2Z^*}}(Z - Z^*) \tag{26}$$

și deci

$$x = \int (V^* + v)\, dt = V^*t + \sqrt{\frac{g}{2Z^*}}\int Z\, dt - \sqrt{\frac{g}{2Z^*}}Z^*t, \tag{27}$$

sau

$$x = \frac{V^*}{2}t + \sqrt{\frac{g}{2Z^*}}\int Z\, dt. \tag{28}$$

Această ecuație, împreună cu soluția ecuației (22) constituie un sistem care dă ecuațiile traiectoriei sub formă parametrică.

Ecuația (22), respectiv ecuațiile (23), (24) pot fi soluționate prin aproximații succesive, considerînd mai întîi că $C_z = C_z^* = \text{const}$. Notînd această soluție cu $Z_1$

$$Z_1 = Z_0 \sin\sqrt{\frac{g}{Z^*}}\, t + Z^* \tag{29}$$

(dacă se ia $Z = Z^*$ la $t = 0$), și limitîndu-ne la o singură aproximație, rezultă

$$Z = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + Z^* - g\frac{\sqrt{1 - \frac{2g}{a^{*2}}Z^*}}{Z^*}\int_0^t dt\int_0^t \frac{Z_1}{\sqrt{1 - \frac{2g}{a^2}Z_1}}\, dt, \tag{30}$$

* BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA

în cazul zborului subsonic, şi

$$Z = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + Z^* - g\,\frac{\sqrt{\frac{2g}{a^{*2}}Z^* - 1}}{Z^*}\int_0^t dt \int_0^t \frac{Z_1}{\sqrt{\frac{2g}{a^2}Z_1 - 1}}\,dt, \tag{31}$$

în cazul zborului supersonic. Constanta $C_1$ poate fi determinată dînd de exemplu panta traiectoriei în momentul iniţial, sau amplitudinea ei maximă.

Ecuaţiile (23), (24) pot fi rezolvate analitic simplu, dacă se consideră că înălţimea $Z$ are variaţii reduse faţă de $Z^*$. În aceste condiţii, în locul ecuaţiilor de mai sus se poate scrie ecuaţia aproximativă

$$(\alpha + \beta Z)\ddot{Z} + \gamma Z + \delta = 0, \tag{32}$$

în care

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 1 + \frac{1}{2}\,\frac{Z^*}{\frac{a^2}{2g} - Z^*}; \quad & \beta &= -\frac{1}{2\left(\frac{a^2}{2g} - Z^*\right)}, \\ \gamma &= \frac{g}{Z^*} + \frac{g}{2\left(\frac{a^2}{2g} - Z^*\right)}; \quad & \delta &= -\alpha g, \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

pentru zborul subsonic şi

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 1 - \frac{1}{2}\,\frac{Z^*}{Z^* - \frac{a^2}{2g}}; \quad & \beta &= \frac{1}{2\left(Z^* - \frac{a^2}{2g}\right)}, \\ \gamma &= \frac{g}{Z^*} - \frac{g}{2\left(Z^* - \frac{a^2}{2g}\right)}; \quad & \delta &= -\alpha g, \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

pentru zborul supersonic.

Apoi ecuaţia (32), deşi neliniară, poate fi rezolvată prin mijloace elementare, ea putînd fi transformată în ecuaţia cu variabilele separate

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{C_1 - 2\gamma\zeta - 2(\beta\delta - \alpha\gamma)\ln\zeta}} = dt; \quad (\zeta = \alpha + \beta Z). \tag{35}$$

Se remarcă totuşi că în alte cazuri, cînd $\cos\varphi \neq 1$, nu se mai pot trage aceleaşi concluzii şi mişcarea trebuie studiată cu ajutorul ecuaţiilor (17) şi (19) (curbele *2*, fig. 2 şi 3). Raza de curbură în punctele de altitudine maximă sau minimă, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (fig. 2) este dată de relaţia

$$r = \frac{2Z_m}{\dfrac{\rho Z_m C_z\left(\dfrac{Z_m}{a_m^2}\right)}{\rho^* Z^* C_z^*} - 1}. \tag{36}$$

În această expresie $Z_m$ este totdeauna pozitiv, în timp ce numitorul este negativ pentru punctele de maxim și pozitiv la valorile minime ale lui $z$. Dacă $C_z$ este constant, se vede imediat din (36) că toate maximele lui $z$ se situează deasupra liniei $Z = Z^*$, iar minimele dedesubt; variația lui $C_z$ poate introduce traiectorii situate de o singură parte a dreptei $Z = Z^*$ pentru care deci această concluzie nu mai este valabilă. De obicei, valoarea absolută a numitorului variază mai puțin cu altitudinea decît $Z_m$, fapt care face ca raza de curbură în dreptul maximelor să aibă valori absolute mai mici decît în dreptul minimelor alăturate. Traiectoria apare deci mai aplatizată în punctele de minim decît în acela de maximum învecinate.

Valoarea maximă a pantei traiectoriei, $\varphi$, la înălțimea $\widetilde{Z}$ $(\widetilde{\rho}, \tilde{a})$ corespunzătoare, este dată de relația

$$\cos \widetilde{\varphi} = \frac{\widetilde{\rho}\, \widetilde{Z}\, C_z\left(\dfrac{\widetilde{Z}}{\widetilde{a}^2}\right)}{\rho^* Z^* C_z^*}, \tag{37}$$

iar constanta $k$ rezultă (7), în funcție de $\widetilde{Z}$ și $\widetilde{\varphi}$

$$k = \sqrt{\widetilde{Z}} \cos \widetilde{\varphi} - \frac{1}{2\rho^* Z^* C_z^*}\left(\int \rho \sqrt{Z}\, C_z\, dZ\right)_{Z=\widetilde{Z}}. \tag{38}$$

Pentru cazul $k > 0$, din cauza variației lui $C_z\left(\dfrac{Z}{a^2}\right)$, valoarea maximă a constantei nu mai corespunde totdeauna zborului orizontal $\left(k = \dfrac{2}{3}\sqrt{Z^*}\right)$, așa cum se găsește în domeniul incompresibil.

Dacă se efectuează integrala (7) se obține dezvoltarea în serie a lui $\cos \varphi$

$$\cos \varphi = \frac{Z}{3\rho^* Z^* C_z^*}\left[\rho C_z - \frac{2}{5} Z \frac{d(\rho C_z)}{dZ} + \frac{4}{35} Z^2 \frac{d^2(\rho C_z)}{dZ^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{8}{315} Z^3 \frac{3d^3(\rho C_z)}{dZ^3} + \ldots + \frac{(-2)^n}{5\cdot 7\cdot 9 \ldots [5 + 2(n-1)]} Z^n \frac{d^n(\rho C_z)}{dZ^n} + \ldots\right] + \frac{k}{\sqrt{Z}}. \tag{39}$$

Dacă funcția $\rho C_z$ este continuă, împreună cu derivatele sale, în tot intervalul de variație al altitudinilor, respectiv al lui $Z$, se vede că înălțimea $z = z_1$ $(Z = 0)$ poate fi atinsă numai pentru valoarea constantei $k = 0$. În acest caz, deoarece seria din paranteză este convergentă, valoarea lui $\cos \varphi$ pentru $Z = 0$ este nulă, sau $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. Din expresia razei de curbură se vede însă că aceasta variază cu $Z$, deci traiectoria nu mai este un cerc, ca în cazul cunoscut ($C_z$ = const., $\rho$ = const.). Ea are o formă mai complicată, păstrînd însă tangenta dublă verticală, cu un punct de întoarcere la înălțimea maximă, unde viteza se anulează.

În jurul vitezei sunetului teoretic $C_z$ prezintă o discontinuitate, ca şi elementele traiectoriei, $\varphi$, $r$ etc. Practic însă, acest fenomen nu apare ; cel mult $C_z$ poate avea un salt finit, sau un punct unghiulos. Introducînd în ecuaţiile precedente noile valori sau expresii ale coeficientului de portanţă, se poate studia mai departe mişcarea la trecerea prin valoarea $M = 1$ şi pentru $M > 1$, cu ajutorul formulelor precedente modificînd numai valorile constantelor. Acestea urmează să fie determinate pentru $M = (1 - \varepsilon)_{\varepsilon \to 0}$ sau, în general, pentru ultimele valori valabile în regimul anterior ale lui $M$ sau $Z$ (4), la trecerea dintr-un regim într-altul.

## 4. VARIAŢIA DENSITĂŢII ŞI A COEFICIENTULUI DE PORTANŢĂ

Fie $C_z$ constant, ipoteza care rămîne valabilă deobicei, deoarece pentru mişcări fugoide mai accentuate sau cu un caracter acrobatic, viteza este destul de redusă. Integrala care intervine în formulele (7), (17), (19) se poate calcula admiţînd o expresie pentru variaţia lui $\rho$. Fie astfel

$$\rho = \bar{\rho}\, e^{-Kz} = \bar{\rho}\, e^{-Kz_1} . e^{KZ} = \rho_1 e^{KZ} \tag{40}$$

relaţie riguros valabilă în zonele unde gradientul de temperatură este nul şi aproximativ, dar suficient de exact, în toate celelalte regiuni. Se deduce

$$I_1 = \int \varphi \sqrt{Z}\, dZ = \rho_1 \int e^{KZ} \sqrt{Z}\, dZ =$$

$$= \frac{\rho_1}{g\sqrt{2g}} \int V^2 e^{\frac{K}{2g}V^2} dV = \frac{\rho_1}{\sqrt{2gK}} \left( V e^{\frac{K}{2g}V^2} - \int e^{\frac{K}{2g}V^2} dV \right). \tag{41}$$

Ultima integrală se găseşte apoi intabulată, putînd fi deci cunoscută la fiecare valoare a lui $Z = \frac{V^2}{2g}$.

Pentru intervale de altitudine pînă la 5 000 m, suficient de largi faţă de limitele între care se efectuează fugoidele, se poate admite în locul formulei (40) o lege hiperbolică

$$\rho = \frac{\bar{\rho}}{1 - bZ} \tag{42}$$

în care $\bar{\rho}$ şi $b$ sînt constante determinate astfel ca erorile să fie minime în intervalul considerat. Se găseşte

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \bar{\rho} C_z^* \int \frac{\sqrt{Z}}{1 - bZ} dZ = -\frac{2\bar{\rho} C_z^*}{b} \left( \sqrt{Z} - \frac{1}{2\sqrt{b}} \ln \frac{1 + \sqrt{bZ}}{1 - \sqrt{bZ}} \right), \\ \Phi(Z) &= \frac{\bar{\rho}}{b\, \rho^* Z^*} \left( \frac{1}{Z\sqrt{bZ}} \ln \frac{1 + \sqrt{bZ}}{1 - \sqrt{bZ}} - 1 \right) + \frac{k}{\sqrt{Z}}, \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

cu ajutorul cărora mişcarea este definită complet.

Cu o aproximație mai mare, dar totuși de multe ori satisfăcătoare, se poate admite o variație liniară a lui $\rho$ sau chiar a produsului $\rho C_z$ între limitele de incidență și înălțime ce caracterizează fugoida. Fie astfel

$$\rho C_z = A + BZ. \tag{44}$$

Se găsește

$$I_1 = \int (A + BZ) \sqrt{Z}\, dZ = \left(\frac{2}{3} A + \frac{2}{5} BZ\right) Z^{3/2},$$

$$\Phi(Z) = \frac{1}{\rho^* Z^* C_z^*}\left(\frac{1}{3} A + \frac{1}{5} BZ\right) Z + \frac{k}{\sqrt{Z}}. \tag{45}$$

### 5. ECUAȚIA FUGOIDEI PENTRU $k = 0$

Pentru $k = 0$ ecuația fugoidei este (17)

$$x = \pm \int_{Z_{0m}}^{Z} \frac{\left(\frac{1}{3} A + \frac{1}{5} BZ\right) Z\, dZ}{\sqrt{(\rho^* Z^* C_z^*)^2 - \left(\frac{1}{3} A + \frac{1}{5} BZ\right)^2 Z^2}} + x_0 + qX_0. \tag{46}$$

Fie substituția

$$\left(\frac{1}{3} A + \frac{1}{5} BZ\right) Z = \zeta; \quad \left(\frac{1}{3} A + \frac{1}{5} BZ_{0m}\right) Z_{0m} = \zeta_{0m}, \tag{47}$$

care introdusă în (46) conduce la integrala eliptică

$$I_2 = \int_{Z_{0m}}^{Z} \frac{\left(\frac{1}{3} A + \frac{1}{5} BZ\right) Z\, dZ}{\sqrt{(\rho^* Z^* C_z^*)^2 - \left(\frac{1}{3} A + \frac{1}{5} BZ\right)^2 Z^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{B}{5}}} \int_{\zeta_{0m}}^{\zeta} \frac{\zeta\, d\zeta}{\sqrt{[(\rho^* Z^* C_z^*)^2 - \zeta^2]\left(\frac{5A^2}{36\, B} + \zeta\right)}}. \tag{48}$$

Deoarece $\Phi(Z) = \cos\varphi \geqslant 0$ pentru aceste fugoide ($k = 0$), urmează că radicalul este real. Presupunînd că $\frac{A^2}{B}$ este de asemenea pozitiv

( $\rho C_z$ creşte cu $Z$ în domeniul subsonic), se deduce imediat că se pot introduce următoarele substituţii :

$$\left.\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
\zeta &= \rho^* Z^* C_z^* - \left(\frac{5A^2}{36\,B} + \rho^* Z^* C_z^*\right)\sin^2\varphi \\
k_1^2 &= \frac{\rho^* Z^* C_z^* + \dfrac{5A}{36\,B}}{2\,\rho^* Z^* C_z^*}\;; \\
\varphi_{0m_1} &= \text{arc sin}\sqrt{\frac{\rho^* Z^* C_z^* - \zeta_{0m}}{\dfrac{5A^2}{36\,B} + \rho^* Z^* C_z^*}}
\end{aligned}\right\}\text{pentru }\frac{5\,A^2}{36\,B} < \rho^* Z^* C_z^*, \\
&\left.\begin{aligned}
\zeta &= \rho^* Z^* C_z^* \cos^2\varphi \\
k_2^2 &= \frac{2\,\rho^* Z^* C_z^*}{\rho^* Z^* C_z^* + \dfrac{5\,A^2}{36\,B}}\;; \\
\varphi_{0m_2} &= \frac{1}{2}\,\text{arc cos}\,\frac{\zeta_{0m}}{\rho^* Z^* C_z^*}
\end{aligned}\right\}\text{pentru }\frac{5A^2}{36\,B} > \rho^* Z^* C_z^*.
\end{aligned}\right\} \qquad (49)$$

Astfel se găseşte notînd cu $F(k_i, \varphi)$ şi $E(k_i, \varphi)$ integralele eliptice de prima şi a doua speţă

$$\left.\begin{aligned}
x &= \pm\sqrt{\frac{5\,\rho^* Z^* C_z^*}{2B}}\{F(k_1, \varphi) - F(k_1, \varphi_{0m_1}) - 2\,[E(k_1, \varphi) - \\
&\quad - E(k_1, \varphi_{0m_1})]\} + x_0 + qX_0, \text{ pentru } \frac{5\,A^2}{36\,B} < \rho^* Z^* C_z^*, \\
x &= \pm\sqrt{\frac{5}{B}}\left\{\frac{5\,A^2}{36\,B\sqrt{\rho^* Z^* C_z^* + \dfrac{5A^2}{36\,B}}}\,[F(k_2, \varphi) - F(k_2, \varphi_{0m_2})] - \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{\rho^* Z^* C_z^* + \frac{5\,A^2}{36\,B}}\;[E(k_2, \varphi) - E(k_2, \varphi_{0m_2})]\right\} + \\
&\quad + x_0 + qX_0, \text{ pentru } \frac{5\,A^2}{36\,B} > \rho^* Z^* C_z^*.
\end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

La vitezele trans- şi supersonice se poate ca $B < 0$ iar integrala se scrie sub forma puţin modificată

$$I_2 = \frac{1}{2\sqrt{-\dfrac{B}{5}}}\int \frac{\zeta\, d\,\zeta}{\sqrt{[\zeta^2 - (\rho^* Z^* C_z^*)^2]\left(\zeta + \dfrac{5\,A^2}{36\,B}\right)}}\,. \qquad (51)$$

Radicalul este totdeauna real deci $\zeta \leqslant -\dfrac{5A^2}{36B}$, lucru care se poate uşor constata dacă se ia maximul expresiei (47). De altfel condiţia ca $\rho C_z = A + BZ > 0$ dă, în cazul limită $\rho C_z = 0$, $\zeta = -\dfrac{2A^2}{15B} < -\dfrac{5A^2}{36B}$.

Prin urmare se poate face substituţia

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\zeta = -\rho^* Z^* C_z^* + \left(\rho^* Z^* C_z^* - \dfrac{5A^2}{36B}\right)\sin^2\varphi \\[2ex]
k_1^2 = \dfrac{\rho^*Z^*C_z^* - \dfrac{5A^2}{36B}}{2\rho^*Z^*C_z^*}; \\[2ex]
\varphi_{0m_1} = \arcsin\sqrt{\dfrac{\rho^*Z^*C_z^*+\zeta_{0m}}{\rho^*Z^*C_z^* - \dfrac{5A^2}{36B}}}
\end{array}\right\} \text{pentru } -\dfrac{5A^2}{36B} < \rho^*Z^*C_z^*, \\[6ex]
\left.\begin{array}{l}
\zeta = -\rho^*Z^*C_z^*\cos^2\varphi \\[2ex]
k_2^2 = \dfrac{2\rho^*Z^*C_z^*}{\rho^*Z^*C_z^* - \dfrac{5A^2}{36B}}; \\[2ex]
\varphi_{0m_2} = \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{-\zeta_{0m}}{\rho^*Z^*C_z^*}
\end{array}\right\} \text{pentru } -\dfrac{5A^2}{36B} > \rho^*Z^*C_z^*.
\end{array}\right\} \tag{52}$$

Cu acestea se găseşte, ca şi în cazul precedent, ecuaţia traiectoriei pentru $k = 0$. Această ecuaţie este identică cu (50), dacă se înlocuieşte pretutindeni $B$ prin $-B$.

## 6. TRAIECTORII ÎN CAZUL $k<0$ ŞI TRAIECTORII APERIODICE

Integrala $I_1$ din expresia $\cos\varphi$ (7), este totdeauna pozitivă, deoarece $Z > 0$; acest lucru se poate vedea uşor şi din expresiile (41), (43) sau (45). În aceste condiţii, rezultă că, pentru orice $k < 0$, $\cos\varphi$ ia şi valori negative cuprinse între $-1$ şi $+1$. În adevăr, se vede uşor (39) că în acest caz $\Phi(Z) \to \infty$ cînd $Z \to 0$ deci $\cos\varphi$ atinge valoarea limită $-1$ la o înălţime maximă corespunzînd unei valori minime a lui $Z$ (de asemenea pozitivă). Traiectoriile au alura din figura 3, cu raza de curbură totdeauna pozitivă pentru valorile $Z = Z_m$ sau nulă în punctele de inflexiune ($Z = \widetilde{Z}$), de o parte și de alta a cărora $r$ schimbă de sens. În consecință, traiectoria va avea pe fiecare ramură ascendentă sau descendentă un număr par de puncte de inflexiune, spre deosebire de cazurile $k > 0$, cînd numărul acestor puncte este impar.

Dacă din ecuația (19), care arată că $Z_m$ este totdeauna pozitiv, rezultă valori $Z_m \gg z_1$, traiectoriile nu mai au caracterul de periodicitate, decît în cazul limită $Z_m = z_1$ $(\cos \varphi)_{Z=z_1} = 1$ (fig. 4).

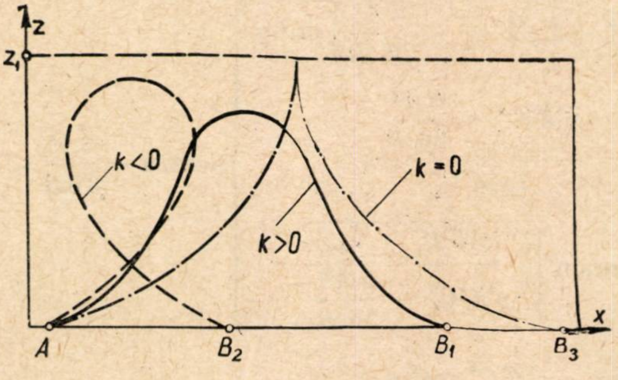


Fig. 4

Valoarea constantei $k$ pentru acest caz limită este dată de (7)

$$k_1 = \sqrt{z_1} - \frac{1}{2\rho^* Z^* C_z^*} \left( \int \rho \sqrt{Z}\, C_z \left( \frac{Z}{a^2} \right) dZ \right)_{Z=z_1} \tag{53}$$

ea poate fi pozitivă, negativă sau nulă, în funcție de $\rho^*(Z^*)$, $C_z$ și $z_1$. În toate cazurile cînd $|k| > |k_1|$ mișcarea este aperiodică și limitată în sens orizontal de intervalul maxim $AB_1$, $AB_2$ sau $AB_3$ (fig. 4).

## 7. CONCLUZII

Rezultatele prezentate în lucrarea de față pot fi aplicate pentru orice fel de variație a densității și a coeficientului de portanță cu altitudinea. De aceea mare parte din observațiile precedente se referă la cazuri foarte generale, posibile mai ales în regiunea vitezei sunetului. În domeniile sub- și supersonice, admiterea unei variații liniare a produsului $\rho C_z$ (54) poate fi, de cele mai multe ori, satisfăcătoare.

*Primită la redacție la 12 septembrie 1960*

# ФУГОИДАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ БЫСТРОХОДНЫХ САМОЛЕТОВ

## РЕЗЮМЕ

Прежде всего определяются фугоидальные движения в области сжимаемости, принимая, что тяга остается равной лобовому сопротивлению, а моменты вокруг центра тяжести все время равны нулю. При этих условиях угол атаки, при постоянных отклонениях руля высоты, является функцией числа Маха, как и всасывание двигателя.

Затем выводятся элементы движения и уравнение траектории во вполне общем виде, причем показывается, что по сравнению с движениями в несжимаемой области кривые, описанные центром тяжести самолета, могут иметь более сложный вид. Так в некоторых случаях появляется четкое ($k > 0$) или нечеткое ($k < 0$) число точек перегиба для каждого восходящего или нисходящего участка, в то время как интервал периодичности и разность высот значительно больше.

Рассматриваются решения задачи для экспоненциального или гиперболического изменения плотности с высотой. Также рассматривается линейное изменение произведения $\rho C_z$, а для частного случая, когда постоянная $k$ равна нулю, устанавливается уравнение траектории в явном виде. Далее анализируется зависимость формы траектории от значения этой постоянной и выводятся предельные значения $k = k_1$, от которых кривые теряют свой характер периодичности.

# PHUGOID PATHS OF HIGH-SPEED AIRCRAFTS

## ABSTRACT

The phugoid motions are defined in the compressibility range, admitting that the thrust is equal to the drag and that the moments about the aircraft c.g. are all the time equal to zero. Under these conditions, the incidence for constant elevator settings and the fuel admission are functions of the Mach number.

The motion elements and the equation of the path are then deduced under a quite general form, pointing out that as compared to the motions in the incompressible range, the curves described by the aircraft c.g. may have more complicated shapes. Thus, an odd number ($k > 0$) or an even number ($k < 0$) of inflexion points occurs in certain cases for each ascending or descending portion, while the periodicity interval and the difference of altitude are sensibly higher.

The solutions of the problem are examined both for an exponential and for a hyperbolic variation of the density with the altitude. A linear

variation of the product $\rho C_z$ is also considered and the equation of the path is established under an explicit form for the particular case when the constant $k$ is equal to zero. Further, the relationship between the shape of the path and the value of this constant is analysed and the limit values $k = k_1$, beginning from which the curves no longer have a periodic character, are deduced.

## BIBLIOGRAFIE

1. F. W. LANCHESTER, *Aerodonetics*. Londra, 1906.
2. W. F. DURAND, *Aerodynamic Theory*, **V**, I. Springer, 1935.
3. N. TIPEI, *Asupra mişcării de cădere a rachetelor*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **III** (1957).

# STUDII

## CINEMATICA ŞI DINAMICA SOLIDULUI

# CONSIDERAŢII ASUPRA TRAIECTORIEI RACHETELOR

DE

PETRE BRĂDEANU [1]

Problema determinării traiectoriei rachetelor ocupă un loc important în teoria şi tehnica rachetelor. O soluţie exactă a acestei probleme, în condiţii generale, este greu de găsit.

Traiectoria rachetei cît şi performanţa sa, depind de condiţiile mecanice iniţiale, de regimul de funcţionare a motorului, de forţa de propulsie şi de cauze exterioare : cîmpul gravitaţional constant sau variabil al Pămîntului şi al altor corpuri cereşti, rezistenţa aerului, diverse forţe accidentale etc. Contribuţia acestor factori îngreunează la maximum rezolvarea ecuaţiei mişcării rachetei şi în consecinţă determinarea traiectoriei prin calcul.

De aceea, calculul traiectoriei rachetei şi a determinării unor poziţii speciale ale sale se face prin metode aproximative admiţînd diferite ipoteze simplificatoare. Anularea abaterilor rachetelor de la traiectoria teoretică (standard), determinată prin metode aproximative, se face prin teleghidare (radar, televiziune, comandă) (rachete balistice, intercontinentale), dirijare automată, (comenzi electronice) (rachete-sateliţi şi rachete cosmice), autodirijare şi dirijare combinată.

Lucrarea de faţă se ocupă cu determinarea exactă a traiectoriei unei rachete în cîmpul gravitaţional variabil al Pămîntului, la mari înălţimi, presupunînd că forţa de reacţie este radială, variabilă şi cunoscută şi că condiţiile iniţiale de lansare sînt de asemenea cunoscute în funcţie de caracteristicile funcţionale şi de construcţie ale rachetei (debit, viteză de expulzare a gazelor).

*Notaţii* :

$\vec{r}$, vector de poziţie cu originea în centrul Pămîntului;

$\vec{v}$, viteza absolută a rachetei;

---

[1] Universitatea Babeş-Bolyai — Cluj.

$\vec{w}$, viteza relativă de expulzare a gazelor;
$m$, masa rachetei;
$o$, indicele zero notează valoarea mărimilor la momentul inițial;
1, indicele unu notează valoarea mărimilor la sfîrșitul arderii gazelor;
$M$, $R$, masa și raza Pămîntului;
$c$, constanta ariilor;
$\mu$, coeficientul de atracție al Pămîntului ($\mu = gR^2$).

Să considerăm ecuația mișcării unui punct de masă variabilă [1] în forma

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}\vec{w} \tag{1}$$

unde

$$\vec{w}\frac{dm}{dt} = \vec{\Phi} \tag{2}$$

este forța de reacție sau de tracțiune reactivă. Se presupune că forța activă $\vec{F}$ este forța newtoniană de atracție exercitată de Pămînt, considerat fix, asupra corpurilor din jurul său. Deoarece, din punctul de vedere al atracției, Pămîntul se comportă ca un punct (centrul său) $\vec{F}$ este o forță centrală. Vom presupune, de asemenea, că tracțiunea $\vec{\Phi}$ are suportul forței $\vec{F}$, adică radial [4]. Avem deci

$$\vec{F} = -f\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \quad \vec{\Phi} = -\frac{dm}{dt}w\frac{\vec{r}}{r}; \quad \left(w > 0, \frac{dm}{dt} < 0\right). \tag{3}$$

În asemenea condiții traiectoria punctului de masă variabilă este plană și în acest plan mișcarea se face după legea ariilor. Pentru a justifica aceste proprietăți este suficient să înmulțim ecuația (1), vectorial, cu $\vec{r}$ și pe urmă să integrăm. Se găsește

$$\vec{r} \times \vec{v} = \vec{c} = \vec{r}_0 \times \vec{v}_0, \quad \vec{r}\cdot\vec{c} = 0, \quad rv\sin(\vec{r}, \vec{v}) = r^2\dot{\theta} = c, \tag{4}$$

adică o mișcare plană care respectă legea ariilor (moment cinetic constant). Vom considera că $c$, constanta ariilor, este diferită de zero (mișcare plană) și vom nota cu $r$ și $\theta$ coordonatele polare în planul mișcării (polul este în centrul Pămîntului).

Ecuația (1) a punctului de masă variabilă în ipotezele admise ne permite să scriem ecuația

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} - \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}\frac{w}{c^2}r^2 = \frac{\mu}{c^2} \tag{5}$$

și ea se obține combinînd ecuația (1) în proiecție radială, cu integrala ariilor.

Ecuaţia (5) devine, efectiv, o ecuaţie ordinară dacă vom presupune că

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{dt} = -\alpha, \tag{6}$$

unde $\alpha$, debitul specific de gaze, este o constantă pozitivă şi în consecinţă masa o funcţie descrescătoare de timp. Din condiţia (6), prin integrare, se obţine

$$m = m_0 e^{-\alpha t}. \tag{7}$$

Vom presupune, de asemenea, că $w = \text{const.}$

Ipotezele (3) şi (7) împreună cu $w = \text{const.}$ sînt admise şi aplicate în teoria şi tehnica rachetelor [2], [5].

Pentru tracţiune avem expresia

$$\Phi = -\frac{dm}{dt}w = w\,\alpha\,m_0 e^{-\alpha t},$$

care arată că tracţiunea variază exponenţial în timp, iar acceleraţia reactivă $a$ rămîne constantă, deoarece

$$a = \frac{\Phi}{m} = \alpha w = \text{const.}$$

Rachete cu acceleraţie constantă s-au studiat de N. S. Tsien şi D. Lawden [2], [5]. Admitem ipoteza (7) şi atunci ecuaţia (5) devine

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} + \frac{\alpha w}{c^2}r^2 = \frac{\mu}{c^2}. \tag{8}$$

Ecuaţia (8) este ecuaţia traiectoriei rachetei (centrului ei de greutate) şi reprezintă, în acelaşi timp, o uşoară generalizare a cunoscutei ecuaţii a lui Binet din cazul masei constante.

Vom presupune că racheta pleacă din poziţia iniţială $P_0(r_0, 0)$ cu o viteză $\vec{v}_0$ care face unghiul $\beta_0$ cu axa polară $r_0$. Integrala ecuaţiei (8) care să satisfacă aceste condiţii iniţiale se obţine cu ajutorul substituţiei

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = y\left(\frac{1}{r}\right)$$

şi are forma

$$\frac{\sqrt{2\alpha w}}{c}\,\theta = \int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r\sqrt{r^3 + \frac{Kc^2}{2\alpha w}r^2 + \frac{\mu}{\alpha w}r - \frac{c^2}{2\alpha w}}}, \tag{9}$$

$K$ este o constantă şi are forma

$$K = \frac{h}{c^2},$$

unde

$$h = v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} - 2\,\alpha w r_0\,; \quad c = r_0 v_0 \sin \beta_0.$$

Dacă se aplică ecuația energiei se obține expresia vitezei

$$v^2 = c^2 \left\{ \left[ \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \right\} = \frac{2\mu}{r} + 2\,\alpha w r + v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} - 2\,\alpha w r_0, \quad (10)$$

din care se poate deduce ușor atît ecuația (8) cît și semnificația constantei $h$. Pentru aflarea timpului pe traiectoria $r = r\,(\theta)$ se aplică integrala ariilor și se obține

$$c\,t = \int_0^\theta r^2\,(\theta)\,d\theta. \quad (11)$$

Revenim acum la ecuația (9). Integrala (9), în condiții arbitrare $\alpha \neq 0$, $w \neq 0$ este eliptică. Dacă vom face substituția

$$r = (t^2 + 1)\,\sqrt[3]{q} - \frac{h}{6\,\alpha w}, \quad (12)$$

din (9) se obține

$$\frac{\sqrt{2\,\alpha w q}}{2c}\,\theta = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{(t^2 - n)\,\sqrt{P\,(t)}}, \quad (13)$$

unde

$$h = \pm\, 2\,\sqrt{3\,\mu\,\alpha w},$$

adică

$$v_0^2 = \frac{2\mu}{r_0} + 2\,\alpha w r_0 \pm 2\,\sqrt{3\,\alpha w \mu}, \quad (14)$$

$$q = \frac{c^2}{2\,\alpha w} + \left( \frac{\mu}{3\,\alpha w} \right)^{3/2}, \quad (15)$$

$$n = \frac{h}{6\,\alpha w \sqrt[3]{q}} - 1 = \pm \sqrt{\frac{\mu}{3\,\alpha w}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{q}} - 1, \quad (16)$$

$$P\,(t) = (t^2 + 1)^2 + (t^2 + 1) + 1. \quad (17)$$

Se poate arăta ușor că oricare ar fi accelerația $\alpha w$ se obțin două valori reale pentru $v_0$ și că $n < 0$, deoarece

$$\frac{1}{\sqrt[3]{q}} \left( \frac{\mu}{3\,\alpha w} \right)^{1/2} < 1,$$

după cum rezultă din expresia parametrului $q$. Cu ajutorul metodei coeficienților nedeterminați se poate dovedi identitatea

$$P\,(t) \equiv (t^2 - 2\,\lambda t + \sqrt{3})\,(t^2 + 2\,\lambda t + \sqrt{3}), \quad (18)$$

unde

$$\lambda = \frac{\sqrt{2\sqrt{3}-3}}{2}\,. \tag{19}$$

Se face schimbarea de variabilă

$$t = 3^{1/4}\frac{1-z}{1+z} \tag{20}$$

şi atunci polinomul $P(t)$ şi ecuaţia (13) devin

$$P(z) = \frac{4(3-\lambda^2\sqrt{3})}{(1+z)^4}(z^2+A)\left(z^2+\frac{1}{A}\right) \tag{21}$$

$$-\frac{\sqrt{2\,\alpha w q}}{c\lambda^*}\,\theta = \int_{z_0}^{z}\frac{G(z)\,dz}{\sqrt{(z^2+A)\left(z^2+\frac{1}{A}\right)}}\,, \tag{22}$$

unde

$$A = \frac{\sqrt{3}-\lambda\sqrt[4]{3}}{\sqrt{3}+\lambda\sqrt[4]{3}}, \quad \lambda^* = \frac{2}{\sqrt[4]{3}(3-\lambda^2\sqrt{3})^{1/2}}, \quad G(z) = \frac{1}{\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^2 - \frac{n}{\sqrt{3}}}\,.$$

Descompunem funcţia $G(z)$ într-o funcţie impară şi una pară

$$G(z) = \frac{4z(z^2+1)+(az^4+bz^2+a)}{a^2z^4+b_1z^2+a^2}, \tag{23}$$

unde

$$a = 1-\frac{n}{\sqrt{3}}, \quad b = 2\left(3+\frac{n}{\sqrt{3}}\right); \; b_1 = -2\left(1+\frac{n^2}{3}+\frac{6n}{\sqrt{3}}\right); \quad (a \neq 0).$$

Facem o nouă transformare de variabilă

$$z^2 = \left(\frac{1}{A}-A\right)\eta^2 - \frac{1}{A},$$

care limitează intervalul variabilei $\eta$ la $\eta^2 > \frac{1}{k^2}$ unde $k^2 = 1 - A^2 < 1$.

Fie

$$\eta > \frac{1}{k}, \quad \eta = \frac{1}{kX}, \quad X = \frac{1}{k\eta} < 1.$$

Din ecuația (22) se obține

$$-\frac{\sqrt{2\,\alpha w q}}{c\lambda^*}\,\theta = \frac{2}{a^2} I\,(z, z_0) - \frac{\sqrt{A}}{a}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{(1-X^2)\,(1-k^2X^2)}} +$$

$$+\left(\frac{a^2\,(1-A^2)}{A^{3/2}\left(b-\dfrac{b_1}{a}\right)}\right)^{-1}\int_{\eta_0}^{\eta}\frac{\left(\eta^2-\dfrac{1}{k^2}\right)d\eta}{(\eta^4+\gamma\eta^2+\delta)\sqrt{(1-\eta^2)\,(1-k^2\eta^2)}}, \tag{24}$$

unde

$$\gamma = \frac{b_1 A - 2a^2}{a^2(1-A^2)}, \quad \delta = \frac{A\left(A+\dfrac{1}{A}-\dfrac{b_1}{a^2}\right)}{(1-A^2)^2}, \quad \frac{b_1}{a^2} = -2\left[1+\frac{8n/\sqrt{3}}{\left(1-\dfrac{n}{\sqrt{3}}\right)^2}\right],$$

$$I\,(z, z_0) = \int_{z_0}^{z}\frac{(z^2+1)\,dz^2}{\left(z^4+\dfrac{b_1}{a^2}z^2+1\right)\sqrt{(z^2+A)\left(z^2+\dfrac{1}{A}\right)}}. \tag{25}$$

Trinomul $\eta^4+\gamma\eta^2+\delta$ este un patrat perfect dacă $b_1^2 = 4a^4$ sau $b_1 = 2a^2$ sau $(n+\sqrt{3})^2 = 0$ sau $n = -\sqrt{3}$, adică

$$\sin^2\beta_0 = \left[\frac{1}{(\sqrt{3}-1)^3}-1\right]\frac{2\,\alpha w}{r_0^2\,v_0^2}\left(\frac{\mu}{3\,\alpha w}\right)^{3/2}, \tag{26}$$

egalitate care furnizează valori pentru unghiul vitezei inițiale de lansare.

Efectuarea unor calcule elementare ne permite să scriem

$$\frac{\eta^2-\dfrac{1}{k^2}}{\eta^4+\gamma\eta^2+\delta} = \frac{\eta^2-\dfrac{1}{k^2}}{(\eta^2-c_1)^2} = \frac{c_1k^2-1}{c_1^4\,k^6}\,\frac{1}{\left(X^2-\dfrac{1}{c_1k^2}\right)^2} +$$

$$\frac{c_1k^2-2}{c_1^3\,k^4}\,\frac{1}{X^2-\dfrac{1}{c_1k^2}} + \frac{c_1k^2-1}{c_1^2k^2} - \frac{1}{c_1}.$$

Se introduce funcția

$$F(X, k) = \int_0^x\frac{dX}{\sqrt{(1-X^2)(1-k^2X^2)}}, \tag{27}$$

se face substituția

$$X = \operatorname{sn} F,$$

şi se obţine

$$\int_0^X \frac{dX}{(X^2-\widetilde{c})\sqrt{(1-X^2)(1-k^2X^2)}} = \sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{c}^{\,j-1}\int_0^F \frac{dF}{\mathrm{sn}^{2j}F} \text{ dacă } \left|\frac{\widetilde{c}}{\mathrm{sn}^2 F}\right| < 1.$$

$$\int_0^X \frac{dX}{(X^2-\widetilde{c})^2\sqrt{(1-X^2)(1-k^2X^2)}} = \sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{c}^{\,j-1}\,\frac{d}{d\widetilde{c}}\int_0^F \frac{dF}{\mathrm{sn}^{2j}F}.$$

Dacă $|\,\mathrm{sn}^2 F/\widetilde{c}\,| < 1$ se poate scrie o dezvoltare de forma

$$\int\frac{dF}{\mathrm{sn}^2F-\widetilde{c}} = -\int\frac{dF}{\widetilde{c}} - \int\frac{\mathrm{sn}^2 F\, dF}{\widetilde{c}^2} - \int\frac{\mathrm{sn}^4 F\, dF}{\widetilde{c}^3} - \ldots$$

Se poate arăta că în ambele cazuri cele două integrale eliptice se reduc la calculul următoarelor integrale eliptice

$$\int dF = F, \quad \int \mathrm{sn}^2 F\, dF = \frac{1}{k^2}(F-E),$$

unde $E$ este integrala eliptică de speţa a doua

$$E(\varphi,k) = \int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi = \int_0^{\sin\varphi}\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt. \tag{28}$$

Ţinem seama de funcţiile noi introduse şi atunci ecuaţia (24) are forma

$$-\frac{\sqrt{2\alpha w q}}{c\lambda^*}\,\theta = \frac{2}{a^2}I(z,z_0) - \frac{\sqrt{A}}{a}\left[\left(\frac{a(1-A^2)}{A\left(b-\frac{b_1}{a}\right)}\right)^{-1}\left(\frac{c_1k^2-1}{c_1^2k^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{c_1}\right)+1\right][F(X,k)-F(X_0,k)] - \frac{\sqrt{A}}{a}\left(\frac{a(1-A^2)}{A\left(b-\frac{b_1}{a}\right)}\right)^{-1}\left\{\frac{c_1k^2-1}{c_1^4k^6}[\Phi_1(F,E)-\right.$$

$$\left.-\Phi_1(F_0,E_0)] + \frac{c_1k^2-2}{c_1^3k^4}[\Phi_2(F,E)-\Phi_2(F_0,E_0)]\right\} \tag{29}$$

Forma funcţiilor $\Phi_1$ şi $\Phi_2$ rezultă din calculele precedente.

Un avantaj deosebit de important în folosirea ecuaţiei (29) constă în faptul că membrul drept al acestei ecuaţii cuprinde, pe lîngă funcţii elementare, numai integrale eliptice de speţa I şi a II-a pentru calculul cărora există tabele.

O trecere în revistă a tuturor transformărilor efectuate permite să scriem relaţia dintre prima şi ultima variabilă

$$r = \sqrt[3]{q}\left[1+\sqrt{3}\left(\frac{X\sqrt{A}-\sqrt{1-X^2}}{X\sqrt{A}+\sqrt{1-X^2}}\right)^2\right] - \frac{h}{6\alpha w}, \tag{30}$$

și

$$X = \left[1 + A\left(\frac{3^{1/4} - \sqrt{\left(r_0 + \frac{h}{6\alpha w}\right) q^{-1/3} - 1}}{3^{1/4} + \sqrt{\left(r_0 + \frac{h}{6\alpha w}\right) q^{-1/3} - 1}}\right)^2\right]^{-1/2} < 1. \qquad (31)$$

Se observă că $r$ nu este real decît dacă $-1 \leqslant X \leqslant 1$. Am considerat mai sus că $\eta > \frac{1}{k}$. Cazul $\eta < -\frac{1}{k}$ se reduce la cel precedent.

Referitor la precizarea felului de variație al lui $r$ cu $X$ se întocmește următorul tabel :

| $X$ | $-1/k$ | $-1$ | | $X''$ | $0$ | $X'$ | $X_0$ | $+1$ | $1/k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $dr/dX$ | | $-\infty$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\infty$ | |
| $r(x)$ | ////////////////// | | | $r''$ | $r_{\max}$ | $r_{\min}$ | $r_0$ | $r_{\max}$ | ////////////// |

unde $X'$ și $X''$ sînt rădăcinile derivatei $dr/dX$ și au valoarea

$$X',\ X'' = \pm (1 + A)^{-1/2};\quad r_{\max} = \sqrt[3]{q}\,(1 + \sqrt{3}) - \frac{h}{6\alpha w}.$$

Am considerat că $X_0$, care corespunde poziției inițiale $r_0$ este mai mare decît $X'$, că $X$ crește de la $X_0$ spre 1, ceea ce corespunde pentru $r$ o variație (creștere) de la $r_0$ la valoarea maximă (în interval) $r_{\max}$. Din formula variației masei (7) rezultă că masa rachetei se consumă complet numai într-un timp infinit. Să presupunem că masa rachetei variază într-un timp suficient de mare și atunci, așa după cum ne arată și tabloul de variație, $X$ va oscila între valorile 0 și 1, racheta se va îndepărta de Pămînt pînă la distanța $r_{\max}$ se întoarce spre Pămînt atingînd distanța minimă $r_{\min}$, pe urmă se îndepărtează iarăși și în sfîrșit revine în poziția inițială. Dacă $r_{\min} < R$ racheta întîlnește Pămîntul.

Cu formulele (29) și (10) găsim unghiul polar $\theta$ și viteza pe traiectorie. Dacă combustia gazelor încetează pentru $r = r_{\max}$, unghiul $\theta$ corespunzător se va calcula cu ecuația (29), după ce se va ține seama de faptul că integrala eliptică de speța III fundamentală $\Pi\,(b^2, b^2, \pi/2)$ are forma [3].

$$\Pi\,(b^2, b^2, \pi/2) = \frac{1}{1 + b^2}\left\{F\,(b^2, \pi/2) + \frac{\pi}{2} - F\left(b^2, \frac{\pi}{2}\right) E\,(\sqrt{1 - b^4}, x) - \right.$$

$$\left. - E\left(b^2, \frac{\pi}{2}\right) F\,(\sqrt{1 - b^4}, x) + F\left(b^2, \frac{\pi}{2}\right) F\,(\sqrt{1 - b^4}, x)\right\};\ \operatorname{cotg} x = b$$

ceea ce ușurează determinarea funcțiilor $\Phi_1$ și $\Phi_2$.

În realitate însă, combustia gazelor încetează înainte ca $r$ să atingă valoarea $r_{\max}$. Notăm cu $t_1$ și $(r_1, \theta_1)$ momentul și poziția în care combustia gazelor și forța de reacție încetează. Punctul $(r_1, \theta_1)$ divizează traiectoria rachetei într-o parte activă și una pasivă (lipsa forței de tracțiune). Durata $t_1$ a arderii gazelor are valoarea

$$t_1 = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{m_0}{m_1} \tag{32}$$

Distanța $r_1$ se găsește cu ajutorul ecuației

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{r\,dr}{\sqrt{r^3 + \frac{h}{2\,\alpha w} r^2 + \frac{\mu r}{\alpha w} - \frac{c^2}{2\alpha w}}} = \frac{\sqrt{2\,\alpha w}}{\alpha} \ln \frac{m_0}{m_1} \tag{33}$$

dedusă din integrala ariilor (11). Calcule deja efectuate mai sus ne indică imediat că ecuația (33) se transformă într-o ecuație nealgebrică (transcendentă), care pe lîngă valori de funcții elementare cuprinde și integrale eliptice de prima și a doua speță, ceea ce complică determinarea efectivă (exactă) a valorii necunoscute $r_1$ și în consecință și a valorii $\theta_1$.

*Soluție aproximativă.* Vom căuta să determinăm valoarea $r_1$ prin procedee aproximative. Vom presupune că puterile, superioare unității, ale raportului $\frac{z}{r_0}$ unde $z = r - r_0$ se pot neglija față de 1. Folosind dezvoltarea în serie de puteri, obținem:

$$2\,\alpha w + \frac{h}{r} + \frac{2\mu}{r^2} - \frac{c^2}{r^3} = 2\,\alpha w + \frac{h}{r_0}\left(1 - \frac{z}{r_0}\right) +$$

$$+ \frac{2\mu}{r_0^2}\left(1 - 2\frac{z}{r_0}\right) - \frac{c^2}{r_0^3}\left(1 - 3\frac{z}{r_0}\right) = M + N\frac{z}{r_0}$$

unde

$$M = \frac{v_0^2}{r_0}\cos^2\beta_0, \qquad N = \frac{1}{r_0}\left(3v_0^2\sin^2\beta_0 - h - \frac{4\mu}{r_0}\right) \tag{34}$$

Cu această aproximație, ecuația (33) devine:

$$\frac{1}{\alpha}\ln\frac{m_0}{m_1} = \sqrt{\frac{r_0}{M}} \int_0^{z_1} \frac{d\,(z/r_0)}{\sqrt{\left(1 + \frac{z}{r_0}\right)\left(1 + \frac{N}{M}\frac{z}{r_0}\right)}} \tag{35}$$

După efectuarea unor calcule elementare, ecuația (35) devine

$$r_1 = r_0 \frac{(\Delta_1^2 + \Delta - 1)^2}{4\,\Delta\,\Delta_1^2} \tag{36}$$

unde

$$\Delta = \frac{N}{M}, \quad \Delta_1 = \left(1 + \sqrt{\Delta}\right)\left(\frac{m_0}{m_1}\right)^{\frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{N}{r_0}}}.$$

Relația (36) determină distanța de la centrul Pămîntului în care are loc încetarea combustiei gazelor. Aproximația făcută are desigur repercursiuni asupra alegerii condițiilor inițiale, asupra funcționării motorului, precum și asupra intensității forței de propulsie. Întrucît condițiile inițiale sînt deja fixate prin formulele (14), (26), în funcție de distanță și accelerație, mai rămîne să precizăm (limităm) regimul de funcționare al rachetei. Deoarece $(z_1/r_0) < 1$ va trebui ca

$$1 < \frac{(\Delta_1^2 + \Delta - 1)^2}{4\Delta\Delta_1^2} < 2$$

adică

$$0 < \frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{N}{r_0}}\ln\frac{m_0}{m_1} < \ln\frac{\sqrt{2\Delta} + \sqrt{\Delta + 1}}{1 + \sqrt{\Delta}} \tag{37}$$

Acestea sînt condițiile pe care trebuie să le satisfacă debitul specific de gaze și raportul maselor rachetei pentru a putea admite aproximația făcută.

Cunoscînd cu ajutorul relației (36) mărimea $r_1$, vom putea determina și unghiul polar $\theta_1$, cu ecuația (29). Din poziția $(r_1, \theta_1)$ racheta se va mișca pe partea pasivă a traiectoriei sale ca un corp cu masa constantă. Genul părții pasive a traiectoriei se va putea determina cunoscînd viteza rachetei în punctul $(r_1, \theta_1)$. Folosind formula (10) obținem :

$$v_1^2 = \frac{2\mu}{r_1} + v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} + 2\,\alpha w\,(r_1 - r_0) \tag{38}$$

unde $r_1$ este dat de (36). Mărimea

$$H\left(r_0, v_0, w, \frac{m_1}{m_0}, \alpha\right) = v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} + 2\alpha w\,(r_1 - r_0) \lesseqgtr 0 \tag{39}$$

are rolul unui indice de performanță al rachetei. Notăm

$$B = \frac{1}{2}\left(\frac{2\mu}{r_0} - v_0^2\right). \tag{40}$$

Dacă :

1. $B < (r_1 - r_0)\,\alpha w$ avem $H > 0$ și în consecință $v_1^2 > \dfrac{2\mu}{r_1}$. Traiectoria este hiperbolică. Inegalitatea ultimă este satisfăcută cînd extremitatea vectorului $\vec{v}_1$, se află în afara cercului $(c) \equiv x_1^2 + y_1^2 = \dfrac{2\mu}{r_1}$ cu centrul în $P_0$ (fig. 1) și conținut în planul mișcării $P_0x_1y_1$ unde $x_1 = v_1 \cos \beta_1$, $y_1 = v_1 \sin \beta_1$.

2. $B > (r_1 - r_0)\,\alpha w$ avem $H < 0$ și deci $v_1^2 < \dfrac{2\mu}{r_1}$. Traiectoria este eliptică. Ultima egalitate este satisfăcută cînd extremitatea vecto-

rului $\vec{v}$ de coordonate $(x_1, y_1)$ se află în interiorul cercului $(C)$. Dacă unghiul de lansare $\beta_1$ îndeplinește inegalitatea [6]:

$$\left(1 - \frac{r_1^2 \sin^2 \beta_1}{R^2}\right) \frac{R r_1 v_1^2}{2\mu (r_1 - R)} < 1 \tag{41}$$

satisfăcută cînd punctul $(x_1, y_1)$ este în interiorul unei hiperbole (a cărei

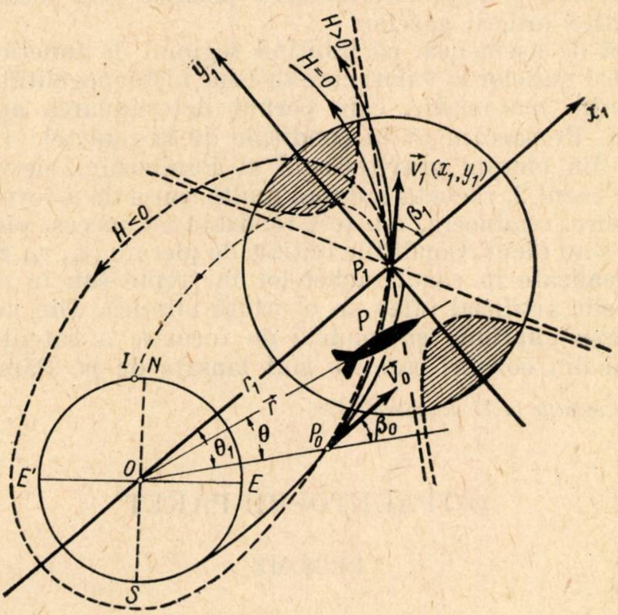


Fig. 1

ecuație se poate găsi imediat din (41)), traiectoria eliptică nu intersectează Pămîntul și racheta devine satelit al Pămîntului.

3. Dacă $B = (r_1 - r_0)\,\alpha w$, $H = 0$ și $v_1^2 = \dfrac{2\mu}{r_1}$. Traiectoria rachetei este parabolică.

Dăm mai jos un exemplu numeric și o schiță (fig. 1) în care sînt reprezentate schematic traiectoriile rachetei (partea activă și pasivă).

| $\frac{r_0}{\text{km}}$ | $\alpha W$ $\frac{\text{km}}{\text{s}^2}$ | $W$ $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ | $\sqrt{2\mu/r_0}$ $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ | $v_0$ $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ | $\beta^0$ | $M$ $\frac{\text{km}}{\text{s}^2}$ | $N$ $\frac{\text{km}}{\text{s}^2}$ | $\Delta = \frac{N}{M}$ | $(2/\alpha)\sqrt{N/r_0}$ | $r_1$ km | $\frac{r_1 - r_0}{r_0}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7370 | $9{,}81 \cdot 10^{-3}$ | 1 | 10,44 | 6,07 | $\approx 45°$ | $25.10^{-3}$ | $7.10^{-3}$ | 0,28 | 0.20 | 12.529 | 0,7 |

## CONCLUZII

Lucrarea arată că este posibil să se rezolve, în formă exactă, problema determinării traiectoriei unei rachete cu tracţiune variabilă şi radială dată, dacă în plus, cunoaştem şi condiţiile iniţiale cu care pleacă racheta ((14), (26)). Metoda de lucru constă în găsirea şi integrarea unei ecuaţii, care reprezintă o generalizare simplă a ecuaţiei lui Binet, şi în reducerea (integralei) soluţiei acestei ecuaţii la integrale eliptice tip. Această metodă este, însă, greoaie pentru determinarea poziţiei (sau distanţei) în care are loc încetarea arderii gazelor.

Se arată de asemenea, că limitînd regimul de funcţionare a motorului şi raportul maselor la valori care satisfac nişte inegalităţi, sînt posibile ipoteze de ordin matematic, care permit determinarea aproximativă a acestei poziţii. Remarcăm că în condiţiile de la punctele 1 şi 3, racheta poate evada din cîmpul gravitaţional al Pămîntului, devenind planetă artificială. În cazul 2, racheta are mai multe şanse de a reveni pe Pămînt. Această revenire, readucere, n-a fost realizată cu succes, pînă în prezent, deşi încercări s-au făcut. Condiţiile iniţiale de plecare ($r_0$, $v_0$, $\beta_0$) ale rachetei ar putea fi realizate în cazul rachetelor în trepte sau în cazul decolării de pe un satelit artificial aflat pe o orbită eliptică. Din acest punct de vedere, lucrarea cuprinde şi condiţii de formare a sateliţilor artificiali ai Pămîntului din corpuri care nu sînt lansate de pe Pămînt.

*Primită la redacţie la 15 decembrie 1959*

## О ТРАЕКТОРИИ РАКЕТ

### РЕЗЮМЕ

В работе определяется траектория ракеты с постоянным ускорением, причем предполагается, что тяга двигателя радиальна. Не учитывается сопротивление воздуха и предполагается, что ракета движется в переменном гравитационном поле Земли и что известны начальные условия запуска.

При этих гипотезах выводится дифференциальное уравнение траектории, представляющее собой простое обобщение уравнения Бине, применяющегося в случае точки постоянной массы, интегрируется это уравнение и выражаются окончательные точные уравнения траектории при помощи эллиптических уравнений первого и второго рода.

Применяя приближения математического характера, определяется положение и скорость ракеты, для которой реактивная сила перестает действовать (конец сгорания газов), и указываются пределы (относительно расхода газов и отношения масс), в которых допустимы эти приближения. Делаются выводы, применяя показатель летных качеств ракеты, относительно формы пассивной части траектории ракеты.

## SUR LES TRAJECTOIRES DES FUSÉES

### RÉSUMÉ

L'objet de ce travail est la détermination de la trajectoire d'une fusée à accélération constante, en supposant que la traction du moteur est radiale. L'auteur fait abstraction de la résistance de l'air et suppose que la fusée se déplace dans le champ variable de la gravitation terrestre et que les conditions initiales au départ, sont connues.

En admettant ces hypothèses il en déduit l'équation différentielle de la trajectoire, qui représente une généralisation simple de l'équation de Binet, appliquée au cas d'un point de masse constante. Il intègre cette équation et exprime les équations finies exactes de la trajectoire, au moyen des intégrales elliptiques de la I$^{\text{re}}$ et de la II$^{\text{e}}$ espèce.

En se servant d'approximations d'ordre mathématique, il détermine la position et la vitesse de la fusée à l'instant où la force de réaction cesse d'agir (fin de la combustion des gaz), tout en indiquant les limites (concernant le débit des gaz et le rapport des masses) dans lesquelles ces approximations sont valables. Enfin, en utilisant l'indice de performance de la fusée, l'auteur tire des conclusions concernant la partie passive de sa trajectoire.

### BIBLIOGRAFIE

1. Mircea Drăganu, *Introducere matematică în fizica teoretică modernă*. **I**,Ed. tehnică, Bucureşti, 1957.
2. * * * *Исследование оптимальных режимов движениа ракет. Оборногиэ*, 1959, 248—258.
3. A. Dobrowolski, *Perturbarea orbitei satelitului sub acţiunea unei tracţiuni radiale mici.* Jet Propulsion, **28**, *10* (1958) ; Вопросы ракетной техник, *4* (1959).
4. L. Dumitrescu, *Asupra regimului optim de funcţionare a rachetelor*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, *2*, 285—295 (1958).
5. Ion Pascaru, *Racheta,* Ed. militară a Ministerului Forţelor Armate ale R.P.R., Bucureşti, 1959.
6. C. Iacob, *Asupra unor condiţii necesare transformării în sateliţi ai Pămîntului a corpurilor lansate de pe Pămînt*. G.M., *5*, Bucureşti, 1949.

# STUDII

## HIDROMECANICĂ

# OBSERVAŢII ASUPRA ECUAŢIILOR LINIARIZATE ALE FLUIDELOR VÎSCOASE COMPRESIBILE

DE

ACADEMICIAN GR. C. MOISIL

În cele ce urmează, ne propunem să aplicăm metoda matricelor asociate, [1], [2], la sistemul de ecuații ale fluidelor vîscoase compresibile, [3]1),

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\frac{\nu}{3}\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\nu\,\Delta\frac{\partial u}{\partial t},\\
&\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\frac{\nu}{3}\,\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\nu\,\Delta\frac{\partial v}{\partial t},\\
&\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\frac{\nu}{3}\,\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\nu\,\Delta\frac{\partial w}{\partial t}.
\end{aligned}\tag{1}$$

Să punem

$$\begin{aligned}
Q &= X^2+Y^2+Z^2,\\
A &= a^2+\frac{\nu}{3}\,T,\\
B &= \nu Q\,T,
\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}
P_{11} &= T^2-AX^2-B, & P_{23} &= P_{32} = -\,AYZ,\\
P_{22} &= T^2-AY^2-B, & P_{31} &= P_{13} = -\,AZX,\\
P_{33} &= T^2-AZ^2-B, & P_{12} &= P_{21} = -\,AXY,
\end{aligned}\tag{3}$$

$$\varphi_1 = u, \qquad \varphi_2 = v, \qquad \varphi_3 = w,$$

---

1) p. 357.

$Q$, $A$, $B$, $P_{ij}$ fiind polinoame în $X$, $Y$, $Z$, $T$. Sistemul de ecuații (1) poate fi scris

$$\sum_{j=1}^{3} P_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \varphi_j = 0, \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{4}$$

Pentru a găsi ecuația satisfăcută de $u = \varphi_1$, trebuie să căutăm polinoamele $U_i(X, Y, Z, T)$ astfel încît

$$\sum_{i=1}^{3} U_i P_{ij} = 0, \tag{5}$$

pentru $j = 2, 3$. Ecuațiile (5) sînt

$$\begin{aligned} &U_1 A X Y + U_2(-T^2 + AY^2 + B) + U_3 A Y Z = 0, \\ &U_1 A X Z + U_2 A Y Z + U_3(-T^2 + AZ^2 + B) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Prima ecuație (6) arată că $U_2$ este divizibil cu $Y$, iar a doua ecuație arată că $U_3$ este divizibil cu $Z$. Punînd $U_2 = YV_2$, $U_3 = ZV_3$, ecuațiile (6) devin

$$U_1 A X + V_2(-T^2 + AY^2 + B) + V_3 A Z^2 = 0,$$
$$U_1 A X + V_2 A Y^2 + V_3(-T^2 + AZ^2 + B) = 0.$$

Diferența lor este

$$V_2(-T^2 + B) + V_3(T^2 - B) = 0,$$

deci $V_2 = V_3$ și sistemul (6) are soluțiile

$$\begin{aligned} U_1 &= H(T^2 - AY^2 - AZ^2 - B), \\ U_2 &= H A X Y, \\ U_3 &= H A X Z, \end{aligned}$$

$H$ fiind un polinom arbitrar. Ecuația satisfăcută de $u$ este

$$S\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = 0,$$

unde

$$S = \sum_i U_i P_{i1} = T(T - \nu Q)\left[T^2 - (a + \frac{4\nu}{3} T) Q\right]. \tag{7}$$

Prin simetrie se deduce:

TEOREMA I. *Componentele iuțelii satisfac ecuația cu derivate parțiale*

$$\left[\left(a^2 + \frac{4\nu}{3}\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\left[\nu\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right]\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \tag{8}$$

Deoarece

$$\{P_{ij}\} = \\ = \left\{\begin{matrix} T^2 - AY^2 - AZ^2 - B & AYX & AXZ \\ AXY & T^2 - AZ^2 - AX^2 - B & AYZ \\ AXZ & AYZ & T^2 - AX^2 - AY^2 - B \end{matrix}\right\} = \\ = S.\,1 \tag{9}$$

rezultă :

TEOREMA II. *Componentele iuțelii pot fi reprezentate cu ajutorul unui vector al lui Galerkin* $(\Gamma_x,\ \Gamma_y,\ \Gamma_z)$

$$\begin{aligned} u &= \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(a^2 + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) - \nu\frac{\partial}{\partial t}\,\Delta\right]\Gamma_x + \\ &\quad + \left(a^2 + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\,\Gamma_y + \left(a^2 + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\,\Gamma_z, \\ v &= \left(a^2 + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,\Gamma_x + \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(a^2 + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) - \nu\frac{\partial}{\partial t}\,\Delta\right]\Gamma_y + \left(a^2 + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\,\Gamma_z, \\ w &= \left(a^2 + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial x}\,\Gamma_x + \left(a^2 + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial y}\,\Gamma_y + \\ &\quad + \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(a^2 + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - \nu\frac{\partial}{\partial t}\,\Delta\right]\Gamma_z, \end{aligned} \tag{10}$$

unde $\Gamma_x$, $\Gamma_y$, $\Gamma_z$ sînt trei integrale arbitrare ale ecuației (8).

În virtutea unei teoreme a lui Boggio, integralele lui (8) sînt sume

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2, \tag{11}$$

unde

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} = 0, \tag{12}$$

$$\nu\,\Delta\,\Phi_1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = 0, \tag{13}$$

$$\left(a^2 + \frac{4\nu}{3}\right)\Delta\Phi_2 - \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} = 0. \tag{14}$$

Aplicînd această teoremă la $\Gamma_x$, $\Gamma_y$, $\Gamma_z$ și observînd că dacă ($\Gamma_x$, $\Gamma_y$, $\Gamma$ ) satisfac ecuația (12), $u$, $v$, $w$ dau o mișcare staționară, dacă ($\Gamma_x$,

$\Gamma_y$, $\Gamma_z$) satisfac ecuaţia (13) avem $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$ şi dacă $(\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z)$ satisfac ecuaţia (14) avem rot $(u, v, w)=0$, se vede că s-a demonstrat :

TEOREMA III. *Orice mişcare descrisă de sistemul* (1) *poate fi descompusă în suma a trei mişcări : o mişcare staţionară, o mişcare incompresibilă şi o mişcare irotaţională.*

Într-adevăr,

$$u=u_0+u_1+u_2,$$
$$v=v_0+v_1+v_2,$$
$$w=w_0+w_1+w_2,$$

unde $(u_0, v_0, w_0)$ reprezintă o mişcare staţionară, $(u_1, v_1, w_1)$ reprezintă o mişcare incompresibilă, iar $(u_2, v_2, w_2)$ reprezintă o mişcare irotaţională, [3] 1).

Dacă $(\xi, \eta, \zeta)$ sînt componentele vîrtejului, iar $\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$, din (10) rezultă

$$\xi=\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\left(a^2+\frac{4\nu}{3}\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta\right]\left(\frac{\partial\Gamma_y}{\partial z}-\frac{\partial\Gamma_z}{\partial y}\right),\ldots \tag{15}$$

şi

$$\theta=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\nu\Delta\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Gamma_x}{\partial x}+\frac{\partial\Gamma_y}{\partial y}+\frac{\partial\Gamma_z}{\partial z}\right), \tag{16}$$

deci

TEOREMA IV. *Componentele vîrtejului satisfac ecuaţia*

$$\left(\nu\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial t}=0, \tag{17}$$

*iar dilataţia cubică satisface ecuaţia*

$$\left[\left(a^2+\frac{4\nu}{3}\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\theta=0. \tag{18}$$

*Primită la redacţie la 12 mai 1960*

## ЗАМЕЧАНИЯ О ЛИНЕАРИЗИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЯХ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

### РЕЗЮМЕ

Автор применяет метод ассоциированных матриц [1], [2] к системе (1). Показывается, что составляющие $u$, $v$, $w$ скорости удовлетворяют уравнению (8), составляющие $\xi$, $\eta$, $\zeta$ вихря — урав-

---

1) p. 358.

нению (17), а кубическое расширение $\theta$ — уравнению (18). Составляющие скорости можно представить посредством формул (10) при помощи вектора Галеркина $(\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z)$, составляющие которого являются произвольными интегралами уравнения (8). Также доказывается, что любое движение, описанное уравнением (1), можно разложить на сумму трех движений: стационарное, несжимаемое и безвихревое движения.

## OBSERVATIONS SUR LES ÉQUATIONS LINÉARISÉES DES FLUIDES VISQUEUX COMPRESSIBLES

### RÉSUMÉ

L'auteur applique au système (1) la méthode des matrices associées [1], [2]. Il montre que : les composantes $u$, $v$, $w$ de la vitesse satisfont à l'équation (8), les composantes $\xi$, $\eta$, $\zeta$ du tourbillon satisfont à l'équation (17) et la dilatation volumique $\theta$ satisfait à l'équation (18). Les composantes de la vitesse peuvent être représentées par les formules (10), au moyen d'un vecteur de Galerkine $(\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z)$ dont les composantes sont des intégrales arbitraires de l'équation (8). En outre, l'auteur démontre que tout mouvement décrit par les équations (1) peut être décomposé en une somme de trois mouvements : un mouvement stationnaire, un mouvement incompressible et un mouvement irrotationnel.

### BIBLIOGRAFIE

1. GR. C. MOISIL, *Matricele asociate sistemelor de ecuaţii cu derivate parţiale. Introducere în studiul cercetărilor lui I. N. Lopatinschi.* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1950.
2. — *Teoria preliminară a sistemelor de ecuaţii cu derivate parţiale liniare cu coeficienţi constanţi.* Bul ştiinţ. Academia R.P.R., Secţiunea de ştiinţe matematice şi fizice, *4*, 319—401 (1952).
3. SHIH — I PAI, *Viscous Flow Theory. I — Laminar Flow.* D. Van Nostrand Company. Inc., Princeton, New Jersey, Toronto, London, New York, 1956.

# SCURGEREA DE INTRARE LAMINARĂ ÎNTR-UN CANAL CONVERGENT[1]

DE

H. LIMBERG[2]

Această lucrare urmărește să dea o scurtă privire asupra formulării problemei, metodei de soluționare și rezultatelor teoretice.

## PUNEREA PROBLEMEI

Autorul și-a pus problema să calculeze, cu metode exacte, cîmpul de viteze al unei scurgeri laminare incompresibile, în imediata apropiere a intrării într-un canal convergent.

Figura 1 arată o secțiune perpendiculară pe dreapta de intersecție a celor doi pereți plani ai canalului convergent, care se întretaie sub un unghi $2\alpha$ (0 este urma dreptei de intersecție). Cercetarea matematică a acestei probleme de intrare se bazează pe ecuația stratului limită și de continuitate pentru problema plană, iar din cauza formei geometrice a pereților sînt indicate coordonate polare : $r$ — distanța unui punct din cîmpul de scurgere de la intersecția celor doi pereți ai canalului și $\varphi$ — unghiul polar, măsurat de la peretele inferior, în sensul pozitiv. Ecuațiile de strat limită și de continuitate au următoarea formă în coodonate polare :

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} = U(r) \frac{dU}{dr} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \tag{2}$$

---

[1] Lucrare comunicată la Sesiunea științifică jubiliară a Institutului de mecanică aplicată „Traian Vuia", 4—7 iulie 1960.

[2] Institutul de matematică și mecanică aplicată al Academiei Germane de Științe din Berlin.

iar

$$v_r(r,o) = v_\varphi(r,0) = 0, \tag{3}$$

$$v_r(r,\alpha) = U(r) \tag{4}$$

$$v_r(R_0,\varphi) = U(R_0) = -u_0, \tag{5}$$

împreună cu condiția fluxului masic constant în unitate de timp (debit) prin orice secțiune a canalului

$$M(r) = \int_0^\alpha r\, v_r(r,\varphi)\, d\varphi = -u_0 R_0 \alpha, \tag{6}$$

constituie condițiile la limită și condiția secundară a problemei noastre. $v_r(r,\varphi)$ și $v_\varphi(r,\varphi)$ sînt componentele vitezelor de scurgere în punctul $(r,\varphi)$

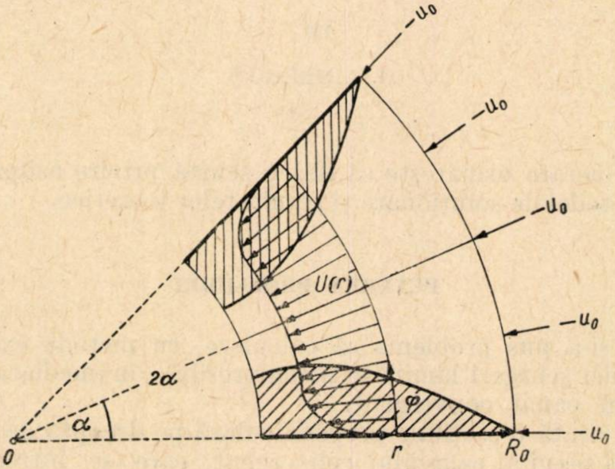


Fig. 1

în direcția $r$ respectiv direcția perpendiculară $\varphi$, iar $u(r)$ reprezintă nucleul scurgerii în mijlocul canalului, din afara straturilor limită, care în problema noastră este de asemenea o funcție necunoscută. Aici și în cele ce urmează am notat cu $R_0$ întotdeauna distanța muchiilor de intrare în canal pînă la intersecția 0 a celor doi pereți ai canalului și cu $-u_0$ $(u_0 > 0)$ viteza de intrare constantă pe toată secțiunea (adică pentru $r = R_0$). Din motive de simetrie este suficient să urmărim scurgerea de la peretele inferior pînă la mijlocul canalului, deci să considerăm domeniul

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha,$$

$$r < R_0,\ r \approx R_0.$$

Soluțiile $v_r(r,\varphi)$, $v_\varphi(r,\varphi)$ și $U(r)$ trebuie determinate astfel încît condițiile la limită și condiția secundară (3)—(6) să fie îndeplinite.

În comparaţie cu problemele obişnuite de strat limită, problema de faţă este mai cuprinzătoare, în sensul că apare suplimentar şi $U\ (r)$ ca a treia funcţie căutată precum şi condiţia de debit (6).

*Istoric.* Probleme similare au fost cercetate anterior: Hahnemann şi Ehret [3], [4] au efectuat calcule aproximative pentru scurgerile de intrare printr-o fantă, pe baza ecuaţiei impulsului, după metoda Karman-Pohlhausen. Metode exacte pentru calculul scurgerilor de intrare au fost folosite de H. Schlichting [6] pentru intrarea laminară a unei scurgeri într-un canal cu pereţi plani paraleli şi mai tîrziu de B. Punnis [5] pentru intrarea laminară a unei scurgeri într-un tub [1]).

## METODA DE REZOLVARE

Integrarea ecuaţiilor de strat limită va fi efectuată cu ajutorul ,,seriei lui Görtler'', care pe lîngă avantajul de a da o soluţie exactă a problemei mai are şi proprietatea convenabilă din punct de vedere numeric de a converge foarte uşor.

În lucrarea sa fundamentală [1], [2] H. Görtler a folosit această ,,serie nouă'' şi pentru calculul unor astfel de probleme de scurgere, pentru care erau cunoscute mai înainte soluţii aproximative cu ajutorul seriei lui Blasius şi seriilor lui Howarth şi Tani.

S-a obţinut o bună concordanţă, ,,seria nouă'' a lui Görtler dînd cu 6,3 respectiv 2 termeni aceeaşi exactitate ca 8,7 respectiv 6 termeni la Howarth şi Tani.

În [1] H. Görtler a aplicat ,,seria nouă'' şi pentru calculul unei scurgeri laminare convergente de-a lungul unei plăci plane.

Această scurgere poate fi considerată, cu oarecare limitări, chiar ca o scurgere laminară de intrare într-un canal convergent. Sînt de făcut limitări, deoarece H. Görtler consideră o singură placă plană într-o scurgere convergentă, neinfluenţată de nici o a doua placă plană, care ar putea fi considerată ca perete opus al canalului. În afară de aceasta, H. Görtler presupune cunoscută scurgerea exterioară fără frecare $U(r)$ şi anume $U\,(r) = -\dfrac{u_0 R_0 r}{r}$ şi poate deci să nu ţină seamă de condiţia de debit.

Aceste limitări au fost părăsite în problema de strat limită formulată de noi. Pentru a găsi o soluţie exactă, se integrează ecuaţia de continuitate prin introducerea funcţiei de curent $\psi\ (r,\varphi)$ punînd

$$v_r\,(r,\ \varphi) = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\ ;\quad v_\varphi\,(r,\varphi) = \frac{\partial\psi}{\partial r}$$

---

[1]) Metodele constau în introducerea în ecuaţia diferenţială de strat limită a unei serii adecvate pentru funcţia de curent şi în calcularea succesivă a coeficienţilor acestei serii (care sînt funcţii ale unei variabile adimensionale) din ecuaţiile diferenţiale liniare de ordinul 3 ce rezultă pentru aceasta. Din cauza calculelor din ce în ce mai laborioase, acestea au trebuit întrerupte după aproximativ trei termeni ai seriei. S-au obţinut însă indicaţii interesante în ceea ce priveşte exactitatea metodei, datorită caracterului alternant al seriei de puteri pentru scurgerea potenţială în mijlocul canalului, respectiv al tubului.

şi introducînd apoi derivatele respective în ecuaţia diferenţială de strat limită (1). Se obţine astfel (1)′

$$\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial\varphi}-\frac{1}{r^3}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2-\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}=U\,\frac{dU}{dr}-\frac{\nu}{r^3}\,\frac{\partial^3\psi}{\partial\varphi^3}\,. \tag{1'}$$

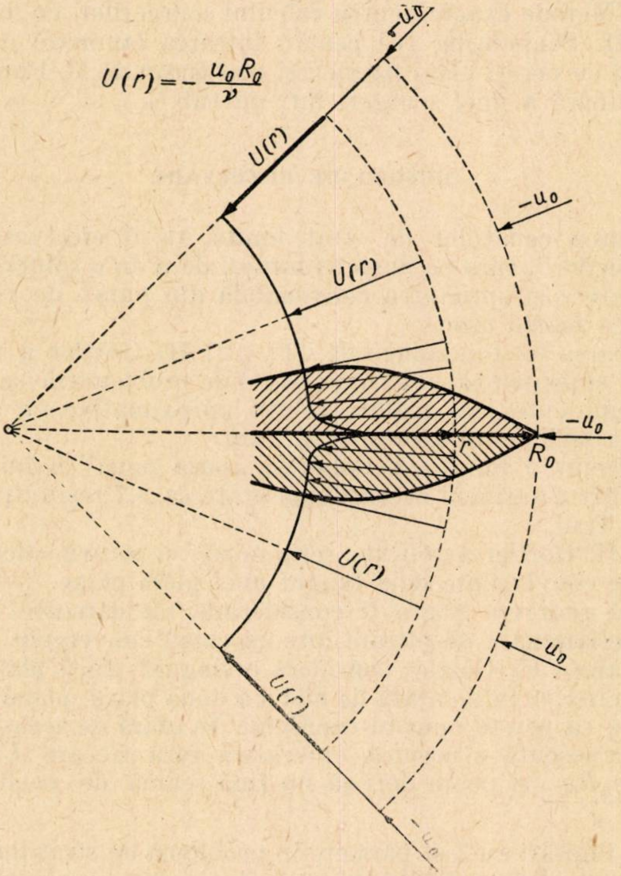


Fig. 2

Prin transformarea (7), (8) a coordonatelor polare $r$, $\varphi$ în variabilele adimensionale $\xi$ şi $\eta$

$$\xi=\frac{1}{\nu}\int_{R_0}^{r}U\,(r)\,dr, \tag{7}$$

$$\eta=-\frac{r\varphi\;U\,(r)}{\left(2\nu\int_{R_0}^{r}U\,(r)\,dr\right)^{1/2}}=-\frac{r\varphi\;U\,(r)}{\nu\,(2\;\xi)^{1/2}} \tag{8}$$

și prin ipoteza

$$\psi(r,\varphi) = \nu(2\,\xi)^{1/2} F(\xi,\eta), \tag{9}$$

pentru funcția de curent este posibil de a aduce ecuația diferențială (1′) pentru funcția de curent $\psi(r,\varphi)$ la forma lui Görtler (1″), (10)

$$F_{\eta\eta\eta} + FF_{\eta\eta} + \beta(\xi)(1 - F_{\eta}^{2}) = 2\,\xi(F_{\eta}F_{\xi\eta} - F_{\xi}F_{\eta\eta}), \tag{1″}$$

$$\beta(\xi) = \frac{2U'}{U^2}\int_{R_0}^{r} U(r)\,dr = 2\nu\xi\frac{U'}{U^2} \tag{10}$$

unde $\beta(\xi)$ este așa-numita funcție principală.

Pentru cazul scurgerii convergente de-a lungul unei plăci plane, H. Görtler a făcut următoarele dezvoltări în serii de puteri întregi ale lui $\xi$:

$$\left.\begin{aligned} F(\xi,\eta) &= F_0(\eta) + F_1(\eta)\,\xi + F_2(\eta)\,\xi^2 + \ldots, &&(11')\\ \beta(\xi) &= \beta_0 + \beta_1\,\xi + \beta_2\,\xi^2 + \ldots &&(12') \end{aligned}\right\}\text{neadecvat}$$

În cazul nostru, această ipoteză este însă insuficientă. Am demonstrat că nu este posibil a se îndeplini cu ajutorul acestei ipoteze condiția de debit constant în fiecare secțiune a canalului. Această demonstrație nu va fi dată aici.

Se poate stabili însă condiția de debit constant, dacă folosim seriile mai cuprinzătoare (11) (12), din clasa a II-a a lui Görtler, dezvoltate după puterile lui $\xi^{\frac{1}{2}}$ [1], p. 35.

$$F(\xi,\eta) = \sum_{i=0}^{\infty} F_{\frac{i}{2}}(\eta)\,\xi^{\frac{i}{2}} = F_0(\eta) + F_{\frac{1}{2}}(\eta)\,\xi^{\frac{1}{2}} + F_1(\eta)\,\xi + \ldots \tag{11}$$

$$\beta(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{\frac{i}{2}}\,\xi^{\frac{1}{2}} = \beta_0 + \beta_{\frac{1}{2}}\,\xi^{\frac{1}{2}} + \beta_1\,\xi + \ldots \tag{12}$$

Presupunem că seria este diferențiabilă termen cu termen pentru $F(\xi,\eta)$ și ajungem în felul acesta la ecuația cu derivate parțiale în forma lui Görtler (1″), ordonăm după puterile lui $\xi^{\frac{1}{2}}$ și egalăm coeficienții. Astfel obținem următorul sistem infinit de ecuații diferențiale obișnuite:

$$F_0''' + F_0F'' + \beta_0\,(1 - F_0'^2) = 0, \tag{13$_0$}$$

$$F_{\frac{1}{2}k}''' + F_0F_{\frac{1}{2}k}'' - (2\beta_0 + k)F_0'F_{\frac{1}{2}k}' + (k+1)F_0''F_{\frac{1}{2}k} = R_{\frac{1}{2}k-1}(\eta), \tag{13$_k$}$$

cu $k = 1,2,3,\ldots$ și

$$R_{\frac{1}{2}k-1}(\eta) = \beta_{\frac{1}{2}k}(F_0'^2 - 1) + \sum_{i=1}^{k-1}\left(\sum_{j=1}^{i} F_{\frac{1}{2}j}'\,F_{\frac{1}{2}(i-j)}'\right)\beta_{\frac{1}{2}(k-i)} +$$

$$F_0'\sum_{i=1}^{k-1} F_{\frac{1}{2}i}'\,\beta_{\frac{i}{2}(k-i)} + \sum_{i=1}^{k-1}(\beta_0 + k - i)F_{\frac{1}{2}i}'\,F_{\frac{1}{2}(k-i)}' - \sum_{i=1}^{k-1}(k - i + 1)F_{\frac{1}{2}i}''\,F_{\frac{1}{2}(k-i)}.$$

Dacă soluțiile $F_0(\eta), F_{\frac{1}{2}}(\eta)$ etc. satisfac condițiile la limită

$$F_0(0) = F_0'(0) = 0\,; \qquad F_0'(\eta_\alpha) = 1, \tag{$14_0$}$$

$$F_{\frac{1}{2}k}(0) = F'_{\frac{1}{2}k}(0) = 0\,; \qquad F'_{\frac{1}{2}k}(\eta_\alpha) = 0, \tag{$14_k$}$$

cu

$$\eta_\alpha = -\frac{\alpha\, r\, U(r)}{\nu\,(2\,\xi)^{1/2}},$$

atunci sînt îndeplinite și condițiile la limită și condiția secundară din problema noastră de scurgere (cu excepția condiției de debit constant).

Cu $\eta_\alpha$ am notat valoarea lui $\varphi = \alpha$ corespunzătoare lui $\eta$.

Avînd în vedere că $F_{\frac{1}{2}k}(\eta)$ depinde aici de coeficienții $\beta_{\frac{1}{2}-i}$ $(0 \leqslant i \leqslant k)$ adică de mărimi care nu sînt încă determinate, este foarte important faptul că H. Görtler a reușit, prin substituțiile

$$\begin{aligned} F_{\frac{1}{2}}(\eta) &= \beta_{\frac{1}{2}}\, f_{\frac{1}{2}}(\eta), \\ F_1(\eta) &= \beta^2_{\frac{1}{2}}\, f_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\eta) + \beta_1 f_1(\eta), \\ F_{\frac{3}{2}}(\eta) &= \beta^3_{\frac{1}{2}}\, f_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\eta) + \beta_{\frac{1}{2}}\,\beta_1 f_{\frac{1}{2}1}(\eta) + \beta_{\frac{3}{2}}\, f_{\frac{3}{2}}(\eta), \end{aligned} \tag{15}$$

să obțină ecuațiile diferențiale și condițiile la limită

$$\begin{aligned} &\underline{k=1} : L_{\frac{1}{2}}\left[f_{\frac{1}{2}}\right] = F_0^{12} - 1 \;\; \underline{k=2} : L_1\,[f_1] = F_0^{12} - 1, \\ &L_1\left[f_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\right] = 2\,F_0' f'_{\frac{1}{2}} + (\beta_0 + 1)\, f'^2_{\frac{1}{2}} - 2 f_{\frac{1}{2}}\, f''_{\frac{1}{2}}, \\ &\underline{k=3} : \\ &L_{\frac{3}{2}}\left[f_{\frac{3}{2}}\right] = F_0'^2 - 1, \end{aligned} \tag{16}$$

$$L_{\frac{3}{2}}\left[f_{\frac{1}{2}1}\right] = 2\,F_0'\left(f'_{\frac{1}{2}} + f_1'\right) + (2\beta_0 + 3)\, f'_{\frac{1}{2}} f_1' - 2\, f_{\frac{1}{2}} f_1'' - 3 f'''_{\frac{1}{2}} f_1,$$

$$L_{\frac{3}{2}}\left[f_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\right] = 2\,F_0' f'_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + f'^2_{\frac{1}{2}} + (2\beta_0 + 3)\, f'_{\frac{1}{2}}\, f'_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} - 2 f_{\frac{1}{2}}\, f''_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} - 3 f''_{\frac{1}{2}}\, f_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}},$$

$$L_{\frac{1}{2}k}\,[f\ldots] = f'''\ldots + F_0 f''\ldots - (2\,\beta_0 + k)\, F_0' f'\ldots + (k+1)\, F_0'' f\ldots, \tag{17}$$

$$f\ldots(0) = f'\ldots(0) = f'\ldots(\eta_\alpha) = 0, \tag{18}$$

pentru funcțiile $f_{\frac{1}{2}}(\eta)$, $f_1(\eta)$, $f_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\eta)$ etc., în care nu mai apar alți coeficienți $\beta_{\frac{1}{2}i}$ ai funcției principale, în afară de $\beta_0$.

Avînd în vedere că pentru problema noastră $\beta_0 = 0$, putem calcula și tabula, o dată pentru totdeauna, funcțiile universale $f\ldots(\eta)$. Unele dintre valorile $f\ldots(\eta)$ (de exemplu $f_1(\eta)$, $f_{11}(\eta)\ldots$ și $F_0(\eta)$) sînt cuprinse deja în tabelele lui Görtler-Salton [2 a și b] și anume pentru cazul $\eta_\alpha = \infty$. Valorile care mai lipsesc, adică $f_{\frac{1}{2}}(\eta)$, $f_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\eta)$ etc., urmează a fi calculate cu ajutorul mașinii electronice de calcul „Ural" și apoi tabulate. Din calculele efectuate pînă acum rezultă că soluțiile $f\ldots(\eta)$ în cazul $\eta_\alpha = \infty$ începînd de la $\eta = 6$ nu mai variază decît foarte puțin, și anume abia de la a 6-a zecimală, rămîn deci practic constante pentru $\eta \geqslant 6$. Am rezolvat astfel problemele noastre la limită (16)—(18), practic cu aceleași funcții universale $f\ldots(\eta)$ pentru toate valorile lui $\eta_\alpha \geqslant 6$. Ca valori asimptotice ale funcțiilor universale obținem

$$\begin{aligned}
&F_0(\eta_\alpha) = \eta_\alpha + c_0, && c_0 = -1{,}216777,\\
&f_{\frac{1}{2}}(\eta_\alpha) = c_{\frac{1}{2}}, && (\approx 1{,}35),\\
&f_1(\eta_\alpha) = c_1, && (= 1{,}126359),\\
&f_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\eta_\alpha) = c_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}, && (\approx -2{,}25),\\
&f_{\frac{3}{2}}(\eta_\alpha) = c_{\frac{3}{2}}, && (\approx 1{,}0),\\
&f_{\frac{1}{2}1}(\eta_\alpha) = c_{\frac{1}{2}1}, && (\approx -3{,}3),\\
&f_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\eta_\alpha) = c_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}, && (\approx 4{,}2),
\end{aligned} \tag{19}$$

unde termenii $c\ldots$ pentru $\eta_\alpha \geqslant 6$ pot fi considerați practic ca niște constante de ordinul de mărime unitatea.

Pentru viteza de scurgere centrală $U(r)$ facem ipoteza

$$U(r) = -\frac{u_0 R_0}{r} + V(r) \tag{2'}$$

cu

$$V(R_0) = 0$$

Primul termen din (2) reprezintă tocmai distribuția vitezelor de scurgere a unui fluid perfect într-un canal convergent, folosită de H. Görtler, în timp ce $V(r)$ descrie influența stratului limită în cazul scurgerii de intrare studiat aici.

Se poate arăta și în acest caz că ipoteza (20') pentru $V(r)$ este insuficientă pentru a îndeplini condiția de debit constant. În schimb, expresia

(20) pentru $V(r)$ respectiv (21) pentru $U(r)$ este suficient de generală

$$V(r) = v_1 (R_0 - r) + v_2 (R_0 - r)^2 + \dots \text{neadecvat} \tag{20'}$$

$$V(r) = \sum_{i=i}^{\infty} v_{\frac{1}{2}} (R_0 - r)^{\frac{i}{2}} \tag{20}$$

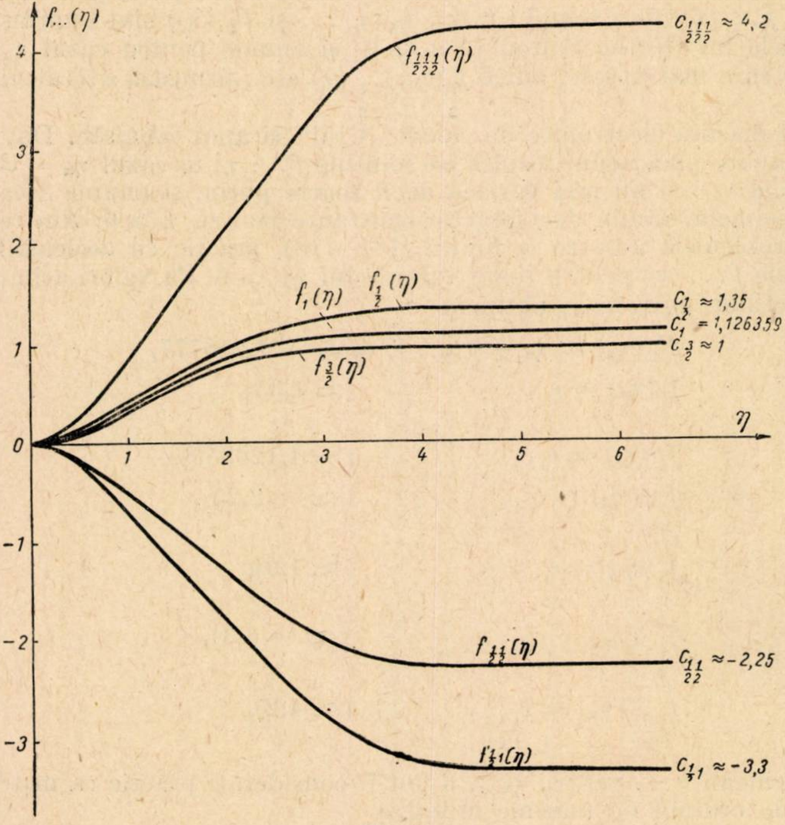


Fig. 3

$$U(r) = -\frac{U_0 R_0}{r} + v_{\frac{1}{2}} (R_0 - r)^{\frac{1}{2}} + v_1 (R_0 - r) + v_{\frac{3}{2}} (R_0 - r)^{\frac{3}{2}} + \dots \tag{21}$$

$$\xi = \frac{1}{\gamma} \int_{R_0}^{r} U(r)\, dr \tag{7}$$

introducînd relația (21) în (7), integrînd în raport cu $r$ și inversînd seria de puteri, $r$ respectiv $(R_0 - r)^{\frac{1}{2}}$ poate fi reprezentat și ca serie de puteri în $\xi^{\frac{1}{2}}$.

După unele calcule și egalarea coeficienților obținem relațiile (22) și (23) între coeficienții $\beta_{\frac{i}{2}}$ ai funcției principale, introduși în (12)

$\beta(\xi) = 2\,\nu\,\xi \dfrac{U'}{U^2} = \beta_0 + \beta_{\frac{1}{2}}\,\xi^{\frac{1}{2}} + \beta_1\,\xi + \beta_{\frac{3}{2}}\,\xi^{\frac{3}{2}} + \ldots$ și coeficienții $v_{\frac{1}{2}}$ ai vitezei centrale $U\ (r)$.

$$\beta_0 = 0$$

$$\beta_{\frac{1}{2}} = -\frac{v_{\frac{1}{2}}}{u_0}\left(\frac{\nu}{u_0}\right)^{1/2}$$

$$\beta_1 = -\frac{\nu}{u_0}\left(2\,\frac{v_1}{u_0} + \frac{5}{3}\,\frac{v_{\frac{1}{2}}^2}{u^2} - \frac{2}{R_0}\right) \tag{22}$$

$$\beta_{\frac{3}{2}} = -\left(\frac{\nu}{u_0}\right)^{\frac{3}{2}}\left(3\,\frac{v_{\frac{3}{2}}}{u_0} + \frac{23}{4}\,\frac{v_1\,v_{\frac{1}{2}}}{u_0^2} + \frac{17}{6}\,\frac{v_{\frac{1}{2}}^3}{u_0^3} - \frac{23}{4}\,\frac{v_{\frac{1}{2}}}{u_0\,R_0}\right).$$

$$v_{\frac{1}{2}} = -u_0\left(\frac{u_0}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}\beta_{\frac{1}{2}}$$

$$v_1 = \frac{u_0}{R_0} - \frac{u_0^2}{2\nu}\left(\beta_1 + \frac{5}{3}\,\beta_{\frac{1}{2}}^2\right) \tag{23}$$

$$v_{\frac{3}{2}} = -\frac{u_0}{3}\left(\frac{u_0}{\nu}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\beta_{\frac{3}{2}} + \frac{23}{8}\,\beta_1\,\beta_{\frac{1}{2}} + \frac{47}{24}\,\beta_{\frac{1}{2}}^3\right)$$

Condiția de debit constant (6)

$$M(r) = \int_0^{\alpha} r\,v_r(r,\varphi)\,d\,\varphi = -u_0\,R_0\,\alpha \tag{6}$$

nu a fost considerată pînă acum. În forma transformată, aceasta are expresia

$$\nu\,(2\,\xi)^{\frac{1}{2}}\,F(\xi,\eta_\alpha) = U_0\,R_0\,\alpha \tag{6''}$$

$$R_0\,\alpha\,u_0 = \nu\sqrt{2}\,\Big[F_0(\eta_\alpha)\,\xi^{\frac{1}{2}} + \beta_{\frac{1}{2}}\,f_{\frac{1}{1}}(\eta_\alpha)\,\xi + \left(\beta_1\,f_1(\eta_\alpha) + \beta_{\frac{1}{2}}^2\,f_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\eta_\alpha)\right)\xi^{\frac{3}{2}} +$$

$$+\left(\beta_{\frac{3}{2}}\,f_{\frac{3}{2}}(\eta_\alpha) + \beta_1\,\beta_{\frac{1}{2}}\,f_{\frac{1}{2}1}(\eta_\alpha) + \beta_{\frac{1}{2}}^3\,f_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\eta_\alpha)\right)\xi^2 + \ldots\Big].$$

după introducerea funcțiilor universale (15) și a valorilor lor asimptotice c... (19) capătă forma finală

$$R_0\,\alpha\,U_0 + r\,\alpha\,U = \nu\sqrt{2}\Big[c_0\,\xi^{\frac{1}{2}} + \beta_{\frac{1}{2}}\,c_{\frac{1}{2}}\xi + \Big(\beta_1\,c_1 + \beta^2_{\frac{1}{2}}c_{\frac{1}{1}\frac{1}{2}}\Big)\,\xi^{\frac{3}{2}} +$$

$$+\Big(\beta_{\frac{3}{2}}\,c_{\frac{3}{2}} + \beta_1\,\beta_{\frac{1}{2}}\,c_{\frac{1}{2}1} + \beta^3_{\frac{1}{2}}\,c_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\Big)\,\xi^2 + \dots\Big] \tag{24}$$

În această expresie scriem, acum, ambii membri în aceeași variabilă $\left(\xi^{\frac{1}{2}}\text{ sau } (R_0 - r)^{\frac{1}{2}}\right)$ pentru a obține coeficienții $\beta_{\frac{i}{2}}$ și apoi să obținem, cu ajutorul lui (26) și $v_{\frac{i}{2}}$ prin egalarea coeficienților, din valorile lui $c$... determinate numeric mai dinainte, și din ceilalți parametri cunoscuți $\alpha$, $\nu$, $R_0$, $U_0$. După calcule mai îndelungate rezultă

$$v_{\frac{1}{2}} = \frac{c_0}{\alpha\,R_0}\,(2\,\nu\,u_0)^{\frac{1}{2}}$$

$$v_1 = -\frac{2\,\nu\,c_0}{\alpha^2\,R^2}\left(c_{\frac{1}{2}} + \frac{c_0}{3}\right) \tag{25}$$

$$v_{\frac{3}{2}} = \frac{(2\,\nu\,u_0^0)^{\frac{1}{2}}}{4\,\alpha\,R_0^2}(5\,c_0 + 8\,c_1) + \frac{(2\,\nu\,u_0)^{\frac{1}{2}}\,\nu\,c_0}{2\,u_0\,\alpha^3\,R_0^3}\,K_0$$

$$v_2 = -\frac{\nu}{\alpha^2\,R_0^3}\,K_1 - \frac{2\,c_0\,\nu^2}{\alpha^4\,R_0^4\,u_0}\,K_2 \tag{25'}$$

$$K_0 = \frac{c_0^2}{9} + \frac{11}{3}\,c_0\,c_{\frac{1}{2}} - 4\,c_0\,c_1 + 4c_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\,c_0 + 8c_1\,c_{\frac{1}{2}}$$

$$K_1 = c_0^2 + 3\,c_0\,c_{\frac{1}{2}} + \frac{24}{5}\,c_0c_1 + 4\,c_0\,c_{\frac{1}{2}1} - 4\,c_0\,c_{\frac{3}{2}} + 12\,c_1\,c_{\frac{3}{2}}$$

$$K_2 = 2\,c_0^2\,c_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}} - 2\,c_{\frac{1}{2}1}\,c_0^2 + 2\,c_{\frac{3}{2}}\,c_0^2 - 6\,c_{\frac{3}{2}}\,c_{\frac{1}{2}}\,c_0 + 4\,c_{\frac{1}{2}1}\,c_{\frac{1}{2}}\,c_0 +$$

$$+ 6\,c_{\frac{3}{2}}\,c_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\,c_0 - bc_{\frac{3}{2}}\,c_1\,c_0 + 12\,c_{\frac{3}{2}}\,c_1\,c_{\frac{1}{2}} + \frac{24}{5}\,c_1\,c_{\frac{1}{2}}\,c_0 -$$

$$-\frac{12}{5}\,c_1\,c_0^2 + \frac{12}{5}\,c_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\,c_0^2 + \frac{8}{15}\,c_{\frac{1}{2}}\,c_0^2 + c^2_{\frac{1}{2}}\,c_0 - \frac{c_0^3}{135}\,.$$

O dată cu lățimea canalului

$$b = 2\,\alpha\,R_0$$

introducem numărul lui Reynolds

$$Re = \frac{b\,u_0}{\nu} = \frac{2\,\alpha\,R_0\,U_0}{\nu}$$

și calculăm mărimea relativă $q_{\frac{i}{2}}$ a primilor termeni ai seriei $V\,(r)$ în comparație cu $\frac{u_0\,R_0}{r}$, la o distanță de $k$ ori lățimea canalului de la secțiunea de intrare, adică pentru

$$R_0 - r = 2\,k\,\alpha\,R_0$$

sau

$$r = R_0\,(1 - 2\,k\,\alpha)$$

din (25). Obținem formulele

$$q_{\frac{1}{2}} = \frac{v_{\frac{1}{2}}\,(R_0 - r)^{\frac{1}{2}}}{\dfrac{U_0\,R_0}{r}} = \frac{v_{\frac{1}{2}}\,(2\,k\,\alpha\,R_0)^{\frac{1}{2}}}{U_0}(1 - 2\,k\,\alpha) = \frac{2c_0}{Re^{\frac{1}{2}}}\,(2\,\ k)^{\frac{1}{2}}\,(1 - 2\,k\alpha),$$

$$q_1 = \frac{v_1\,(R_0 - r)}{\dfrac{U_0\,R_0}{r}} = \frac{v_1\,(2\,k\alpha\,R_0)}{U_0}(1 - 2\,k\alpha) = -\,\frac{8k}{Re}(1 - 2k\alpha)\left(c_{\frac{1}{2}}\ c_0 + \frac{c_0^2}{3}\right),$$

$$q_{\frac{3}{2}} = \frac{v_{\frac{3}{2}}\,(R_0 - r)^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{U_0\,R_0}{r}} = \frac{v_{\frac{3}{2}}\,(2\,k\,\alpha\,R_0)^{\frac{3}{2}}}{U_0}(1 - 2\,k\alpha) = (2k)^{\frac{3}{2}}\,(1 -$$

$$- 2\,k\alpha)\left(\frac{\alpha}{2}\ \frac{5c_0 + 8c_1}{Re^{\frac{1}{2}}} + \frac{2c_0}{Re^{\frac{3}{2}}}\,k_0\right), \qquad (26)$$

$$q_2 = \frac{v_2\,(R_0 - r)^2}{\dfrac{U_0\,R_0}{r}} = \frac{v_2\,(2\,k\,\alpha\,R_0)^2}{U_0}(1 - 2\,k\,\alpha) = -\,(1 -$$

$$- 2\,k\alpha)\left[\frac{(2\,k)^2\,(2\,\alpha)}{Re}\,K_1 + \ 8c_0\left(\frac{2k}{Re}\right)^2 K_2\right]\cdot$$

unde $K_0$, $K_1$ și $K_2$ se obțin din (25).

Pe baza relațiilor (22) pot fi exprimați și coeficienții $\beta_{\frac{i}{2}}$ prin $\alpha$, $Re$ și $c\ldots$ sub forma

$$\beta_{\frac{1}{2}} = \frac{2c_0\sqrt{2}}{Re}$$

$$\beta_1 = \frac{4\alpha}{Re} + \frac{8c_0}{Re^2}\left(2\,c_{\frac{1}{2}} - c_0\right)$$

$$\beta_{\frac{3}{2}} = -\,8\sqrt{2}\left[\frac{\alpha}{Re^2}(3c_1 - c_0) + \frac{c_0}{Re^3}\left(2c_0^2 + 6\,c_0\,c_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\,6c_0\,c_1 + 12\,c_{\frac{1}{2}}\,c_1 - 6\,c_0\,c_{\frac{1}{2}}\right)\right]. \tag{27}$$

Deoarece în teoria stratului limită avem de-a face cu mari numere Reynolds (500 – 2 000), în timp ce $\alpha$ este mic (0° – 5°, adică $\alpha = 0$ pînă la $\alpha \approx 0{,}09$), se poate aprecia influența termenilor superiori din (26) și (27) cu o bună aproximație. Acest lucru rezultă și din expresia (28) pentru $\xi$.

$$\xi = \frac{Re}{2\alpha}\ln\frac{1}{1-2k\alpha} - \frac{2}{3}c_0\,(2\,k)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{Re}^{\frac{1}{2}} + (2k)^2\,c_0\left(c_{\frac{1}{2}} + \frac{c_0}{3}\right) -$$

$$-\,\frac{2}{5}\,(2\,k)^{\frac{5}{2}}\left[\frac{\alpha}{4}\,Re^{\frac{1}{2}}\,(5\,c_0 + 8\,c_1) + \frac{c_0}{Re^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{K}_0\right]$$

$$+\,\frac{1}{3}\,(2\,k)^3\left[\alpha\,K_1 + \frac{4c_0}{Re}\,\mathrm{K}_2\right]. \tag{28}$$

Calcule numerice sînt în curs de efectuare.

## ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ПРИ ВХОДЕ В СХОДЯЩИЙСЯ КАНАЛ

### РЕЗЮМЕ

В работе представляется распространение нового метода разложения в ряд, предложенного Х. Гертлером для расчета ламинарных пограничных слоев. В отличие от Х. Гертлера, автор считает потенциальное течение неизвестным и определяет его расчетным способом. Инструментом для этого определения является дополнительное условие постоянного массового потока в единицу времени через всякое сечение канала; это условие появляется в случае течений при входе.

# DER LAMINARE EINLAUF EINER STRÖMUNG IN EINEN KONVERGENTEN KANAL

## ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit bringt eine Weiterentwicklung des von H. Görtler dargelegten neuartigen Reihenverfahrens zur Berechnung laminarer Grenzschichten zu Profilen. Dabei wird die äußere Potentialströmung nicht wie bei H. Görtler als gegeben vorausgesetzt, sondern muß selbst innerhalb des Rechenganges erst noch ermittelt werden. Das Mittel dazu liefert die bei Einlaufströmungen auftretende zusätzliche Bedingung des konstanten Massenflusses in der Zeiteinheit durch jeden Querschnitt der Kanalleitung.

## BIBLIOGRAFIE

1. H. GÖRTLER, *A new series for the calculation of steady boundary layer flows*. Journ. of Math. and Mechanics, **6**, *1* (1957).
2. — a) *Zahlentafeln universeller Funktionen zur neuen Reihe für die Berechnung laminarer Grenzschichten*. Bericht Nr. 34 der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, 1957; b) *Staff of the Computation Laboratory, „Solution of Boundary Layer Flow Equations"*. Design and Operation of Digital Calculating Machinery, Progress Report Nr. 37, Havard Computation Laboratory (March 1955).
3. H. HAHNNEMANN, L. EHRET, *Der Strömungswiderstand in geraden, ebenen Spalten unter Berücksichtigung der Einlaufsverluste*. Jahrbuch der Deutschen Luftfahrtforschung, S, I, *186*, (1942).
4. — *Der Druckverlust der laminaren Strömung in der Anlaufstrecke von geraden, ebenen Spalten*. Jahrb. der Deutschen Luftfahrtforschung, S. I, *21* (1941).
5. B. PUNNIS, *Zur Berechnung der laminaren Einlaufströmung im Rohr*. Diss., Göttingen, 1947.
6. H. SCHLICHTING, *Laminare Kanaleinlaufströmung*. ZAMM, *14*, 368 (1934).

# STUDII

## AEROMECANICĂ

# SCURGEREA SUPERSONICĂ ÎN JURUL UNEI ARIPI TRAPEZOIDALE PREVĂZUTE CU DOUĂ CARENE CONICE

DE

DAN MATEESCU

## 1. CONSIDERAŢII PRELIMINARE

În această lucrare ne propunem să extindem studiul interferenței dintre aripă și fuzelaj dezvoltat într-o serie de lucrări anterioare [1], [2], [3], analizînd scurgerea supersonică în jurul unei aripi trapezoidale prevăzute cu două conuri circulare (carene) ca în figura 1.

Vom considera că axa fiecăreia dintre carene are față de curentul neperturbat $U_\infty$ incidența $\alpha_0$, în timp ce porțiunea centrală a aripii, cuprinsă între cele două carene, are incidența $\alpha_1$, iar porțiunile extremale ale aripii au incidența $\alpha_2$.

Și în acest studiu ne vom încadra în ipoteza micilor perturbații, considerînd că dimensiunile transversale ale carenelor sînt mici în raport cu conul Mach ($B^2 \bar{c}^2 \ll 1$) și că incidențele aripii și carenelor sînt suficient de mici.

Vom mai considera de asemenea că distanța dintre cele două carene este suficient de mare pentru ca nici una dintre ele să nu fie parțial cuprinsă în interiorul conului Mach determinat de cealaltă carenă.

Ca și în lucrările anterioare [1], [2], vom separa din mișcarea generală în jurul sistemului considerat scurgerea axial-simetrică în jurul carenelor conice izolate, fără incidență, mișcarea ce rezultă în urma acestei separări formînd obiectul prezentului studiu.

În cele ce urmează vom folosi următoarele notații și formule uzuale :

$U_\infty$ — viteza curentului neperturbat,
$a_\infty$ — viteza sunetului în condițiile de la infinit,
$M_\infty = \dfrac{U_\infty}{a_\infty}$ — numărul Mach,

$B = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$,

$Ox_1\, x_2\, x_3$ — sistemul ortogonal de coordonate, axa $Ox_1$ fiind dirijată după axa carenei cu vîrful în $O$,

$y = \dfrac{x_2}{x_1}$, $z = \dfrac{x_3}{x_1}$ — coordonatele planului fizic $oyz$ ($x_1 = 1$, fig. 1),

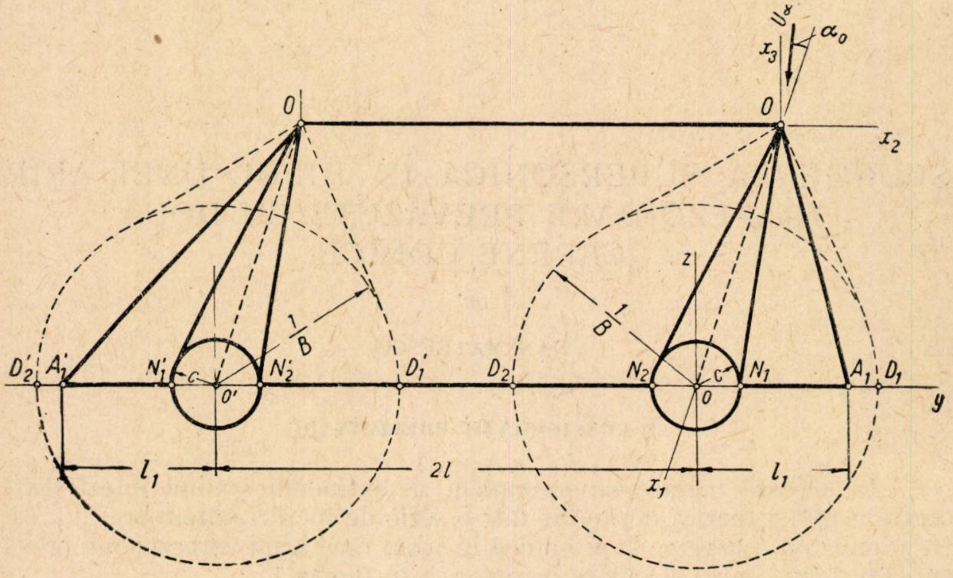


Fig. 1

$\omega\, \eta\, \zeta$ — planul lui Busemann, obținut prin transformarea

$$Br = \frac{2\rho}{1+\rho^2},\ \theta = \theta,\ (r^2 = y^2 + z^2,\ \rho^2 = \eta^2 + \zeta^2), \tag{1}$$

$oy\mathfrak{z}$ — plan auxiliar obținut prin transformarea conformă

$$Bx = \frac{2\xi}{1+\xi^2},\ (x = y + i\mathfrak{z},\ \ \xi = \eta + i\zeta), \tag{2}$$

$OYZ$ — plan auxiliar obținut prin transformarea conformă

$$X = x + \frac{c^2}{x},\ (X = Y + i\,Z), \tag{3}$$

$u, v, w$ — componentele vitezei de perturbație după axele $Ox_1$, $Ox_2$, $Ox_3$, care sînt funcții armonice în planele $\xi$, $x$, $X$.

$\mathcal{U} = u + iu'$, $\mathcal{V} = v + i\,v'$, $\mathcal{W} = w + i\,w'$ — funcții analitice între care pot fi scrise relațiile de compatibilitate

$$d\mathcal{U} = -\,x d\mathcal{V} = \frac{ix\, d\,\mathcal{W}}{\sqrt{1 - B^2 x^2}}\,. \tag{4}$$

## 2. DETERMINAREA VITEZEI AXIALE DE PERTURBAŢIE DIN MIŞCAREA CONICĂ

Pentru a rezolva problema, ne vom ocupa în primul rînd de mişcarea conică determinată de conul Mach cu vîrful în $O$ (fig. 1), soluţia din mişcarea

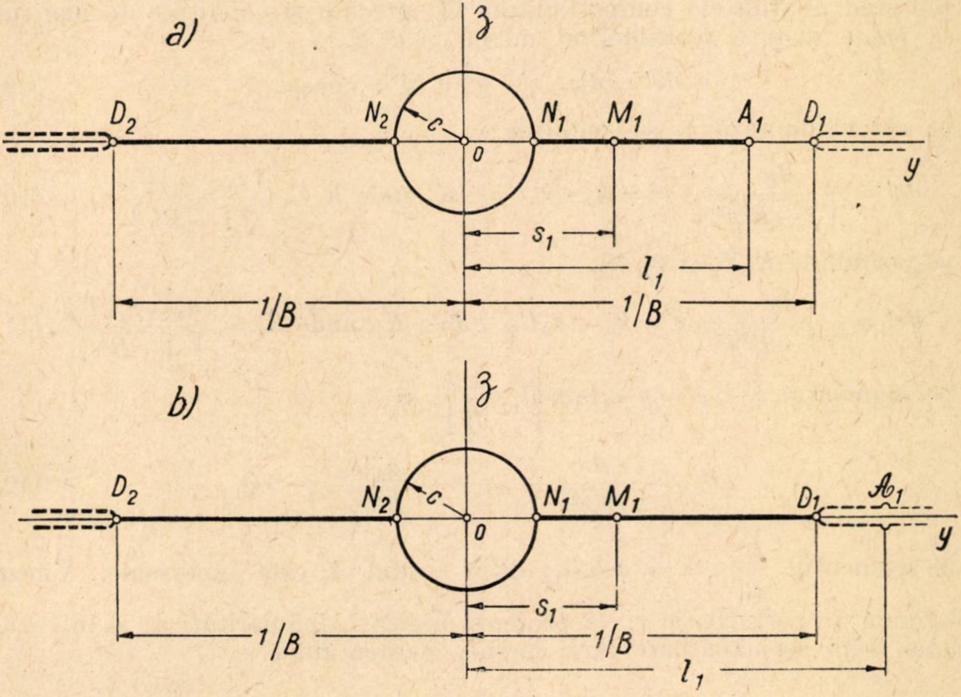


Fig. 2

determinată de conul Mach cu vîrful în $O'$ obţinîndu-se într-un mod asemănător.

În scopul de a uşura calculele vom considera că aripa are incidenţa $\alpha_2$ numai pe porţiunea $M_1\ A_1$ (fig. 2), în rest aripa avînd incidenţa $\alpha_1$; după obţinerea soluţiei vom face pe $s_1$ să tindă către $c$.

În acest caz condiţiile la limită privind mişcarea conică considerată sînt următoarele :

$$v \cos\ \theta + (w - \alpha_0\ U_\infty) \sin\ \theta = cu \simeq 0, \tag{5}$$

pe cercul de rază $c$,

$$w = \alpha_1\ U_\infty \tag{6}$$

pe porţiunile $-\infty\ N_2$ şi $N_1\ M_1$

$$w = \alpha_2\ U_\infty \tag{7}$$

pe porțiunea $M_1\ A_1$ și

$$u = v = 0 \tag{8}$$

pe semidreapta $x = y > l_1$

Folosind relațiile de compatibilitate (4) precum și condițiile de mai sus se poate deduce (considerînd mereu $B^2c^2 \ll 1$)

$$-dv' \simeq dw, \quad v' + w = k_0 = \text{const.}, \tag{9}$$

pe cercul de rază $c$, și condițiile

$$-dv' = \frac{dw}{\sqrt{1 - B^2y^2}}, \quad v' = k_0 - \alpha_0 U_\infty + K, \text{ unde } K = \frac{(\alpha_0 - \alpha_1)U_\infty}{\sqrt{1 - B^2c^2}}, \tag{10}$$

pe porțiunile $D_2N_2$ și $N_1M_1$,

$$-dv' = \frac{dw}{\sqrt{1 - B^2y^2}}, \quad v' = k_0 - \alpha_0 U_\infty + K + K_1, \text{ unde } K_1 = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\ U_\infty}{\sqrt{1 - B^2s_1^2}}, \tag{11}$$

pe segmentul $s_1 < x = y < \min\left[l_1, \dfrac{1}{B}\right]$, și

$$dv = \frac{dw}{\sqrt{B^2x^2 - 1}}, \quad v = \frac{\alpha_2 U_\infty}{\sqrt{B^2 l^2_1 - 1}} = Q_1, \tag{12}$$

pe segmentul $\dfrac{1}{B} < x = y < l_1$, dacă bordul $A_1$ este supersonic. Viteza laterală de perturbație $v$, va prezenta aceleași singularități ca și în cazul unei aripi asemănătoare fără carene, acestea fiind

$$\frac{1}{\sqrt{l_1 - y}} \quad \text{sau } \ln\,(l_1 - y), \tag{13}$$

după cum bordul de atac $A_1$ este subsonic $\left(l_1 < \dfrac{1}{B}\right)$ sau supersonic $\left(l_1 > \dfrac{1}{B}\right)$, și

$$\ln\,(s_1 - y). \tag{14}$$

Vom utiliza aceleași notații și transformări ca și în lucrările precedente [1], [2]:

$$\frac{dF}{dx} = \mathcal{V} - i\,(k_0 - \alpha_0 U_\infty), \tag{15}$$

cu ajutorul căreia poate fi ușor scrisă soluția mișcării (expresia vitezei axiale de perturbație $u = \mathcal{R}e\,\mathcal{U}$) sub forma

$$\mathcal{U} = -x\mathcal{V} + \int \mathcal{V}dx = -x\frac{dF}{dx} + F, \tag{16}$$

și

$$\frac{dF}{dX} = \frac{dF}{dx}\,\frac{1}{2}\left(1 + \frac{X}{\sqrt{X^2 - 4c^2}}\right). \tag{17}$$

Funcția $\frac{dF}{dX}$ ale cărei condiții la limită rezultă din cele ale funcției $\mathcal{V} = v + iv'$, poate fi descompusă în două funcții de variabilă complexă și anume

$$\frac{dF}{dX} = \mathcal{V}_a + \frac{dF_1}{dX}. \tag{18}$$

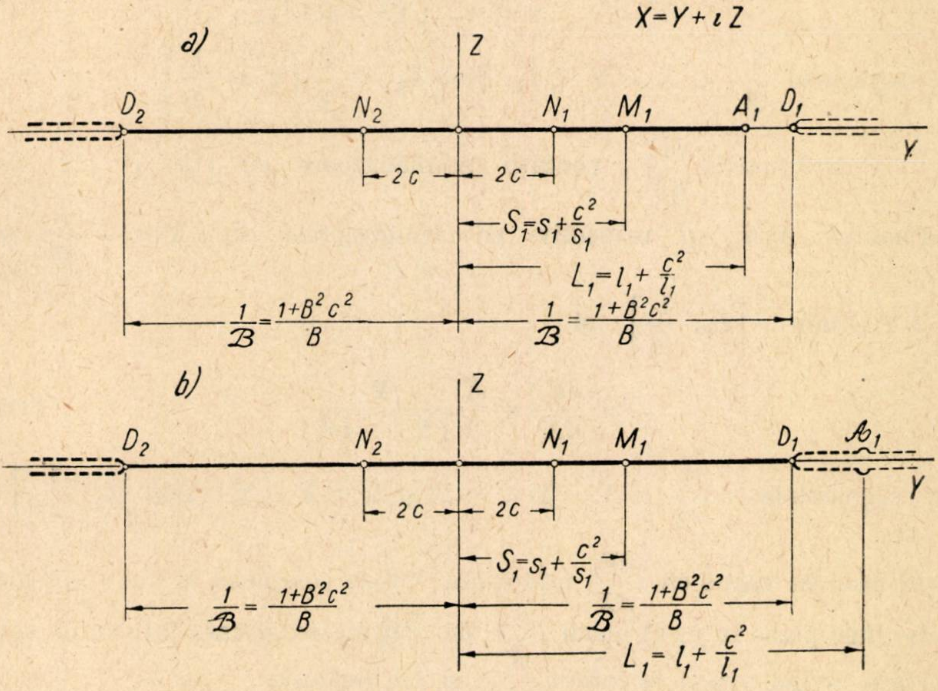

X=Y+iZ
a)
Z
D2
N2
N1
M1
A1
D1
Y
2c
2c
S1=s1+c²/s1
L1=l1+c²/l1
1/𝓑=1+B²c²/B
1/𝓑=1+B²c²/B
b)
Z
D2
N2
N1
M1
D1
𝒜1
Y
2c
2c
S1=s1+c²/s1
1/𝓑=1+B²c²/B
1/𝓑=1+B²c²/B
L1=l1+c²/l1

Fig. 3

Condițiile la limită ale acestor funcții, care se deduc din cele ale funcției $\frac{dF}{dX}$ sînt:

*Pentru funcția* $\mathcal{V}_a$, care prezintă singularitățile (13) și (14) transpuse în planul $X$ (fig. 3),

$$\mathcal{I}m\,\mathcal{V}_a = 0 \tag{19}$$

pe segmentul $N_2N_1$;

$$\mathcal{I}m\mathcal{V}_a = \frac{K}{2} \tag{20}$$

pe segmentele $D_2N_2$ și $N_1M_1$,

$$\mathcal{I}m\,\mathcal{V}_a = \frac{K}{2} + \frac{K_1}{2}\left(1 + \frac{\mathrm{Y}}{\sqrt{\mathrm{Y}^2 - 4c^2}}\right) \tag{21}$$

pe segmentul $\left(S_1 < X = \mathrm{Y} < \min\left[L_1, \frac{1}{\mathcal{B}}\right]\right)$,

$$\mathcal{R}e\,\mathcal{V}_a = 0 \tag{22}$$

pe semidreptele $-\infty D_2$ și $A_1\infty$, și

$$\mathcal{R}e\,\mathcal{V}_a = \frac{Q_1}{2}\left(1 + \frac{\mathrm{Y}}{\sqrt{\mathrm{Y}^2 - 4c^2}}\right) \tag{23}$$

pe segmentul $\frac{1}{\mathcal{B}} < X = \mathrm{Y} < L_1$, dacă $L_1 > \frac{1}{\mathcal{B}}\left(l_1 > \frac{1}{B}\right)$.

*Pentru funcția* $\frac{dF_1}{dX}$, condiții asemănătoare cu (19) și (22) pe segmentul $N_1N_2$ și respectiv pe semidreptele $X = \mathrm{Y} < -\frac{1}{\mathcal{B}}$ și $X = \mathrm{Y} > \min\left[L_1, \frac{1}{\mathcal{B}}\right]$, și

$$\mathcal{I}m\,\frac{dF_1}{dX} = \frac{K}{2}\,\frac{\mathrm{Y}}{\sqrt{\mathrm{Y}^2 - 4c^2}} \tag{24}$$

pe segmentele $-\frac{1}{\mathcal{B}} < X = \mathrm{Y} < -2c$ și $2c < X = \mathrm{Y} < \min\left[L_1, \frac{1}{\mathcal{B}}\right]$.

Este ușor de văzut că $\frac{dF_1}{dX}$ reprezintă viteza complexă a unei mișcări potențiale plane în jurul plăcii $N_2N_1$ de lățime $4c$, situată într-un curent vertical avînd viteza la infinit $\frac{K}{2}$, și are expresia

$$\frac{dF_1}{dX} = \frac{iK}{2}\,\frac{X}{\sqrt{X^2 - 4c^2}}. \tag{25}$$

Ținînd seama de (16), (17) și (18) se poate deduce contribuția acestei mișcări în $\mathcal{U}$, aceasta fiind

$$\mathcal{U}^{(1)} = -\frac{iKc^2}{x}. \tag{26}$$

În ceea ce privește funcția $\mathcal{V}_a$, prin analogie cu mișcarea în jurul unei aripi trapezoidale, vom considera în planul $X$ o mișcare conică fictivă avînd vitezele de perturbaţie $u_a = \mathcal{R}e\,\mathcal{U}_a$, $v_a = \mathcal{R}e\,\mathcal{V}_a$ şi $w_a = \mathcal{R}e\,\mathcal{W}_a$ care satisfac relaţii de compatibilitate similare cu (4),

$$d\,\mathcal{U}_a = -X d\,\mathcal{V}_a = \frac{iX d\mathcal{W}_a}{\sqrt{1-\mathcal{B}^2X^2}}. \tag{27}$$

În cadrul acestei mişcări conice, vom considera o aripă triunghiulară fictivă care are un bord de atac plasat în $A_1$ $(X = L_1)$, celălalt bord fiind situat la infinit; vom considera că incidenţa acestei aripi este constantă pe porţiunile $-\infty N_2$, $N_2N_1$ şi $N_1M_1$ prezentînd salturi în punctele $N_2$, $N_1$ şi $M_1$, şi este variabilă pe porţiunea $M_1A_1$ conform cu condiţiile (21) şi (23).

Funcţia $\mathcal{V}_a$, reprezentînd soluţia mişcării conice în jurul aripii fictive definite mai sus, poate fi determinată folosind rezultatele obţinute în studiul aripilor izolate, rezultînd imediat şi funcţia $\mathcal{U}_a$ care poate fi dedusă prin integrare din relaţiile de compatibilitate (27).

Se poate deduce acum contribuţia mişcării conice fictive considerate mai sus în $\mathcal{U}$ aceasta fiind

$$\mathcal{U}^{(a)} = \mathcal{U}_a + \frac{2c^2}{x}\mathcal{V}_a. \tag{28}$$

Însumînd cele două contribuţii $\mathcal{U}^{(a)}$ şi $\mathcal{U}^{(1)}$ poate fi determinată viteza axială de perturbaţie din mişcarea conică determinată de conul Mach cu vîrful în $O$, care este dată de relaţia

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_a + \frac{2c^2}{x}\mathcal{V}_a - \frac{iKc^2}{x}, \tag{29}$$

problema determinării scurgerii în jurul sistemului considerat fiind redusă în acest mod la găsirea soluţiei unei micşări conice în jurul unei aripi izolate fictive avînd incidenţa variabilă.

În cele ce urmează vom determina funcţiile $\mathcal{V}_a$ şi $\mathcal{U}_a$ din mişcarea conică fictivă pentru diferite poziţii ale aripii faţă de conul Mach, deducînd apoi expresia vitezei axiale de perturbaţii în jurul aripii trapezoidale prevăzute cu două carene conice.

### CAZUL CÎND BORDUL $A_1$ ESTE SUBSONIC $\left(l_1 < \frac{1}{B}\right)$

În acest caz ţinînd seama de condiţiile la limită şi singularităţile de mai sus şi utilizînd rezultatele obţinute în [2] şi [4], se poate deduce funcţia $\mathcal{V}_a$, care este dată de relaţia

$$\mathcal{V}_a = C_1\sqrt{\frac{\frac{1}{\mathcal{B}}+X}{L_1-X}} + \frac{K}{\pi}\,\text{arg ch}\sqrt{\frac{(L_1-X)\left(\frac{1}{\mathcal{B}}+2c\right)}{\left(L_1+\frac{1}{\mathcal{B}}\right)(2c-X)}} -$$

$$-\frac{K}{\pi}\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}}+X\right)(L_1+2c)}{\left(L_1+\frac{1}{\mathcal{B}}\right)(2c+X)}}+$$

$$+\frac{K_1}{\pi}\left(1+\frac{S_1}{\sqrt{S_1^2-4c^2}}\right)\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{(L_1-X)\left(\frac{1}{\mathcal{B}}+S_1\right)}{\left(L_1+\frac{1}{\mathcal{B}}\right)(S_1-X)}}+ \qquad (30)$$

$$+\frac{K_1}{\pi}\int_{S_1}^{L_1}\frac{d}{d\eta}\left[1+\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2-4c^2}}\right]\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{(L_1-X)\left(\frac{1}{\mathcal{B}}+\eta\right)}{\left(L_1+\frac{1}{\mathcal{B}}\right)(\eta-X)}}\,d\eta.$$

Ultimul termen al acestei relații reprezintă contribuția variației de incidență, corespunzătoare condiției (21), de pe porțiunea $M_1A_1$.

Funcția $\mathcal{U}_a$ se poate deduce din $\mathcal{V}_a$ prin integrarea relațiilor de compatibilitate (27), după efectuarea calculelor rezultînd atît pentru $\mathcal{V}_a$ cît și pentru $\mathcal{U}_a$ următoarele expresii :

$$\mathcal{V}_a=C_1\sqrt{\frac{\frac{1}{\mathcal{B}}+X}{L_1-X}}+\frac{K}{\pi}\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{(L_1-X)\left(\frac{1}{\mathcal{B}}+2c\right)}{\left(L_1+\frac{1}{\mathcal{B}}\right)(2c-X)}}-$$

$$-\frac{K}{\pi}\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}}+X\right)(L_1+2c)}{\left(L_1+\frac{1}{\mathcal{B}}\right)(2c+X)}}+\frac{K_1}{\pi}\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{(L_1-X)\left(\frac{1}{\mathcal{B}}+S_1\right)}{\left(L_1+\frac{1}{\mathcal{B}}\right)(S_1-X)}}+$$

$$+i\psi_1+\frac{K_1}{\pi}\,\frac{2c}{X+2c}\,\frac{\sqrt{(L_1-X)\left(\frac{1}{\mathcal{B}}+X\right)}}{\sqrt{(L_1+2c)\left(\frac{1}{\mathcal{B}}+2c\right)}}\left\{\mathbf{K}(k)-\mathbf{F}(\varphi,k)-\right. \qquad (31)$$

$$\left.-\frac{2X}{X-2c}\left[\mathbf{\Pi}(\rho,k)-\mathbf{\Pi}(\varphi,\rho,k)\right]\right\}$$

şi

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}_a = & - C_1 L_1 \sqrt{\frac{\frac{1}{\mathcal{B}} + X}{L_1 - X}} - Q_2 \arccos \sqrt{\frac{\frac{1}{\mathcal{B}} + X}{L_1 + \frac{1}{\mathcal{B}}}} - \\
& - \frac{2cK}{\pi} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(L_1 - X)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c\right)}{\left(L_1 + \frac{1}{\mathcal{B}}\right)(2c - X)}} - \\
& - \frac{2cK}{\pi} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + X\right)(L_1 + 2c)}{\left(L_1 + \frac{1}{\mathcal{B}}\right)(2c + X)}} - \\
& - \frac{2s_1 K_1}{\pi} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(L_1 - X)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + S_1\right)}{\left(L_1 + \frac{1}{\mathcal{B}}\right)(S_1 - X)}} - \frac{4c^2}{X} i \psi_1 + \\
& + \frac{K_1}{\pi} \frac{4c^2}{X + 2c} \frac{\sqrt{(L_1 - X)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c\right)}}{\sqrt{(L_1 + 2c)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c\right)}} \Big\{ \mathbf{K}(k) - \mathbf{F}(\varphi, k) + \\
& + \frac{4c}{X - 2c} ]\mathbf{\Pi}(\rho, k) - \mathbf{\Pi}\,)\varphi, \rho, k)] \Big\},
\end{aligned}
\tag{32}
$$

în care

$\psi_1 = \dfrac{K_1}{2} \dfrac{X}{\sqrt{X^2 - 4c^2}}$ pe segmentul $S_1 < X = Y < L_1$ şi $\psi_1 = 0$ în afara acestui segment,

$$
k = \frac{(l_1 - c)(1 - Bc)}{(l_1 + c)(1 + Bc)}, \tag{33a}
$$

$$
\rho = \frac{(l_1 - c)^2 (x + c)^2}{(l_1 + c)^2 (x - c)^2}, \tag{33b}
$$

$$
\varphi = \arcsin \frac{(l_1 + c)(s_1 - c)}{(l_1 - c)(s_1 + c)}, \tag{33c}
$$

şi

$$Q_2 = C_1\left(L_1 + \frac{1}{\mathcal{B}}\right) + \frac{K}{\pi}\left[\sqrt{(L_1-2c)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c\right)} - \sqrt{(L_1+2c)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - 2c\right)}\right] +$$
$$+ \frac{K_1}{\pi}\left[\sqrt{(L_1-S_1)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + S_1\right)} - I_\Delta\right], \tag{34}$$

unde

$$I_\Delta = \int_{S_1}^{L_1} \frac{-\eta\left[\eta + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - L_1\right)\right]}{\sqrt{\eta^2 - 4c^2}\sqrt{(L_1-\eta)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + \eta\right)}}\, d\eta. \tag{35}$$

Singura constantă nedeterminată din relaţiile de mai sus este $C_1$, care se poate determina folosind condiţia ca viteza verticală de perturbaţie $w$ să aibă la infinit un salt de la valoarea zero la $\alpha_1 U_\infty$. Din relaţiile de compatibilitate (4) se poate deduce că $u = \mathcal{R}e\, \mathcal{U}$ trebuie să aibă în acelaşi punct un salt de la 0 la $-\frac{\alpha_1 U_\infty}{B}$. Utilizînd această condiţie şi ţinînd seama de (28), (31) şi (32), se deduce

$$Q_2 = \frac{2\alpha_1 U_\infty}{\pi B}, \tag{37}$$

de unde rezultă

$$C_1 = \frac{1}{L_1 + \frac{1}{\mathcal{B}}}\left\{\frac{2\alpha_1 U_\infty}{\pi B} - \frac{K}{\pi}\left[\sqrt{(L_1-2c)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + 2c\right)} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \sqrt{(L_1+2c)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - 2c\right)}\right] - \frac{K_1}{\pi}\left[\sqrt{(L_1-S_1)\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + S_1\right)} - I_\Delta\right]\right\}. \tag{38}$$

Făcînd pe $s_1$ să tindă către $c$ (şi pe $S_1$ către $2c$) în (31) şi (32), şi introducînd rezultatele în (28) se obţine expresia vitezei axiale de perturbaţie în jurul sistemului considerat.

În cazul cînd întreaga aripă are aceeaşi incidenţă ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$), soluţia este considerabil mai simplă,

$$\mathcal{U} = -\,C_1\left(L_1 - \frac{2c^2}{x}\right)\sqrt{\frac{\frac{1}{\mathcal{B}} + X}{L_1 - X}} - \frac{2\alpha U_\infty}{\pi B}\arccos\sqrt{\frac{\frac{1}{\mathcal{B}} + X}{L_1 + \frac{1}{\mathcal{B}}}} -$$

$$-\frac{2cK}{\pi}\left(1-\frac{c}{x}\right)\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{(L_1-X)\left(\frac{1}{\mathcal{B}}+2c\right)}{\left(L_1+\frac{1}{\mathcal{B}}\right)(2c-X)}}- \tag{39}$$

$$-\frac{2cK}{\pi}\left(1+\frac{c}{x}\right)\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}}+X\right)(L_1+2c)}{\left(L_1+\frac{1}{\mathcal{B}}\right)(2c+X)}}-\frac{iKc^2}{x},$$

în care

$$K=\frac{(\alpha_0-\alpha)U_\infty}{\sqrt{1-B^2c^2}}, \tag{40}$$

$$C_1=\frac{1}{L_1+\frac{1}{\mathcal{B}}}\left\{\frac{2\alpha U_\infty}{\pi B}-\frac{K}{\pi}\left[\sqrt{(L_1-2c)\left(\frac{1}{\mathcal{B}}+2c\right)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sqrt{(L_1+2c)\left(\frac{1}{\mathcal{B}}-2c\right)}\right]\right\}. \tag{41}$$

Dacă atît aripa cît şi carena au aceeaşi incidenţă $(\alpha_1=\alpha_2=\alpha_0=\alpha)$ soluţia se simplifică şi mai mult $\left(K=0,\ C_1=\frac{2\alpha U_\infty}{\pi B}\frac{1}{L_1+\frac{1}{\mathcal{B}}}\right)$, ea reducîndu-se la un singur termen în cazul aripii dreptunghiulare prevăzute cu două carene conice marginale $(l_1=c)$

$$\mathcal{U}=-\frac{2\alpha U_\infty}{\pi B}\operatorname{arc\,cos}\sqrt{\frac{\frac{1}{\mathcal{B}}+X}{2c+\frac{1}{\mathcal{B}}}}. \tag{42}$$

## CAZUL CÎND BORDUL $A_1$ ESTE SUPERSONIC $\left(l_1>\frac{1}{B}\right)$.

Ţinînd seama de condiţiile la limită, se poate deduce expresia funcţiei $\mathcal{V}_a$ în acest caz,

$$\mathcal{V}_a=\frac{Q_1}{\pi}\left(1+\frac{L_1}{\sqrt{L_1^2-4c^2}}\right)\operatorname{arc\,cos}\sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}X)(1+\mathcal{B}L_1)}{2\mathcal{B}(L_1-X)}}-$$

$$-\frac{Q_1}{\pi}\int_{\frac{1}{\mathcal{B}}}^{L_1}\frac{d}{d\eta}\left[1+\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2-4c^2}}\right]\operatorname{arc\,cos}\sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}X)(1+\mathcal{B}\eta)}{2\mathcal{B}(\eta-X)}}\,d\eta+$$

$$+\frac{K}{\pi}\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}X)(1+2\mathcal{B}c)}{2\mathcal{B}(2c-X)}}+\frac{K}{\pi}\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{(1+\mathcal{B}X)(1+2\mathcal{B}c)}{2\mathcal{B}(2c+X)}}+$$

$$+\frac{K_1}{\pi}\left(1+\frac{S_1}{\sqrt{S_1^2-4c^2}}\right)\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}X)(1+\mathcal{B}S_1)}{2\mathcal{B}(S_1-X)}}+$$

$$+\frac{K_1}{\pi}\int_{s_1}^{\frac{1}{\mathcal{B}}}\frac{d}{d\eta}\left[1+\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2-4c^2}}\right]\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}X)(1+\mathcal{B}\eta)}{2\mathcal{B}(\eta-X)}}\,d\eta. \qquad (43)$$

Ultimul termen și cel de al doilea reprezintă contribuțiile variațiilor de incidență corespunzătoare condițiilor (21) și (23).

Procedînd în continuare într-un mod asemănător ca mai sus se poate obține soluția problemei în acest caz, care este

$$\mathcal{U}=-\frac{2Q_1}{\pi}\left(l_1-\frac{c^2}{x}\right)\arccos\sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}X)(1+\mathcal{B}L_1)}{2\mathcal{B}(L_1-X)}}-f-$$

$$-\frac{Q_1}{\pi(X-2c)}\frac{\sqrt{1-\mathcal{B}^2X^2}}{1+2\mathcal{B}c}\left[2c\,\mathbf{F}(\varphi_1,k_1)+\frac{X}{\mathcal{B}X-1}(1-2\mathcal{B}c)\,\mathbf{\Pi}(\varphi_1,\rho_1,k_1)\right]-$$

$$-\frac{2\alpha_1U_\infty}{\pi B}\arccos\sqrt{\frac{1+\mathcal{B}X}{1+BL_1}}-\frac{iKc^2}{x}-$$

$$-\frac{2(K+K_1)c}{\pi}\left(1-\frac{c}{x}\right)\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}X)(1+2\mathcal{B}c)}{2\mathcal{B}(2c-X)}}-$$

$$-\frac{2Kc}{\pi}\left(1+\frac{c}{x}\right)\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{(1+\mathcal{B}X)(1+2\mathcal{B}c)}{2\mathcal{B}(2c+X)}}-i\psi+$$

$$+\frac{K_1}{\pi}\frac{4c^2}{x+c}\frac{\sqrt{1-\mathcal{B}^2X^2}}{1+2\mathcal{B}c}\left[K(k)+\frac{2c}{x-c}\mathbf{\Pi}(\rho,k)\right], \qquad (44)$$

în care

$f=\frac{Q_1c^2}{x}$ pe segmentul $\frac{1}{B}<x=y<l_1$ și $f=0$ în afara acestui segment;

$\psi=\frac{K_1c^2}{x}$ pe segmentul $s_1<x=y<\frac{1}{B}$ și $\psi=0$ în afara acestui segment;

$$Q_1=\frac{\alpha_2U_\infty}{\sqrt{B^2l_1^2-1}},\; K=\frac{(\alpha_0-\alpha_1)U_\infty}{\sqrt{1-B^2c^2}},\; K_1=\frac{(\alpha_1-\alpha_2)U_\infty}{\sqrt{1-B^2c^2}}, \qquad (45a)$$

$$k_1^2=\frac{8\mathcal{B}c}{(1+2\mathcal{B}c)^2}, \qquad (45b)$$

$$\rho_1=-\frac{2\mathcal{B}(X-2c)}{(1+2\mathcal{B}c)(\mathcal{B}X-1)}, \qquad (45c)$$

$$\varphi_1 = \arcsin \sqrt{\frac{(1+2\mathcal{B}c)(\mathcal{B}L_1-1)}{2\mathcal{B}(L_1-2c)}}, \tag{45d}$$

$$k = \frac{(1-Bc)^2}{(1+Bc)^2}, \tag{45e}$$

$$\rho = -\frac{(1-Bc)^2(x+c)^2}{(1+Bc)^2(x-c)^2}. \tag{45f}$$

## 3. DETERMINAREA EXPRESIEI VITEZEI AXIALE DE PERTURBAŢIE PE ÎNTREGUL SISTEM CONSIDERAT

Expresia vitezei axiale de perturbaţie ($u = \mathcal{R}_e\,\mathcal{U}$) determinată mai sus este valabilă numai în regiunea I (fig. 4).

Expresia lui $\mathcal{U}$ pentru regiunea II se poate deduce într-un mod asemănător. Pentru fixarea ideilor vom indica soluţia pentru regiunea II

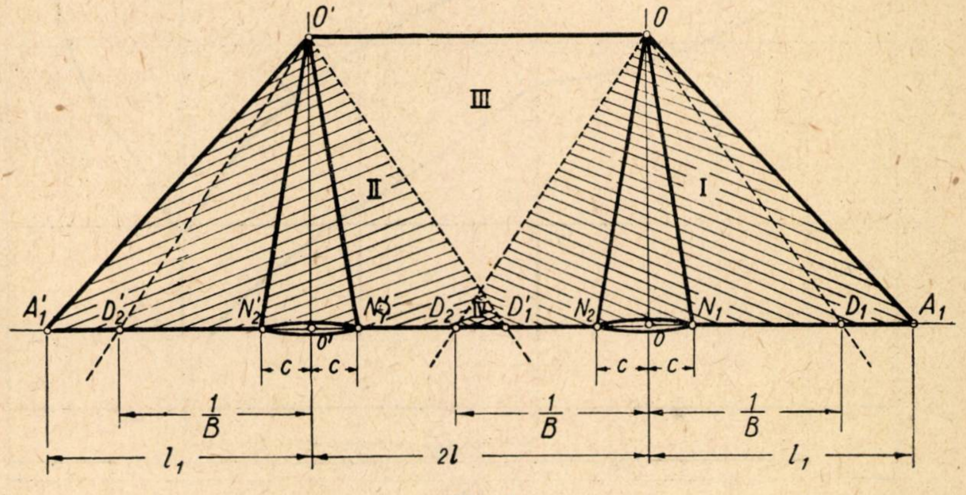


Fig. 4

în cazul aripii trapezoidale avînd bordurile marginale subsonice ($l_1 < c$), atît aripa cît şi carenele avînd aceeaşi incidenţă ($\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$)

$$\mathcal{U}^{\mathrm{II}} = C_2\left(L_1 + \frac{2c^2}{x}\right)\sqrt{\frac{\frac{1}{\mathcal{B}} - X}{L_1 + X}} - \frac{2\alpha U_\infty}{\pi B}\arccos\sqrt{\frac{\frac{1}{\mathcal{B}} - X}{\frac{1}{\mathcal{B}} + L_1}}, \tag{46}$$

unde originea lui $X$ a fost considerată în $O'$, şi

$$C_2 = -\frac{2\alpha U_\infty}{\pi B}\,\frac{1}{L_1 + \frac{1}{\mathcal{B}}}. \tag{47}$$

În regiunea III mişcarea este plană expresia vitezei axiale în acest caz fiind foarte simplă,

$$u^{\mathrm{III}} = -\frac{\alpha_1 U_\infty}{B}. \tag{48}$$

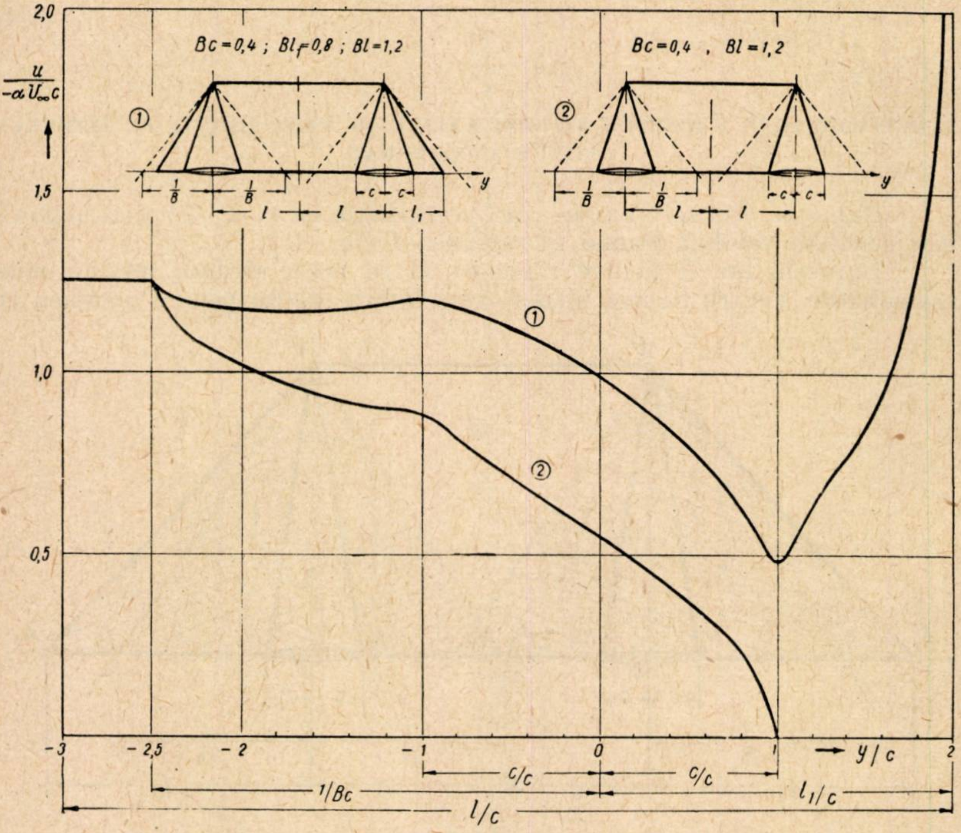


Fig. 5

În cazul cînd cele două conuri Mach cu vîrfurile în $O$ şi $O'$ se întretaie pe aripă, apare regiunea IV în care soluţia, trebuind să se racordeze cu soluţiile din celelalte regiuni, este dată de relaţia

$$u^{\mathrm{IV}} = u^{\mathrm{I}} + u^{\mathrm{II}} - u^{\mathrm{III}}. \tag{49}$$

Pentru exemplificare în figurile 5 şi 6 am dat curbele de variaţie ale vitezei axiale de perturbaţie $\left(\text{şi deci ale presiunii deoarece } c_p = -2\frac{u}{U_\infty}\right)$ atît pentru cazul aripii trapezoidale prevăzute cu două carene conice, bordurile aripii fiind subsonice, cît şi pentru aripa dreptunghiulară prevăzută cu două carene conice marginale.

Curbele au fost trasate pentru cazul cînd aripa și carenele au aceeași incidență ($\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$) și s-a lucrat cu următoarele caracteristice geometrice

$$Bc = 0,4\,, \ \frac{c}{l_1} = 0{,}5\,.$$

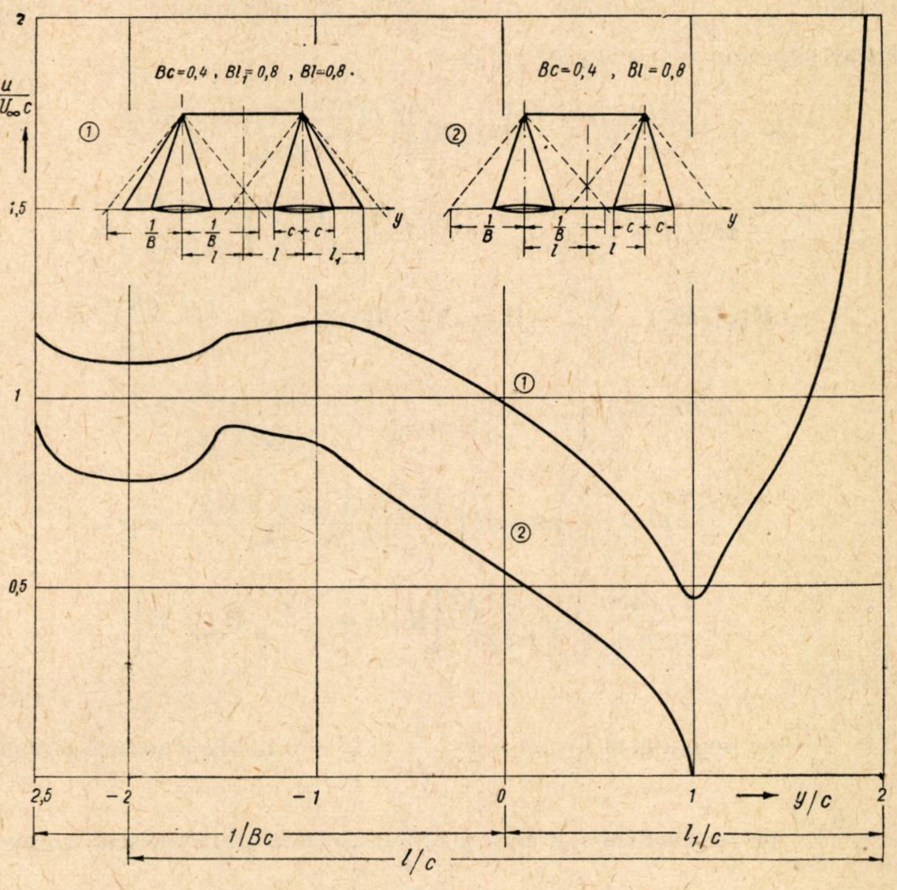


Fig. 6

S-a luat în considerație atît cazul cînd conurile Mach nu se întîlnesc pe aripă, $Bl = 1, 2$, (fig. 5) cît și cazul cînd conurile Mach se întîlnesc pe aripă, $Bl = 0{,}8$, (fig. 6). Curbele notate cu ① se referă la aripa trapezoidală iar cele notate cu ② la aripa dreptunghiulară.

## 4. EXTINDEREA METODEI LA CAZUL ARIPII DE GROSIME SIMETRICĂ

În cazul cînd nici carenele și nici aripa nu au incidență însă aripa este groasă, avînd grosimea simetrică caracterizată prin pantele $\pm\gamma_1$

pe porțiunea centrală a aripii și $\pm\gamma_2$ pe porțiunile extremale, soluțiile mișcării conice se pot obține asemănător folosind lucrările anterioare [1], [2].

Astfel în ceea ce privește mișcarea conică I, în cazul bordului $A_1$ subsonic $\left(l_1 < \frac{1}{B}\right)$, expresia vitezei axiale de perturbație pentru semiplanul superior $(u^{\mathrm{I}} = \mathcal{R}e\,\mathcal{U}^{\mathrm{I}})$ este

$$\mathcal{U}^{\mathrm{I}} = -\frac{2Q_1^*}{\pi}\left(l_1 - \frac{c^2}{x}\right)\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}X)(1+\mathcal{B}L_1)}{2\mathcal{B}(L_1-X)}} +$$

$$+\frac{2\gamma_1 U_\infty}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{1+\mathcal{B}X}{1+\mathcal{B}L_1}} - i\,\psi^* + \frac{Q_1}{\pi}\,\frac{4c^2}{x+c}\,\frac{\sqrt{1-\mathcal{B}^2X^2}}{1+2\mathcal{B}c}\left\{\mathbf{K}(k) -\right.$$

$$\left. -\mathbf{F}(\varphi_1^*, k) + \frac{2c}{x-c}\left[\mathbf{\Pi}(\rho, k) - \mathbf{\Pi}(\varphi_1^*, \rho, k)\right]\right\} - \frac{iKc^2}{x} -$$

$$-\frac{2(K+K_1)c}{\pi}\left(1-\frac{c}{x}\right)\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{(1+\mathcal{B}X)(1+2\mathcal{B}c)}{2\mathcal{B}(2c-X)}} -$$

$$-\frac{2Kc}{\pi}\left(1+\frac{c}{x}\right)\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{(1+\mathcal{B}X)(1+2\mathcal{B}c)}{2\mathcal{B}(2c+X)}} - i\,\psi +$$

$$+\frac{K_1}{\pi}\,\frac{4c^2}{x+c}\,\frac{\sqrt{1-\mathcal{B}^2X^2}}{1+2\mathcal{B}c}\left[\mathbf{K}(k) + \frac{2c}{x-c}\,\mathbf{\Pi}(\rho, k)\right], \tag{50}$$

în care

$\psi^* = \frac{Q_1 c^2}{x}$ pe segmentul $l_1 < x = y < \frac{1}{B}$ și $\psi^* = 0$ în afara acestui segment;

$\psi = \frac{K_1 c^2}{x}$ pe segmentul $s_1 < x = y < \frac{1}{B}$ și $\psi = 0$ în afara acestui segment;

$$Q_1 = \frac{\gamma_2 U_\infty}{\sqrt{1-B^2 l_1^2}}, \quad K = \frac{(\gamma_0 - \gamma_1)U_\infty}{\sqrt{1-B^2c^2}}, \quad K_1 = \frac{(\gamma_1-\gamma_2)U_\infty}{\sqrt{1-B^2c^2}} \tag{51}$$

și

$$\varphi_1^* = \arcsin\frac{(1+Bc)(l_1-c)}{(1-Bc)(l_1+c)}, \tag{52}$$

iar $k$ și $\rho$ sînt date de relațiile (45 e) și (45 f).

În cazul bordului $A_1$ supersonic $\left(l_1 > \frac{1}{B}\right)$ soluția este dată de relația (43) în care se înlocuiește însă $\alpha_i$ prin $\gamma_i$ $(i = 0, 1, 2)$.

Soluțiile problemei pentru mişcarea conică II sînt asemănătoare celor din mişcarea conică I.

Pentru determinarea expresiei vitezei axiale de perturbație pentru celelalte porțiuni ale sistemului considerat se utilizează aceleaşi relații indicate mai sus şi anume (48), în care se înlocuieşte $\alpha_1$ prin $\gamma_1$ şi (49).

*Comunicată la 5 iulie 1960; primită la redacție la 22 octombrie 1960*

# СВЕРХЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ТРАПЕЦОИДАЛЬНОГО КРЫЛА, ПРЕДУСМОТРЕННОГО ДВУМЯ КОНИЧЕСКИМИ ОБТЕКАТЕЛЯМИ

## РЕЗЮМЕ

В настоящей работе рассматривается сверхзвуковое течение вокруг трапецоидального крыла, оснащенного двумя круговыми конусами (обтекателями), считая при этом, что угол атаки центральной части крыла отличается от угла атаки боковой части, а оба эти угла отличаются от угла атаки обтекателей.

Предполагается, что поперечные размеры обтекателей достаточно малы по сравнению с конусом Маха и что углы атаки крыла и обтекателей достаточно малы для того, чтобы можно было применить теорию малых возмущений.

Для решения задачи, из общего обтекания рассматриваемой системы отделяется, как известное, осесимметрическое движение вокруг изолированных конических обтекателей без угла атаки.

В подходящим образом выбранной плоскости результирующее движение благодаря этому отделению можно разложить в более простые движения, причем задача сводится, в конечном счете, к решению конического движения вокруг фиктивного изолированного крыла.

В работе определяются выражения осевой возмущающей скорости для различных положений крыла относительно конуса Маха.

В качестве примеров применения были построены кривые изменения осевой возмущающей скорости для случая, когда крыло и обтекатели имеют одинаковый угол атаки, рассматривая при этом как случай, когда конусы Маха пересекаются на крыле, так и случай, когда они не пересекаются. Кривые были нанесены как для случая трапеоидального крыла, так и для прямоугольного, оснащенного двумя коническими обтекателями.

В конце работы указывается, как можно распространить этот метод на случай крыльев симметрической толщины.

# SUPERSONIC FLOW AROUND A TRAPEZOIDAL WING FITTED WITH TWO CONICAL BODIES

## ABSTRACT

This paper treats the supersonic flow around a trapezoidal wing fitted with two circular cones, considering that the incidence of the central portion of the wing differs from that of its lateral portion, both incidences differing from that of the conical bodies.

It is assumed that the dimensions of the conical bodies are small enough with respect to the Mach cone and that the incidences of the wing and conical bodies are sufficiently small to make applicable the theory of small disturbances.

For solving the problem, the axial symmetrical motion around the conical bodies alone, without incidence, has been separated from the general motion around the considered system.

In a conveniently chosen plane, the resultant motion may be resolved into simpler motions and the problem reduces finally to the solving of the conical motion around a fictitious wing alone.

The expressions of the axial disturbance velocity are determined for various positions of the wing with respect to the Mach cone.

As examples of application, the curves of variation of the axial disturbance velocity are plotted for the case in which the wing and the conical bodies have the same incidence; both cases when the Mach cones intersect on the wing and when they do not intersect are considered. The curves are plotted both for the trapezoidal wing and for the rectangular one fitted with two conical bodies.

Finally the paper shows the manner in which the method may be extended to wings of symmetrical thickness.

## BIBLIOGRAFIE

1. E. CARAFOLI, D. MATEESCU, *Écoulement supersonique autour du système portant aile-fuselage conique*. Revue de Mécanique Appliquée, Acad. R.P.R., 4, *3* (1959).
2. E. CARAFOLI, D. MATEESCU, *A General Method for Determining the Wing-Conical Body, interference in Supersonic Flow*. Revue de Mécanique Appliquée, Acad. R.P.R., 5, *2* (1960).
3. — *Supersonic flow around the cruciform wing-conical body system*. Revue de Mécanique Appliquée, Acad. R.P.R., 5. 3 (1960).
4. E. CARAFOLI, *High Speed Aerodynamics*. Ed. tehnică, Bucarest, 1956.

## TEORIA MECANISMELOR

# ASUPRA DETERMINĂRII MOMENTULUI REDUS

DE

EUG. BUGAJEWSKI [1]

Una din problemele de bază în studiul dinamic al mașinilor o constituie determinarea momentului tuturor forțelor, redus la o axă oarecare.

Acest lucru are o deosebită importanță, în special la mașinile cu regim de funcționare intermitent, cu perioade de lucru scurte, în care fazele tranzitorii, de demaraj și oprire, reprezintă o parte importantă din durata de serviciu. Studierea eforturilor dinamice și a parametrilor cinematici în aceste faze (în special duratele lor și energiile care intră în joc) permite aprecierea și mărirea economicității mașinilor și a intensificării productivității lor.

Din acest punct de vedere sînt tipice mașinile de ridicat sau instalațiile cu servocomenzi, în care opririle sau schimbările de sens de mișcare pot depăși uneori durata de lucru de regim.

În general, în literatura de specialitate, determinarea momentului redus în diferitele faze de mișcare se rezolvă de la caz la caz, considerînd în schema cinematică elementele care interesează și eforturile care apar, de multe ori mergînd din element în element pentru obținerea rezultatului. Urmărirea relațiilor astfel obținute și în special punerea lor în paralel pentru diferite scheme, în vederea comparației și a examinării posibilităților de perfecționare a acestor scheme, apare astfel greoaie. De multe ori, din aceste motive, expresiile obținute de diferiții autori pentru același tip de scheme par a nu concorda între ele și nu lasă să se întrevadă efectul neglijării sau introducerii unor termeni.

În lucrarea de față ne propunem să dăm o formă generală expresiei momentului redus la una din axele unui mecanism oarecare, care — prin particularizarea indicilor la diferite mărimi ce intervin — să permită obținerea ușoară a formulelor pentru fiecare caz de schemă cinematică.

Puterea ($N_y$) corespunzătoare valorii momentului redus ($M_y$) la o axă oarecare a unui mecanism ($y$) (adică dezvoltată de cuplul redus $M_y$)

---

[1] Institutul de petrol, gaze și geologie.

trebuie să fie egală cu suma puterilor ($N_{F_j}$ și $N_{M_j}$) dezvoltate de forțele ($F_j$) și cuplurile ($M_j$) aplicate diferitelor elemente ($j$) ale mecanismului, adică

$$N_y = \sum_{j=y}^{i} N_j = \Sigma N_{F_j} + \Sigma N_{M_j}\,.$$

Explicitînd această relație de bază, obținem momentul redus la axa $y$

$$M_y = \frac{N_y}{\omega_y} = \Sigma F_j \frac{v_j \cos \alpha_j}{\omega_y} + \Sigma M_j \frac{\omega_j}{\omega_y},$$

în care $\alpha_j$ reprezintă unghiul $\sphericalangle\, F_j,\ v_j$ ($v_j$ fiind viteza punctului de aplicație al lui $F_j$). În această relație $\frac{\omega_j}{\omega_y} = i_{jy} = \frac{1}{i_{yj}}$ este raportul de transmisie între cele două elemente considerate, iar $\frac{v_j}{\omega_y}$ poate fi pus sub o altă formă, considerînd că între mișcarea liniară a lui $j$ și cea de rotație a lui $y$ mai poate apărea o mișcare liniară de ordin $k$, comodă din punct de vedere al calculelor. Astfel se poate determina uneori ușor raportul de transformare $\zeta_{jk} = \frac{v_j}{v_k}$ între două elemente ale unei grupe clasice (de ex. palan), ca și raportul $\frac{\omega_k}{\omega_y}$ dacă $k$ are o mișcare pe cerc. Dacă în alte cazuri, această ocazie nu se ivește, se poate pune simplu $j = k$, iar alteori, dacă sînt mai multe posibilități de acest fel, relația $\frac{v_j}{\omega_y}$ se poate generaliza corespunzător, ca mai jos.

Ca urmare a celor de mai sus, putem scrie

$$\frac{v_j}{\omega_y} = \frac{v_j}{v_k} \cdot \frac{v_k}{\omega_y} = \zeta_{jk} \frac{v_k}{\omega_y}$$

sau în general

$$\frac{v_j}{\omega_y} = \zeta_{jk'} \cdot \zeta_{k'k''} \cdot \cdot \cdot \frac{v_{k^{(n)}}}{\omega_y}$$

(această relație nu o vom folosi, pentru simplificarea expresiei finale, cazul foarte general fiind și întîlnit extrem de rar).

De asemenea, dacă $k$ are o mișcare pe cerc, se poate scrie

$$\frac{v_j}{\omega_y} = \zeta_{jk} \frac{r_k\, \omega_k}{\omega_y} = r_k \frac{\zeta_{jk}}{i_{yk}}\,.$$

În felul acesta obținem

$$M_y = \Sigma F_j \cos \alpha_j\, r_k \frac{\zeta_{jk}}{i_{yk}} + \Sigma M_j \frac{1}{i_{yj}}\,.$$

Ținînd seama de natura forțelor $F_j$ și a cuplurilor $M_j$ rezultă

$$\overline{F}_j = \overline{F}'_j + \overline{F}''_j \quad \text{și} \quad \overline{M}_j = \overline{M}'_j + \overline{M}''_j,$$

unde indicele′ (prim) se referă la forțele exterioare statice și″ (secund) la cele de inerție.

Astfel expresia generală a lui $M_y$ se poate detalia ca mai jos

$$M_y = \left[ \Sigma F'_j \cos \alpha_j r_k \frac{\zeta_{jk}}{i_{yk}} + \Sigma M'_j \frac{1}{i_{yj}} \right] +$$
$$+ \left[ \Sigma F''_j \cos \alpha_j r_k \frac{\zeta_{jk}}{i_{yk}} + \Sigma M''_j \frac{1}{i_{yj}} \right],$$

unde prima paranteză reprezintă un moment redus static $M'_y$, iar a doua unul dinamic $M''_y$. Este de observat că în fiecare sumă, ordinul $j$ al punctului sau elementului celui mai depărtat de $y$ poate fi altul, după caz. Singura condiție de respectat este aceea ca să se țină seama de toate forțele și momentele ce apar.

De asemenea, remarcăm că dacă ne raportăm la sensul lui $M''_y$ pe care îl notăm pozitiv, $M'_y$ poate fi plus sau minus, după cum acționează în același sens sau nu cu $M''_y$.

Astfel de demaraj : $M_y = M'_y + M''_y$,

iar la oprire : $M_y = - M'_y + M''_y$

În ceea ce privește componentele gravitaționale ale lui $M'_y$, ele de asemenea pot fi + (plus) sau − (minus), după cum în faza respectivă sînt de același sens cu $M''_y$ respectiv invers.

Iarăși, pentru ca relația să fie completă, trebuie ca $M_y$ să cuprindă și forțele de frecare. Detalierea lor în sumele ce intervin duce însă la expresii prea complicate și este indicat ca pierderile pe care acestea le produc, să fie considerate sub forma randamentelor $\eta_{yj}$, întrucît

$$N_y = \Sigma N_j \pm \Sigma N_{\text{pierd.}}$$

$\pm$ se referă la demaraj, respectiv oprire, așa că

la demaraj $N_y = \Sigma \dfrac{N_j}{\eta_{yj}}$,

iar la oprire $N_y = \Sigma \eta_{jy} \cdot N_j$,

$\eta_{yj}$ putînd fi uneori numeric diferit de $\eta_{jy}$, ca spre exemplu în cazul cuplelor helicoidale.

De asemenea, ori de cîte ori apare un $\alpha_j \neq 0°$ se poate descompune $F_j$ după două direcții perpendiculare, fiind necesar să se considere numai componenta în lungul lui $v_j$, așa încît expresia lui $M_y$ poate să nu conțină pe $\cos \alpha_j$ (pentru simplificare).

Relația lui $M_y$ trebuie astfel completată:

$$M_y = a\left[\sum \frac{1}{\eta_{yj}^a}\cdot F_j'\cdot r_k\cdot\frac{\zeta_{jk}}{i_{yk}} + \sum \frac{1}{\eta_{yj}^a}\cdot M_j'\cdot\frac{1}{i_{yj}}\right] +$$

$$+\left[\sum \frac{1}{\eta_{yj}^a}\cdot F_j''\cdot r_k\cdot\frac{\zeta_{jk}}{i_{yk}} + \sum \frac{1}{\eta_{yj}^a}\cdot M_j''\cdot\frac{1}{i_{yj}}\right],$$

unde $a = +1$ la demaraj și $a = -1$ la frînare și $\eta_{yj}^{-1} = \frac{1}{\eta_{jy}}$.

Explicitarea lui

$$M_y'' = \sum \frac{1}{\eta_{yj}^a}\cdot F_j''\cdot r_k\cdot\frac{\zeta_{jk}}{i_{yk}} + \sum \frac{1}{\eta_{yj}^a}\cdot M_j''\cdot\frac{1}{i_{yj}},$$

se poate face mai comod știind că

$$M_y'' = J_{\mathrm{red}_y}\cdot\varepsilon_y = (J_{\mathrm{red}_{y_m}} + J_{\mathrm{red}_{y_J}})\,\varepsilon_y,$$

și

$$J_{\mathrm{red}\,y_m} = \sum \frac{1}{\eta_{yj}^a}\cdot m_j\cdot\frac{v_j^2}{\omega_y^2} = \sum \frac{1}{\eta_{yj}^a}\cdot m_j\cdot r_k^2\cdot\frac{\zeta_{jk}^2}{i_{yk}^2}$$

iar

$$J_{\mathrm{red}_{y_J}} = \sum \frac{1}{\eta_{yj}^a}\cdot J_j\cdot\frac{\omega_j^2}{\omega_y^2} = \sum \frac{1}{\eta_{yj}^a}\cdot J_j\cdot\frac{1}{i_{yj}^2},$$

unde $J_{\mathrm{red}_y}$, $J_{red_{y_m}}$ și $J_{red_{y_J}}$ sînt momentele de inerție masice reduse la axa $y$ (respectiv: totale, datorită maselor în translație și datorită maselor în rotație).

Dezvoltînd expresiile de mai sus se poate scrie

$$J_{\mathrm{red}_{y_m}} = \sum \frac{1}{\eta_{yj}^a}\cdot\frac{G_j}{g}\cdot r_k^2\cdot\frac{\zeta_{jk}^2}{i_{yk}^2}$$

și

$$J_{\mathrm{red}_{y_J}} = J_y\cdot\left[\frac{1}{\eta_{yy}^a}\cdot\frac{J_y}{J_y}\cdot\frac{1}{i_{yy}^2} + \cdots + \frac{1}{\eta_{yj}^a}\cdot\frac{J_j}{J_y}\cdot\frac{1}{i_{yj}^2} + \cdots\right] =$$

$$= J_y\cdot\left[1 + \sum_{j=y+1}^{j}\frac{1}{\overset{a}{\eta}_{yj}}\cdot\frac{J_j}{J_y}\cdot\frac{1}{i_{yj}^2}\right] = J_y\cdot K_y,$$

unde $G_j$ reprezintă greutatea elementelor $j$, iar $K_y$ reprezintă paranteza ce înmulțește pe $J_y$ și care, depinzînd de rapoartele momentelor de inerție, poate fi ușor apreciat pentru diferite tipuri de mecanisme. Evident că valoarea $K_y$ va diferi de la cazul demarajului la cel al opririi din cauza randamentelor, după cum se vede din expresia sa. Această diferență este însă mică în general.

De asemenea, înlocuind $J = \dfrac{GD^2}{4g}$ și $r_k = \dfrac{d_k}{2}$, obținem

$$M''_y = \frac{\varepsilon_y}{4\mathrm{g}}\left[\Sigma \frac{1}{\eta^a_{yj}} \cdot G_j \cdot d^2_k \cdot \frac{\zeta^2_{jk}}{i^2_{yk}} + K_y \cdot G_y D^2_y\right]$$

și pentru $M'_y$

$$M'_y = a\left[\Sigma \frac{1}{\eta^a_{yj}} \cdot F'_j \cdot \frac{d_k}{2} \cdot \frac{\zeta_{jy}}{i_{yk}} + \Sigma \frac{1}{\eta^a_{yj}} M'_j \frac{1}{i_{yj}}\right].$$

În privința momentului de girație $G_y D^2_y$, el este în general cunoscut după elementul cel mai important care se află pe axa de reducere $y$ (ex. motorul de antrenare). Dacă reducerea se face la o altă axă ($y$) decît cea a motorului ($y'$) ne putem folosi de $GD^2$ al acestuia, cu următoarea transformare :

$$G_y D^2_y = G_{y'} D^2_{y'} \cdot \frac{\omega^2_{y'}}{\omega^2_y} = G_{y'} D^2_{y'} \frac{1}{i^2_{yy'}}.$$

Astfel expresia generală a momentului redus este

$$\boxed{\begin{aligned} M_y = \frac{\varepsilon_y}{4g}&\left[\Sigma \frac{1}{\eta^a_{yj}} \cdot G_j \cdot d^2_k \cdot \frac{\zeta^2_{jk}}{i^2_{yk}} + K_{y'} \cdot G^{y'} D^2_{y'} \cdot \frac{1}{i^2_{yy'}}\right] + \\ &+ a\left[\Sigma \frac{1}{\eta^a_{yj}} \cdot F'_j \cdot \frac{d_k}{2} \cdot \frac{\zeta_{jk}}{i_{yk}} + \Sigma \frac{1}{\eta^a_{yj}} \cdot M'_j \frac{1}{i_{yj}}\right].\end{aligned}}$$

În general, $\varepsilon_y$ este cunoscut după legea de mișcare în faza respectivă, depinzînd la demaraj de tipul motorului, iar la oprire de modul de frînare.

În cazul frecvent al legii accelerațiilor constante se poate lua $\varepsilon_y = \dfrac{\omega_y}{t} = \dfrac{\pi n_y}{30\,t}$ așa încît factorul din afara parantezei devine

$$\frac{\varepsilon_y}{4g} \cong \frac{n_y}{375\,t}.$$

Pentru particularizarea acestei relații generale în fiecare caz de schemă cinematică, este necesar să se stabilească semnificația tuturor indicilor care intervin și să se determine expresia rapoartelor $\zeta$ și $i$, precum și randamentele $\eta$, toate celelalte mărimi fiind cunoscute din datele problemei. Înlocuind apoi numeric valorile respective, se poate face calculul.

La determinarea rapoartelor de transformare $\zeta$ și a rapoartelor de transmisie $i$ se pot prezenta două situații :

*a*) Mecanismul poate fi rezolvat simplu din punct de vedere cinematic, pe cale analitică.

Acesta este cazul mecanismelor compuse în cea mai mare parte din elemente în rotație (mașini de ridicat, reductoare etc.) sau al unor mecanisme cu bare articulate simple (ex. mecanismul bielă-manivelă). Aici se determină ușor $\zeta$ și $i$, prin înlocuirea vitezelor liniare și unghiulare care intervin, cu expresiile analitice cunoscute din studiul cinematic.

*b*) Rezolvarea cinematică a mecanismului pe cale analitică este greoaie și duce la expresii complicate sau uneori neutilizabile. Acesta este de obicei cazul mecanismelor cu bare articulate multe sau al mecanismelor complexe, cum se întîlnesc adesea la servocomenzi sau automatizări. Aici neavînd la dispoziție relații comode de calcul pentru vitezele liniare și unghiulare, se cere în prealabil studiul grafo-analitic (pe cale vectorială) al cinematicii mecanismului și alcătuirea diagramelor de variație a vitezelor pentru punctele și elementele considerate.

În această situație se determină $\zeta$ și $i$ la un moment dat, cu ajutorul vitezelor liniare și unghiulare extrase din diagramele de variație alcătuite și, introducînd valorile lor în formulă, se poate găsi expeditiv momentul redus instantaneu și diagrama sa de variație.

De remarcat este că aici nu este necesar să se cunoască viteza reală a elementului conducător întrucît rapoartele care ne interesează nu depind de aceasta.

În concluzie, observăm că relația obținută este generală (nu depinde de tipul mecanismului) și prezintă avantajul că nu necesită decît aprecierea momentului de inerție (resp. de girație) al celui mai important element în rotație, ceea ce se poate face suficient de exact după puterea de antrenare necesară. În rest, cînd celelalte elemente nu sînt dimensionate, trebuie anticipate numai rapoartele momentelor de inerție, respectiv coeficientul $K_y$, care se mențin relativ constante, deși momentele de inerție însile pot varia mult în funcție de dimensiuni.

De asemenea, chiar în cazul *b*, cînd calculul cinematic este mai laborios, aplicarea acestei relații este mai ușoară decît determinarea momentului redus prin metodele cunoscute de reducere a forțelor și maselor, întrucît la acestea se cere cunoașterea prealabilă a momentelor de inerție și nu a rapoartelor lor.

O extindere a unei asemenea relații la alte mecanisme mai des întîlnite credem că ar ajuta la interpretarea și alegerea mărimilor ce intervin (forțe, mase, viteze, timpi etc.), pentru o proiectare judicioasă, în special privind satisfacerea cerințelor de demaraj și oprire.

Ca exemplu de particularizare a acestei relații generale, să admitem cazul frînării unui mecanism de ridicare a unei sarcini, la coborîrea acesteia, alcătuit ca în schema din figura 1. Conform notațiilor de pe figură putem face următoarea corespondență:

$F'_j = -Q$, sarcina [semnul minus, întrucît lucrează ca forță motoare];

$d_k = d_T$, diametrul tobei;

$\zeta_{jk} = \dfrac{1}{p}$, raportul de transformare al palanului ($p =$ numărul de scripeți);

$i_{yk} = i_{fT}$ raportul de transmisie între axa de reducere ($y = f$ = axa frînei) şi tobă;
$t = t_{fr}$ timpul de frînare;
$G_j = Q$ şi $G_y D_y^2 = G_m D_m^2$ (pentru motorul de antrenare);
$M_j = 0$.

Rezultă astfel

$$M_y = M_f = \frac{n_f}{375\, t_{fr}} \left[ \eta_{Qm} \cdot Q \cdot d_T^2 \cdot \frac{1}{p^2 \cdot i_{fT}^2} + K_y \cdot G_m D_m^2 \frac{1}{i_{fm}^2} \right] + \eta_{Qm} \cdot Q \cdot \frac{d_T}{2} \cdot \frac{1}{p \cdot i_{fT}} \cdot$$

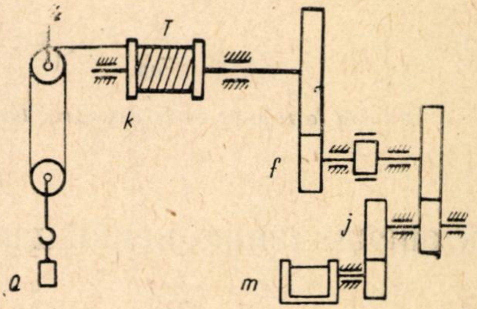


Fig. 1

Iată o altă aplicaţie în cazul unui mecanism articulat (mec., bielă-manivelă), în perioada demarajului.

Corespondenţa de notaţii este conform figurii 2

$$y = 1;$$

$$F_j' = P, \quad M_j' = 0;$$

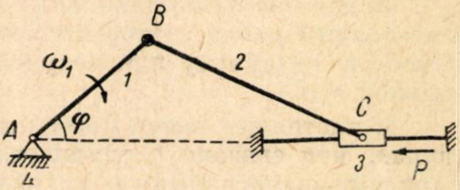


Fig. 2

$G_j = G_3$ (greutatea pietrei de culisă, ca fiind greutatea moartă a unei mese culisante spre ex.);
$k = y = 1$ (elementul intermediar $k$ nu este);

$$d_k = 2 l_1;$$

$$\zeta_{jk} = \zeta_{31} = \frac{v_3}{v_B} = \frac{l_1 \omega_1 \left( \sin\varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right)}{l_1 \omega_1} = \sin\varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi,$$

cu $\lambda = \frac{l_1}{l_2}$;

$$i_{yk} = 1$$

$y' = y = 1$, $G_y D_y^2$ = momentul de giraţie al motorului ales $= G_m D_m^2$;

$$K_y = K_1 = 1 + \frac{1}{\eta_{12}} \cdot \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{1}{i_{12}^2} = 1 + \frac{1}{\eta_{12}} \cdot \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \text{ (se poate aprecia).}$$

Astfel rezultă :

$$M_v = \frac{n_1}{375\, t_{\text{dem}}}\left[\frac{1}{\eta_{13}}\cdot G_3\cdot(2l_1)^2\cdot\left(\sin\varphi+\frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi\right)^2 + K_1\, G_m\, D_m^2\right] +$$

$$+\frac{1}{\eta_{13}}\cdot P\cdot l_1\left(\sin\varphi+\frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi\right)\cdot$$

*Primită la redacție la 28 decembrie 1959*

## К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПРИВЕДЕННОГО МОМЕНТА МЕХАНИЗМА

### РЕЗЮМЕ

Исходя из принципиальных соотношений приведения сил и масс, в настоящей работе автор пытается получить формулу, применимую к любому механизму для получения момента, приведенного к произвольной оси.

В настоящее время формулы выводятся для каждого отдельного случая, что связано с трудностями их преследования и сравнения с другими аналогичными формулами, а также предвидения эффекта пренебрежения или введения некоторых членов.

Полученное соотношение содержит в явном виде различные категории членов, которые могут фигурировать в выражении приведенного момента, позволяя установление выражений в частных случаях путем спецификации простых индексов.

## ÜBER DIE BESTIMMUNG DES REDUZIERTEN MOMENTES EINES GETRIEBES

### ZUSAMMENFASSUNG

Von den Grundbeziehungen der Kräfte-und Massenreduzierung ausgehend, wird versucht, eine auf jedes Getriebe anwendbare Formel zur Erzielung des auf eine beliebige Achse reduzierten Momentes aufzustellen.

Bisher werden derartige Formeln für jeden Fall gesondert abgeleitet und sind demzufolge schwer miteinander zu vergleichen. Ferner ist es schwierig, die Wirkung der Vernachlässigung bzw. Neueinführung bestimmter Größen abzuschätzen.

Die erhaltene Beziehung enthält explizit die verschiedenen Größen, die in dem Ausdruck des Momentes vorkommen können und gestattet eine Aufstellung von Formeln für spezielle Fälle, und zwar durch Festlegung bestimmter Indizes.

## BIBLIOGRAFIE

1. I. I. Artobolevschi, *Teoria mecanismelor şi maşinilor*. Ed. tehnică. Bucureşti, 1955.
2. S. N. Kojevnikov, *Teoria mehanismov i maşin*. Masghiz, 1954, Kiev, 644 p.
3. A. O. Spiracovschi, N. F. Rudenco, *Maşini de ridicat şi de transportat*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1953.

# STUDII

## ELASTICITATE – PLASTICITATE – REZISTENȚA MATERIALELOR

# APLICAREA TEORIEI ECUAȚIILOR INTEGRALE NELINIARE ÎN ELASTODINAMICĂ[1)]

DE

G. SCHMIDT[2)]

Teoria ecuațiilor integrale neliniare, elaborată acum o jumătate de secol de către matematicianul berlinez Erhard Schmidt, a găsit aplicații pe scară largă. În hidrodinamică această teorie s-a dovedit a fi un instrument adecvat, în special la problemele de echilibru ale fluidelor în rotație. De asemenea, teoria a fost aplicată și la determinarea traiectoriei aștrilor, la cercetarea mișcării pendulare și la flambajul barelor.

Cu ajutorul exemplului vibrațiilor de flambaj lateral al grinzilor I vom arăta că teoria ecuațiilor integrale neliniare este importantă și în elastodinamică. Punctul de pornire pentru aceste considerații îl formează sistemul de două ecuații diferențiale neliniare dedus de V. V. Bolotin, care caracterizează vibrațiile de flambaj lateral și care mai întîi trebuie transformat într-un sistem de ecuații integrale. Cu aceeași metodă au fost cercetate ecuațiile cu derivate parțiale pentru vibrațiile transversale ale barelor cu pulsație longitudinală în cazul solicitării centrice și excentrice, precum și în cazul axei încovoiate a barei, rezultînd sisteme infinite de ecuații integro-diferențiale.

### 1. TRECEREA DE LA PROBLEMA ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE LA CEA A ECUAȚIILOR INTEGRALE

Vom arăta cum se face trecerea de la problema de ecuații diferențiale la problema de ecuații integrale, luînd ca exemplu o singură ecuație diferențială. Pentru ecuația diferențială neliniară

$$u'' + \lambda u = \Psi\{u, u', u''; x\},$$

---

1) Lucrare comunicată la Sesiunea științifică jubiliară din 4 – 7 iulie 1960 a Institutului de mecanică aplicată „Traian Vuia" al Academiei R.P.R.

2) Institutul de matematică și mecanică aplicată al Academiei de Științe germane din Berlin.

în care $\Psi$ poate să fie un polinom în $u, u', u''$, ai cărui coeficienţi sînt funcţii de $x$, cu derivatele de gradul I şi II continue, se caută soluţii periodice, deci

$$u(2\pi) = u(0),\ u'(2\pi) = u'(0).$$

Fiecare soluţie de două ori derivabilă a acestei probleme la limită este, după cum se poate arăta, şi o soluţie a ecuaţiei integro-diferenţiale

$$u(x) - \lambda\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi\lambda} + G(x,\xi)\right]u(\xi)\,d\xi = -\int_0^{2\pi} G(x,\xi)\,\Psi(\xi)\,d\xi, \tag{1}$$

satisfăcînd condiţia

$$\lambda\int_0^{2\pi} u(\xi)\,d\xi = \int_0^{2\pi} \Psi(\xi)\,d\xi,$$

şi reciproc; aici

$$G(x,\xi) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos mx\cos m\xi + \sin mx\sin m\xi}{\pi m^2}$$

este funcţia lui Green asociată, în sensul mai larg, iar $\Psi$ este luată, pentru simplitate, numai ca funcţie de ultimul argument.

Ecuaţia integrală liniară omogenă care rezultă, cînd membrul întîi al lui (1) este egal cu zero, are pentru toate valorile lui $\lambda$ rădăcina banală

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

iar pentru $\lambda = M^2$ ($M = 1, 2, 3, \ldots$) cele două rădăcini

$$\varphi_M(x) = \frac{\cos Mx}{\sqrt{\pi}},\quad \Psi_M(x) = \frac{\sin Mx}{\sqrt{\pi}}.$$

Prin separarea acestor rădăcini rezultă din (1) ecuaţia integro-diferenţială

$$u(x) - \lambda\int_0^{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\vartheta_m^M\,\frac{\cos mx\cos m\xi + \sin mx\sin m\xi}{\pi m^2}\,u(\xi)\,d\xi =$$

$$= -\int_0^{2\pi} G(x,\xi)\,\Psi(\xi)\,d\xi + r_0 + r_1\cos Mx + r_2\sin Mx, \tag{2}$$

cu

$$\vartheta_m^M = \begin{cases} 0 \text{ pentru } m = M,\\ 1 \text{ pentru } m \neq M.\end{cases}$$

Pentru parametrii de ramificaţie avem ecuaţiile

$$r_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\xi)\,d\xi,\quad r_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(\xi)\cos M\xi\,d\xi,\quad r_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(\xi)\sin M\xi\,d\xi. \tag{2'}$$

Se poate demonstra că prima ecuaţie de ramificaţie este identic satisfăcută, astfel încît numai ultimele două ecuaţii de ramificaţie (2′) trebuie luate în cosiderare; ecuaţia (2), prin construcţia nucleului rezolvant, poate fi scrisă sub forma

$$u(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\lambda} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos mx \cos m\xi + \sin mx \sin m\xi}{\vartheta_{\lambda}^{m^2}\lambda - m^2}\right]\Psi(\xi)\,d\xi + r_1 \cos Mx + r_2 \sin Mx.$$

Ecuaţia integro-diferenţială care conţine funcţia căutată $u$ sub formă neliniară în expresia $\Psi(\xi)$, reprezintă punctul de pornire cel mai indicat pentru calculul soluţiilor prin aproximaţii succesive. Convergenţa acestor soluţii aproximative este asigurată pe baza cercetărilor generale efectuate de Erhard Schmidt [5] şi Leon Lichtenstein [2].

Metoda schiţată mai sus o vom aplica acum la sistemul celor două ecuaţii diferenţiale neliniare

$$u_1'' + \lambda_1 u_1 = -\alpha u_1'' - 2\alpha_{11} u_1 \cos kx - 2\alpha_{12} u_2 \cos kx - \beta_{11} u_1' - \beta_{12} u_2' -$$

$$- 4\gamma_{11} u_2 (u_1'' u_2 + 2u_1' u_2' + u_1 u_2'') - 2\gamma_{12} u_1 (u_1'^2 + u_1 u_1'') \equiv \Phi_1, \qquad (3)$$

$$u_2'' + \lambda_2 u_2 = -\alpha u_2'' - 2\alpha_{21} u_1 \cos kx - 2\alpha_{22} u_2 \cos kx - \beta_{21} u_1' - \beta_{22} u_2' -$$

$$- 4\gamma_{21} u_1 (u_1'' u_2 + 2u_1' u_2' + u_1 u_2'') - 2\gamma_{22} u_2 (u_1'^2 + u_1 u_1'') \equiv \Phi_2,$$

în care coeficienţii $\alpha$, $\alpha_{ij}$, $\beta_{ij}$ reprezintă constante mici în raport cu unitatea, iar coeficienţii $\gamma_{ij}$ sînt constante arbitrare. În aplicaţia care urmează pentru vibraţiile de flambaj lateral şi pentru care se deduc tocmai ecuaţii de forma (3), $\alpha$ este variaţia frecvenţei, $\alpha_{ij}$ conţin valoarea momentelor finale de vibraţii, iar $\beta_{ij}$ sînt coeficienţii de amortizare.

Vom considera cazul unei duble ramificaţii; luînd două numere naturale $M$ şi $N$, vom avea

$$\lambda_1 = M^2; \quad \lambda_2 = N^2.$$

Punctul de plecare pentru metoda de aproximaţie îl formează acum cele două ecuaţii integro-diferenţiale

$$u_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2M^2} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos mx \cos m\xi + \sin m\, x \sin m\xi}{\vartheta_M^m M^2 - m^2}\right]\Phi_1(\xi)\,d\xi +$$

$$+ r_1 \cos Mx + r_2 \sin Mx, \qquad (4)$$

$$u_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2N^2} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos mx \cos m\xi + \sin mx \sin m\xi}{\vartheta_N^m N^2 - m^2}\right]\Phi_2(\xi)\,d\xi +$$

$$+ r_3 \cos Nx + r_4 \sin Nx.$$

## 2. PRIMELE APROXIMAȚII

Pentru metoda de aproximație se presupune că și soluțiile $u_1$, $u_2$ precum și derivatele lor pînă la ordinul doi au valori mici în raport cu unitatea. Ulterior se poate arăta că această condiție nu este necesară, adică soluțiile rezultă ca fiind ori cît de mici vrem, dacă coeficienții $\alpha, \alpha_{ij}$ și $\beta_{ij}$ sînt aleși suficient de mici.

Din (4) rezultă primele două aproximații

$$\overset{1}{u}_1 = r_1 \cos Mx + r_2 \sin Mx, \overset{1}{u}_2 = r_3 \cos Nx + r_4 \sin Nx,$$

$$\overset{2}{u}_1 = -\alpha(r_1 \cos Mx + r_2 \sin Mx) - \alpha_{11}\left[\frac{r_1 \cos(M+k)x + r_2 \sin(M+k)x}{M^2 - (M+k)^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{r_1 \cos(M-k)x + r_2 \sin(M-k)x}{\vartheta_{2M}^{k} M^2 - (M-k)^2}\right] -$$
$$-\alpha_{12}\left[\frac{r_3 \cos(N+k)x + r_4 \sin(N+k)x}{\vartheta_M^{N+k} M^2 - (N+k)^2} + \frac{r_3 \cos(N-k)x + r_4 \sin(N-k)x}{\vartheta_M^{|N-k|} M^2 - (N-k)^2}\right] +$$
$$+ \beta_{11} \frac{r_2 \cos Mx - r_1 \sin Mx}{M} - \beta_{12} \frac{N(r_4 \cos Nx - r_3 \sin Nx)}{\vartheta_M^N M^2 - N^2},$$

$$\overset{2}{u}_2 = -\alpha(r_3 \cos Nx + r_4 \sin Nx) - \alpha_{21}\left[\frac{r_1 \cos(M+k)x + r_2 \sin(M+k)x}{\vartheta_N^{M+k} N^2 - (M+k)^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{r_1 \cos(M-k)x + r_2 \sin(M-k)x}{\vartheta_N^{|M-k|} N^2 - (M-k)^2}\right] - \alpha_{22}\left[\frac{r_3 \cos(N+k)x + r_4 \sin(N+k)x}{N^2 - (N+k)^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{r_3 \cos(N-k)x + r_4 \sin(N-k)x}{\vartheta_N^{|N-k|} N^2 - (N-k)^2}\right] -$$
$$- \beta_{21} \frac{M(r_2 \cos Mx - r_1 \sin Mx)}{\vartheta_N^M N^2 - M^2} + \beta_{22} \frac{r_4 \cos Nx - r_3 \sin Nx}{N}.$$

De aici urmează, cu

$$2\overset{1}{u}_1 \overset{1}{u}_2 = (r_1 r_3 - r_2 r_4) \cos(M+N)x + (r_1 r_3 + r_2 r_4) \cos(M-N)x +$$
$$+ (r_2 r_3 + r_1 r_4) \sin(M+N)x + (r_2 r_3 - r_1 r_4) \sin(M-N)x,$$

$$2\overset{1}{u}{}_1^2 = (r_1^2 - r_2^2) \cos 2Mx + 2 r_1 r_2 \sin 2Mx + r_1^2 + r_2^2,$$

$$4\overset{1}{u}_2 (\overset{1}{u}{}_1'' \overset{1}{u}_2 + 2 \overset{1}{u}{}_1' \overset{1}{u}{}_2' + \overset{1}{u}_1 \overset{1}{u}{}_2'') = 2 \overset{1}{u}_2 (2 \overset{1}{u}_1 \overset{1}{u}_2)'' = (M+N)^2 [r_1 (r_4^2 - r_3^2) +$$
$$+ 2 r_2 r_3 r_4)] \cos(M+2N)x + (M+N)^2 [r_2 (r_4^2 - r_3^2) - 2 r_1 r_3 r_4] \sin(M+2N)x +$$
$$+ (M-N)^2 [r_1 (r_4^2 - r_3^2) - 2 r_2 r_3 r_4] \cos(2N-M)x +$$
$$+ (M-N)^2 [r_2 (r_3^2 - r_4^2) - 2 r_1 r_3 r_4] \sin(2N-M)x -$$
$$-2(M^2 + N^2) r_1 (r_3^2 + r_4^2) \cos Mx - 2(M^2 + N^2) r_2 (r_3^2 + r_4^2) \sin Mx,$$

$$4\,\overset{1}{u}_1\left(\overset{1}{u}_1''\,\overset{1}{u}_2+\overset{1}{u}_1'\,\overset{1}{u}_2'+\overset{1}{u}_1\,\overset{1}{u}_2''\right)=2\,\overset{1}{u}_1\left(2\,\overset{1}{u}_1\,\overset{1}{u}_2\right)''=(M+N)^2\,[(r_2^2-$$

$$-r_1^2)\,r_3+2\,r_1\,r_2\,r_4]\cos(2\,M+N)\,x+(M+N)^2\,[(r_2^2-r_1^2)\,r_4-$$

$$-2\,r_1\,r_2\,r_3]\sin(2\,M+N)\,x+(M-N)^2\,[(r_2^2-r_1^2)\,r_3-2\,r_1\,r_2\,r_4]\cos(2\,M-N)\,x+$$

$$+(M-N)^2\,[(r_1^2-r_2^2)\,r_4-2\,r_1\,r_2\,r_3]\sin(2\,M-N)\,x-$$

$$-2\,(M^2+N^2)\,(r_1^2+r_2^2)\,r_3\cos Nx-2\,(M^2+N^2)\,(r_1^2+r_2^2)\,r_4\sin Nx,$$

$$2\,\overset{1}{u}_1\,(\overset{1}{u}_1'^2+\overset{1}{u}_1\,\overset{1}{u}_1'')=2\,\overset{1}{u}_1\left(\frac{1}{2}\,\overset{1}{u}_1^2\right)''=$$

$$=M^2\,r_1\,(3r_2^2-r_1^2)\cos 3\,Mx+M^2\,r_2(r_2^2-3\,r_1^2)\sin 3\,Mx-$$

$$-M^2\,r_1\,(r_1^2+r_2^2)\cos Mx-M^2\,r_2\,(r_1^2+r_2^2)\sin Mx,$$

$$2\,\overset{1}{u}_2\,\,(\overset{1}{u}_1'^2+\overset{1}{u}_1\,\overset{1}{u}_1'')=2\,\overset{1}{u}_2\left(\frac{1}{2}\,\overset{1}{u}_1^2\right)''=M^2\,[(r_2^2-r_1^2)\,r_3+$$

$$+2\,r_1\,r_2\,r_4]\cos(2M+N)\,x+M^2\,[(r_2^2-r_1^2)\,r_4-2\,r_1\,r_2\,r_3]\sin(2\,M+N)\,x+$$

$$+M^2\,[(r_2^2-r_1^2)\,r_3-2\,r_1\,r_2\,r_4]\cos(2\,M-N)\,x+M^2\,[(r_1^2-r_2^2)\,r_4-$$

$$-2\,r_1\,r_2\,r_3]\sin(2\,M-N)\,x,$$

după mai multe calcule, a treia aproximație

$$\overset{3}{u}_1=\alpha_{11}\left\{\frac{\alpha_{11}}{M^2-(M+k)^2}\left[\frac{r_1\cos(M+2\,k)\,x+r_2\sin(M+2\,k)\,x}{M^2-(M+2\,k)^2}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{r_1\cos Mx+r_2\sin Mx}{M^2}\right]+$$

$$+\frac{\alpha_{11}}{\vartheta_{2M}^{k}\,M^2-(M-k)^2}\left[\frac{r_1\cos(M-2\,k)\,x+r_2\sin(M-2\,k)\,x}{\vartheta_M^{k}\,M^2-(M-2\,k)^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{r_1\cos Mx+r_2\sin Mx}{M^2}\right]+$$

$$+\frac{\alpha_{12}}{\vartheta_M^{N+k}\,M^2-(N+k)^2}\left[\frac{r_3\cos(N+2\,k)\,x+r_4\sin(N+2\,k)\,x}{\vartheta_M^{N+2k}\,M^2-(N+2\,k)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{r_3\cos Nx+r_4\sin Nx}{\vartheta_M^{N}\,M^2-N^2}\right]+$$

$$+\frac{\alpha_{12}}{\vartheta_M^{/N-k/}\,M^2-(N-k)^2}\left[\frac{r_3\cos(N-2k)\,x+r_4\sin(N-2k)\,x}{\vartheta_M^{/N-2k/}\,M^2-(N-2k)^2}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{r_3\cos Nx+r_4\sin Nx}{\vartheta_M^{N}\,M^2-N^2}\right]\right\}+$$

$$+ \alpha_{12} \Big\{ \frac{\alpha_{21}}{\vartheta_N^{M+k} N^2 - (M+k)^2} \Big[ \frac{r_1 \cos (M+2k)\, x + r_2 \sin (M+2k)\, x}{M^2 - (M+2k)^2} -$$

$$- \frac{r_1 \cos Mx + r_2 \sin Mx}{M^2} \Big] +$$

$$+ \frac{\alpha_{21}}{\vartheta_N^{/M-k/} N^2 - (M-k)^2} \Big[ \frac{r_2 \cos (M-2k)\, x + r_2 \sin (M-2k)\, x}{\vartheta_M^k M^2 - (M-2k)^2} -$$

$$- \frac{r_1 \cos Mx + r_2 \sin Mx}{M^2} \Big] +$$

$$+ \frac{\alpha_{22}}{N^2 - (N+k)^2} \Big[ \frac{r_3 \cos (N+2k)\, x + r_4 \sin (N+2k)\, x}{\vartheta_M^{N+2k} M^2 - (N+2k)^2} +$$

$$+ \frac{r_3 \cos Nx + r_4 \sin Nx}{\vartheta_M^N M^2 - N^2} \Big] +$$

$$+ \frac{\alpha_{22}}{\vartheta_{2N}^k N^2 - (N-k)^2} \Big[ \frac{r_3 \cos (N-2k)\, x + r_4 \sin (N-2k)\, x}{\vartheta_M^{/N-2k/} M^2 - (N-2k)^2} +$$

$$+ \frac{r_3 \cos Nx + r_4 \sin Nx}{\vartheta_M^N M^2 - N^2} \Big] \Big\} -$$

$$- \frac{\gamma_{11} (M+N)^2}{M^2 - (M+2N)^2} \{ [r_1 (r_4^2 - r_3^2) + 2 r_2 r_3 r_4] \cos (M+2N)\, x +$$

$$+ [r_2 (r_4^2 - r_3^2) - 2 r_1 r_3 r_4] \sin (M+2N)\, x \} -$$

$$- \frac{\gamma_{11} (M-N)^2}{\vartheta_N^M M^2 - (2N-M)^2} \{ [r_1 (r_4^2 - r_3^2) - 2 r_2 r_3 r_4] \cos (2N-M)\, x +$$

$$+ [r_2 (r_3^2 - r_4^2) - 2 r_1 r_3 r_4] \sin (2N-M)\, x \} -$$

$$- \frac{2 \gamma_{11} (M^2 + N^2)(r_3^2 + r_4^2)}{M^2} (r_1 \cos Mx + r_2 \sin Mx) +$$

$$+ \frac{\gamma_{12}}{8} [r_1 (3 r_2^2 - r_1^2) \cos 3\, Mx + r_2 (r_2^2 - 3 r_1^2) \sin 3\, Mx] -$$

$$- \gamma_{12} (r_1^2 + r_2^2)(r_1 \cos Mx + r_2 \sin Mx) + 0 (\alpha, \beta_{ij}),$$

$$\overset{3}{u}_2 = \alpha_{21} \Big\{ \frac{\alpha_{11}}{M^2 - (M+k)^2} \Big[ \frac{(r_1 \cos (M+2k)\, x + r_2 \sin (M+2k)\, x}{\vartheta_N^{M+2k} N^2 - (M+2k)^2} +$$

$$+ \frac{r_1 \cos Mx + r_2 \sin Mx}{\vartheta_N^M N^2 - M^2} \Big] +$$

$$+ \frac{\alpha_{11}}{\vartheta_{2M}^k M^2 - (\mathrm{M} - k)^2} \Big[ \frac{r_1 \cos (M-2k)\, x + r_2 \sin (M-2k)\, x}{\vartheta_N^{/M-2k/} N^2 - (M-2k)^2} +$$

$$+\frac{r_1\cos Mx+r_2\sin Mx}{\vartheta_N^M N^2-M^2}+$$

$$+\frac{\alpha_{12}}{\vartheta_M^{N+k}M^2-(N+k)^2}\Bigg[\frac{r_3\cos(N+2k)x+r_4\sin(N+2k)x}{N^2-(N+2k)^2}-$$

$$-\frac{r_3\cos Nx+r_4\sin Nx}{N^2}\Bigg]+$$

$$+\frac{\alpha_{12}}{\vartheta_M^{/N-k/}M^2-(N-k)^2}\Bigg[\frac{r_3\cos(N-2k)x+r_4\sin(N-2k)x}{\vartheta_N^k N^2-(N-2k)^2}-$$

$$-\frac{r_3\cos Nx+r_4\sin Nx}{N^2}\Bigg]\Bigg\}+$$

$$+\alpha_{22}\Bigg\{\frac{\alpha_{21}}{\vartheta_N^{M+k}N^2-(M+k)^2}\Bigg[\frac{r_1\cos(M+2k)x+r_2\sin(M+2k)x}{\vartheta_N^{M+2k}N^2-(M+2k)^2}+$$

$$+\frac{r_1\cos Mx+r_2\sin Mx}{\vartheta_N^M N^2-M^2}\Bigg]+$$

$$+\frac{\alpha_{21}}{\vartheta_N^{/M-k/}N^2-(M-k)^2}\Bigg[\frac{r_1\cos(M-2k)x+r_2\sin(M-2k)x}{\vartheta_N^{/M-2k/}N^2-(M-2k)^2}+$$

$$+\frac{r_1\cos Mx+r_2\sin Mx}{\vartheta_N^M N^2-M^2}\Bigg]+$$

$$+\frac{\alpha_{22}}{N^2-(N+k)^2}\Bigg[\frac{r_3\cos(N+2k)x+r_4\sin(N+2k)x}{N^2-(N+2k)^2}-$$

$$-\frac{r_3\cos Nx+r_4\sin Nx}{N^2}\Bigg]+$$

$$+\frac{\alpha_{22}}{\vartheta_{2N}^k N^2-(N-k)^2}\Bigg[\frac{r_3\cos(N-2k)x+r_4\sin(N-2k)x}{\vartheta_N^k N^2-(N-2k)^2}-$$

$$-\frac{r_3\cos Nx+r_4\sin Nx}{N^2}\Bigg]\Bigg\}-$$

$$-\frac{\gamma_{21}(M+N)^2}{N^2-(2M+N)^2}\{[(r_2^2-r_1^2)r_3+2r_1r_2r_4]\cos(2M+N)x+$$

$$+[(r_2^2-r_1^2)r_4-2r_1r_2r_3]\sin(2M+N)x\}-$$

$$-\frac{\gamma_{21}(M-N)^2}{\vartheta_N^M N^2-(2M-N)^2}\{[(r_2^2-r_1^2)r_3-r_1r_2r_4]\cos(2M-N)x+$$

$$+[(r_1^2-r_2^2)r_4-2r_1r_2r_3]\sin(2M-N)x\}-$$

$$- \frac{2\gamma_{21}(M^2 + N^2)(r_1^2 + r_2^2)}{N^2}(r_3 \cos Nx + r_4 \sin Nx) -$$

$$- \frac{\gamma_{22} M^2}{N^2 - (2M + N)^2}\{[(r_2^2 - r_1^2) r_3 + 2\, r_1 r_2 r_4] \cos (2\, M + N)\, x +$$

$$+ [(r_2^2 - r_1^2) r_4 - 2 r_1 r_2 r_3] \sin (2M + N)\, x\} -$$

$$- \frac{\gamma_{22} M^2}{\vartheta_N^M N^2 - (2M - N)^2}\{[(r_2^2 - r_1^2) r_3 - 2 r_1 r_2 r_4] \cos (2M - N)\, x +$$

$$+ [(r_1^2 - r_2^2) r_4 - 2 r_1 r_2 r_3] \sin (2\, M - N)\, x\} + 0\,(\alpha, \beta_{ij}).$$

Cu $0\ (\alpha, \beta_{ij})$ am notat termenii care conțin parametrii $\alpha, \beta_{ij}$. Acești termeni nu sînt necesari pentru cercetările care urmează deoarece parametrii $\alpha$, $\beta_{ij}$ au fost considerați în a doua aproximație.

### 3. ECUAȚIILE DE RAMIFICAȚIE

Ceilalți parametri de ramificație $r_1, r_2, r_3, r_4$ care mai sînt cuprinși în soluțiile de aproximație, pot fi determinați din cele 4 ecuații de ramificație (scrise sub formă vectorială)

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_1(x)_{\sin}^{\cos} Mx\, dx, \quad \begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_2(x)_{\sin}^{\cos} Nx\, dx.$$

De o însemnătate deosebită pentru aplicații este faptul că din ecuațiile de ramificație pot fi deduse relații relativ simple pentru sumele patratelor $r_1^2 + r_2^2$ și $r_3^2 + r_4^2$ ale parametrilor de ramificație.

Introducînd aproximațiile calculate, ecuațiile de ramificație iau forma

$$- \alpha \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + \delta_{2M}^k \frac{\alpha_{11}}{M^2}\begin{pmatrix} r_1 \\ -r_2 \end{pmatrix} + \delta_{/N-M/}^k \frac{\alpha_{12}}{M^2}\begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} + \delta_{M+N}^k \frac{\alpha_{12}}{M^2}\begin{pmatrix} r_3 \\ -r_4 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{\beta_{11}}{M}\begin{pmatrix} r_2 \\ -r_1 \end{pmatrix} + \delta_N^M \frac{\beta_{12}}{M}\begin{pmatrix} r_4 \\ -r_3 \end{pmatrix} - \frac{\alpha_{11}^2}{M^2[M^2 - (M+k)^2]}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} -$$

$$- \frac{\alpha_{11}^2}{M^2[\vartheta_{2M}^k M^2 - (M - k)^2]}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} - \delta_M^k \frac{\alpha_{11}^2}{M^4}\begin{pmatrix} r_1 \\ -r_2 \end{pmatrix} -$$

$$- \delta_{M-N}^{2k} \frac{\alpha_{11}\alpha_{12}}{M^2[M^2 - (N + k)^2]}\begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} - \delta_{N-M}^{2k} \frac{\alpha_{11}\alpha_{12}}{M^2[M^2 - (N - k)^2]}\begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} -$$

$$- \delta_{M+N}^{2k} \frac{\alpha_{11}\alpha_{12}}{M^2[\vartheta_M^{/N-k/} M^2 - (N - k)^2]}\begin{pmatrix} r_3 \\ -r_4 \end{pmatrix} - \delta_N^M \frac{\alpha_{11}\alpha_{12}}{M^2[M^2 - (M + k)^2]}\begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} -$$

$$- \delta_N^M \frac{\alpha_{11}\alpha_{12}}{M^2[\vartheta_{2M}^k M^2 - (M - k)^2]}\begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} - \frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{M^2[\vartheta_N^{M+k} N^2 - (M + k)^2]}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} -$$

$$- \frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{M^2 \left[ \vartheta_N^{|M-k|} N^2 - (M-k)^2 \right]} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} - \delta_M^k \frac{\alpha_{12}\,\alpha_{21}}{M^2 N^2} \begin{pmatrix} r_1 \\ -r_2 \end{pmatrix} -$$

$$- \delta_{M-N}^{2k} \frac{\alpha_{12}\,\alpha_{22}}{M^2 \left[ N^2 - (N+k)^2 \right]} \begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} - \delta_{N-M}^{2k} \frac{\alpha_{12}\,\alpha_{22}}{M^2 \left[ \vartheta_{2N}^{k} N^2 - (N-k)^2 \right]} \begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} -$$

$$- \delta_{M+N}^{2k} \frac{\alpha_{12}\,\alpha_{22}}{M^2 \left[ \vartheta_{2N}^{k} N^2 - (N-k)^2 \right]} \begin{pmatrix} r_3 \\ -r_4 \end{pmatrix} - \delta_N^M \frac{\alpha_{12}\,\alpha_{22}}{M^2 \left[ M^2 - (M+k)^2 \right]} \begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} -$$

$$- \delta_N^M \frac{\alpha_{12}\,\alpha_{22}}{M^2 \left[ \vartheta_{2M}^{k} M^2 - (M-k)^2 \right]} \begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} - \frac{2\,(M^2+N^2)\,\gamma_{11}}{M^2} (r_3^2 + r_4^2) \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} -$$

$$- \gamma_{12} (r_1^2 + r_2^2) \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$- \alpha \begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} + \delta_{|N-M|}^{k} \frac{\alpha_{21}}{N^2} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + \delta_{M+N}^{k} \frac{\alpha_{21}}{N^2} \begin{pmatrix} r_1 \\ -r_2 \end{pmatrix} + \delta_{2N}^{k} \frac{\alpha_{22}}{N^2} \begin{pmatrix} r_3 \\ -r_4 \end{pmatrix} +$$

$$+ \delta_N^M \frac{\beta_{21}}{M} \begin{pmatrix} r_2 \\ -r_1 \end{pmatrix} + \frac{\beta_{22}}{N} \begin{pmatrix} r_4 \\ -r_3 \end{pmatrix} - \delta_{N-M}^{2k} \frac{\alpha_{11}\,\alpha_{21}}{N^2 \left[ M^2 - (M+k)^2 \right]} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} -$$

$$- \delta_{M-N}^{2k} \frac{\alpha_{11}\,\alpha_{21}}{N^2 \left[ M^2 - (M-k)^2 \right]} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} - \delta_{M+N}^{2k} \frac{\alpha_{11}\,\alpha_{21}}{N^2 \left[ \vartheta_{2M}^{k} M^2 - (M-k)^2 \right]} \begin{pmatrix} r_1 \\ -r_2 \end{pmatrix} -$$

$$- \delta_M^N \frac{\alpha_{11}\,\alpha_{12}}{M^2 \left[ M^2 - (M+k)^2 \right]} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} - \delta_N^M \frac{\alpha_{11}\,\alpha_{21}}{M^2 \left[ \vartheta_{2M}^{k} M^2 - (M-k)^2 \right]} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} -$$

$$- \frac{\alpha_{12}\,\alpha_{21}}{N^2 \left[ \vartheta_M^{N+k} M^2 - (N+k)^2 \right]} \begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} - \frac{\alpha_{12}\,\alpha_{21}}{N^2 \left[ \vartheta_M^{|N-k|} M^2 - (N-k)^2 \right]} \begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} -$$

$$- \delta_N^k \frac{\alpha_{12}\,\alpha_{21}}{M^2 N^2} \begin{pmatrix} r_3 \\ -r_4 \end{pmatrix} - \delta_{N-M}^{2k} \frac{\alpha_{21}\,\alpha_{22}}{N^2 \left[ \vartheta_N^{M+k} N^2 - (M+k)^2 \right]} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} -$$

$$- \delta_{M-N}^{2k} \frac{\alpha_{21}\,\alpha_{22}}{N^2 \left[ \vartheta_N^{|M-k|} N^2 - (M-k)^2 \right]} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} -$$

$$- \delta_{M+N}^{2k} \frac{\alpha_{21}\,\alpha_{22}}{N^2 \left[ \vartheta_N^{|M-k|} N^2 - (M-k)^2 \right]} \begin{pmatrix} r_1 \\ -r_2 \end{pmatrix} - \delta_N^M \frac{\alpha_{21}\,\alpha_{22}}{M^2 \left[ M^2 - (M+k)^2 \right]} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} -$$

$$- \delta_N^M \frac{\alpha_{21}\,\alpha_{22}}{M^2 \left[ \vartheta_{2M}^{k} M^2 - (M-k)^2 \right]} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} - \frac{\alpha_{22}^2}{N^2 \left[ N^2 - (N+k)^2 \right]} \begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} -$$

$$- \frac{\alpha_{22}^2}{N^2 \left[ \vartheta_{2N}^{k} N^2 - (N-k)^2 \right]} \begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} - \delta_N^k \frac{\alpha_{22}^2}{N^4} \begin{pmatrix} r_3 \\ -r_4 \end{pmatrix} -$$

$$- \frac{2\,(M^2+N^2)}{N^2} \gamma_{21} (r_1^2 + r_2^2) \begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} + \delta_N^M \gamma_{22} \begin{pmatrix} (r_2^2 - r_1^2)\, r_3 - 2\, r_1\, r_2\, r_4 \\ (r_1^2 - r_2^2)\, r_4 - 2\, r_1\, r_2\, r_3 \end{pmatrix} = 0 .$$

După cum se va vedea, chiar și aceste ecuații de aproximație permit o discuție a celor mai importante cazuri de ramificare.

A doua pereche de ecuații de ramificare este liniară în $r_3$, $r_4$ și poate fi rezolvată pe cale elementară în raport cu aceste mărimi; revenind la prima pereche de ecuații de ramificare rezultă un sistem de două ecuații neliniare numai pentru $r_1$ și $r_2$. Calculele sînt însă atît de laborioase încît un studiu separat al unora dintre cazurile de ramificare pare indicat.

### 4. DISCUȚIA RAMIFICAȚIEI PENTRU $\beta_{ij} = 0$ (CAZUL FĂRĂ AMORTIZARE)

Presupunem că coeficienții $\beta_{ij}$ se anulează. În ceea ce privește aplicațiile, vom numi acest caz *fără amortizare*. Mai punem condiția ca $\lambda_2 \neq \lambda_1$, adică $N \neq M$.

Din perechea a doua de ecuații de ramificare rezultă

$$\Bigg\{ \alpha \mp \delta^k_{2N} \frac{\alpha_{12}}{N^2} + \frac{\alpha_{12}\,\alpha_{21}}{N^2[\vartheta_M^{N+k} M^2 - (N+k)^2]} + \frac{\alpha_{12}\,\alpha_{21}}{N^2[\vartheta_M^{|N-M|} M^2 - (N-k)^2]} \pm$$

$$\pm \delta^k_N \frac{\alpha_{12}\,\alpha_{21}}{M^2 N^2} + \frac{\alpha_{22}^2}{N^2[N^2-(N+k)^2]} + \frac{\alpha_{22}^2}{N^2[\vartheta^k_{2N} N^2 - (N-k)^2]} \pm$$

$$\pm \delta^k_N \frac{\alpha_{22}^2}{N^2[\vartheta^k_{2N} N^2 - (N-k)^2]} + \frac{2(M^2+N^2)}{N^2}\gamma_{21}(r_1^2 + r_2^2) \Bigg\} \begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \Bigg\{ \delta^k_{|N-M|} \frac{\alpha_{21}}{N^2} \pm \delta^k_{M+N} \frac{\alpha_{21}}{N^2} - \delta^{2k}_{N-M} \frac{\alpha_{11}\,\alpha_{21}}{N^2[M^2-(M+k)^2]} -$$

$$- \delta^{2k}_{M-N} \frac{\alpha_{11}\,\alpha_{21}}{N^2[M^2-(M-k)^2]} \mp \delta^{2k}_{M+N} \frac{\alpha_{11}\,\alpha_{21}}{N^2[\vartheta^k_{2M} M^2 - (M-k)^2]} -$$

$$- \delta^{2k}_{N-M} \frac{\alpha_{21}\,\alpha_{22}}{N^2[\vartheta_N^{M+k} N^2 - (M+k^2)]} - \delta^{2k}_{M-N} \frac{\alpha_{21}\,\alpha_{22}}{N^2[\vartheta_N^{|M-k|} N^2 - (M-k)^2]} \mp$$

$$\mp \delta^{2k}_{M+N} \frac{\alpha_{21}\,\alpha_{22}}{N^2[\vartheta_N^{|M-k|} N^2 - (M-k)^2]} \Bigg\} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix},$$

unde semnele duble corespund celor două componente ale ecuației vectoriale.

Mai punem și condiția ca $M \neq k$, $N \neq k$, $2\,M \neq k$, $2\,N \neq k$.

Atunci rezultă din ultima pereche de ecuații

$$\Bigg\{ \alpha + \frac{\alpha_{12}\,\alpha_{21}}{N^2[\vartheta_M^{N+k} M^2 - (N+k)^2]} + \frac{\alpha_{12}\,\alpha_{21}}{N^2[\vartheta_M^{|N-k|} M^2 - (N-k)^2]} +$$

$$+ \frac{\alpha_{22}^2}{N^2[N^2-(N+k)^2]} + \frac{\alpha_{22}^2}{N^2[N^2-(N+k)^2]} +$$

$$+\frac{2(M^2+N^2)}{N^2}\gamma_{21}(r_1^2+r_2^2)\Biggr\}^2(r_3^2+r_4^2)=\Biggl\{\delta^k_{|N-M|}\frac{\alpha_{21}^2}{N^4}+\delta^k_{M+N}\frac{\alpha_{21}^2}{N^4}+$$

$$+\delta^{2k}_{N-M}\frac{\alpha_{21}^2}{N^4}\left[\frac{\alpha_{11}}{M^2-(M+k)^2}+\frac{\alpha_{22}}{N^2-(M+k^2)}\right]^2+$$

$$+\delta^{2k}_{M-N}\frac{\alpha_{21}^2}{N^4}\left[\frac{\alpha_{11}}{M^2-(M-k)^2}+\frac{\alpha_{22}}{N^2-(M-k)^2}\right]^2+ \tag{5}$$

$$+\delta^{2k}_{M+N}\frac{\alpha_{21}^2}{N^4}\left[\frac{\alpha_{11}}{M^2-(M-k)^2}+\frac{\alpha_{22}}{N^2-(M-k)^2}\right]^2\Biggr\}(r_1^2+r_2^2).$$

Introducînd în prima pereche de ecuaţii de ramificare, obţinem pentru

$$A\equiv r_1^2+r_2^2\neq 0,$$

ecuaţia de gradul III

$$\frac{4(M^2+N^2)^2}{N^4}\gamma_{12}\gamma_{21}^2A^3+\Biggl\{\frac{4(M^2+N^2)^2}{N^4}\gamma_{21}^2\Biggl\{\alpha+\frac{\alpha_{11}^2}{M^2[M^2-(M+k)^2]}+$$

$$+\frac{\alpha_{11}^2}{M^2[M^2-(M-k)^2]}+\frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{M^2[\vartheta_N^{M+k}N^2-(M+k)^2]}+$$

$$+\frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{M^2[\vartheta_N^{|M-k|}N^2-(M-k)^2]}\Biggr\}+\frac{4(M^2+N^2)}{N^2}\gamma_{12}\gamma_{21}\Biggl\{\alpha+$$

$$+\frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{N^2[\vartheta_M^{N+k}M^2-(N+k)^2]}+\frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{N^2[\vartheta_M^{|N-k|}M^2-(N-k)^2]}+$$

$$+\frac{\alpha_{22}^2}{N^2[N^2-(N+k)^2]}+\frac{\alpha_{22}^2}{N^2[N^2-(N-k)^2}\Biggr\}\Biggr\}A^2+$$

$$+\Biggl\{\gamma_{12}\Biggl\{\alpha+\frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{N^2[\vartheta_M^{N+k}M^2-(N+k)^2]}+\frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{N^2[\vartheta_M^{|N-k|}M^2-(N-k)^2]}+$$

$$+\frac{\alpha_{22}^2}{N^2[N^2-(N+k)^2]}+\frac{\alpha_{22}^2}{N^2[N^2-(N-k)^2]}\Biggr\}^2+\frac{4(M^2+N^2)}{N^2}\gamma_{21}\Biggl\{\alpha+$$

$$+\frac{\alpha_{11}^2}{M^2[M^2-(M+k)^2]}+\frac{\alpha_{11}^2}{M^2[M^2-(M-k)^2]}+$$

$$+\frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{M^2[\vartheta_N^{M+k}N^2-(M+k)^2]}+\frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{M^2[\vartheta_N^{|M-k|}N^2-(M-k)^2]}\Biggr\}$$

$$\Biggl\{\alpha+\frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{N^2[\vartheta_M^{N+k}M^2-(N+k)^2]}+\frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{N^2[\vartheta_M^{|N-k|}M^2-(N-k)^2]}+$$

$$+\frac{\alpha_{22}^2}{N^2\,[N^2-(N+k)^2]}+\frac{\alpha_{22}^2}{N^2\,[N^2-(N-k)^2]}\biggr\}+$$

$$+\frac{2\,(M^2+N^2)}{M^2\,N^4}\,\alpha_{21}^2\,\gamma_{11}\biggl\{\delta^k_{|N-M|}+\delta^k_{M+N}+\delta^{2k}_{N-M}\biggl[\frac{\alpha_{11}}{M^2-(M+k)^2}+$$

$$+\frac{\alpha_{22}}{N^2-(M+k)^2}\biggr]^2+\delta^{2k}_{M-N}\biggl[\frac{\alpha_{11}}{M^2-(M-k)^2}+\frac{\alpha_{22}}{N^2-(M-k)^2}\biggr]^2+$$

$$+\delta^{2k}_{M+N}\biggl[\frac{\alpha_{11}}{M^2-(M-k)^2}+\frac{\alpha_{22}}{N^2-(M-k)^2}\biggr]^2\biggr\}-$$

$$-\frac{2\,(M^2+N^2)}{M^2\,N^4}\,\alpha_{12}\,\alpha_{21}\,\gamma_{21}\biggl\{\delta^k_{|N-M|}+\delta^k_{M+N}+\delta^{2k}_{N-M}\biggl[\frac{\alpha_{11}}{M^2-(N-k)^2}+$$

$$+\frac{\alpha_{22}}{N^2-(N-k)^2}\biggr]\biggl[\frac{\alpha_{11}}{M^2-(M+k)^2}+\frac{\alpha_{22}}{N^2-(M+k)^2}\biggr]+ \tag{6}$$

$$+\delta^{2k}_{M-N}\biggl[\frac{\alpha_{11}}{M^2-(N+k)^2}+\frac{\alpha_{22}}{N^2-(N+k)^2}\biggr]\biggl[\frac{\alpha_{11}}{M^2-(M-k)^2}+$$

$$+\frac{\alpha_{22}}{N^2-(M-k)^2}\biggr]+\delta^{2k}_{M+N}\biggl[\frac{\alpha_{11}}{M^2-(N-k)^2}+$$

$$+\frac{\alpha_{22}}{N^2-(N-k)^2}\biggr]\biggl[\frac{\alpha_{11}}{M^2-(M-k)^2}+\frac{\alpha_{22}}{N^2-(M-k)^2}\biggr]\biggr\}\biggr\}A=$$

$$=\frac{\alpha_{12}\,\alpha_{21}}{M^2N^2}\biggl\{\alpha+\frac{\alpha_{12}\,\alpha_{21}}{N^2\bigl[\vartheta_M^{N+k}\,M^2-(N+k)^2\bigr]}+\frac{\alpha_{12}\,\alpha_{21}}{N^2\bigl[\vartheta_M^{|N-k|}\,M^2-(N-k)^2\bigr]}+$$

$$+\frac{\alpha_{22}^2}{N^2\,[N^2-(N+k)^2]}+\frac{\alpha_{22}^2}{N^2\,[N^2-(N-k)^2]}\biggr\}\cdot$$

$$\cdot\biggl\{\delta^k_{|N-M|}+\delta^k_{M+N}+\delta^{2k}_{N-M}\biggl[\frac{\alpha_{11}}{M^2-(N-k)^2}+$$

$$+\frac{\alpha_{22}}{N^2-(N-k)^2}\biggr]\biggl[\frac{\alpha_{11}}{M^2-(M+k)^2}+\frac{\alpha_{22}}{N^2-(M+k)^2}\biggr]+$$

$$+\delta^{2k}_{M-N}\biggl[\frac{\alpha_{11}}{M^2-(N+k)^2}+\frac{\alpha_{22}}{N^2-(N+k)^2}\biggr]\biggl[\frac{\alpha_{11}}{M^2-(M-k)^2}+$$

$$+\frac{\alpha_{22}}{N^2-(M-k)^2}\biggr]+\delta^{2k}_{M+N}\biggl[\frac{\alpha_{11}}{M^2-(N-k)^2}+$$

$$+\frac{\alpha_{22}}{N^2-(N-k)^2}\biggr]\biggl[\frac{\alpha_{11}}{M^2-(M-k)^2}+\frac{\alpha_{22}}{N^2-(M-k)^2}\biggr]\biggr\}-$$

$$-\left\{\alpha+\frac{o_{11}^{2}}{M^{2}[M^{2}-(M+k)^{2}]}+\frac{\alpha_{11}^{2}}{M^{2}[M^{2}-(M-k)^{2}]}+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{M^{2}[\vartheta_{N}^{M+k}N^{2}-(M+k)^{2}]}+\frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{M^{2}[\vartheta_{N}^{|M-k|}N^{2}-(M-k)^{2}]}\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{\alpha+\frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{N^{2}[\vartheta_{M}^{N+k}M^{2}-(N+k)^{2}]}+\frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{N^{2}[\vartheta_{M}^{|N-k|}M^{2}-(N-k)^{2}]}+\right.$$

$$\left.+\frac{o_{22}^{2}}{N^{2}[N^{2}-(N+k)^{2}]}+\frac{\alpha_{22}^{2}}{N^{2}[N^{2}-(N-k)^{2}]}\right\}^{2}.$$

Deoarece, în aplicații, $A$ este aproximativ patratul anumitor amplitudini de vibrații, vom denumi această ecuație *ecuație de amplitudinc.*

Parametrul $\alpha$ va fi ales mic și de ordinul 2, astfel încît membrul al II-lea al ecuației de amplitudine să se anuleze

$$\alpha=-\frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{N^{2}[\vartheta_{M}^{N+k}M^{2}-(N+k)^{2}]}-\frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{N^{2}[\vartheta_{M}^{|N-k|}M^{2}-(N-k)^{2}]}-$$

$$-\frac{\alpha_{22}^{2}}{N^{2}[N^{2}-(N+k)^{2}]}-\frac{\alpha_{22}^{2}}{N^{2}[N^{2}-(N-k)^{2}]}. \tag{7}$$

Atunci rezultă din ecuația de amplitudine

$$2\gamma_{12}\gamma_{21}A=-\gamma_{21}\left\{\frac{\alpha_{11}^{2}}{M^{2}[M^{2}-(M+k)^{2}]}+\frac{\alpha_{11}^{2}}{M^{2}[M^{2}-(M-k)^{2}]}+\right.$$

$$+\frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{M^{2}[\vartheta_{N}^{M+k}N^{2}-(M+k)^{2}]}+\frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{M^{2}[\vartheta_{N}^{|M-k|}N^{2}-(M-k)^{2}]}-$$

$$-\frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{N^{2}[\vartheta_{M}^{N+k}M^{2}-(N+k)^{2}]}-\frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{N^{2}[\vartheta_{M}^{|N-k|}M^{2}-(N-k)^{2}]}- \tag{8}$$

$$\left.-\frac{\alpha_{22}^{2}}{N^{2}[N^{2}-(N+k)^{2}]}-\frac{\alpha_{22}^{2}}{N^{2}[N^{2}-(N-k)^{2}]}\right\}\pm$$

$$\pm\left\{\frac{2\alpha_{12}\alpha_{21}\gamma_{12}\gamma_{21}}{M^{2}(M^{2}+N^{2})}\left\{\delta_{|N-M|}^{k}+\delta_{M+N}^{k}+\delta_{N-M}^{2k}\left[\frac{\alpha_{11}}{M^{2}-(N-k)^{2}}+\right.\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha_{22}}{N^{2}-(N-k)^{2}}\right]\left[\frac{\alpha_{11}}{M^{2}-(M+k)^{2}}+\frac{\alpha_{22}}{N^{2}-(M+k)^{2}}\right]+$$

$$+\delta_{M-N}^{2k}\left[\frac{\alpha_{11}}{M^{2}-(N+k)^{2}}+\frac{\alpha_{22}}{N^{2}-(N+k)^{2}}\right]\left[\frac{\alpha_{11}}{M^{2}-(M-k)^{2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha_{22}}{N^{2}-(M-k)^{2}}\right]+\delta_{M+N}^{2k}\left[\frac{\alpha_{11}}{M^{2}-(N-k)^{2}}+\frac{\alpha_{22}}{N^{2}-(N-k)^{2}}\right]$$

$$\left[\frac{\alpha_{11}}{M^2-(M-k)^2}+\frac{\alpha_{22}}{N^2-(M-k)^2}\right]\Bigg\}-$$

$$-\frac{2\,\alpha_{21}^2\,\gamma_{11}\,\gamma_{12}}{M^2(M^2+N^2)}\Bigg\{\delta^k_{|N-M|}+\delta^k_{M+N}+\delta^{2k}_{N-M}\left[\frac{\alpha_{11}}{M^2-(M+k)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha_{22}}{N^2-(M+k)^2}\right]^2+\delta^{2k}_{M-N}\left[\frac{\alpha_{11}}{M^2-(M-k)^2}+\frac{\alpha_{22}}{N^2-(M-k)^2}\right]^2+$$

$$+\delta^{2k}_{M+N}\left[\frac{\alpha_{11}}{M^2-(M-k)^2}+\frac{\alpha_{22}}{N^2-(M-k)^2}\right]\Bigg\}+$$

$$+\gamma_{21}^2\Bigg\{\frac{\alpha_{11}^2}{M^2[M^2-(M+k)^2]}+\frac{\alpha_{11}^2}{M^2[M^2-(M-k)^2]}+$$

$$+\Bigg\{\frac{\alpha_{12}\,\alpha_{21}}{M^2[\vartheta_N^{M+k}N^2-(M+k)^2]}+\frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{M^2[\vartheta_N^{|M-k|}N^2-(M-k)^2]}-$$

$$-\frac{\alpha_{12}\,\alpha_{21}}{N^2[\vartheta_M^{N+k}M^2-(N+k)^2]}-\frac{\alpha_{12}\,\alpha_{21}}{N^2[\vartheta_M^{|N-k|}M^2-(N-k)^2]}-$$

$$-\frac{\alpha_{22}^2}{N^2[N^2-(N+k)^2]}-\frac{\alpha_{22}^2}{N^2[N^2-(N-k)^2]}\Bigg\}^2\Bigg\}^{\frac{1}{2}}.$$

Formulele obținute sînt valabile și pentru cazul $|M \pm N| = 2k$ (domenii de speța a doua, de ordinul II). Se poate vedea că în aceste domenii (pentru $\gamma_{ij} = 0$) pot apărea cel mult soluții pentru care patratul amplitudinii $A$ este de ordinul de mărime $\alpha_{ij}{}^2$.

### 5. DISCUŢIA RAMIFICAŢIEI PENTRU $\beta_{ij} = 0$ ŞI DOMENII DE ORDINUL I

Vom studia mai de aproape cazul particular

$$M + N = k$$

(domenii de speța a II-a, de ordinul I, cazul sumei) în care pot exista soluții pentru care patratul amplitudinii $A$ este de ordinul de mărime $\alpha_{ij}$. Ecuațiile (6), (7), (8) se simplifică în acest caz, dacă scriem pentru prescurtare

$$\bar{\alpha} = \alpha - \frac{\alpha_{11}^2}{M^2[(M+k)^2-M^2]} - \frac{\alpha_{11}^2}{M^2(M^2-N^2)} -$$

$$-\frac{\alpha_{12}\,\alpha_{21}}{M^2[(M+k)^2+N^2]} - \frac{\alpha_{12}\,\alpha_{21}}{M^2N^2}, \qquad (9)$$

$$\bar{\bar{\alpha}} = \alpha - \frac{\alpha_{12}\,\alpha_{21}}{N^2\,[(N+k)^2 - M^2]} - \frac{\alpha_{12}\,\alpha_{21}}{M^2 N^2} - $$

$$- \frac{\alpha_{22}^2}{N^2\,[(N+k)^2 - N^2]} - \frac{\alpha_{22}^2}{N^2(M^2 - N^2)},$$

luînd forma

$$\begin{aligned} &\frac{4\,(M^2+N^2)^2}{N^4}\,\gamma_{12}\,\gamma_{21}^2\,A^3 + \Bigl[\frac{4\,(M^2+N^2)^2}{N^4}\,\gamma_{21}^2\,\bar{\alpha} + \\ &+ \frac{4\,(M^2+N^2)}{N^2}\,\gamma_{12}\,\gamma_{21}\,\bar{\bar{\alpha}}\Bigr]A^2 + \Bigl[\gamma_{12}\,\bar{\bar{\alpha}}^2 + \frac{4\,(M^2+N^2)}{N^2}\,\gamma_{21}\,\bar{\alpha}\,\bar{\bar{\alpha}} + \\ &+ \frac{2\,(M^2+N^2)}{M^2 N^4}\,\alpha_{21}^2\,\gamma_{11} - \frac{2\,(M^2+N^2)}{M^2 N^4}\,\alpha_{12}\,\alpha_{21}\,\gamma_{21}\Bigr]A = \frac{\alpha_{12}\,\alpha_{21}}{M^2 N^2}\,\bar{\bar{\alpha}} - \bar{\alpha}\,\bar{\bar{\alpha}}^2 \end{aligned} \qquad (6')$$

şi dacă, punînd $\bar{\alpha} = \bar{\bar{\alpha}} = \alpha$, se mai neglijează termenii de ordin superior

$$\gamma_{12}\,\gamma_{21}\,A = \pm\sqrt{\frac{\alpha_{12}\,\alpha_{21}\,\gamma_{12}\,\gamma_{21}}{2\,M^2\,(M^2+N^2)} - \frac{\alpha_{21}^2\,\gamma_{11}\,\gamma_{12}}{2\,M^2\,(M^2+N^2)}} \qquad (8')$$

pentru $\alpha = 0$.

O valoare reală (şi deci pozitivă) pentru patratul amplitudinii rezultă din (7′) dacă (în cazul $\alpha_{21}\,\gamma_{12} > 0$) avem

$$\alpha_{12}\,\gamma_{21} > \alpha_{21}\,\gamma_{11}.$$

Pentru problema linearizată ($\gamma_{ij} = 0$) obţinem pe lîngă $\alpha = 0$ valorile pe conturul domeniului

$$\alpha = \pm\frac{\sqrt{\alpha_{12}\,\alpha_{21}}}{M N}. \qquad (10)$$

Pentru aceste valori urmează (semnul aparţinînd valorii negative fiind pus în paranteză)

$$\gamma_{12}\,\gamma_{21}\,A = \overset{-}{(+)}\left(\frac{N^2\gamma_{12}}{M^2+N^2} + \gamma_{21}\right)\frac{\sqrt{\alpha_{12}\,\alpha_{21}}}{2\,MN} \pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{\gamma_{21}^2\,\gamma_{12}\,\alpha_{21}}{4\,M^2\,N^2} - \frac{\gamma_{11}\,\gamma_{12}\,\alpha_{21}^2}{2\,M^2\,(M^2+N^2)}}. \qquad (11)$$

O valoare reală (şi deci o valoare pozitivă pentru una din valorile (10)) pentru patratul amplitudinii rezultă din (11) exact atunci cînd (în cazurile $\alpha_{12} > 0$, $\alpha_{21} > 0$ şi $N^2\gamma_{12} \neq -(M^2+N^2)\,\gamma_{21}$) avem

$$(M^2+N^2)\,\gamma_{21}^2\,\alpha_{12} \geqslant 2\,N^2\,\gamma_{11}\,\gamma_{12}\,\alpha_{21}.$$

Pentru suma patratelor

$$B = r_3^2 + r_4^2$$

a celorlalţi parametri de ramificare avem, conform cu (5),

$$\left[\alpha + \frac{2\,(M^2+N^2)}{N^2}\,\gamma_{21}\,A\right]^2 B = \frac{\alpha_{21}^2}{N^4}\,\mathrm{A}.$$

Pentru parametrii de ramificare înşişi rezultă expresii mult mai complicate decît pentru sumele patratelor.

## 6. DISCUŢIA RAMIFICAŢIEI PENTRU $\beta_{ij} \neq 0$ ŞI DOMENII DE ORDINUL I

Vom considera acum în cazul $M + N = k$ al domeniilor de speţa a II-a de ordinul I (cazul sumei) cercetat mai de aproape în aliniatul precedent, şi ipoteza că ar exista în plus termenii de amortizare $\beta_{ij}$. Presupunem din nou că $N \neq M$.

Ţinînd seama de (9), ecuaţiile de ramificare din capitolul 3 se pot pune sub forma

$$-\bar{\alpha}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + \frac{\alpha_{12}}{M^2}\begin{pmatrix} r_3 \\ -r_4 \end{pmatrix} + \frac{\beta_{11}}{M}\begin{pmatrix} r_2 \\ -r_1 \end{pmatrix} - \frac{2\,(M^2+N^2)}{M^2}\,\gamma_{11}\,B\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} -$$

$$-\,\gamma_{12}\,A\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$-\bar{\bar{\alpha}}\begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} + \frac{\alpha_{21}}{N^2}\begin{pmatrix} r_1 \\ -r_2 \end{pmatrix} + \frac{\beta_{22}}{N}\begin{pmatrix} r_4 \\ -r_3 \end{pmatrix} - \frac{2\,(M^2+N^2)}{N^2}\,\gamma_{21}\,A\begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Din perechea a doua de ecuaţii de ramificare se calculează

$$\left\{\left[\bar{\bar{\alpha}} + \frac{2\,(M^2+N^2)}{N^2}\,\gamma_{21}\,A\right]^2 + \frac{\beta_{22}^2}{N^2}\right\} r_3 = \frac{\alpha_{21}}{N^2}\left[\bar{\bar{\alpha}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\,(M^2+N^2)}{N^2}\,\gamma_{21}\,A\right] r_1 - \frac{\alpha_{21}\,\beta_{22}}{N^3}\,r_2$$

şi

$$\left\{\left[\bar{\bar{\alpha}} + \frac{2\,(M^2+N^2)}{N^2}\,\gamma_{21}\,A\right]^2 + \frac{\beta_{22}^2}{N^2}\right\} r_4 = -\,\frac{\alpha_{21}\,\beta_{22}}{N^3}\,r_1 -$$

$$- \frac{\alpha_{21}}{N^2}\left[\bar{\bar{\alpha}} + \frac{2\,(M^2+N^2)}{N^2}\,\gamma_{21}\,A\right] r_2$$

pentru

$$\left[\bar{\bar{\alpha}} + \frac{2\,(M^2+N^2)}{N^2}\,\gamma_{21}\,A\right]^2 + \frac{\beta_{22}^2}{N^2} \neq 0,$$

$$\left\{\left[\bar{\bar{\alpha}} + \frac{2\,(M^2+N^2)}{N^2}\,\gamma_{21}\,A\right]^2 + \frac{\beta_{22}^2}{N^2}\right\} B = \frac{\alpha_{21}^2}{N^4}\,A. \tag{12}$$

Introducînd aceste expresii în primele ecuații de ramificare, înmulțind cu $r_2$, respectiv cu $r_1$ și scăzînd, obținem pentru $A$ ecuația de gradul III

$$\beta_{11}\left\{\left[\bar{\bar{\alpha}} + \frac{2\,(M^2+N^2)}{N^2}\,\gamma_{21}A\right]^2 + \frac{\beta_{22}^2}{N^2}\right\}A - \frac{\alpha_{12}\,\alpha_{21}\,\beta_{22}}{MN^3}\,A = 0,$$

care, în afară de $A = 0$, mai are soluțiile (după mărimea inițială $\alpha$)

$$2\,(M^2+N^2)\,\gamma_{21}\,\beta_{11}A = -N^2\alpha\,\beta_{11} + \frac{\alpha_{12}\,\alpha_{21}\,\beta_{11}}{(N+k)^2-M^2} + \frac{\alpha_{12}\alpha_{21}\beta_{11}}{M^2} + \qquad (13)$$

$$+\frac{\alpha_{22}^2\,\beta_{11}}{(N+k)^2-N^2} + \frac{\alpha_{22}^2\,\beta_{11}}{M^2-N^2} \pm \sqrt{\frac{N}{M}\,\alpha_{12}\,\alpha_{21}\,\beta_{11}\,\beta_{22} - N^2\,\beta_{11}{}^2\,\beta_{22}^2}.$$

Pentru $\gamma_{21} = 0$ rezultă din (13) — în afară de termenii de ordin superior — valorile de pe conturul domeniului pentru soluții periodice

$$\alpha = \alpha_{per} = \pm\frac{1}{MN}\sqrt{\alpha_{12}\,\alpha_{21}\frac{M\beta_{22}}{N\beta_{11}} - M^2\,\beta_{22}^2} = \pm\frac{\beta_{22}}{N}\sqrt{\frac{\alpha_{12}\,\alpha_{21}}{MN\,\beta_{11}\,\beta_{22}} - 1}, \qquad (14)$$

care pentru $M\beta_{22} = N\beta_{11}$ și după aceea la limită $\beta_{22} \to 0$ se transformă în valorile (10) ale cazului fără amortizare. O comparație a formulelor (10) și (14) arată că pentru valori adecvate ale lui $\beta_{11}$ și $\beta_{22}$ este posibilă o mărire a lui $\alpha^2$, adică o extindere a domeniului față de cazul fără amortizare.

În figura 1 este reprezentat, ca exemplu, domeniul liber de amortizări prin dreptele linie-punct, iar domeniile pentru $M\beta_{22} = 4\,N\beta_{11}$ prin curbele trasate plin.

Pentru determinarea mărimii $B = r_3^2 + r_4^2$ rezultă din (12) relația

$$N\alpha_{12}\,\alpha_{21}\,\beta_{22}\,B = M\alpha_{21}^2\,\beta_{11}A.$$

În timp ce formula (10) care dă limita domeniului în cazul fără amortizare este cuprinsă ca un caz particular în formula generală (14), care dă conturul domeniului, formula de amplitudine (6′) a cazului fără amortizare are o construcție mai complicată (ecuație de gradul III) decît formula de amplitudine (13).

Din forma ecuațiilor se vede că soluțiile periodice în domenii de speța a doua sînt influențate într-o măsură mult mai mare de termenii de amortizare $\beta_{ik}$ decît în domeniile de speța întîi.

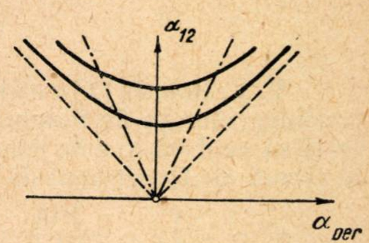


Fig. 1

Pentru domeniul de instabilitate de speța a doua de ordinul întîi (cazul sumelor) al sistemului de ecuații diferențiale liniare

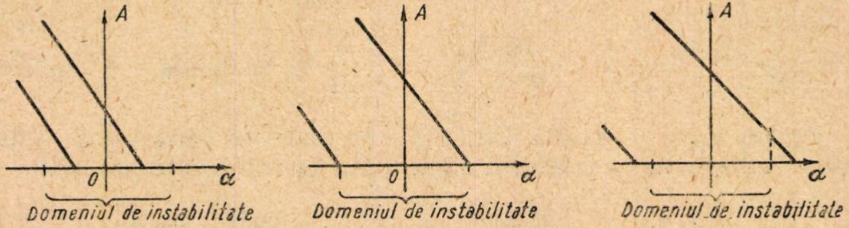
$$\tau_k'' + q_k^2\tau_k = -2\,\varepsilon_q^{(1)}\,\tau_k'' - \varepsilon\sum_{l=1}^{2}\beta_{kl}\,\tau_l' - \varepsilon\cos x\sum_{l=1}^{2}\alpha_{kl}\,\tau_l\ (k = 1{,}2)$$

F. Weidenhammer a găsit limitele

$$q^{(1)} = \pm \frac{\beta_{11} + \beta_{22}}{2} \sqrt{\frac{\alpha_{12}\,\alpha_{21}}{4\,q_1\,q_2\,\beta_{11}\,\beta_{22}} - 1}.$$

Pentru sistemul de ecuații diferențiale (liniarizate) (3) această formulă va fi

$$\alpha = \alpha_{iustab.} = \pm \frac{\beta_{11} + \beta_{22}}{M + N} \sqrt{\frac{\alpha_{12}\,\alpha_{21}}{MN\,\beta_{11}\,\beta_{22}} - 1}. \tag{15}$$


A
0
α
Domeniul de instabilitate
A
0
α
Domeniul de instabilitate
A
α
Domeniul de instabilitate

a) $N\beta_{11} > M\beta_{22}$ b) $N\beta_{11} = M\beta_{22}$ c) $N\beta_{11} < M\beta_{22}$

Fig. 2

Comparînd (14) și (15) se vede că domeniul de instabilitate cuprinde domeniul de periodicitate

$$|\alpha_{instab.}| \geqslant |\alpha_{per}|,$$

tocmai atunci cînd

$$N\beta_{11} \geqslant M\beta_{22},$$

unde semnele de egalitate se corespund. Rezultă deci (pentru $\gamma_{21} > 0$) cele trei cazuri reprezentate în figura 2.

În cazul *a*) există un subdomeniu, în care soluția banală corespunzătoare $A = 0$ este instabilă și nu există nici o soluție periodică nebanală.

## 7. APLICAȚII

V. V. Bolotin [1] a elaborat pentru vibrațiile cuplate de încovoiere-torsiune (vibrații de flambaj lateral) ale barelor simplu rezemate ale căror secțiuni au două axe de simetrie (de exemplu platbandă de oțel sau grindă în formă de I) sistemul de ecuații diferențiale

$$\begin{aligned} u'' + \omega_x^2\left[u - \frac{l^2\Phi}{\pi^2 EJ_y} M_t\cos\theta t\right] + s_1\Phi\,(u''\Phi + 2u'\Phi' + u\Phi'') + \\ + 2\varkappa\,u\,(u'^2 + uu'') = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \Phi'' + \omega_\varphi^2\left[\Phi - \frac{u}{GJ_d} M_t\cos\theta t\right] + \frac{1}{r^2} s_1 u\,(u''\Phi + 2\,u'\Phi' + u\Phi'') + \\ + 2\varkappa\Phi\,(u'^2 + uu'') = 0, \end{aligned}$$

unde deplasarea $u$ și unghiul de torsiune $\varphi$ (vezi fig. 3) sînt bazate pe formulele

$$u(z,t) = u(t)\sin\frac{\pi z}{l}, \quad \varphi(z,t) = \Phi(t)\sin\frac{\pi z}{l},$$

$\omega_x$ și $\omega_\varphi$ sînt frecvențele proprii cele mai joase ale vibrațiilor de încovoiere respectiv torsiune, $EJ_y$ este stabilitatea la încovoiere raportată la axa $y$, $GJ_d$ stabilitatea la torsiune, $r$ raza polară de inerție a secțiunii; în cazul lipsei unei mase de capăt avem $s_1 = 0{,}7360$, $\varkappa l^2 = 6{,}57$, iar barele indică derivatele în raport cu timpul $t$.

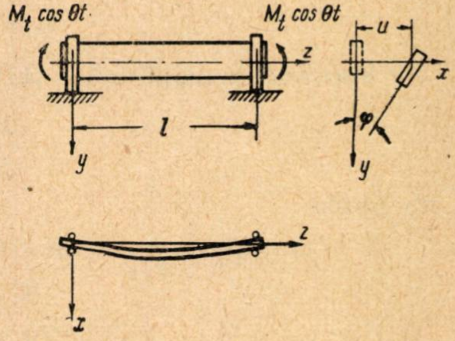


Fig. 3

Înlocuind în (16) pe $\theta t$ prin $kx$ și diferențiala în raport cu $t$, cu ajutorul relației $\frac{d}{dt} = \frac{\theta}{k}\frac{d}{dx}$, prin diferențiala în raport cu $x$, introducînd apoi $\theta^2 = \theta_0^2\,(1+\alpha)$ și înmulțind cu $k^2/\theta_0^2$, obținem o corespondență între (3)și (16) pentru următoarele mărimi :

| în (3) | $kx$ | $u_1$ | $u_2$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\alpha$ | $2\,\alpha_{12}$ | $2\,\alpha_{21}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| în (6) | $\theta t$ | $u$ | $\Phi$ | $\frac{k^2\omega_x^2}{\theta_0^2}$ | $\frac{k^2\omega_\varphi^2}{\theta_0^2}$ | $\frac{\theta^2-\theta_0^2}{\theta_0^2}$ | $-\frac{k^2 l^2\,\omega_x^2 M_t}{\pi^2\theta_0^2 EJ_y}$ | $-\frac{k^2\,\omega_\varphi^2 M_t}{\theta_0^2\,GJ_d}$ |

| în (3) | $4\,\gamma_{11}$ | $4\,\gamma_{21}$ | $\gamma_{12}$ | $\gamma_{22}$. |
|---|---|---|---|---|
| în (6) | $(1+\alpha)\,s_1$ | $\frac{(1+\alpha)\,s_1}{r^2}$ | $(1+\alpha)\,\varkappa$ | $(1+\alpha)\,\varkappa$ |

Cu notațiile din (16) și menținînd coeficienții de amortizare $\beta_{ik}$, formula de amplitudine (13) — neglijînd în membrul I $\alpha$ față de 1 — devine, pentru $\beta_{11} \neq 0$,

$$\frac{(M^2+N^2)\,s_1}{2\,N^2\,r^2}\,A = -\frac{\theta^2-\theta_0^2}{\theta_0^2} + \frac{(M+2\,N)^2\,l^2\,M^2{}_t}{16\,\pi^2 N\,(M+N)\,EJ_y GJ_d} \pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{l^2\,M_t^2}{4\,\pi^2 EJ_y\,GJ_d}\,\frac{M\beta_{22}}{N\beta_{11}} - \frac{\beta_{22}^2}{N^2}}\,. \tag{17}$$

Relațiile $\lambda_1 = M^2$, $\lambda_2 = N^2$ duc la

$$\frac{\omega_x}{\theta_0} = \frac{M}{k}, \quad \frac{\omega_\varphi}{\theta_0} = \frac{N}{k}$$

şi deci

$$\frac{\omega_x}{\omega_\varphi} = \frac{M}{N}.$$

Condiţia de sumă $k = M + N$ se transformă în condiţa ca frecvenţa momentului final să fie egală cu suma frecvenţelor proprii

$$\theta_0 = \omega_x + \omega_\varphi .$$

Formula de amplitudine (17) se poate scrie, cu

$$\frac{M}{N} = q,$$

sub forma

$$\frac{(1+q^2)\,s_1}{2\,r^2} A = -\frac{\theta^2-\theta_0^2}{\theta_0^2} + \frac{(2+q)^2\, l^2 M_t^2}{16\,\pi^2 (1+q)\, EJ_y GJ_d} \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{q\, l^2 M_t^2}{4\,\pi^2\, EJ_y GJ_d}\,\frac{\beta_{22}}{\beta_{11}} - \frac{\beta_{22}^2}{N^2}}.$$

Introducînd coeficienţii adecvaţi de amortizare, de exemplu $\frac{\beta_{ij}}{N}$, obţinem o formulă de amplitudine care nu depinde de $M$ şi $N$, ci numai de $q$.

Constatăm astfel că metoda de calcul prezentată mai sus ne permite să obţinem rezultate interesante şi cu suficientă exactitate cu privire la problema propusă.

# ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЭЛАСТОДИНАМИКЕ

## РЕЗЮМЕ

Периодические решения системы нелинейных дифференциальных уравнений, появляющиеся в областях неустойчивости второго рода (в случае применений в эластодинамике — колебания бокового изгиба плоских железных полос или двухтавровых балок), исследуются при помощи теории нелинейных интегральных уравнений. Для областей первого и второго порядка получаются уравнения амплитуд, причем члены затухания оказываются особенно важными. Для примера резонанса суммы первого порядка двухтавровой балки получаются значительные амплитуды даже в случае сравнительно малых последних моментов.

# ANWENDUNG DER THEORIE NICHTLINEARER INTEGRALGLEICHUNGEN IN DER ELASTOKINETIK

## ZUSAMMENFASSUNG

Die in den Instabilitätsbereichen zweiter Art auftretenden periodischen Lösungen eines Systems nichtlinearer Differentialgleichungen (bei Anwendung auf die Elastokinetik der nichtlinearen Kippschwingungen von Flacheisen oder $I$ - Trägern) werden mit Hilfe der Theorie nichtlinearer Integralgleichungen untersucht. Für Bereiche erster und zweiter Ordnung werden Amplitudengleichungen gewonnen, wobei sich die Dämpfungsglieder als besonders wichtig erweisen. Für das Beispiel der Summenresonanz erster Ordnung eines $I$-Trägers ergeben sich schon bei verhältnismäßig kleinen Endmomenten beachtliche Schwingungsamplituden.

## BIBLIOGRAFIE

1. B. B. Болотин, *Динамическая устойчивость упругих систем. Москва*, 1956.
2. L. Lichtenstein, *Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integrodifferentialgleichungen nebst Anwendungen.* Berlin, 1931.
3. E. Mettler, *Nichtlineare Schwingungen und kinetische Instabilität bei Saiten und Stäben.* Ing.-Arch., *23*, 354 (1955).
4. K. A. Reckling, *Die Stabilität erzwungener harmonischer Schwingungen gerader I-Träger im Verband eines Tragwerkes.* Ing.-Arch., *20*, 137 (1952).
5. E. Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III. Teil. Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichungen und die Verzweigung ihrer Lösungen.* Math. Ann., *65*, 370 (1905).

# STUDIUL EXPERIMENTAL AL PLĂCILOR PLANE PRIN METODA INTERFERENȚELOR MECANICE

DE

N. IOSIPESCU [1]

## 1. CONSIDERAȚII ASUPRA STUDIULUI EXPERIMENTAL AL PLĂCILOR PLANE

Unele din elementele de construcție cele mai importante, atît din punct de vedere tehnic, al bunei lor rezistențe la solicitări, cît și din punct de vedere economic, din cauza marei lor răspîndiri în ansamblul lucrărilor, sînt cele alcătuite sub formă de plăci plane, solicitate în direcția normală pe planul lor. Calculul solicitării acestor plăci plane la încovoiere nu este posibil a se realiza însă întotdeauna suficient de exact în mod teoretic, cu tot numărul mare de soluții ale unor asemenea probleme existente în tratatele de teoria plăcilor.

Într-adevăr numai pentru unele probleme mai simple, ca formă și ca sistem de rezemare al plăcilor pe contur, cum și ca mod de solicitare al lor de către forțele exterioare, există soluții exacte teoretice, indicate în tratatele de specialitate, cum sînt pe exemplu acele ale lui Timoshenko [1], Girkmann [2] etc. Elementele de construcție ce se prezintă sub formă de plăci plane sînt însă mult mai numeroase și mai variate decît problemele tip ce se găsesc expuse în tratate, astfel că aplicarea soluțiilor teoretice nu este întotdeauna posibilă.

De aceea, o dată cu dezvoltarea procedeelor *analizei experimentale a tensiunilor*, s-a căutat să se aplice diferite metode de cercetare de laborator și pentru studiul plăcilor plane pe modele la scară redusă.

S-au întrebuințat astfel în acest scop chiar cercetările fotoelastice propriu-zise, ca o formă a aplicării lor pentru studiile spațiale prin metoda înghețării eforturilor, descrisă de către Frocht în tratatul său [3]. S-au folosit de asemenea și alte procedee speciale de lucru, cum este de exemplu metoda *straturilor*, aplicată și descrisă de către Kuske într-unul din studiile sale [4]. Cu toate rezultatele favorabile obținute, totuși posibilitățile de aplicare ale fotoelasticității la studiul plăcilor plane solicitate în direcție normală pe planul lor, sînt limitate de anumite condiții de execuție ale încercărilor experimentale respective. De aceea, ele nu au putut fi generalizate pentru orice problemă de acest fel, ceea ce a făcut ca cercetările corespunzătoare să fie îndreptate și în altă direcție.

---

[1] Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor (INCERC).

## 2. STUDIUL PLĂCILOR PLANE PRIN METODA INTERFERENȚELOR MECANICE

În ultimii ani a luat astfel ființă și a început să capete o extindere deosebită o nouă metodă optică de studiu a deformațiilor suprafețelor plane, așa-numita metodă a *moaré-urilor*. Ea a fost denumită în mod potrivit de către unii cercetători, cum este cazul lui Shepard și Weller [5], metoda *interferențelor mecanice*, sub care aceștia au utilizat-o la diferite categorii de cercetări asupra deplasărilor mici ale suprafețelor plane.

Această metodă, folosită la început sub numele mai general de *metoda rețelelor*, a fost aplicată, de asemenea, la studiul experimental al deformațiilor transversale ale modelelor plane, supuse la stări de solicitări plane. Ea a servit deci la studiul problemei discurilor din elasticitatea plană, ca o completare a cercetărilor fotoelastice bidimensionale, în scopul determinării liniilor de egală sumă a tensiunilor principale. Ea este citată în acest sens în unele din lucrările apărute mai recent asupra fotoelasticității, cum este cazul studiului publicat de Mesmer de exemplu [6].

Metoda folosirii rețelelor și a studiului fenomenelor optice produse cu ajutorul lor la cercetarea deformațiilor suprafețelor plane, a căpătat o mare dezvoltare, datorită în special lucrărilor lui Dantu, dintre care cea mai recentă este aceea apărută în anul 1958 [7], cuprinzînd o serie de aplicații interesante ale acestei metode. Folosirea metodei interferențelor mecanice la studiul plăcilor plane solicitate transversal, s-a datorat la începuturile ei, într-o bună măsură și lucrărilor lui Bowen [8].

Ea a fost dezvoltată apoi mai recent, în mod mult mai complet, sub forma ei actuală, de către Ligtenbergh [9], care i-a dat un aspect sistematic și o realizare experimentală frumoasă, în cadrul cercetărilor de la Universitatea tehnologică din Delft (Olanda). Tot în cadrul acestei Universități, în afară de lucrările experimentale practice ale lui Ligtenbergh, menționate în studiul sus citat [9], s-au mai executat și alte cercetări cu caracter pur tehnic, cum este de exemplu acel efectuat asupra planșeelor-ciuperci, realizat de către Wreedenburgh și Wijngaarden [10].

Metoda interferențelor mecanice constă în fond din cercetarea și analizarea unor fenomene optice de interferență rezultate din suprapunerea unor rețele de linii, fenomene ce au unele aspecte caracteristice, numite de obicei *moaré-uri*, analoage acelora ale interferențelor optice propriu-zise. Asemenea fenomene de interferențe mecanice, apărînd sub forma unor franje alternativ luminoase și întunecate, se manifestă în modul cel mai simplu atunci cînd se suprapun imaginile a două rețele de linii paralele apropiate, situate în poziții ușor deplasate sau înclinate una față de alta.

Aspectul acestor franje depinde de pozițiile și unghiurile respective de înclinare ale celor două rețele suprapuse, după cum se constată din figurile 1 *a* și *b*, în care unghiul de înclinare respectiv al celor două rețele este de 10° pentru prima figură și de 20° pentru cea de a doua. După cum se constată, franjele moarate obținute sînt formate în acest caz din benzi paralele întunecate, îndreptate în direcții înclinate după bisectoarea unghiului obtuz al celor două rețele încrucișate.

Rețelele folosite în acest scop sînt alcătuite din linii drepte paralele de grosimi egale, trasate la distanțe uniforme, fie de-a dreptul pe model, după cum se procedează uneori, de exemplu pentru studiul deformațiilor transversale ale discurilor, în care caz ele sînt fotografiate direct, fie trasate pe un ecran separat și reflectate apoi de către suprafața argintată a modelului, așa cum se lucrează în cazul studiului plăcilor plane. La începutul aplicării metodei, cele două fotografii ale rețelelor se făceau separat, pe două clișee deosebite, care se suprapuneau apoi pentru obținerea franjelor de interferență respective.

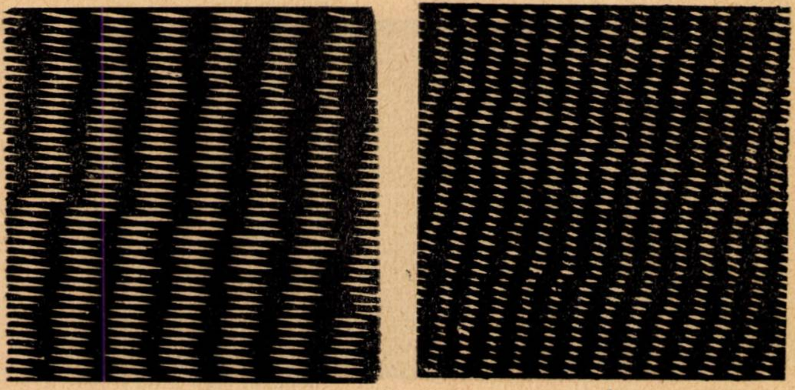

*a* *b*

Fig. 1

În forma cea mai recentă de aplicare a metodei, aceste rețele reflectate sînt fotografiate în mod suprapus, direct pe un același clișeu, înainte și după deformația produsă din cauza solicitării piesei de model. Se obțin în acest caz fenomene optice asemănătoare acelora din figura 2, care reprezintă franjele moarate de diferite numere de ordine, ce pot fi produse prin suprapunerea peste rețeaua de linii drepte, în forma lor inițială, a unei rețele deformate, obținută de exemplu prin curbarea primelor, din cauza solicitării modelului respectiv.

Fenomenele realizate experimental sînt asemănătoare, fie pentru cazul trasării rețelei direct pe model, fie prin reflectarea rețelei trasate pe un ecran separat, fotografiate înainte și după producerea deformației modelului reflectant. Numai grosimea și desimea liniilor rețelei sau ale ecranului variază între un caz și altul, cum și scara modelelor și a fotografiilor respective.

Prin legătura matematică care există între aceste fenomene optice și între acele elastice, caracterizate prin modul de deformație al piesei de model, se pot stabili condițiile calitative de variație ale solicitărilor în tot cuprinsul piesei studiate. Se pot obține chiar valorile cantitative ale acelor solicitări, prin încercări suplimentare de etalonare potrivite, făcute asupra materialului din care sînt confecționate modelele respective.

Precizia și sensibilitatea metodei acesteia sînt mult mai bune decît acele care se pot obține pentru cercetările fotoelastice aplicate la studiul plăcilor plane, prin metoda lui Kuske de exemplu. Simplitatea și costul redus al aparaturii folosite fac ca ea să se poată construi și aplica mult mai ușor, fără a fi nevoie de cheltuieli prea mari cu dotarea și funcționarea unui astfel de laborator de cercetare a plăcilor plane pe modele, prin metoda interferențelor mecanice.

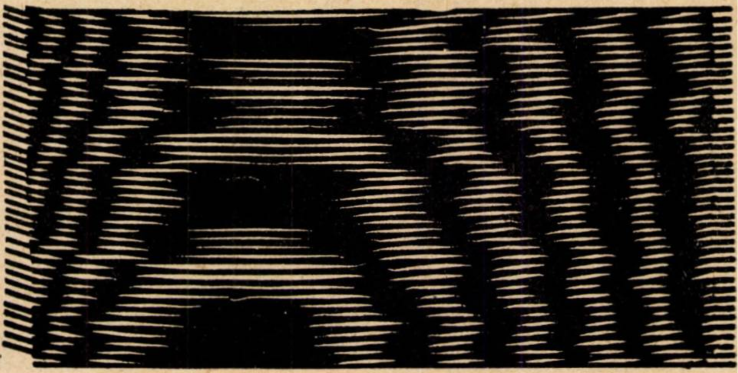


Fig. 2

### 3. BAZELE TEORETICE ALE ÎNCOVOIERII PLĂCILOR PLANE

În toate metodele de studiu ale solicitării elementelor de construcții, prin așa-numita *analiză experimentală a tensiunilor*, fenomenele care se pot constata și măsura direct, prin încercările făcute pe modele la scară redusă, sînt de obicei deformațiile acestor piese de model, produse sub acțiunea solicitărilor. Chiar și în cazul cercetărilor fotoelastice, fenomenele optice produse în lumină polarizată, bazate pe proprietatea de birefringență accidentală, se datoresc în fond tot numai deformațiilor materialului și nu tensiunilor propriu-zise, produse de către solicitări, deși legile de bază ale fotoelasticității, sînt stabilite în legătură directă cu aceste tensiuni. Metoda interferențelor mecanice, se bazează deci și ea tot pe măsurarea unor cantități depinzînd strîns și direct de deformațiile plăcii, anume ale unghiurilor de înclinare ale suprafeței acesteia, din care se deduc apoi stările de solicitări efective care produc acele deformații.

Principiile teoretice ale acestei metode se bazează astfel pe ecuațiile elasticității plăcilor plane solicitate în direcție normală pe planul lor, date de către toate tratatele de specialitate, cum sînt de exemplu acele citate în bibliografie la [1] și [2]. În cazul încovoierii pure a acestor plăci subțiri, deci în cazul lipsei sau neglijării acțiunii forțelor tăietoare, ecuațiile care leagă valorile momentelor încovoietoare $M_x$ și $M_y$ și a acelor de răsucire $M_{xy}$ (fig. 3) de valorile săgeților $w$, sînt exprimate prin următoarele relații

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\quad M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\cdot \qquad (1)$$

În aceste ecuații $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = \frac{EI}{1-\mu^2}$ reprezintă modulul de rigiditate al plăcii de grosime $h$, sau de moment de imerție $I$, în care $E$ este modulul de elasticitate, iar $\mu$ este coeficientul lui Poisson al materialului respectiv.

Prin $w$ este notată deplasarea planului median al plăcii în direcția axei verticale $Oz$, produsă sub acțiunea încovoierii în fiecare punct de coordonate $x$ și $y$, fiind deci o funcție de aceste două variabile: $w = F(x, y)$. Această expresie a săgeții se poate considera separat că are o variație oarecare în funcție numai de $x$, adică $w_x = F(x, y_0)$, pentru o secțiune $y = y_0 =$ const. (fig. 4), cum și alta analoagă, în funcție numai de $y$, adică: $w_y = F(x_0, y)$ pentru o secțiune $x = x_0 =$ const. variații care vor fi luate în considerare în aplicarea metodei experimentale de față.

Avînd în vedere că derivatele de ordinul II ale lui $w$ și anume: $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ și $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ din ecuațiile (1) nu pot fi determinate direct pe cale experimentală, se pune problema de a se găsi o metodă convenabilă care

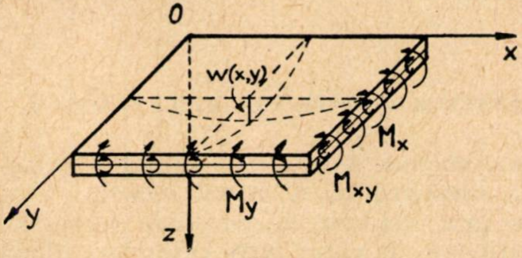


Fig. 3

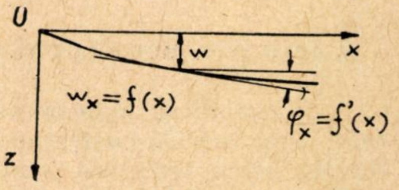


Fig. 4

să permită a se măsura, fie valorile săgeților $w$, fie acele ale derivatelor lor parțiale de ordinul întîi: $\frac{\partial w}{\partial x}$ și $\frac{\partial w}{\partial y}\cdot$

Aceste derivate parțiale reprezintă de fapt tangentele trigonometrice ale unghiurilor de înclinare, de valori foarte mici: $\varphi_x$ și $\varphi_y$, sau ale pantelor din direcțiile axelor $x$ și $y$, ale suprafeței plăcii deformate, a cărei formă spațială este dată teoretic de către funcția $w = F(x, y)$.

Determinarea experimentală directă a săgeților $w$ este destul de dificilă de realizat prin măsurători făcute pe cale mecanică, iar stabilirea lor pe cale optică interferometrică este extrem de delicată. Este mult mai avantajos de a se stabili experimental însă valorile înclinărilor sau pantelor.

$$\varphi_x \approx \operatorname{tg} \varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{și} \quad \varphi_y \approx \operatorname{tg} \varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y}, \tag{2}$$

ale suprafeței de deformație a plăcii, după solicitarea ei produsă prin încovoiere, folosindu-se metoda interferențelor mecanice. Ele pot servi pentru a se trasa apoi diagramele de variație ale acestor cantități, care sînt egale cu derivatele parțiale în raport cu $x$ și $y$ ale funcției $w = F(x, y)$, anume

$$\varphi_x = F'_x(x, y_0) = f(x) \quad \text{și} \quad \varphi_y = F'_y(x_0, y) = f_1(y), \tag{3}$$

din lungul acelor direcții paralele cu axele $x$ sau $y$ ($y = y_0$ sau $x = x_0$).

Printr-o a doua derivare, care se poate efectua de asemenea pe cale grafică, din diagramele de variație ale lui $\varphi_x$ și $\varphi_y$, se pot obține cantitățile

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \quad \text{și} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}, \tag{4}$$

cum și diagramele lor de variație din lungul acelorași direcții ($y = y_0$ și $x = x_0$). Din acestea se pot determina apoi valorile momentelor $M_x$, $M_y$ și $M_{xy}$, din oricare punct al plăcii, prin formulele (1) cum și diagramele lor de variație în lungul direcțiilor considerate.

Pe baza acestor considerații teoretice generale se poate proceda acum la explicarea și interpretarea fenomenelor optico-elastice produse prin metoda interferențelor mecanice, după cum vom arăta în cele ce urmează.

## 4. APLICAREA METODEI INTERFERENȚELOR MECANICE LA STUDIUL PLĂCILOR

Principiul de aplicare al acestei metode constă din studiul deformațiilor unor modele confecționate la scară redusă, de forma exactă a conturului plăcii cercetate, susținute prin sistemul de rezemare respectiv, analog aceluia al piesei reale și acționate de către forțe exterioare, după modul de solicitare al elementelor de construcție studiate. Aceste modele sînt realizate de cele mai multe ori dintr-un material sintetic cu o comportare elastică izotropă, de preferință plexiglasul, de o grosime aproximativ proporțională cu aceea a plăcilor reale studiate.

Modelele din plexiglas sînt argintate (sau arămite) în prealabil pe una din fețele lor, astfel ca ele să se comporte întocmai ca o oglindă reflectantă, atunci cînd sînt așezate în aparatul de cercetare respectiv. Ele sînt fixate într-o poziție verticală, cu planul lor îndreptat în sens perpendicular pe direcția de examinare, dînd prin reflexie imaginea unui ecran vertical *V* așezat în fața lor (fig. 5). Acest ecran este format dintr-o hîrtie albă de desen, liniată pe toată suprafața ei într-un mod cît mai regulat, prin linii negre paralele de egală grosime, situate la întredistanțe egale (*d*), lăsîndu-se între ele intervale albe de o lățime egală cu însăși grosimea liniilor.

Ecranul este luminat puternic din față și este reflectat de către su-

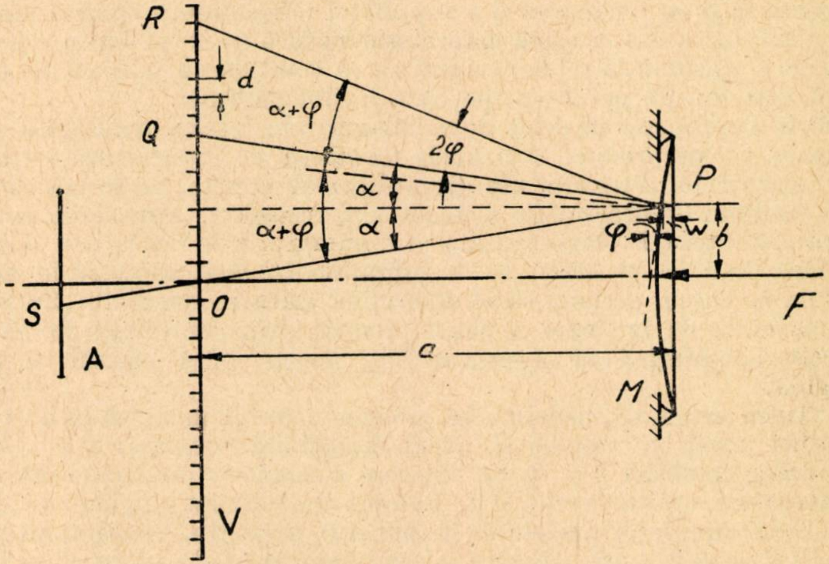


Fig. 5

prafața argintată a modelului (*M*). El este fotografiat, prin reflexia lui de către model, cu ajutorul unui aparat fotografic cu plăci, cu obiectivul așezat imediat în spatele ecranului, în dreptul unui orificiu circular (*O*) lăsat în mijlocul acelui ecran. Se face astfel o primă fotografie, pentru ecranul reflectat de către suprafața plăcii de model nedeformată, în starea ei plană inițială, după care modelul este solicitat, cu ajutorul unor pîrghii metalice acționînd prin partea lui din spate și este fotografiat apoi din nou pe același clișeu, după producerea deformațiilor elastice respective.

Din cauza suprapunerii imaginilor puțin diferite ale celor două rețele fotografiate, prima reflectată de către modelul nedeformat și cea de a doua de către modelul deformat prin solicitare, se produc fenomenele de interferențe mecanice. Aceste fenomene de interferență se prezintă sub forma unor benzi sau franje, de aspecte alternative întunecate și luminoase, produse prin reflexia ecranului pe suprafața piesei și rezultate din suprapunerea imaginilor dinainte și după deformarea modelului. Aceste franje sînt caracterizate fiecare prin proprietatea de a fi locuri geometrice ale punctelor de anumite înclinări constante ale suprafeței deformate a plăcii solicitate, înclinări care sînt considerate întotdeauna în direcție normală pe liniatura ecranului.

BUDAPEST

Pentru a explica acest fapt, considerăm în planul unei secțiuni longitudinale a aparatului, dusă în direcție normală pe liniatura ecranului, imaginea $S$ a unui punct $P$ al plăcii de model nedeformate ($M$), obținută pe geamul mat al aparatului fotografic sau pe clișeul respectiv (vezi fig. 5). Se constată că în același punct apare simultan și imaginea reflectată a punctului $Q$, considerat a fi situat pe o anumită linie a rețelei ecranului vertical $V$. Dacă se solicită apoi placa și dacă deci se deformează modelul cu săgeata $w$ și cu înclinarea $\varphi$ a suprafeței reflectante a oglinzii din acel loc al plăcii de model, această deformație va face ca un al doilea punct $R$, situat pe o altă linie a rețelei ecranului, să coincidă cu punctul $S$ de pe geamul mat sau de pe clișeu, pe baza legilor reflexiei.

Prin suprapunerea celor două imagini ale rețelei, deformate și nedeformate, se vor produce deci unele fenomene de interferență între cele două liniaturi ale ecranului din dreptul acelor puncte, de formă caracteristică modului de deformație al modelului respectiv. Aprecierea sau măsurarea distanței $QR$, caracterizată prin numărul $k$ de interspații $d$ dintre cele două linii de pe ecran ce se suprapun în mod succesiv în același punct de pe clișeu, permite să se determine valoarea unghiului $2\varphi$ și deci aceea a lui $\varphi$, de înclinare a plăcii produsă prin deformație în punctul respectiv, considerînd că săgeata $w$ fiind foarte mică efectul ei poate fi neglijat.

Ținem seama că, pentru a se produce o franjă moarată de un număr de ordine întreg $k$, trebuie să avem îndeplinită condiția: $QR = kd$, în mod analog condiției $\delta = k\lambda$ de obținere a franjelor luminoase din cazul interferențelor optice (vezi [11]). Rămîne de calculat unghiul de deformație $\varphi$ al suprafeței modelului în punctul respectiv, corespunzător valorii distanței $QR = kd$. Această relație poate fi găsită pe bază de considerații geometrice, pentru cazul unui ecran plan, de exemplu, ea fiind reprezentată aproximativ prin expresia

$$QR = \frac{2a\varphi}{\cos^2\alpha} = 2a.\varphi.\,(1 + \mathrm{tg}^2\alpha) = 2a\varphi\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \qquad (5)$$

în care $a$ și $b$ sînt distanțele notate pe figura 5. Prezența acestui termen de valoare destul de mică, $\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{b^2}{a^2}$ i-a sugerat autorului metodei (9) o alegere potrivită a formei ecranului $V$, alcătuită într-un asemenea mod, încît să se poată folosi în calcule expresia mai simplă

$$QR = 2\,a\varphi. \qquad (6)$$

Această condiție pentru ca termenul $\frac{b^2}{a^2}$ din expresia (4) să dispară, în scopul de a se putea aplica astfel formula simplificată $QR = 2a\varphi$, este obținută cu o precizie suficientă dacă se dă ecranului $V$ forma unui cilindru circular drept, cu raza de curbură $R = 3{,}5\ a$, ceea ce a fost stabilit atît teoretic, cît și experimental.

Se observă că prin introducerea și folosirea efectului moarat, este măsurată doar diferența dintre cele două stări de deformație ale plăcii, aceea inițială, lipsită de orice solicitare, sau cu o solicitare foarte slabă și aceea finală, cu solicitarea definitivă. De aceea, nu este necesar ca modelul să fie perfect plan la început și nu există, de asemenea, nici o obiecție asupra admiterii unor ușoare deformații ale plăcii în starea ei inițială.

### 5. INTERPRETAREA TEORETICĂ A FENOMENELOR PRODUSE EXPERIMENTAL

Franjele moarate de pe fotografia modelului plăcii, obținute pe cale experimentală, pot fi deci interpretate ca linii de egală valoare a înclinării suprafeței deformate $w = F(x,y)$, considerată într-o direcție $n$, normală la liniatura ecranului. Ele pot fi considerate în același timp drept linii de nivel constant ale unei suprafețe spațiale convenționale date de o ecuație de forma : $z_{(n)} = \varphi_{n'}$ în care $\varphi_n = \frac{\partial w}{\partial n}$ este expresia pantei în direcția $n$ a suprafeței deformate.

Expresia pantelor suprafeței de deformație în direcții paralele cu axele $x$ sau $y$, ale căror valori constante caracterizează curbele de interferențe mecanice care se vor produce experimental, sînt deci de forma

$$\varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x} = \text{const., sau } \varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y} = \text{const}. \tag{7}$$

Condițiile de legătură între distanța $QR = k \cdot d$ de pe ecran și între unghiul de înclinare $\varphi_x$ sau $\varphi_y$ al suprafeței modelului după deformație, în direcția axei $x$, sau în ipoteza simplificată a neglijării termenului $\frac{b^2}{a^2}$ din relația (4) sînt date de relațiile

$$QR = 2a \cdot \varphi_x = kd \quad \text{sau} \quad QR = 2a \cdot \varphi_y = k'd, \tag{8}$$

de unde rezultă expresiile pantelor constante care caracterizează franjele de numere de ordine întregi $k$ sau $k'$

$$\varphi_x = \frac{kd}{2a} = k\,\Delta\varphi \qquad \varphi_y = \frac{k'd}{2a} = k'\,\Delta\varphi. \tag{9}$$

Astfel că ecuațiile familiilor curbelor moarate, pentru franjele obținute cu liniatura ecranului așezată în poziție verticală sau orizontală sînt date de expresiile următoare :

$$F'_x(x,y) = k\,\Delta\varphi \quad \text{și} \quad F'_y(x,y) = k'\,\Delta\varphi. \tag{10}$$

În aceste ecuații parametrii $k$ și $k'$ reprezintă numerele de ordine de valori întregi succesive ale franjelor respective din fiecare direcție, iar $w = F(x, y)$, este funcția dată de ecuația de legătură teoretică dintre deformații și solicitări, caracteristică plăcii și solicitării corespunzătoare, în cazul cînd această funcție poate fi stabilită în mod analitic. Unghiul elementar

$\Delta\varphi = \frac{d}{2a}$ este o constantă a aparatului, corespunzînd cu diferența de înclinare a pantei suprafeței de variație a lui $w$ între două franje moarate consecutive, egală deci cu echidistanța acestor franje moarate, considerate ca linii de nivel ale unei suprafețe convenționale : $z_{(n)} = \varphi_n$.

## 6. UTILIZAREA ȘI PRELUCRAREA REZULTATELOR EXPERIMENTALE OBȚINUTE

Pentru a se putea calcula valorile momentelor $M_x$, $M_y$ și $M_{xy}$ dintr-un punct oarecare $(x, y)$ al plăcii cercetate experimental, pe baza datelor obținute prin fotografierea franjelor moarate, trebuie determinate mai întîi valorile lui $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ și $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ din punctul respectiv, pe care le introducem în formulele (1). Acest lucru se poate efectua prin derivarea expresiilor pantelor suprafeței de deformație, adică ale lui $\varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x}$ și $\varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y}$, derivate care pot fi obținute în mod grafic din diagramele de variație ale acestor cantități după direcțiile paralele cu axele $x$ și $y$ ce trec prin acel punct. Aceste diagrame pot fi stabilite prin aspectul liniilor de nivel date de condițiile $\varphi_x = k\,\Delta\varphi$ și $\varphi_y = k'\,\Delta\varphi$, realizate experimental prin fotografierea franjelor moarate respective, obținute pentru poziția liniaturii ecranului îndreptată în direcție verticală sau orizontală.

Pentru a-l determina pe $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}$ de exemplu, se poate folosi diagrama trasată prin considerarea variației lui $\varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y}$ din lungul unei secțiuni paralele cu axa $Oy$, deci pentru $x = x_0$ (fig. 6). Această diagramă se obține ușor pe cale grafică din ansamblul franjelor moarate realizate experimental pentru poziția ecranului cu liniatura paralelă la axa $Ox$, reprezentată în partea de jos a figurii.

Dintr-o astfel de diagramă de variație a lui $\varphi_y$, considerată ca funcție numai de $y$, se poate deduce apoi, în mod grafic, lucrînd cu diferențe finite, diagrama de variație a lui $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}$ (fig. 7), procedînd în modul arătat în această figură. Această operație se realizează ducînd în fiecare din punctele de diviziune ale curbei $\varphi_y = f(y)$, situate la distanțe fixe egale cu unitatea ($\Delta y = 1$) măsurate în sensul axei absciselor $y$, tangentele geometrice la acea curbă. Se măsoară apoi valorile tangentelor trigonometrice ale unghiurilor formate de acestea cu orizontala, valori pe care le ducem apoi ca ordonate în diagrama de variație a lui $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ din partea de jos a figurii, în dreptul punctelor de diviziune respective, pentru care se măsoară valoarea tangentei.

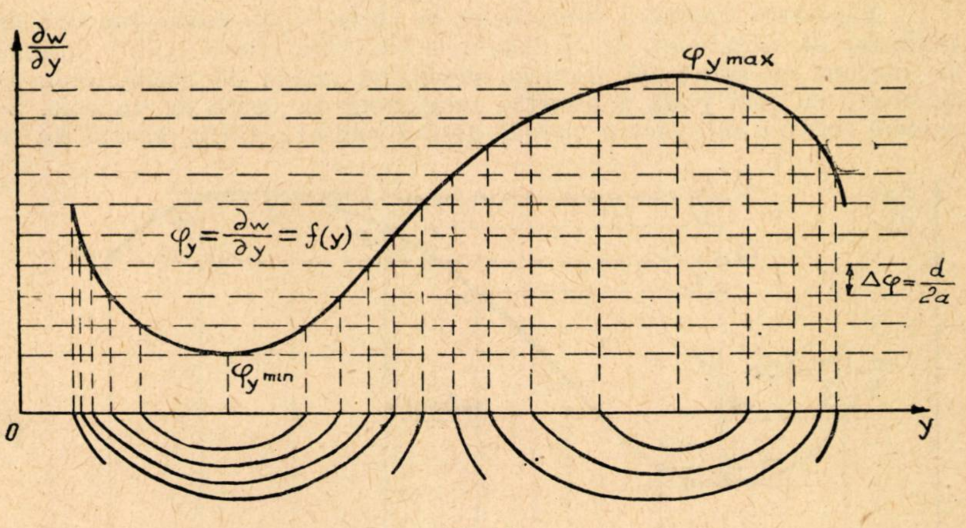

$\frac{\partial w}{\partial y}$
$\varphi_{y\,max}$
$\varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y} = f(y)$
$\Delta\varphi = \frac{d}{2a}$
$\varphi_{y\,min}$
0
y

Fig. 6

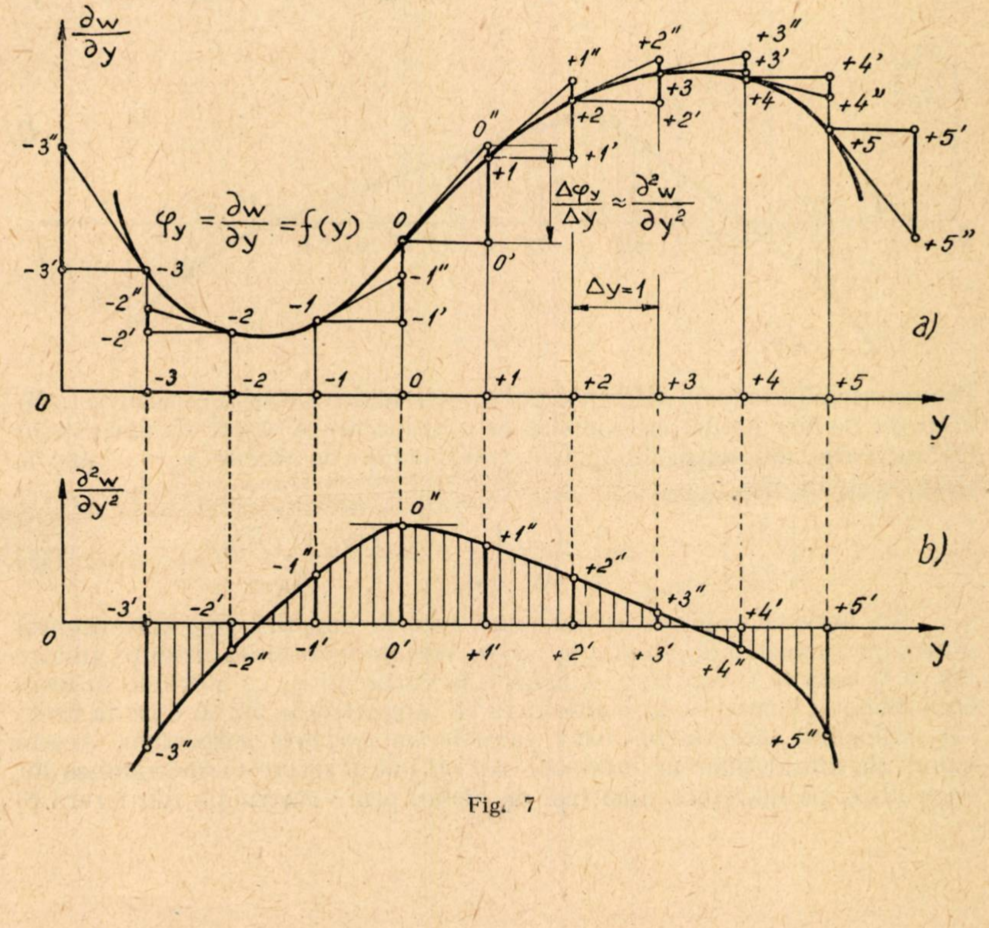

$\frac{\partial w}{\partial y}$
$\varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y} = f(y)$
$\frac{\Delta\varphi_y}{\Delta y} \approx \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$
$\Delta y = 1$
-3"
-3'
-3
-2"
-2'
-2
-1
-1"
-1'
0
0"
0'
+1
+1"
+1'
+2
+2"
+2'
+3
+3"
+3'
+4
+4'
+4"
+5
+5'
+5"
a)
0
y
$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$
b)

Fig. 7

Măsurarea înclinării tangentelor la curba $\varphi_y$ în toate punctele de diviziune ale absciselor, de la distanțele constante $\Delta y = 1$, este posibilă de obținut cu suficientă precizie, depinzînd numai de posibilitatea de apreciere cît mai justă a direcției tangentelor la curba de variație. Se preferă totuși a se aplica o metodă grafică mai expeditivă, bazată tot pe procedeul de lucru prin diferențe finite, care să dea totuși o precizie satisfăcătoare. Se face astfel aproximația de a se lua drept valori ale derivatelor lui $\varphi_y = f(y)$ din dreptul punctelor intermediare de abscise $y_{k+\frac{1}{2}}$, valorile medii date de expresia

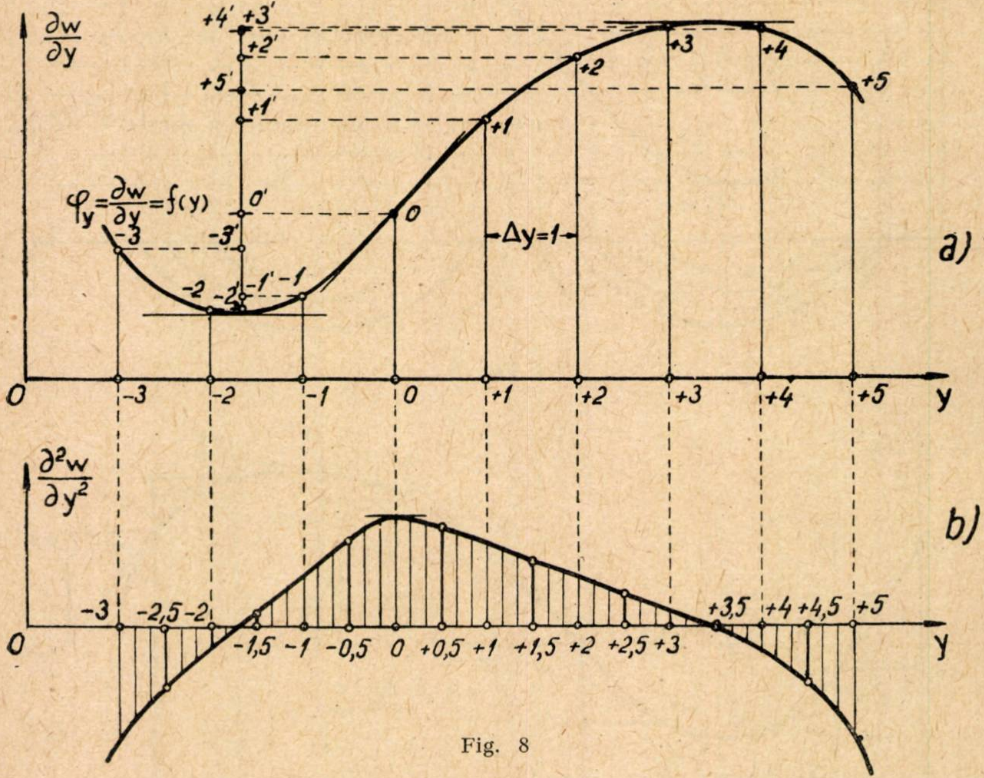


Fig. 8

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]_{y=y_{k+\frac{1}{2}}} \approx \left[\frac{\Delta f(y)}{\Delta y}\right]_{y=y_{k+\frac{1}{2}}} = \frac{f(y_{k+1})-f(y_k)}{\Delta y}. \qquad (11)$$

În această expresie se introduc valorile funcției $f(y)$ din dreptul punctelor succesive de abscise $y_{k+1}$ și $y_k$, situate între ele la distanțe unitare $\Delta y = 1$, ceea ce revine la a se asimila la curba lui $\varphi_y$ cu coardele ei între acele puncte, cum și de a se considera că tangentele la curbă duse în dreptul mijlocului intervalelor, sînt paralele cu coardele respective. Aceste valori ale diferențelor de ordonate $\Delta f(y)$ pot fi fixate în succesiunea lor respectivă, pe marginea unei fîșii de hîrtie, prin construcția din figura 8, după care ele pot fi purtate în mod succesiv ca ordonate faţă de o linie orizontală de nivel zero, în punctele de abscise corespunzătoare de pe diagrama lui $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ din partea de jos a figurii.

Acelaşi principiu de derivare grafică este aplicat şi în figura 9, prin aşa-numitul procedeu al lui Slaby. Aici curba de variaţie a lui $\varphi_y$ în funcţie

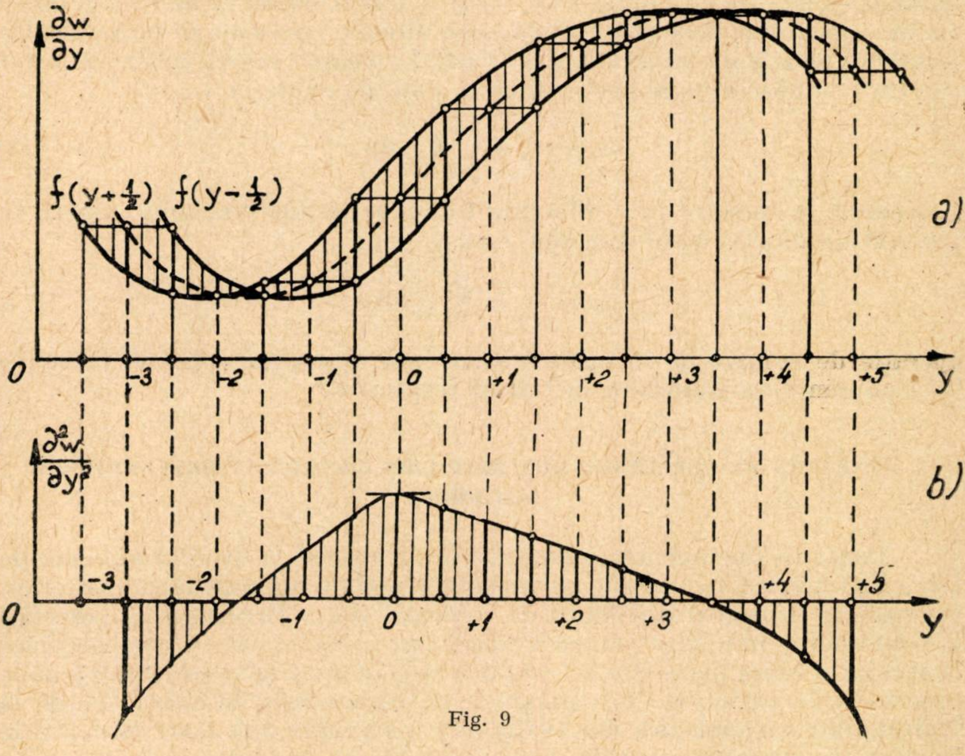


Fig. 9

de $y$, obţinută ca mai sus, este copiată pe o bucată de hîrtie de calc şi este deplasată apoi cu o unitate de lungime $\Delta y = 1$ în direcţia absciselor $y$, sau încă şi mai bine cu cîte o distanţă $\frac{\Delta y}{2} = \frac{1}{2}$, de o parte şi de alta a curbei $\varphi_y$ (vezi figura). Derivatele de ordinul al doilea apar ca diferenţele de ordonate dintre cele două curbe deplasate, în punctele respective din dreptul capetelor intervalelor unitare $\Delta y = 1$, ca şi în punctele intermediare, $\frac{\Delta y}{2} = \frac{1}{2}$, avînd astfel

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]_{y=y_k} = \left[\frac{\Delta f(y)}{\Delta y}\right]_{y=y_k} = \frac{f\left(y_k + \frac{1}{2}\right) - f\left(y_k - \frac{1}{2}\right)}{\Delta y}, \tag{12}$$

ele putînd fi trasate pe o diagramă separată de variație a lui $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ prin reducere la orizontală, după cum este arătat în partea de jos a figurii 9.

Este de observat că din diagramele de variație ale unghiurilor de înclinare $\varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y}$ ale suprafeței deformate din lungul unor direcții paralele cu axa $Oy$ de exemplu ($x = x_0$) se poate obține de asemenea însăși curba de deformație a plăcii după acea direcție. Aceasta se poate realiza printr-o operație de integrare, avînd astfel valoarea săgeții dintr-un punct oarecare de abscisă $y_i$ al acelei direcții, dată de expresia

$$w_i = w_0 + \int_0^{y_i} \varphi_y \cdot dy. \tag{13}$$

Procedînd la sumare prin diferențe finite se obține valoarea săgeții în punctul de abscisă $y_i$ al direcției $x = x_0$

$$w_i = w_0 + \sum_{y=0}^{y_i} \varphi_y \cdot \Delta y, \tag{14}$$

operație de sumare ce se poate realiza mai ușor prin aplicarea formulei lui Simpson și a metodelor de calcul respective.

## 7. APARATUL DE CERCETARE REALIZAT PRIN METODA INTERFERENȚELOR MECANICE

Bazat pe documentarea consultată, în special pe studiul publicat de către Ligtenbergh [9], cum și pe unele încercări preliminare făcute anterior, s-a realizat în cadrul activității de cercetare de la Institutul de cercetări în construcții, un aparat pentru aplicarea metodei interferențelor mecanice la studiul plăcilor plane. Cu această ocazie s-au avut în vedere următoarele observații de principiu, în comparație cu caracteristicile aparaturii de la Universitatea tehnologică din Delft, care a servit în linii mari ca model la construcția aparatului nostru.

1. Alegerea dimensiunilor ecranului și a dispozitivului de rezemare și solicitare a modelului s-a făcut pentru a se putea satisface necesitățile de studiu experimental pentru modele de dimensiuni mergînd pînă la 40 × 40 cm.

2. Stabilirea dimensiunilor exterioare ale aparatului s-a făcut pentru a-l putea instala pe o masă obișnuită de lucru, în jurul căreia să se poată circula în voie.

3. Alcătuirea aparatului s-a făcut din trei dispozitive separate, așezate și menținute în poziția lor relativă corectă pe masa de lucru în timpul încercărilor și anume :

*a*) ecranul liniat mobil și suportul lui rotativ ;

*b*) suportul modelului și dispozitivului de solicitare ;

*c*) cadrul orizontal, servind la buna așezare și ghidare.

Aparatul a fost construit în întregime din lemn, avînd suficientă rezistență și stabilitate pentru încercările curente ; numai dispozitivul de rezemare al plăcilor de model și acel de solicitare propriu-zis au fost executate din metal. Planul de ansamblu al aparatului, cum și secțiunile respective, longitudinală și transversală, sînt reprezentate în figura 10, din care se poate înțelege destul de bine modul de alcătuire și de funcționare.

Modelul confecționat din plexiglas, argintat sau arămit pe o față a lui, astfel ca să formeze o oglindă cu o cît mai bună suprafață reflectantă, este așezat în poziție verticală pe suportul dispozitivului de fixare și de solicitare, fiind susținut de către un cadru format din bare de lemn. Acest model este rezemat pe margini prin intermediul unei plăci metalice prevăzută cu un gol tăiat după forma conturului de rezemare al piesei, conform condițiilor de susținere ale construcției reale. El este solicitat prin partea din spate a lui, cu ajutorul unor pîrghii metalice articulate, dispuse în modul cel mai potrivit pentru a reproduce cît mai bine condițiile de încărcare respective.

Ecranul propriu-zis a fost alcătuit dintr-o hîrtie de desen, de dimensiuni utile de 64×64 cm, pe care s-a trasat cu tuș negru o rețea de linii paralele, de grosimi uniforme de cîte 1,25 mm, avînd lăsate între ele interspații albe de aceeași lățime, rezultînd deci o întredistanță constantă între acele linii : $d = 2{,}5$ mm. Această hîrtie liniată a fost lipită apoi pe o foaie de placaj de formă octogonală, fixată pe un suport din lemn, pentru a putea lua o formă curbată, impusă de condițiile de bună funcționare a aparatului.

Suportul ecranului a fost construit alegîndu-se pentru curbura acestuia o rază $r = 2{,}00$ m, ceea ce corespunde unei distanțe medii la care se va lucra, conform condiției de la punctul 4, egală cu $a = \dfrac{r}{3{,}5} = 0{,}57$ m. Pentru a asigura posibilitatea de rotire a rețelei în planul ei, suportul s-a prevăzut, în partea din spate a lui, cu o prelungire cilindrică în sensul longitudinal al aparatului, de un diametru de 0,30 m, care se introduce într-un gol cilindric, de un diametru corespunzător, amenajat în timpanul plin al dispozitivului de susținere al ecranului. Datorită acestui dispozitiv de legătură de formă cilindrică, suportul ecranului se poate roti ușor în planul său, dîndu-i-se orice înclinare a liniaturii, de la 0° pînă la 90°. Pentru a se putea măsura unghiul de înclinare față de orizontală a liniaturii paralele de pe ecran, s-a prevăzut o gradație sexagesimală, trasată pe un contur circular de pe placajul care acoperă spatele acestui suport al ecranului.

Aparatul fotografic cu plăci folosit este fixat pe o măsuță din spatele ecranului, sau este susținut separat, de către un tripied fotografic telescopic obișnuit, care este așezat direct pe masa de experiențe. Obiectivul este situat imediat în spatele ecranului, în axul orificiului lăsat special în acest ecran, aparatul trebuind să fie pus la punct pe imaginea rețelei reflectată de către model.

Observarea fenomenelor optice produse și constatarea aspectului franjelor moarate nu se putea face decît la sfîrșitul operației de cercetare, numai după developarea clișeului fotografic, pe care se aflau suprapuse cele două imagini obținute prin fotografiere. Pentru examinarea preala-

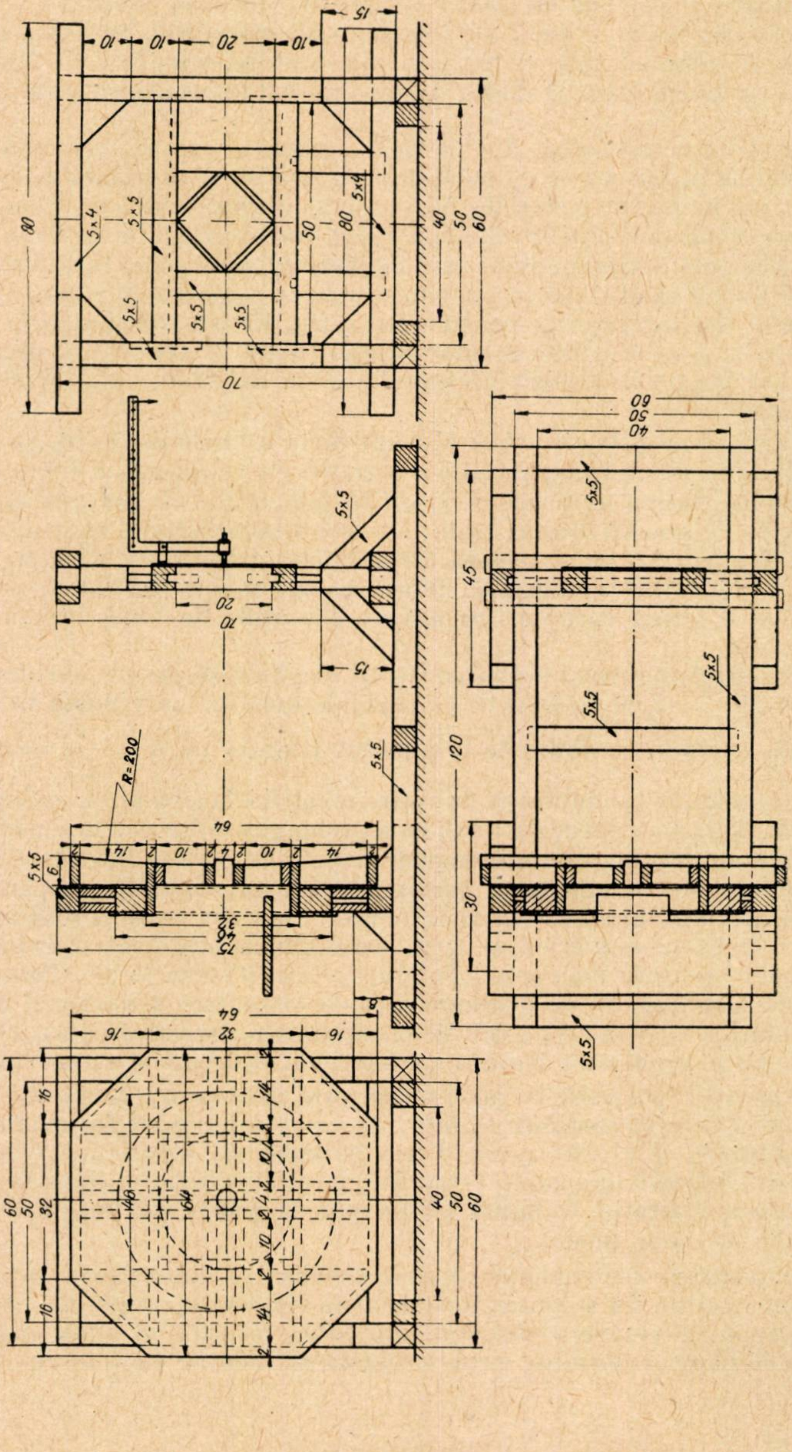
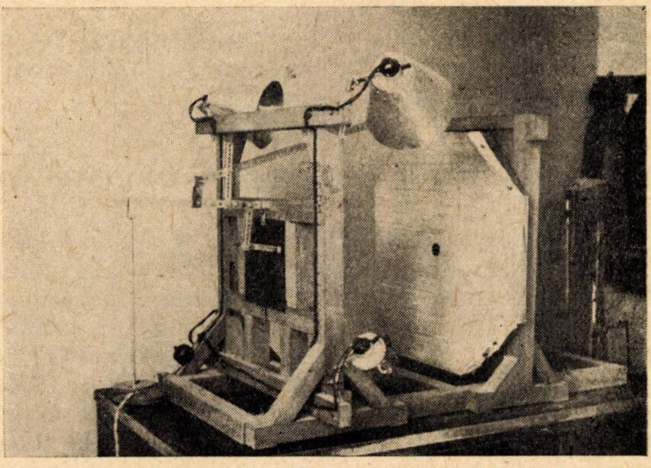

5x4
5x5
5x5
5x5
5x5
5x4
5x5
5x5
R=200
5x5
5x5
5x5
5x5
5x5

Fig. 10

bilă a franjelor moarate produse, mai înainte de facerea fotografiilor, s-a instalat în locul geamului mat al aparatului fotografic, un diapozitiv al unui clișeu fotografic pe care s-a fotografiat anterior rețeaua ecranului


*a*

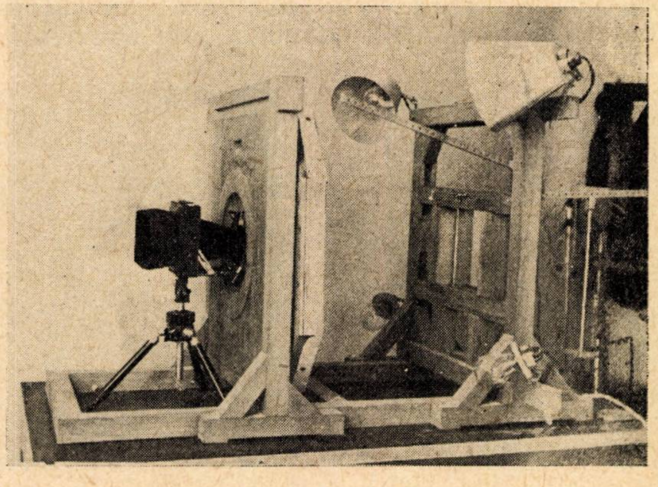

*b*

Fig. 11

respectiv, reflectată de către o oglindă plană așezată în locul destinat modelului.

Din așezarea și solicitarea modelului în aparat, chiar la încercările preliminare făcute în cadrul fiecărei cercetări, se poate examina imaginea ecranului, reflectată de către modelul solicitat, suprapusă peste rețeaua nedeformată de pe diapozitivul de mai sus, adică așa cum se produc fenomenele în cursul cercetării propriu-zise. Se poate astfel constata vizual aspectul fenomenelor de interferență și al franjelor moarate ce se vor produce ulterior prin fotografiere, cu ocazia cercetărilor definitive, astfel că se pot face din timp toate corecțiile, punerile la punct și studiile preliminare necesare fiecărei încercări în parte.

Fotografiile aparatului construit, prima luată în direcția ecranului și cea de-a doua în direcția dispozitivului de rezemare și de solicitare a modelului sînt reproduse în figurile 11 *a* și *b*.

## 8. STABILIREA CONDIȚIILOR DE BUNĂ FUNCȚIONARE ALE APARATULUI

Pentru verificarea și stabilirea posibilităților de lucru în bune condiții ale aparatului s-au făcut unele încercări experimentale preliminare, care vor trebui efectuate de către oricine își va construi un asemenea aparat. Primele fotografii de probă, ca și cele definitive ce au urmat, s-au făcut cu ajutorul unor aparate : „AGFA" și „VOIGTLÄNDER" cu plăci, de format 9/12, cu obiectiv 1/4,5 și cu o distanță focală $f = 13{,}5$ cm, folosindu-se în acest scop clișee „ISOPAN I.S.S." și „ISOPAN F". S-a fotografiat mai întîi liniatura ecranului în poziția orizontală și verticală a ei (fig. 12 *a* și *b*), reflectată de către o oglindă obișnuită, obținîndu-se imagini distincte și uniforme ale rețelei reflectate pentru toată suprafața ecranului.

S-a cercetat apoi dacă această liniatură a ecranului este potrivită pentru producerea franjelor de interferență prin alegerea întredistanței liniaturii $d = 2{,}5$ mm, adică a unei constante a aparatului : $\Delta\varphi = \dfrac{d}{2a} = \dfrac{2{,}5}{2\times 570} = 0{,}0022$. Pentru aceasta s-au făcut fotografii duble, pe cîte un același clișeu, a rețelei ecranului așezată mai întîi în poziție orizontală,

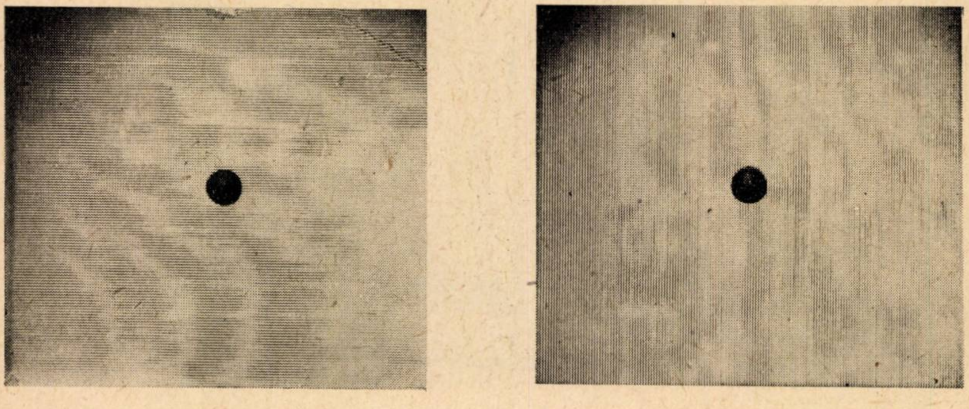
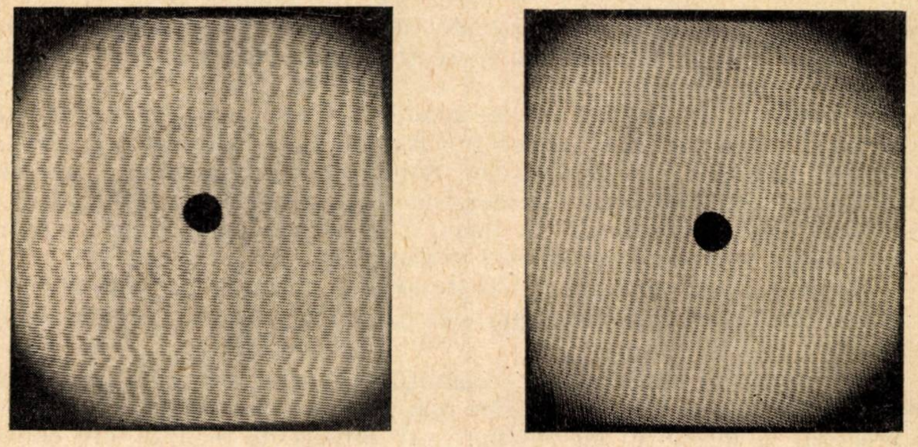

*a* *b*

Fig. 12

peste care s-a suprapus apoi rețeaua rotită cu un unghi de 10°, respectiv 20° (fig. 13 *a* și *b*). Ambele imagini ale fiecărei fotografii au fost reflectate de către o oglindă obișnuită plană așezată în locul modelului. S-a constatat astfel că franjele moarate produse sînt destul de distincte, apărînd sub forma unor benzi drepte paralele, înclinate după bisectoarea unghiului obtuz al celor două liniaturi.

Încercările preliminare următoare s-au făcut pe un model de plexiglas de formă triunghiulară echilaterală, cu latura de 14 cm, pentru diferite moduri de rezemare și de solicitare. Primele rezultate reușite au fost obținute pentru acest model simplu rezemat pe contur și solicitat de către o încărcare uniformă. După unele încercări inițiale de argintare a plexiglasului, acest model a fost realizat avînd suprafața arămită prin procedeul de depunere a metalului în vid, prezentînd foarte bune condiții reflectante. Fotografiile franjelor moarate obținute pentru cele două poziții ale liniaturii ecranului în direcție orizontală și verticală, vor fi reproduse în paragraful următor. De asemenea, s-au făcut încercările pentru un model de formă pătrată, tot din plexiglas arămit, solicitat prin acțiunea unor forțe concentrate aplicate două cîte două în sens contrar, în colțuri, obținîndu-se franjele moarate care vor fi reproduse de asemenea la paragraful următor.



*a* *b*

Fig. 13

Din aceste încercări preliminare s-au dedus un număr de observații importante asupra tehnicii executării încercărilor de laborator și a scoaterii fotografiilor, de care trebuie să se țină seama încă de la început, dintre care menționăm în cele de mai jos pe cele mai importante.

— La primele fotografii făcute s-a constatat o lipsă de simetrie destul de pronunțată a franjelor moarate respective, cum și o lipsă de determinare precisă a conturului modelului, datorite unui defect de bună suprapunere a celor două imagini pe același clișeu.

— Neprecizia delimitării marginilor modelului pe fotografii, este explicabilă, datorită faptului că aparatul fotografic se pune la punct pe imaginea reflectată a rețelei ecranului de către model și nu pe suprafața modelului însuși, deci nu pe conturul piesei propriu-zise.

— Deplasarea unei imagini față de alta, produsă la primele încercări, s-a datorat faptului că, prin armarea obturatorului în vederea luării de instantanee, s-a mișcat aparatul fotografic la cea de-a doua fotografie. Rezultă deci o primă observație importantă că între cele două fotografii, făcute pentru modelul solicitat și nesolicitat, nu trebuie să fie mișcat și nici măcar atins, atît aparatul fotografic, cît și modelul sau ecranul, pentru ca cele două imagini fotografiate să se suprapună astfel în mod cît mai exact.

— Pentru a se evita acest inconvenient declanșarea trebuie făcută numai cu ajutorul unui declanșator funcționînd de la distanță, lucrîndu-se cu *timp de poză* și nu cu *instantaneu*. Suprapunerea imaginilor între cele două fotografii, prin concordanța marginilor de contur și a poziției găurilor din ecran, a fost astfel suficient de bună, după cum se poate constata ușor, pe fotografiile reproduse la punctul următor.

Totuși imaginile franjelor moarate care se obțineau la primele încercări nu au fost suficient de pronunțate de la început, datorită următoarelor motive :

— Punerea la punct în bune condiții a imaginii ecranului reflectat, pentru cazul folosirii unei deschideri mai mari a obiectivului, după cum s-a procedat la începutul încercărilor, este dificilă de realizat, din cauza celor două stări diferite ale plăcii în cele două fotografii. Prima fotografie fiind obținută cu placa de model nesolicitată și cea de-a doua după o solicitare destul de puternică a ei, se produce o deplasare pronunțată, în direcția axului aparatului, a suprafeței reflectante a plăcii. Din cauza lipsei de profunzime a obiectivului, în cazul deschiderii mari a lui, nu se puteau pune la punct în bune condiții cele două imagini suprapuse. Rezultă deci că trebuie folosită o diafragmare destul de pronunțată a obiectivului pentru a se obține o profunzime suficientă la scoaterea fotografiilor.

— Un alt inconvenient, care a fost înlăturat numai după mai multe încercări repetate, a fost acela că franjele moarate nu ieșeau la început suficient de distincte, atunci cînd se foloseau timpuri de poză egale pentru cele două fotografii suprapuse ale fiecărei încercări. S-a constatat astfel că, numai mărind timpul de poză la dublu pentru cea de-a doua fotografie, față de prima, se obțin franje moarate suficient de pronunțate.

## 9. ÎNCERCĂRI PRELIMINARE ȘI PROCEDEELE DE ETALONARE FOLOSITE

Cunoscîndu-se valorile lui $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ și $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ deduse din rezultatele cercetărilor experimentale efectuate, pentru a se putea calcula momentele încovoietoare și de răsucire ($M_x$, $M_y$ și $M_{xy}$) mai trebuie determinată valoarea lui $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\cdot$ Aceasta poate fi stabilită din valorile constantelor elastice $E$ și $\mu$ ale materialului de model, atunci cînd acestea se cunosc, cum și din grosimea $h$ a plăcii folosite la cercetări.

În cazul cînd aceste constante elastice nu sînt cunoscute sau nu pot fi stabilite cu o suficientă precizie, valoarea lui $D$ se poate determina direct printr-o încercare experimentală de etalonare. Această încercare se realizează prin folosirea unui model confecționat din același material ca și modelul piesei studiate, corespunzînd unei forme de piesă și unui mod de solicitare bine cunoscute, servind pentru cercetarea unui caz rezolvat teoretic. În acest mod, rezultatele experimentale ale franjelor moarate obținute pot fi comparate direct cu valorile solicitărilor cunoscute, putîndu-se deduce astfel valoarea modulului de rigiditate $D$ corespunzător.

Printre primele încercări preliminare făcute cu ajutorul aparatului descris anterior, unele au fost legate de aceste procedee de etalonare și de cercetările respective, dintre care descriem următoarele cazuri :

*a*) Prima încercare de acest fel s-a făcut cu un model în formă de triunghi echilateral *ABC* (fig. 14), simplu rezemat pe contur și încărcat cu o sarcină uniform distribuită pe toată suprafața sa ; soluția teoretică a acestei probleme este reprodusă în tratatul lui Girkmann [2].

Un exemplu de franjele moarate obținute experimental pentru un asemenea model de etalonare, confecționat dintr-o placă de plexiglas arămită pe o față a ei, în cadrul încercărilor preliminare făcute cu aparatura construită, este dat în fotografia din figura 15 *a*, obținută pentru cazul liniaturii ecranului situată în poziție paralelă cu baza triunghiului. În figura 15 *b* este reprodusă fotografia franjelor moarate obținute pentru același model și stare de solicitare, în cazul orientării liniaturii ecranului în direcție paralelă cu înălțimea triunghiului.

Aceste fotografii au servit pentru trasarea diagramelor de variație ale momentelor încovoietoare $M_x$ și $M_y$ după diferite secțiuni paralele cu baza și cu înălțimea triunghiului, care au corespuns foarte bine cu aceleași diagrame stabilite pe cale teoretică. În figura 15 *c* este reprodusă fotografia franjelor moarate obținute pentru aceeași piesă și solicitare, pentru cazul liniaturii ecranului înclinate la 60°, ceea ce constituie cazul din figura 15 *a* rotit cu 120°.

*b*) Pentru etalonare este potrivit să se folosească adeseori cazul simplu al unei plăci pătrate *ABCD* solicitate în cele patru colțuri ale ei de către două perechi de forțe egale și de sens contrar, care produc o solicitare de răsucire pură a acelei plăci (fig. 16). Această problemă are o soluție teoretică exactă, dată în tratatele de specialitate [1] și [2], placa respectivă solicitată astfel deformîndu-se sub forma unui hiperboloid parabolic.

Considerînd încercarea de determinare a franjelor moarate, făcute cu direcția liniaturii ecranului îndreptată, paralel cu laturile plăcii de model solicitată ca mai sus la o răsucire, pură, s-au obținut franjele din figura 17 *a*. Aceste franje se prezintă sub forma unor benzi rectilinii paralele cu una din laturile pătratului, situate la distanțe constante una de alta, ceea ce se poate justifica foarte ușor teoretic, valoarea lui $D$ putînd fi obținută prin măsurarea acestei echidistanțe pe baza datelor obținute experimental.

Încercarea de etalonare cu acest model de formă pătrată, solicitat de către două perechi de forțe de sensuri contrare acționînd în colțuri, se poate realiza și prin orientarea liniaturii ecranului în direcție paralelă cu o diagonală a modelului, obținîndu-se și de data aceasta franje moarate echidistante, paralele cu diagonala pătratului (fig. 17 *b*), ceea ce se poate de asemenea justifica ușor teoretic.

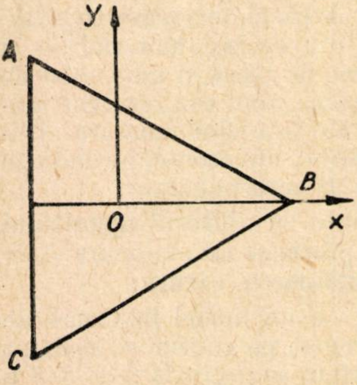


Fig. 14

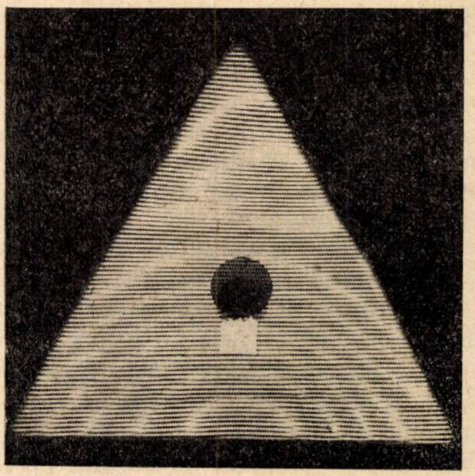


Fig. 15 *a*

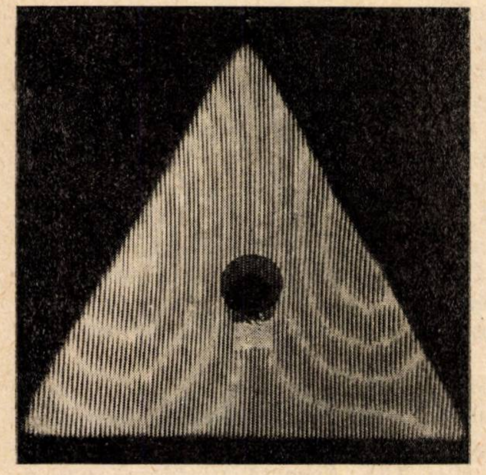


Fig. 15 *b*

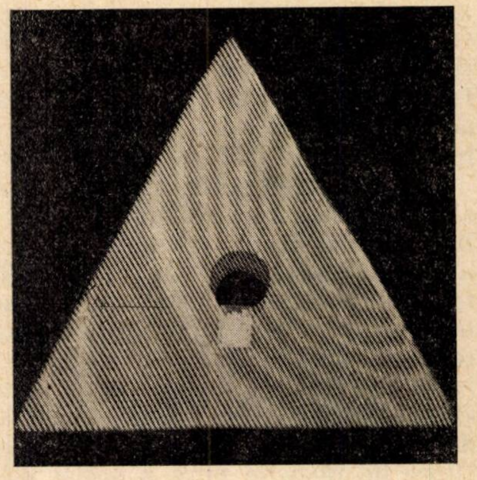


Fig. 15 *c*

*c*) Un alt exemplu de încercare experimentală preliminară realizată prin această metodă, pentru o altă problemă simplă, tratată și în mod teoretic, este acel al unei plăci solicitate la o încovoiere pură uniformă în toate direcțiile. Soluția teoretică a acestei probleme rezultă din considerarea acțiunii unor momente de încovoiere unitare egale și de același sens, aplicate în mod uniform pe laturile unei plăci pătrate : $M_x = M_y = M$ (fig. 18).

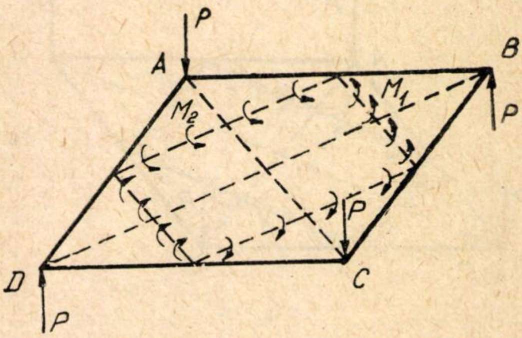
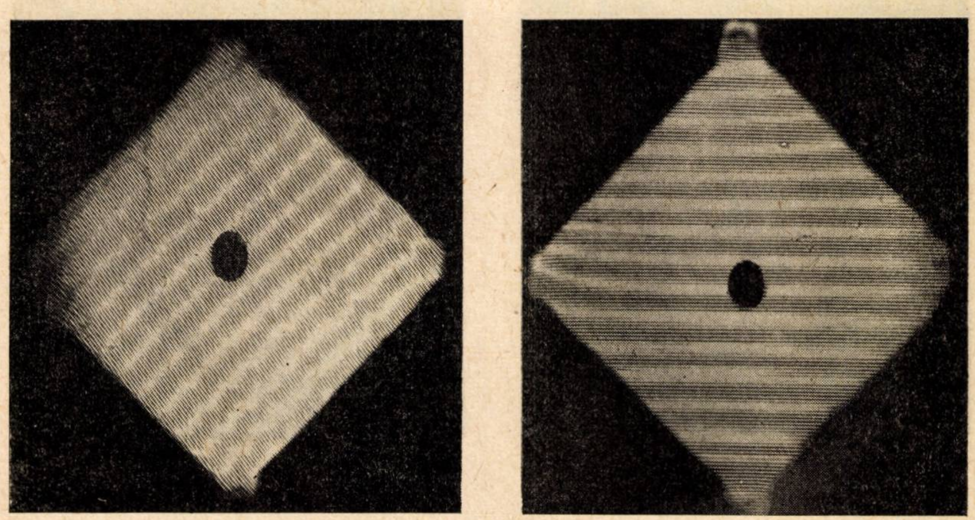


Fig. 16

Această încercare s-a realizat într-un mod aproximativ prin rezemarea elastică a unei plăci pătrate pe un contur pătrat interior, înscris după direcții înclinate la 45° în forma exterioară a modelului și prin solicitarea acestuia de către patru forțe *P* egale și de același sens, aplicate în cele patru colțuri ale plăcii.



*a* *b*

Fig. 17

Solicitarea respectivă poate fi considerată static echivalentă cu aceea dată de acțiunea a patru momente egale aplicate în mod concentrat în cele patru colțuri ale plăcii de model pătrate, dînd naștere la o suprafață de deformație de formă sferică. În acest sens s-a făcut și o încercare experimentală de acest fel, obținîndu-se aproximativ aceleași rezultate, ca forme ale franjelor moarate, ca și cele din încărcarea de mai sus.

Se observă de pe fotografiile franjelor moarate obținute experimental în figura 19 *a* și *b*, că în apropiere de mijlocul plăcii soluția experimentală poate fi considerată a fi apropiată de cea teoretică. Diferența importantă a aspectului franjelor moarate de pe restul suprafeței plăcii față de soluția teoretică, se datorește modului de realizare a solicitării experimentale, făcînd necesară aplicarea principiului lui Saint Venant, soluția exactă fiind valabilă numai în apropiere de mijlocul plăcii.

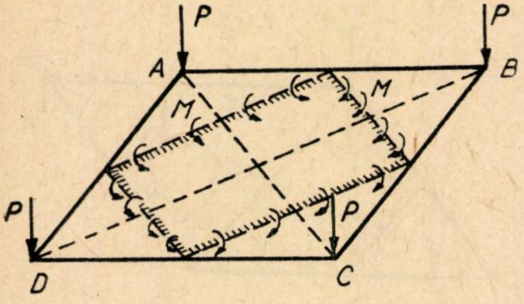
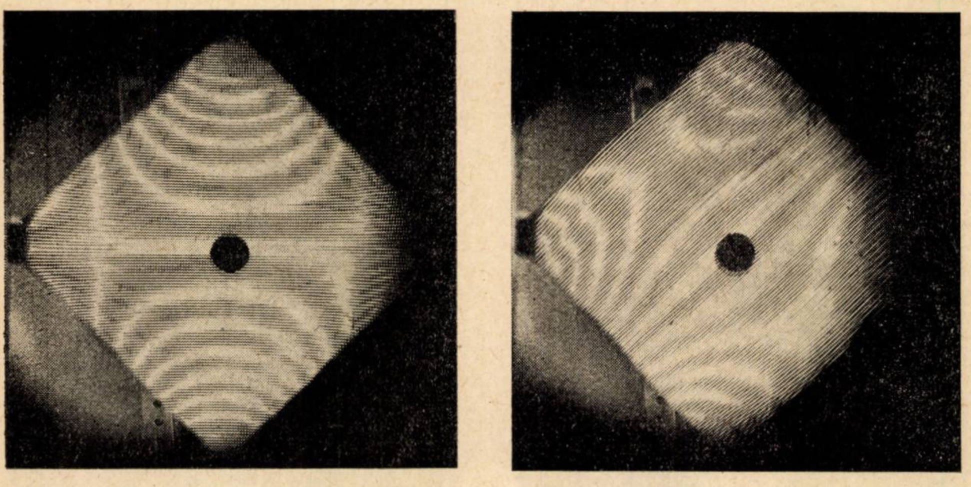


Fig. 18

Încercările experimentale executate în continuare, asupra unor probleme cu caracter tehnic, ale cercetării efectului unor încastrări parțiale și rezemări variate pe conturul unei plăci pătrate încărcate uniform (fig. 20 *a* și *b*), cum și asupra problemelor concentrărilor de eforturi produse prin existența unei găuri pătrate într-o placă pătrată, simplu rezemată pe laturi și încărcată uniform pe toată suprafața (fig. 21 *a* și *b*), vor constitui obiectul amănunțit al unor publicații ulterioare. Am reprodus în aceste figuri numai aspectul franjelor moarate obținute pentru cazul liniaturii ecranului situată în poziție orizontală și în poziție înclinată la 45°, pentru modelul unei plăci pătrate de 20×20 cm, fără goluri, simplu rezemată pe trei laturi și încastrată pe o latură, încărcate uniform, cum și pentru modelul unei



*a* *b*

Fig. 19

plăci pătrate încovoiate, prevăzute cu un gol pătrat situat într-un colţ al ei. Ele pot servi ca exemple de fenomenele de interferenţă mecanică

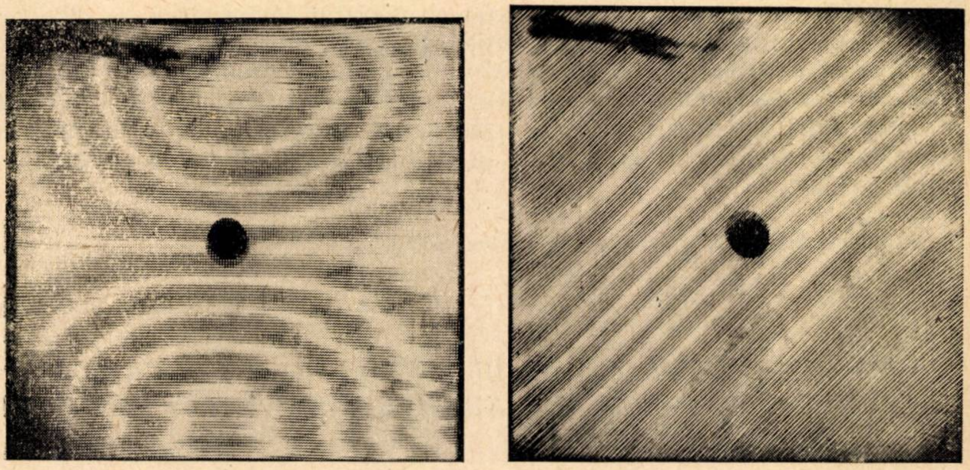

*a* *b*

Fig. 20

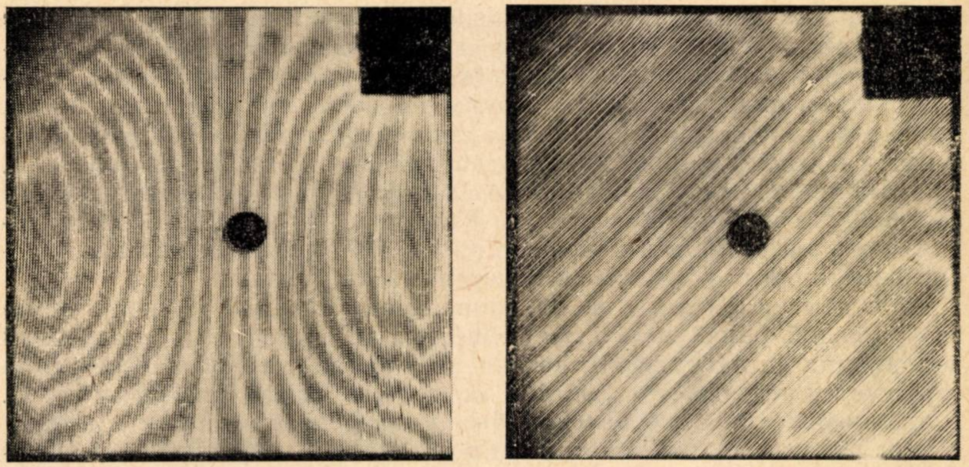

*a* *b*

Fig. 21

obţinute, în cadrul cercetărilor următoare, efectuate asupra unor probleme dificile de soluţionat pe cale teoretică, dar care pot fi rezolvate uşor în mod experimental. Asupra acestor probleme importante ale concentrărilor de eforturi produse de către goluri de diferite forme la plăcile încovoiate transversal, care pot fi tratate experimental prin această metodă, nu există decît puține date în literatură. Unele soluții teoretice ale unor asemenea probleme pentru goluri de diferite forme cu racordări la colțuri, sînt indicate în recentul tratat sovietic asupra plăcilor plane, a discurilor și a grinzilor-pereți apărut în anul 1959 [12].

În executarea acestor încercări experimentale preliminare, cum și a primelor cercetări realizate cu aparatura construită la Institutul de cercetări în construcții, am fost ajutat cu multă tragere de inimă și cu un interes deosebit de către ing. Radu Bențe și Radu Gabrea, cărora le aduc mulțumirile mele.

*Primită la redacție la 14 mai 1959, o nouă versiune la 1 martie 1960*

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКИХ ПЛАСТИНОК МЕТОДОМ МЕХАНИЧЕСКИХ ИНТЕРФЕРЕНЦИЙ

## РЕЗЮМЕ

Среди способов экспериментального анализа напряжений получил широкое распространение метод исследования деформации плоских поверхностей при помощи решеток. Благодаря работам Дантю, а также Уеллера и Шеперда этот метод стал успешно применяться для исследования поперечных деформаций пластинок при плоском напряженном состоянии. Таким образом, он был использован в качестве дополнительного метода для определения линий одинаковой суммы главных напряжений, как дополнение к фотоупругим работам.

Начиная с исследований Бауена и благодаря недавним работам Лигтенберга из Технологического Университета в г. Делфт (Голландия), этот метод нашел хорошее применение при исследовании плоских пластинок под действием поперечных нагрузок.

Учитывая оптические явления, происходящие от пересечения изображений одной и той же решетки, до и после произведенной деформации от нагружения детали модели, на которой нанесена или отражается эта решетка, данный метод был назван „метод муаров". Для определения этих явлений был введен также термин „механические интерференции" по аналогии с собственно оптическими интерференциями.

Пользуясь сведениями, опубликованными Лигтенбергом, мы получили возможность осуществить необходимую аппаратуру и начать, таким образом, предварительные испытания для применения этого метода. Так, можно было приступить к экспериментальному исследованию нескольких простых задач теории пластинок, что является предметом настоящей статьи, а также тех, которые вскоре будут опубликованы. Здесь излагаются теоретические принципы и описы-

вается способ, используемый для экспериментального применения этого метода. Показываются также возможности применения полученных экспериментальных результатов для решения нескольких задач, неподдающихся теоретическому решению, а также для некоторых специальных технических задач расчета некоторых строительных элементов.

## ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DES PLAQUES PLANES PAR LA MÉTHODE DES INTERFÉRENCES MÉCANIQUES

### RÉSUMÉ

Une nouvelle méthode d'étude de la déformation des surfaces planes à l'aide des réseaux a pris un grand essor parmi les procédés de l'analyse expérimentale des tensions. Grâce aux travaux de Dantu et à ceux de Weller et Shepard, cette méthode a trouvé un emploi avantageux pour l'étude des déformations transversales des disques en état plan de tensions. Elle a été employée aussi comme méthode supplémentaire pour la détermination des lignes d'égale somme des tensions principales, pour compléter les travaux photoélastiques.

En commençant par les recherches de Bowen et grâce aux travaux plus récents de Ligtenbergh, de l'Université Technologique de Delft (Pays-Bas), cette méthode a trouvé un intéressant emploi dans l'étude des plaques planes, soumises à des sollicitations transversales.

En tenant compte des phénomènes optiques produits par l'intersection des images d'un même réseau, avant et après la déformation produite grâce aux efforts subis par la pièce-modèle sur laquelle il est tracé, ou qui reflète ce réseau, on a désigné cette méthode par le nom de la « méthode du moiré ». On a employé aussi le terme « d'interférences mécaniques » pour désigner ces phénomènes, par analogie aux interférences optiques proprement dites.

En utilisant les informations publiées par Ligtenbergh nous avons pu réaliser l'appareillage nécessaire et commencer ainsi les essais préliminaires pour l'application de cette méthode. On a pu entamer aussi l'étude expérimentale de quelques problèmes simples de la théorie des plaques, ce qui fait l'objet de cet article, ainsi que de ceux qui vont suivre prochainement.

On expose ici les principes théoriques et on donne la description du procédé employé pour l'application expérimentale de cette méthode. On indique aussi les possibilités d'employer les résultats expérimentaux obtenus pour la solution de quelques problèmes insolubles théoriquement, ainsi que pour la solution de certains problèmes techniques spéciaux de calcul des éléments de construction.

## BIBLIOGRAFIE

1. S. **TIMOSHENKO**, *Theory of Plates and Shells*. Ed. McGraw-Hill, New York și Londra, 1940.
2. K. **GIRKMANN**, *Flächentragwerke*. Ed. Springer, Viena, 1956.
3. M. M. **FROCHT**, *Photoelasticity* II, Ed. John Wiley, New York, 1948.
4. A. **KUSKE**, *Photoelastic research on plates in transverse bending*. Engineering, **175**, 4536—4537 (1953).
5. R. **WELLER**, B. M. **SHEPHARD**, *Displacement Measurement by Mechanical Interferometry*. Proceedings of the Society for Experimental Stress Analysis, **VI**, *1* (1949).
6. G. **MESMER**, *Grundlagen und neuere Möglichkeiten des spannungsoptischen Verfahrens*. Fortschritte und Forschungen im Bauwesen (1955).
7. M. P. **DANTU**, *Utilisation des Réseaux pour l'étude des déformations*. Annales de l'Institut Technique des Bâtiments et des Travaux Publics, *121*, ian. (1958).
8. G. **BOWEN**, *Mirrored Model gives slab Moments*. Engineering News Record (1949).
9. P. R. **LIGHTENBERGH**, *The Moiré Method, a new experimental Method for the Determination of Moments in small slab Models*. Proceedings of the Society for Experimental Stress Analysis, *2* (1955).
10. C. G. J. **VREEDENBURGH**, R. **VAN WIJNGAARDEN**, *New Progress in our Knowledge about the Moment Distribution in flat Slabs by Means of the Moiré Method*. Proceedings of the Society for Experimental Stress Analysis, **XII**, *2* (1955).
11. N. **IOSIFECU**, *Introducere în fotoelasticitate*, I, Ed. tehnică, București, 1958.
12. Д. В. **ВАЙНБЕРГ**, Е. Д. **ВАЙНБЕРГ**, *Пластины, диски, балки-стенки*. Государственное издательство, Киев, 1959.

# STUDII

## ELASTICITATE—PLASTICITATE—REZISTENȚA MATERIALELOR

# VIBRAȚIILE STRUCTURILOR ELASTICE SUBȚIRI DE FORMĂ CILINDRICĂ CIRCULARĂ, PLASATE ÎNTR-UN CURENT FLUID SUPERSONIC

DE

LIVIU LIBRESCU

### 1. INTRODUCERE

Studiem în cele ce urmează problema vibrațiilor structurilor subțiri elastice de formă cilindrică circulară, construite prin suprapunerea arbitrară a *m* straturi ortotrope. Structura cilindrică astfel construită o vom considera plasată într-un curent fluid, ideal, supersonic, curent ce-l vom considera potențial și izentropic, cu viteza la infinit *U*, a cărui vector este dirijat paralel cu axa structurii cilindrice [1]).

În scopul abordării acestei probleme este necesar a considera atît ecuațiile de elasticitate a acestor structuri precum și ecuațiile hidrodinamicii. Menționăm că modul de abordare a problemei cît și rezultatele obținute de noi reprezintă o extindere a rezultatelor obținute de V. V. Bolotin pentru cazul învelitorilor omogene și izotrope [1].

### 2. ECUAȚIILE PRIVIND ELASTICITATEA STRUCTURILOR CONSTRUITE DIN STRATURI

*a*) *Ipoteze și considerații geometrice.* Ecuațiile de elasticitate le vom deduce considerînd structura construită din *m* straturi ortotrope, arbitrar dispuse pe grosime. Pentru aceste structuri vom admite următoarele ipoteze, pe care le-am folosit într-o serie de lucrări anterioare [2], [3]. Conform acestor ipoteze straturile sînt împreunate rigid, astfel încît se exclude posibilitatea ca ele să alunece pe suprafețele de contact, fiind astfel forțate a se deforma împreună ca un tot.

---

[1]) Dat fiind că problema vibrațiilor cilindrului se poate aborda pentru cazul curentului fluid interior sau exterior structurii cilindrice, vom afecta mărimile ce caracterizează apartenența la domeniul interior cu indicele *i* și prin *e* la domeniul exterior. Acolo unde nu este necesar nu vom face nici o mențiune.

Vom considera de asemenea valabilă pentru structura în ansamblu ipoteza Love-Kirchoff, în virtutea căreia se vor neglija mărimile de ordinul $\frac{\delta}{R}$, în raport cu unitatea. După cum s-a arătat într-o serie de lucrări anterioare, [3], [4], [5], în cadrul acestor structuri, independent de poziția suprafeței de referință, eforturile cît și momentele depind atît de deformațiile tangențiale cît și de cele de încovoiere. În cele ce urmează vom considera ca suprafață de referință a eforturilor și momentelor, suprafața inferioară a celui de-al $n$-lea strat luat de la suprafața de mărginire exterioară a structurii. Această suprafață de referință o vom raporta la un sistem curbiliniu ortogonal $\alpha$, $s = R\theta$ reprezentînd respectiv lungimea arcurilor generatoarei și a cercului director, $R$ fiind raza corespunzînd suprafeței de referință a structurii.

Vom alege, de asemenea, sistemul de axe cilindric $(r, \theta, x)$ astfel încît axa $x$ să coincidă cu axa cilindrului.

Deoarece în prezentul studiu avem în vedere structurile cilindrice circulare, în ipoteza de mică curbură, ecuațiile de echilibru, ecuațiile geometrice deformații-deplasări precum și ecuațiile fizice sînt date de relațiile.

*b*) *Ecuațiile de echilibru* [6].

$$\text{(I)}\quad \frac{\partial T_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{\partial T_{\beta\alpha}}{\partial s} + X = 0, \qquad \text{(II)}\quad \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_\beta}{\partial s} + Y = 0,$$

$$\text{(III)}\quad \frac{T_\beta}{R} + \frac{\partial Q_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial Q_\beta}{\partial s} + Z = 0, \tag{1}$$

$$\text{(IV)}\quad Q_\alpha = \frac{\partial M_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_{\beta\alpha}}{\partial s}, \qquad \text{(V)}\quad Q_\beta = -\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_\beta}{\partial s}.$$

$$\text{(VI)}\quad T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha} = 0.$$

*c*) *Relațiile geometrice deformații-deplasări* [6].

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{w}{R}, \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial s},$$

$$\varkappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, \quad \varkappa_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \quad \tau = \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial s}. \tag{2}$$

*d*) *Ecuațiile fizice.* Considerînd materialul fiecărui strat omogen și ortotrop și că ascultă de legea fizică a lui Hooke, ținîndu-se seama de relațiile ce exprimă eforturile și momentele prin tensiunile reduse la suprafața de referință a structurii [3], se deduc, în baza ipotezelor menționate la început, următoarele relații fizice :

$$T_\alpha = \overset{1}{F}_\alpha (\varepsilon_1 + \overset{1}{\mu}_\beta \varepsilon_2) + \overset{1}{K}_\alpha (\varkappa_1 + \overset{5}{\mu}_\beta \varkappa_2),$$

$$T_\beta = \overset{1}{F}_\beta (\varepsilon_2 + \overset{1}{\mu}_\alpha \varepsilon_1) + \overset{1}{K}_\beta (\varkappa_2 + \overset{5}{\mu}_\alpha \varkappa_1),$$

$$
\begin{aligned}
T_{\alpha\beta} &= -\,T_{\beta\alpha} = \frac{F_\alpha}{2}(1-\overset{2}{\mu}_\beta)\,\omega + \overset{2}{K}_\alpha(1-\overset{6}{\mu}_\beta)\,\tau,\\
M_\alpha &= -\,\overset{1}{G}_\alpha(\varkappa_1 + \overset{3}{\mu}_\beta\,\varkappa_2) - \overset{1}{K}_\alpha(\varepsilon_1 + \overset{5}{\mu}_\beta\,\varepsilon_2),\\
M_\beta &= -\,\overset{1}{G}_\beta(\varkappa_2 + \overset{3}{\mu}_\alpha\varkappa_1) - \overset{1}{K}_\beta(\varepsilon_2 + \overset{5}{\mu}_\alpha\,\varepsilon_1),\\
M_{\alpha\beta} &= -\,M_{\beta\alpha} = \frac{\overset{2}{K}_\alpha}{2}(1-\overset{6}{\mu}_\beta)\,\omega + \overset{2}{G}_\alpha(1-\overset{4}{\mu}_\beta)\,\tau.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Expresia parametrilor mecanici şi a coeficienţilor Poisson reduşi sînt daţi în tabela 1 anexată unde s-a adoptat convenţia de a se nota cu indicele $j$ mărimile ce caracterizează stratul $j$. În rest, celelalte mărimi au sensul şi definiţia dată în lucrările [2], [3].

Din analiza ecuaţiilor fizice [3] se vede că înlocuind componentele de deformaţie prin componentele energetice de deformaţie [6], eforturile şi momentele $T_\alpha$, $T_\beta$, $T_{\alpha\beta}$, $T_{\beta\alpha}$, $M_\alpha$, $M_\beta$, $M_{\alpha\beta}$, $M_{\beta\alpha}$, se obţin din componentele energetice ale deformaţiei $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$, $\varkappa^{(1)}$, $\varkappa^{(2)}$, $\tau^{(1)}$, $\tau^{(2)}$ printr-o transformare liniară cu matrice simetrică fapt esenţial în aplicabilitatea teoremelor generale ale elasticităţii.

*e) Ecuaţiile problemei.* Eliminînd eforturile tăietoare în primele cinci ecuaţii de echilibru şi ignorînd ecuaţia a şasea care este verificată identic de relaţiile fizice (3), sistemul ecuaţiilor de echilibru devine

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial T_\alpha}{\partial\alpha} - \frac{\partial T_{\beta\alpha}}{\partial s} + X = 0, \quad \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial\alpha} + \frac{\partial T_\beta}{\partial s} + Y = 0,\\
\frac{T_\beta}{R} + \frac{\partial^2 M_\alpha}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 M_\beta}{\partial\beta^2} - 2\frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}}{\partial\alpha\,\partial\beta} + Z = 0.
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Exprimînd în aceste ecuaţii eforturile şi momentele prin deplasări conform relaţiilor

$$
\begin{aligned}
T_\alpha &= \overset{1}{F}_\alpha\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \overset{1}{\mu}_\beta\,\overset{1}{F}_\alpha\left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{w}{R}\right) + \overset{1}{K}_\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} + \overset{1}{K}_\alpha\,\overset{5}{\mu}_\beta\,\frac{\partial^2 w}{\partial s^2},\\
T_\beta &= \overset{1}{F}_\beta\left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{w}{R}\right) + \overset{1}{\mu}_\alpha\overset{1}{F}_\beta\,\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \overset{1}{K}_\beta\,\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \overset{1}{K}_\beta\,\overset{5}{\mu}_\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2},\\
T_{\alpha\beta} &= -\,T_{\beta\alpha} = \frac{\overset{2}{F}_\alpha}{2}(1-\overset{2}{\mu}_\beta)\left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial\alpha}\right) + \overset{2}{K}_\alpha(1-\overset{6}{\mu}_\beta)\,\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial s},\\
M_\alpha &= -\,\overset{1}{G}_\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} - \overset{1}{G}_\alpha\overset{3}{\mu}_\beta\,\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \overset{1}{K}_\alpha\frac{\partial u}{\partial\alpha} - \overset{1}{K}_\alpha\,\overset{5}{\mu}_\beta\left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{w}{R}\right),\\
M_\beta &= -\,\overset{1}{G}_\beta\,\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \overset{1}{G}_\beta\,\overset{3}{\mu}_\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} - \overset{1}{K}_\beta\left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{w}{R}\right) - \overset{1}{K}_\beta\,\overset{5}{\mu}_\alpha\frac{\partial u}{\partial\alpha},\\
M_{\alpha\beta} &= -\,M_{\beta\alpha} = \frac{\overset{2}{K}_\alpha}{2}(1-\overset{6}{\mu}_\beta)\left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial\alpha}\right) + \overset{2}{G}_\alpha(1-\overset{4}{\mu}_\beta)\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial s},
\end{aligned}
\tag{5}
$$

se obțin ecuațiile de echilibru în deplasări date de sistemul cu matrice simetrică

$$\begin{aligned} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w + X &= 0\,, \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w + Y &= 0\,, \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w - Z &= 0\,, \end{aligned} \tag{6}$$

unde $L_{ik}(i,k = 1,\ 2,\ 3)$ sînt operatori diferențiali liniari cu coeficienți constanți exprimați prin relațiile

$$L_{11} = \overset{1}{F}_\alpha \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\overset{2}{F}_\alpha}{2}(1 - \overset{2}{\mu}_\beta)\frac{\partial^2}{\partial s^2}; \quad L_{12} = L_{21} = \left[\frac{\overset{2}{F}_\alpha}{2}(1 - \overset{2}{\mu}_\beta) + \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{F}_\beta\right]\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial s},$$

$$L_{13} = L_{31} = [\overset{2}{K}_\alpha(1 - \overset{6}{\mu}_\beta) + \overset{1}{K}_\alpha\overset{5}{\mu}_\beta]\frac{\partial^3}{\partial\alpha\partial s^2} + \overset{1}{K}_\alpha\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3} - \frac{\overset{1}{\mu}_\beta\overset{1}{F}_\alpha}{R}\frac{\partial}{\partial\alpha}, \tag{7}$$

$$L_{22} = \frac{\overset{2}{F}_\alpha}{2}(1 - \overset{2}{\mu}_\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \overset{1}{F}_\beta\frac{\partial^2}{\partial s^2},$$

$$L_{23} = L_{32} = [\overset{2}{K}_\alpha(1 - \overset{6}{\mu}_\beta) + \overset{1}{K}_\beta\ \overset{5}{\mu}_\alpha]\frac{\partial^3}{\partial\alpha^2\partial s} + \overset{1}{K}_\beta\frac{\partial^3}{\partial s^3} - \frac{\overset{1}{F}_\beta}{R}\frac{\partial}{\partial s},$$

$$L_{33} = \overset{1}{G}_\alpha\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + 2[\overset{1}{G}_\alpha\overset{3}{\mu}_\beta + \overset{2}{G}_\alpha(1 - \overset{4}{\mu}_\beta)]\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial s^2} + \overset{1}{G}_\beta\frac{\partial^4}{\delta s^4} - $$

$$- 2\frac{\overset{1}{K}_\beta}{R}\left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \overset{5}{\mu}_\alpha\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\right] + \frac{\overset{1}{F}_\beta}{R^2}.$$

Notînd cu $m$ masa structurii corespunzînd ariei unitare a suprafeței de referință, prin $p_i$ și $p_e$ respectiv presiunea interioară și exterioară, expresia componentelor vectorului forțelor exterioare în cazul problemei dinamice este dată de relațiile

$$X = -m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad Y = -m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \; Z = -m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p_i - p_e. \tag{8}$$

Considerînd rigiditatea tangențială a structurii mult mai mare în comparație cu rigiditatea dinamică transversală, componentele vectorului forței de inerție în direcția circumferențială și în direcție axială se pot neglija. Raportați la aceste considerații în sistemul (6) se poate lua

$$X = Y = 0\,, \; Z = -m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p_i - p_e. \tag{9}$$

Considerînd deplasările sub forma

$$u = \frac{2RD_{31}\,\Phi}{\overset{1}{F}_\alpha\overset{1}{F}_\beta(1 - \overset{2}{\mu}_\alpha)}, \quad v = \frac{2\,RD_{32}\,\Phi}{\overset{1}{F}_\alpha\overset{1}{F}_\beta(1 - \overset{2}{\mu}_\alpha)}, \quad w = \frac{2\,RD_{33}\,\Phi}{\overset{1}{F}_\alpha\overset{1}{F}_\beta(1 - \overset{2}{\mu}_\alpha)}, \tag{10}$$

unde $D_{ik}(i,\ k=1,\ 2,\ 3)$ reprezintă operatori diferențiali determinați ca minori algebrici ai elementului $L_{ik}$ în determinantul

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} \tag{11}$$

Se constată ușor că deplasările astfel exprimate (10) satisfac identic primele două ecuații omogene ale sistemului (6) iar prin satisfacerea ecuației a treia al aceluiași sistem se obține condiția la care trebuie să satisfacă funcția $\Phi$.

Calculînd minorii $D_{i\,3}$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ se găsesc în baza relațiilor (10) deplasările, exprimate prin intermediul funcției potențiale $\Phi$.

$$\begin{aligned} u = {} & R\left[\frac{\overset{2}{F}_\beta}{\overset{1}{F}_\alpha \overset{1}{F}_\beta}\overset{1}{K}_\beta - \frac{2\overset{2}{K}_\alpha}{\overset{1}{F}_\alpha}\frac{1-\overset{6}{\mu}_\beta}{1-\overset{2}{\mu}_\alpha} + \frac{2\overset{1}{K}_\beta}{\overset{1}{F}_\alpha}\frac{\overset{1}{\mu}_\alpha-\overset{5}{\mu}_\alpha}{1-\overset{2}{\mu}_\alpha}\right]\frac{\partial^5\Phi}{\partial\alpha\,\partial s^4} + \\ & + R\left[\frac{2}{\overset{1}{F}_\beta}\overset{2}{K}_\alpha\overset{1}{\mu}_\beta\frac{1-\overset{6}{\mu}_\beta}{1-\overset{2}{\mu}_\alpha} + \frac{2\overset{1}{K}_\beta}{\overset{1}{F}_\beta}\frac{\overset{5}{\mu}_\alpha\overset{1}{\mu}_\beta}{1-\overset{2}{\mu}_\alpha} - \frac{2\overset{1}{K}_\alpha}{\overset{1}{F}_\alpha(1-\overset{2}{\mu}_\alpha)}\right]\frac{\partial^5\Phi}{\partial\alpha^3\partial s^2} - \\ & - R\frac{\overset{2}{F}_\beta}{\overset{1}{F}_\alpha\overset{1}{F}_\beta}\overset{1}{K}_\alpha\frac{\partial^5\Phi}{\partial\alpha^5} - \frac{\overset{2}{F}_\beta}{\overset{1}{F}_\alpha}\frac{\partial^3\Phi}{\partial\alpha\,\partial s^2} + \frac{\overset{2}{F}_\beta\overset{1}{\mu}_\beta}{\overset{1}{F}_\beta}\frac{\partial^3\Phi}{\partial\alpha^3}, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} v = {} & R\left[\frac{\overset{2}{F}_\beta}{\overset{1}{F}_\alpha\overset{1}{F}_\beta}\overset{1}{K}_\alpha + \frac{2\overset{1}{K}_\alpha}{\overset{1}{F}_\beta}\frac{\overset{1}{\mu}_\beta-\overset{5}{\mu}_\beta}{1-\overset{2}{\mu}_\alpha} - \frac{2\overset{2}{K}_\alpha}{\overset{1}{F}_\beta}\frac{1-\overset{6}{\mu}_\beta}{1-\overset{2}{\mu}_\alpha}\right]\frac{\partial^5\Phi}{\partial\alpha^4\partial s} - \\ & - R\left[\frac{2\overset{1}{K}_\beta}{\overset{1}{F}_\beta}\frac{1-\overset{1}{\mu}_\beta\overset{5}{\mu}_\alpha}{1-\overset{2}{\mu}_\alpha} - \frac{2\overset{2}{K}_\alpha\overset{1}{\mu}_\alpha}{\overset{1}{F}_\alpha}\frac{1-\overset{6}{\mu}_\beta}{1-\overset{2}{\mu}_\alpha}\right]\frac{\partial^5\Phi}{\partial\alpha^2\partial s^3} - R\frac{\overset{2}{F}_\beta}{\overset{1}{F}_\alpha\overset{1}{F}_\beta}\overset{1}{K}_\beta\frac{\partial^5\Phi}{\partial s^5} + \\ & + \left[\frac{2(1-\overset{1}{\mu}_\alpha\overset{1}{\mu}_\beta)}{1-\overset{2}{\mu}_\alpha} - \frac{\overset{2}{F}_\beta}{\overset{1}{F}_\beta}\overset{1}{\mu}_\beta\right]\frac{\partial^3\Phi}{\partial\alpha^2\partial s} + \frac{\overset{2}{F}_\beta}{\overset{1}{F}_\alpha}\frac{\partial^3\Phi}{\partial s^3}, \end{aligned}$$

$$w = R\left[\frac{\overset{2}{F}_\beta}{\overset{1}{F}_\beta}\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^4} + \frac{\overset{2}{F}_\beta}{\overset{1}{F}_\alpha}\frac{\partial^4\Phi}{\partial s^4} + 2\left(\frac{1-\overset{1}{\mu}_\alpha\overset{1}{\mu}_\beta}{1-\overset{2}{\mu}_\alpha} - \frac{\overset{2}{F}_\beta\overset{1}{\mu}_\alpha}{\overset{1}{F}_\alpha}\right)\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^2\partial s^2}\right],$$

și ecuația de condiție pentru potențialul $\Phi$

$$\frac{\partial^8\Phi}{\partial\alpha^8} + a_1\frac{\partial^8\Phi}{\partial\alpha^6\,\partial s^2} + a_2\frac{\partial^8\Phi}{\partial\alpha^4\,\partial s^4} + a_3\frac{\partial^8\Phi}{\partial\alpha^2\partial s^6} + a_4\frac{\partial^8\Phi}{\partial s^8} + \tag{13}$$

$$+\frac{a_5}{R}\frac{\partial^8\Phi}{\partial\alpha^4\partial s^2}+\frac{a_6}{R}\frac{\partial^6\Phi}{\partial\alpha^2\partial s^4}+\frac{a_7}{R}\frac{\partial^6\Phi}{\partial\alpha^6}+\frac{a_8}{R^2}\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^4}=\frac{Z\overset{1}{F}_\beta}{R\overset{2}{F}_\beta\left[\overset{1}{G}_\alpha-\frac{(\overset{1}{K}_\alpha)^2}{\overset{1}{F}_\alpha}\right]}.$$

Corespunzînd coeficienţilor $a_K$ ai căror expresie este dată în tabela 2 această ecuaţie este aplicabilă structurilor construite nesimetric din straturi ortotrope. Ecuaţia este aplicabilă de asemenea structurilor construite din $m$ straturi izotrope dacă în expresia coeficienţilor $a_K$ (tabela 2) se fac particularizările date de relaţiile

$$\overset{1}{K}_\alpha=\overset{1}{K}_\beta=\overset{2}{K}_\alpha=\overset{2}{K}_\beta=K;\qquad \overset{1}{F}_\alpha=\overset{1}{F}_\beta=\overset{2}{F}_\alpha=\overset{2}{F}_\beta=F;$$

$$\overset{1}{G}_\alpha=\overset{1}{G}_\beta=\overset{2}{G}_\alpha=\overset{2}{G}_\beta=G;\qquad \overset{1}{\mu}_\alpha=\overset{2}{\mu}_\alpha=\overset{1}{\mu}_\beta=\overset{2}{\mu}_\beta=\overset{1}{\mu};$$

$$\overset{3}{\mu}_\alpha=\overset{3}{\mu}_\beta=\overset{4}{\mu}_\alpha=\overset{4}{\mu}_\beta=\overset{3}{\mu};\qquad \overset{5}{\mu}_\alpha=\overset{5}{\mu}_\beta=\overset{6}{\mu}_\alpha=\overset{6}{\mu}_\beta=\overset{2}{\mu}.$$

Aceeaşi ecuaţie este aplicabilă şi structurilor construite simetric din $(2n+1)$ straturi ortotrope. În acest caz în expresia coeficienţilor $a_K$ (tabela 2) se face $\overset{1}{K}_\alpha=\overset{1}{K}_\beta=\overset{2}{K}_\alpha=\overset{2}{K}_\beta=0$. Expresiile coeficienţilor $a_K$ precum şi a constantelor mecanice pentru fiecare caz în parte sînt date respectiv în tabelele 3 şi 4.

## 3. ECUAŢIILE HIDRODINAMICII

Vom considera curentul fluidului supersonic. Ecuaţia diferenţială care descrie o scurgere nestaţionară dedusă în ipoteza micilor perturbaţii este

$$(1-M^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}-\frac{2M}{a}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial t}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0 \qquad (14)$$

unde $\varphi(r,\ \theta,\ \alpha)$ este potenţialul vitezelor de perturbaţie.

În baza teoriei liniarizate potenţialul $\varphi$ va trebui să satisfacă pe suprafeţele de mărginire exterioară sau interioară a structurii condiţiile

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_e}{\partial r}&=U_e\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\frac{\partial w}{\partial t}{}^{1)},\quad \text{pentru } r=R+0,\\ \frac{\partial\varphi_i}{\partial r}&=U_i\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\frac{\partial w}{\partial t},\quad \text{pentru } r=R-0,\end{aligned} \qquad (15)$$

---

[1]) Este evident că în baza convenţiei adoptate la punctul 1, potenţialul $\varphi$, viteza sunetului $a$ corespunzînd curentului neperturbat, numărul Mach $M=\dfrac{U}{a}$ vor fi afectate cu indicele $e$ sau $i$ după cum mişcarea este exterioară sau interioară.

iar presiunea cu care mediul fluid acţionează asupra structurii este dată de

$$p = p_0 - \rho_0\left(U\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right). \tag{16}$$

Considerînd cilindrul infinit lung vom lua pentru potenţial expresia

$$\varphi = f(r)\, e^{i(\omega t - k\alpha)} \cos n\,\theta, \tag{17}$$

unde $f(r)$ este o funcţie ce trebuie determinată, $k = \frac{\pi}{\lambda}$, $\lambda$, fiind lungimea semiundei în direcţia generatoarei.

Această expresie a potenţialului trebuind să satisfacă ecuaţia (14) şi condiţia la limită (15) capătă în cele din urmă expresia

$$\varphi = \frac{Z_n(\mu R)}{\mu Z_n'(\mu R)}\left(U\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial t}\right) w, \tag{18}$$

unde

$$Z_n'(\mu R) = \left.\frac{dZ_n(\mu r)}{d(\mu r)}\right|_{\mu r = \mu R}.$$

$Z_n$ — fiind una din funcţiile cilindrice de rang $n$;

$\mu$ este definit de relaţia

$$\left|\left(\frac{\omega}{a} - Mk\right)^2 - k^2\right| = \mu^2. \tag{19}$$

Cazul

$$\left|\frac{\omega}{a} - Mk\right| < k, \tag{20}$$

impune utilizarea funcţiilor Bessel de argument imaginar,
Cazul

$$\left|\frac{\omega}{a} - Mk\right| > k, \tag{21}$$

impune utilizarea funcţiilor Bessel de argument real. De aici utilizînd relaţia (16) se obţine

$$p_i = p_{0i} + \rho_{0i}\frac{Z_n(\mu_i R)}{\mu_i Z_n'(\mu_i R)}\left(U_i\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 w,$$

$$p_e = p_{0e} + \rho_{0e}\frac{Z_n(\mu_e R)}{\mu_e Z_n'(\mu_e R)}\left(U_e\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 w, \tag{22}$$

sau introducînd notaţiile

$$\psi_i = \frac{Z_n(\mu_i R)}{\mu_i R Z_n'(\mu_i R)}; \quad \psi_e = \frac{Z_n(\mu_e R)}{\mu_e R Z_n'(\mu_e R)}, \tag{23}$$

se definește masa adăugată a scurgerii [1]

$$m_* = \rho_0 \psi R \tag{24}$$

În cazul îndeplinirii inegalității (20) coeficienții $\psi_i$ și $\psi_e$ sînt dați de

$$\frac{1}{\psi_i} = \mu R \frac{I_{n-1}}{I_n} - n, \quad \frac{1}{\psi_e} = \mu R \frac{K_{n-1}}{K_n} + n, \tag{25}$$ [1]

iar în cazul îndeplinirii condiției (21) de

$$\frac{1}{\psi_i} = \mu R \frac{J_{n-1}}{J_n} - n, \quad \frac{1}{\psi_e} = n - \mu R \frac{H_{n-1}^{(2)}}{H_n^{(2)}}. \tag{26}$$

Aici $I_n$ $(\mu R)$, $K_n(\mu R)$ sînt funcții cilindrice de argument imaginar, $J_n(\mu R)$ funcții Bessel de argument real, $H_n^{(2)}$ $(\mu R)$ funcții Hankel de rangul doi.

Coeficienții $\psi$ au fost determinați pentru problema interioară astfel încît soluția să fie regulată pentru $\mu R \to 0$ iar pentru problema exterioară astfel încît să fie satisfăcute la infinit condiția de amortizare a perturbațiilor sau condiția de radiație [1].

Acești coeficienți sînt dați sub forma de diagramă în lucrarea [1]. Menționăm că relațiile prezentate la punctul 3 formează în lucrarea [1] obiectul unor deduceri detaliate.

## 4. CAZUL VIBRAȚIILOR TRANSVERSALE

În baza celor arătate anterior, expresia componentei $Z$ a forțelor exterioare devine

$$Z = -(m + m_*)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2Um_*\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial t} - U^2 m_* \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, \tag{27}$$

sau ținînd seama de exprimarea deplasării $w$ prin potențialul $\Phi$, expresia lui $Z$ se scrie în cele din urmă

$$\begin{aligned} Z = &-(m + m_*)\left(P_1\frac{\partial^6 \Phi}{\partial \alpha^4 \partial t^2} + P_2\frac{\partial^6 \Phi}{\partial s^4 \partial t^2} + P_3\frac{\partial^6 \Phi}{\partial s^2 \partial \alpha^2 \partial t^2}\right) - \\ &- 2Um_*\left(P_1\frac{\partial^6 \Phi}{\partial \alpha^5 \partial t} + P_2\frac{\partial^6 \Phi}{\partial s^4 \partial \alpha \partial t} + P_3\frac{\partial^6 \Phi}{\partial s^2 \partial \alpha^3 \partial t}\right) - \\ &- U^2 m_*\left(P_1\frac{\partial^6 \Phi}{\partial \alpha^6} + P_2\frac{\partial^6 \Phi}{\partial s^4 \partial \alpha^2} + P_3\frac{\partial^6 \Phi}{\partial s^2 \partial \alpha^4}\right), \end{aligned} \tag{28}$$

---

[1] În cadrul inegalității (20), situația $\left|\frac{\omega}{a} - Mk\right| \ll k$ corespunde cazului cînd efectul compresibilității este neglijabil (viteza sunetului $a \to \infty$). În acest caz coeficienții $\Psi_i$ și $\Psi_e$ se calculează conform relațiilor (25), funcțiile cilindrice corespunzătoare avînd argumentul $\mu R = ikR$.

unde

$$P_1 = R\frac{\overset{2}{F}_\beta}{\overset{1}{F}_\beta}\ ;\ P_2 = R\frac{\overset{2}{F}_\beta}{\overset{1}{F}_\alpha}\ ;\ P_3 = 2R\left[\frac{1-\overset{1}{\mu}_x\overset{1}{\mu}_\beta}{1-\overset{2}{\mu}_\alpha} - \frac{\overset{2}{F}_\beta\,\overset{1}{\mu}_\alpha}{\overset{1}{F}_\alpha}\right].$$

Vom considera soluția ecuației rezolvente (13) în care expresia componentei $Z$ este dată de relația (28), sub forma

$$\Phi = A_{kn}\, e^{i(\omega t - k\alpha)} \cos n\theta, \tag{29}$$

unde $A_{kn}$ sînt constante complexe.

Introducînd soluția (29) în ecuația rezolventă se obține pentru $A_{kn} \neq 0$

$$\begin{gathered} k^8 + a_1 k^6 \varkappa^2 + a_2 k^4 \varkappa^4 - a_3 k^2 \varkappa^6 + a_4 \varkappa^8 - \\ - \frac{a_5}{R}\varkappa^2 k^4 - \frac{a_6}{R}\varkappa^4 k^2 - \frac{a_7}{R} k^6 + \frac{a_8}{R^2} k^4 = \\ = \frac{\overset{1}{F}_\beta}{R\overset{2}{F}_\beta\left[\overset{1}{G}_\alpha - \dfrac{(\overset{1}{K}_\alpha)^2}{\overset{1}{F}_\alpha}\right]}\left[(m + n_*)\,\omega^2(P_1 k^4 + P_2 \varkappa^4 + \right. \\ + P_3 \varkappa^2 k^2) - 2U m_* \omega (P_1 k^5 + P_2 \varkappa^4 k - P_3 \varkappa^2 k^3) + \\ \left. + U^2 m_* (P_1 k^6 + P_2 \varkappa^4 k^2 + P_3 \varkappa^2 k^4)\right], \end{gathered} \tag{30}$$

unde $\varkappa = \dfrac{n}{R}\cdot$

Cazul $m_* = 0$ conduce la determinarea expresiei frecvențelor proprii în vid

$$\omega_1^2 = \frac{R\overset{2}{F}_\beta\left[\overset{1}{G}_\alpha - \dfrac{(\overset{1}{K}_\alpha)^2}{\overset{1}{F}_\alpha}\right]}{m\overset{1}{F}_\beta} \times$$

$$\times \frac{k^8 + a_1 k^6 \varkappa^2 + a_2 k^4 \varkappa^4 - a_3 k^2 \varkappa^6 + a_4 \varkappa^8 - \dfrac{a_5}{R}\varkappa^2 k^4 - \dfrac{a_6}{R}\varkappa^4 k^2 - \dfrac{a_7}{R} k^6 + \dfrac{a_8}{R^2} k^4}{P_1 k^4 + P_2 \varkappa^4 + P_3 \varkappa^2 k^2}\cdot \tag{31}$$

În baza acestei expresii, relația (30) devine.

$$\omega_1^2 - \omega^2 = \frac{m_*}{m}(\omega - kU)^2\cdot \tag{32}$$

Frecvențele proprii $\omega$ se obțin grafic ca puncte de intersecție ale curbelor corespunzînd membrului drept și stîng a ecuației de frecvențe (32).

E demn de menționat că masa adăugată $m_*$ este o funcție transcendentă de frecvența $\omega$ și viteza curentului $U$. În cazul existenței unui mediu fluid la viteza de curgere nulă ($U = 0$) expresia frecvenței vibrațiilor proprii devine

$$\omega = \frac{\omega_1}{\sqrt{1 + \frac{m_*}{m}}}. \tag{33}$$

Tot din relația (32) se observă că pentru viteza

$$U_* = \frac{\omega_1}{k}\sqrt{\frac{m}{m_*}} \tag{34}$$

se obține $\omega = 0$. Această viteză $U_*$ este o viteză de instabilitate statică a structurii — viteză critică. Într-adevăr condiția $\omega = 0$ atrage drept expresie a potențialului $\Phi$

$$\Phi = A_{kn}\, e^{-ik\alpha} \cos n\theta \tag{35a}$$

și deci expresia componentei $w$ a vectorului deplasare (12) devine

$$w = A_{kn}(P_1 k^4 + P_2 \varkappa^4 + P_3 \varkappa^2 k^2)\, e^{-ik\alpha} \cos n\theta. \tag{35b}$$

Să considerăm acum micile deplasări $u_0(\theta, \alpha)$, $v_0(\theta, \alpha)$, $w_0(\theta, \alpha)$ ca fiind abateri de la starea de tensinue fără momente. Să considerăm în plus $w(\theta, \alpha)$ ca fiind deplasarea ce rezultă în urma scurgerii curentului fluid. În acest caz componenta $Z$ capătă expresia

$$Z = U^2 k^2 m_* (w + w_0). \tag{36}$$

Ținînd seama de relațiile (36), (35), (34), (31), în ecuația (13) se obține

$$w = \frac{w_0}{\frac{U_*^2}{U^2} - 1}. \tag{37}$$

Se observă ușor din relația (37) că atunci cînd viteza curentului $U$ este apropiată de viteza $U_*$, deplasarea normală $w$ crește foarte mult. Aceasta justifică de ce viteza $U_*$ este o viteză critică.

## 5. CAZUL ÎN CARE NU SÎNT NEGLIJATE FORȚELE DE INERȚIE TANGENȚIALE $X$, $Y$, $Z \neq 0$

Să revenim la sistemul de ecuații (6) unde componentele $X$, $Y$, $Z$ sînt date prin relațiile (8). În ipoteza cilindrului de lungime infinită, vom considera pentru componentele vectorului deplasare

$$\begin{aligned} u &= i\xi e^{i(\omega t - k\alpha)} \cos n\theta, \\ v &= \eta\, e^{i(\omega t - k\alpha)} \sin n\theta, \\ w &= \zeta e^{i(\omega t - k\alpha)} \cos n\theta, \end{aligned} \tag{38}$$

expresii care introduse în sistemul (6) conduc la un sistem algebric liniar în $\xi$, $\eta$, $\zeta$ sistem ce poate fi pus sub forma

$$(A - \omega^2 E)\bar{u} = \frac{m_*}{m}(\omega - kU)^2 \bar{a}, \tag{39}$$

unde

$$\bar{u} = \{\xi, \eta, \zeta\}, \quad \bar{a} = \{0, 0, \zeta\},$$

$$A = \frac{1}{m}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{40}$$

iar

$$a_{11} = \overset{1}{F}_\alpha k^2 - \frac{\overset{2}{F}_\beta}{2}(1 - \overset{2}{\mu}_\alpha)\varkappa^2; \; a_{23} = a_{32} =$$

$$= k^2 \varkappa[\overset{1}{K}_\alpha \overset{5}{\mu}_\beta + \overset{2}{K}_\alpha (1 - \overset{6}{\mu}_\beta)] - \overset{1}{K}_\beta \varkappa^3 - \frac{\overset{1}{F}_\beta}{R}\varkappa,$$

$$a_{12} = a_{21} = k\varkappa\left[\overset{1}{F}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta + \frac{1}{2}\overset{2}{F}_\alpha(1 - \overset{2}{\mu}_\beta)\right],$$

$$a_{13} = a_{31} = -k\varkappa^2[\overset{2}{K}_\alpha(1 - \overset{6}{\mu}_\beta) + \overset{1}{K}_\alpha \overset{5}{\mu}_\beta] - k^3 \overset{1}{K}_\alpha - \frac{\overset{1}{\mu}_\beta \overset{1}{F}_\alpha}{R}k,$$

$$a_{22} = k^2 \frac{\overset{2}{F}_\alpha}{2}(1 - \overset{2}{\mu}_\beta) - \varkappa^2 \overset{1}{F}_\beta,$$

$$a_{33} = \overset{1}{G}_\alpha k^4 + 2[\overset{1}{G}_\alpha \overset{3}{\mu}_\beta + \overset{2}{G}_\alpha(1 - \overset{4}{\mu}_\beta)]k^2\varkappa^2 + \overset{1}{G}_\beta \varkappa^4 + \frac{2\overset{1}{K}_\beta}{R}(\varkappa^2 + \overset{5}{\mu}_\alpha k^2) + \frac{\overset{1}{F}_\beta}{R^2}.$$

Pentru $m_* = 0$ obţinem ecuaţia vibraţiilor proprii a structurii, în vid

$$(A - \omega^2 E)\bar{u} = 0. \tag{41}$$

Fie $\omega_k$, $k=1,2,3$ frecvenţele de vibraţie proprii în vid şi să fie $\bar{u}_k(\xi_k, \eta_k, 1)$, $k=1,2,3$, vectorii proprii de vibraţie.

Pentru a determina transformarea ortogonală $V$ care reduce matricea $A$ la forma diagonală

$$L = VAV^{-1} = \begin{Vmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \end{Vmatrix} \tag{42}$$

se calculează valorile proprii ale lui $A$ şi se consideră matricea avînd drept coloane vectorii proprii normaţi.

Această matrice este chiar matricea ortogonală $V$ care face reducerea.

Din relația $VA = LV$ rezultă că matricea ortogonală are forma

$$V = \begin{Vmatrix} \gamma_1\xi_1 & \gamma_1\eta_1 & \gamma_1 \\ \gamma_2\xi_2 & \gamma_2\eta_2 & \gamma_2 \\ \gamma_3\xi_3 & \gamma_3\eta_3 & \gamma_3 \end{Vmatrix} \tag{43}$$

iar din condiția matricială de ortonormalitate $V^* V = E$ rezultă pentru $\gamma_k$, $k = 1, 2, 3$.

$$\gamma_k = (\xi_k^2 + \eta_k^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}. \tag{44}$$

Printr-un calcul analog dezvoltat în lucrarea [1], se ajunge la ecuația de frecvențe

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\gamma_j^{-1}}{\omega_j^2 - \omega^2} = \frac{m}{m_* \,(\omega - kU)^2}, \tag{45}$$

unde $\gamma_j$ sînt elementele anterior determinate. Ca și ecuația (32), aceasta este o ecuație în $\omega$, transcendentă, ce se rezolvă de obicei prin metode grafice.

*Tabela 1*

**Expresia parametrilor mecanici și a coeficienților Poisson reduși, în cazul structurilor construite din $m$ straturi ortotrope**

$$\overset{1}{F}_\alpha = \sum_{j=1}^{m} \frac{E_\alpha^j(\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}, \quad \overset{1}{F}_\beta = \sum_{j=1}^{m} \frac{E_\beta^j(\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j};$$

$$\overset{2}{F}_\alpha = \sum_{j=1}^{m} \frac{K^j E_\alpha^j(\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \sqrt{\frac{E_\beta^j}{E_\alpha^j}}, \quad \overset{2}{F}_\beta = \sum_{j=1}^{m} \frac{K^j E_\beta^j(\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \sqrt{\frac{E_\alpha^j}{E_\beta^j}};$$

$$\overset{1}{G}_\alpha = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{m} \frac{E_\alpha^j(\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}, \quad \overset{1}{G}_\beta = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{m} \frac{E_\beta^j(\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j};$$

$$\overset{2}{G}_\alpha = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{m} \frac{K^j E_\alpha^j(\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \sqrt{\frac{E_\beta^j}{E_\alpha^j}}; \quad \overset{2}{G}_\beta = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{m} \frac{K^j E_\beta^j(\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \sqrt{\frac{E_\alpha^j}{E_\beta^j}};$$

$$\overset{1}{K}_\alpha = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{E_\alpha^j(\xi^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} - \sum_{j=n+1}^{m} \frac{E_\alpha^j(\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}\right];$$

$$\overset{1}{K}_\beta = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{E_\beta^j(\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} - \sum_{j-n+1}^{m} \frac{E_\beta^j(\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}\right];$$

$$\overset{2}{K}_\alpha = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{K^j E_\alpha^j(\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \sqrt{\frac{E_\beta^j}{E_\alpha^j}} - \sum_{j=n+1}^{m} \frac{K^j E_\alpha^j(\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \sqrt{\frac{E_\beta^j}{E_\alpha^j}}\right];$$

$$\overset{2}{K}_\beta = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{K^j E_\beta^j(\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \sqrt{\frac{E_\alpha^j}{E_\beta^j}} - \sum_{j=n+1}^{m} \frac{K^j E_\beta^j(\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \sqrt{\frac{E_\alpha^j}{E_\beta^j}}\right];$$

$$\overset{1}{\mu}_\alpha = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{E_\beta^j \mu_\alpha^j (\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}{\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{E_\beta^j (\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}, \quad \overset{1}{\mu}_\beta = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{E_\alpha^j \mu_\beta^j (\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}{\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{E_\alpha^j (\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}$$

$$\overset{2}{\mu}_\alpha = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{E_\beta^j \mu_\alpha^j K^j (\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}{\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{E_\beta^j K^j (\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \sqrt{\frac{E_\alpha^j}{E_\beta^j}}}; \quad \overset{2}{\mu}_\beta = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{E_\alpha^j \mu_\beta^j K^j (\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}{\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{E_\alpha^j K^j (\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \sqrt{\frac{E_\beta^j}{E_\alpha^j}}}$$

$$\overset{3}{\mu}_\alpha = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{E_\beta^j \mu_\alpha^j (\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}{\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{E_\beta^j (\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}; \quad \overset{3}{\mu}_\beta = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{E_\alpha^j \mu_\beta^j (\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}{\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{E_\alpha^j (\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}$$

$$\overset{4}{\mu}_\alpha = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{E_\beta^j \mu_\alpha^j K^j (\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}{\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{E_\beta^j K^j (\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \sqrt{\frac{E_\alpha^j}{E_\beta^j}}}; \quad \overset{4}{\mu}_\beta = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{E_\alpha^j \mu_\beta^j K^j (\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}{\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{E_\alpha^j K^j (\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \sqrt{\frac{E_\beta^j}{E_\alpha^j}}}$$

$$\overset{5}{\mu}_\alpha = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{E_\beta^j \mu_\alpha^j (\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} - \sum\limits_{j=n+1}^{m} \frac{E_\beta^j \mu_\alpha^j (\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{E_\beta^j (\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} - \sum\limits_{j=n+1}^{m} \frac{E_\beta^j (\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}$$

$$\overset{5}{\mu}_\beta = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{E_\alpha^j \mu_\beta^j (\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} - \sum\limits_{j=n+1}^{m} \frac{E_\alpha^j \mu_\beta^j (\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}{\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{E_\alpha^j (\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} - \sum\limits_{j=n+1}^{m} \frac{E_\alpha^j (\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}$$

$$\overset{6}{\mu}_\alpha = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{E_\beta^j \mu_\alpha^j K^j (\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} - \sum\limits_{j=n+1}^{m} \frac{E_\beta^j \mu_\alpha^j K^j (\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{E_\beta^j K^j (\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \sqrt{\frac{E_\alpha^j}{E_\beta^j}} - \sum\limits_{j=n+1}^{m} \frac{E_\beta^j K^j (\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \sqrt{\frac{E_\alpha^j}{E_\beta^j}}}$$

$$\overset{6}{\mu}_\beta = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{E_\alpha^j \mu_\beta^j K^j (\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} - \sum\limits_{j=n+1}^{m} \frac{E_\alpha^j \mu_\beta^j K^j (\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{E_\alpha^j K^j (\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \sqrt{\frac{E_\beta^i}{E_\alpha^j}} - \sum\limits_{j=n+1}^{m} \frac{E_\alpha^j K^j (\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \sqrt{\frac{E_\beta^j}{E_\alpha^j}}}.$$

*Tabela 2*

**Expresia constantelor $a_k$ în cazul structurilor construite din $m$ straturi ortotrope**

$$a_1 = \mathcal{E}\left\{\frac{4\overset{1}{K}_\alpha \overset{2}{K}_\alpha(\overset{1}{\mu}_\beta - \overset{5}{\mu}_\beta)(1-\overset{6}{\mu}_\beta) + 2\overset{1}{K}_\alpha\overset{1}{K}_\beta\overset{5}{\mu}_\alpha(2\overset{1}{\mu}_\beta - \overset{5}{\mu}_\beta) - 2(\overset{2}{K}_\alpha)^2(1-\overset{6}{\mu}_\beta)^2}{\overset{1}{F}_\beta(1-\overset{2}{\mu}_\alpha)} - \right.$$

$$\left. - \frac{2(\overset{1}{K}_\alpha)^2}{\overset{1}{F}_\alpha(1-\overset{2}{\mu}_\alpha)} + 2\overset{1}{G}_\alpha\left[\frac{1-\overset{1}{\mu}_\alpha\overset{1}{\mu}_\beta}{1-\overset{2}{\mu}_\alpha} + \frac{\overset{2}{F}_\beta}{\overset{1}{F}_\beta}\overset{3}{\mu}_\beta - \frac{\overset{2}{F}_\beta\overset{3}{\mu}_\beta}{\overset{1}{F}_\alpha} + \frac{\overset{2}{F}_\beta\overset{2}{G}_\alpha(1-\overset{4}{\mu}_\beta)}{\overset{1}{F}_\beta\overset{1}{G}_\alpha}\right]\right\}$$

$$a_2 = \mathcal{E}\left\{\frac{2\overset{2}{F}_\beta\overset{1}{K}_\alpha\overset{1}{K}_\beta}{\overset{1}{F}_\alpha\overset{1}{F}_\beta} - \frac{2\overset{2}{K}_\alpha(1-\overset{6}{\mu}_\beta)}{1-\overset{2}{\mu}_\alpha}\left(\frac{\overset{1}{K}_\alpha}{\overset{1}{F}_\alpha}+\frac{\overset{1}{K}_\beta}{\overset{1}{F}_\beta}\right) + \right.$$

$$+ \frac{2\overset{1}{K}_\alpha\overset{1}{K}_\beta}{1-\overset{2}{\mu}_\alpha}\left(\frac{\overset{1}{\mu}_\alpha-\overset{5}{\mu}_\alpha}{\overset{1}{F}_\alpha}+\frac{\overset{1}{\mu}_\beta-\overset{5}{\mu}_\beta}{\overset{1}{F}_\beta}\right) + \overset{2}{F}_\beta\left(\frac{\overset{1}{G}_\alpha}{\overset{1}{F}_\alpha}+\frac{\overset{1}{G}_\beta}{\overset{1}{F}_\beta}\right) +$$

$$+ [\overset{2}{K}_\alpha(1-\overset{6}{\mu}_\beta)+\overset{1}{K}_\alpha\overset{5}{\mu}_\beta]\left[\frac{2\overset{2}{K}_\alpha(1-\overset{6}{\mu}_\beta)(\overset{1}{\mu}_\alpha+\overset{1}{\mu}_\beta)}{\overset{1}{F}_\alpha(1-\overset{2}{\mu}_\alpha)} + \frac{2\overset{1}{K}_\beta(2\overset{1}{\mu}_\beta\overset{5}{\mu}_\alpha-1)}{\overset{1}{F}_\beta(1-\overset{2}{\mu}_\alpha)} - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{2\overset{1}{K}_\alpha}{\overset{1}{F}_\alpha(1-\overset{2}{\mu}_\alpha)}\right] + 4[\overset{1}{G}_\alpha\overset{3}{\mu}_\beta + \overset{2}{G}_\alpha(1-\overset{4}{\mu}_\beta)]\left[\frac{1-\overset{1}{\mu}_\alpha\overset{1}{\mu}_\beta}{1-\overset{2}{\mu}_\alpha} - \frac{\overset{2}{F}_\beta\overset{1}{\mu}_\alpha}{\overset{1}{F}_\alpha}\right]\right\}$$

$$a_3 = \mathcal{E}\left\{[\overset{2}{K}_\alpha(1-\overset{6}{\mu}_\beta)+\overset{1}{K}_\alpha\overset{5}{\mu}_\beta]\frac{2\overset{1}{K}_\beta(\overset{1}{\mu}_\alpha-\overset{5}{\mu}_\alpha)-2\overset{2}{K}_\alpha(1-\overset{6}{\mu}_\beta)}{\overset{1}{F}_\alpha(1-\overset{2}{\mu}_\alpha)} - \right.$$

$$- \overset{1}{K}_\beta\left(\frac{2\overset{1}{K}_\beta(1-\overset{1}{\mu}_\beta\overset{5}{\mu}_\alpha)}{\overset{1}{F}_\beta(1-\overset{2}{\mu}_\alpha)} - \frac{2\overset{2}{K}_\alpha\overset{1}{\mu}_\beta(1-\overset{6}{\mu}_\beta)}{\overset{1}{F}_\alpha(1-\overset{2}{\mu}_\alpha)}\right) +$$

$$\left. + \frac{2\overset{2}{F}_\beta}{\overset{1}{F}_\beta}[\overset{1}{G}_\alpha\overset{3}{\mu}_\beta+\overset{2}{G}_\alpha(1-\overset{4}{\mu}_\beta)-\overset{1}{G}_\beta\overset{1}{\mu}_\alpha] + 2\overset{1}{G}_\beta\frac{1-\overset{1}{\mu}_\alpha\overset{1}{\mu}_\beta}{1-\overset{2}{\mu}_\alpha}\right\}.$$

$$a_4 = \frac{\mathcal{E}\overset{2}{F}_\beta}{\overset{1}{F}_\alpha}\left(\overset{1}{G}_\beta - \frac{(\overset{1}{K}_\beta)^2}{\overset{1}{F}_\beta}\right)$$

$$a_5 = 2\mathcal{E}\left[2\overset{2}{K}_\alpha\frac{1-\overset{6}{\mu}_\beta}{1-\overset{2}{\mu}_\alpha}(1-\overset{1}{\mu}_\alpha\overset{1}{\mu}_\beta) - 2\overset{2}{F}_\beta\left(\frac{\overset{1}{K}_\alpha}{\overset{1}{F}_\alpha}+\frac{\overset{1}{K}_\beta}{\overset{1}{F}_\beta}-\frac{2\overset{1}{K}_\alpha\overset{5}{\mu}_\beta\overset{1}{\mu}_\alpha)}{\overset{1}{F}_\alpha}\right)\right].$$

$$a_6 = 2\,\mathcal{E}\left[\frac{\overset{1}{K}_\beta \overset{2}{F}_\beta}{\overset{1}{F}_\alpha}(\overset{1}{\mu}_\alpha - \overset{5}{\mu}_\alpha) + \overset{2}{K}_\alpha\left(1 - \frac{\overset{1}{F}_\beta}{\overset{1}{F}_\alpha}\right)\overset{1}{\mu}_\beta \frac{1 - \overset{6}{\mu}_\beta}{1 - \overset{2}{\mu}_\alpha}\right]$$

$$a_7 = 2\mathcal{E}\,\frac{\overset{2}{F}_\beta}{\overset{1}{F}_\beta}(\overset{1}{K}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta - \overset{1}{K}_\beta \overset{5}{\mu}_\alpha)\,; \quad a_8 = \mathcal{E}\,\overset{2}{F}_\beta(1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)$$

$$\mathcal{E} = \frac{\overset{1}{F}_\beta}{\overset{2}{F}_\beta\left(\overset{1}{G}_\alpha - \dfrac{(\overset{1}{K}_\alpha)^2}{\overset{1}{F}_\alpha}\right)}$$

*Tabela 3*

**Constantele $a_k$ și expresia parametrilor mecanici în cazul structurilor construite din $m$ straturi izotrope**

$$a_1 = 4\,; \quad a_2 = 6\,; \quad a_3 = 4\,; \quad a_4 = 1\,; \quad a_5 = \frac{4K(\overset{1}{\mu} - \overset{2}{\mu})}{G - \dfrac{K^2}{F}}\,;$$

$$a_6 = \frac{2K(\overset{1}{\mu} - \overset{2}{\mu})}{G - \dfrac{K^2}{F}}\,; \quad a_7 = \frac{2K(\overset{1}{\mu} - \overset{2}{\mu})}{G - \dfrac{K^2}{F}}\,; \quad a_8 = \frac{1 - (\overset{1}{\mu})^2}{\dfrac{G}{F} - \left(\dfrac{K}{F}\right)^2}.$$

$$F = \sum_{j=1}^{m} \frac{E_j(\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_j^2}\,; \quad G = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{m} \frac{E_j(\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3)}{1 - \mu_j^2}\,;$$

$$K = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{m} \frac{E_j(\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_j^2} - \sum_{j=n+1}^{m} \frac{E_j(\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_j^2}\right]$$

$$\overset{1}{\mu} = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{E_j \mu_j(\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_j^2}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{E_j(\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_j^2}}\,; \quad \overset{3}{\mu} = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{E_j \mu(\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3)}{1 - \mu_j^2}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{E_j(\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3)}{1 - \mu_j^2}}$$

$$\overset{2}{\mu} = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{E_j \mu_j(\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_j^2} - \sum_{j=n+1}^{m} \frac{E_j \mu_j(\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_j^2}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{E_j(\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_j^2} - \sum_{j=n+1}^{m} \frac{E_j(\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_j^2}}\,;$$

*Tabela 4*

**Constantele $a_k$ şi expresia constantelor mecanice in cazul structurilor construite simetric din (2n + 1) straturi ortotrope**

$$a_1 = 2\left[\frac{\overset{1}{F}_\beta(1-\overset{1}{\mu}_\alpha\overset{1}{\mu}_\beta)}{\overset{2}{F}_\beta(1-\overset{2}{\mu}_\alpha)} - \overset{1}{\mu}_\beta + \overset{3}{\mu}_\beta + \frac{\overset{2}{G}_\alpha}{\overset{1}{G}_\alpha}(1-\overset{4}{\mu}_\beta)\right]$$

$$a_2 = \left[\frac{\overset{1}{F}_\beta}{\overset{1}{F}_\alpha} + \frac{\overset{1}{G}_\beta}{\overset{1}{G}_\alpha} + 4\frac{\overset{1}{F}_\beta}{\overset{2}{F}_\beta}\left(\overset{3}{\mu}_\beta + \frac{\overset{2}{G}_\alpha}{\overset{1}{G}_\alpha}(1-\overset{4}{\mu}_\beta)\right)\right]\left[\frac{1-\overset{1}{\mu}_\alpha\overset{1}{\mu}_\beta}{1-\overset{2}{\mu}_\alpha} - \frac{\overset{1}{\mu}_\alpha\overset{2}{F}_\beta}{\overset{1}{F}_\alpha}\right].$$

$$a_3 = 2\left[\frac{\overset{1}{F}_\beta}{\overset{1}{F}_\alpha}\overset{3}{\mu}_\beta + \frac{\overset{2}{G}_\alpha\overset{1}{F}_\beta}{\overset{1}{G}_\alpha\overset{1}{F}_\alpha}(1-\overset{4}{\mu}_\beta) + \frac{\overset{1}{G}_\beta\overset{1}{F}_\beta}{\overset{1}{G}_\alpha\overset{2}{F}_\beta}\,\frac{1-\overset{1}{\mu}_\alpha\overset{1}{\mu}_\beta}{1-\overset{2}{\mu}_\alpha} - \frac{\overset{1}{G}_\beta\overset{1}{\mu}_\beta}{\overset{1}{G}_\alpha}\right]$$

$$a_4 = \frac{\overset{1}{G}_\beta\overset{1}{F}_\beta}{\overset{1}{G}_\alpha\overset{1}{F}_\alpha}\ ;\quad a_5 = a_6 = a_7 = 0\ ;\quad a_8 = \frac{\overset{1}{F}_\beta}{\overset{1}{G}_\alpha}(1-\overset{1}{\mu}_\alpha\overset{1}{\mu}_\beta).$$

$$\overset{1}{F}_\alpha = \sum_{j=1}^{n+1}\frac{E_\alpha^j(\xi_j-\xi_{j-1})}{1-\mu_\alpha^j\mu_\beta^j}\ ;\quad \overset{1}{F}_\beta = \sum_{j=1}^{n+1}\frac{E_\beta^j(\xi_j-\xi_{j-1})}{1-\mu_\alpha^j\mu_\beta^j}$$

$$\overset{2}{F}_\alpha = \sum_{j=1}^{n+1}\frac{K^j E_\alpha^j(\xi_j-\xi_{j-1})}{1-\mu_\alpha^j\mu_\beta^j}\sqrt{\frac{E_\beta^j}{E_\alpha^j}}\ ;\quad \overset{2}{F}_\beta = \sum_{j=1}^{n+1}\frac{K^j E_\beta^j(\xi_j-\xi_{j-1})}{1-\mu_\alpha^j\mu_\beta^j}\sqrt{\frac{E_\alpha^j}{E_\beta^j}}$$

$$\overset{1}{G}_\alpha = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{E_\alpha^j(\xi_j^3-\xi_{j-1}^3)}{1-\mu_\alpha^j\mu_\beta^j}\ ;\quad \overset{1}{G}_\beta = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{E_\beta^j(\xi_j^3-\xi_{j-1}^3)}{1-\mu_\alpha^j\mu_\beta^j}.$$

$$\overset{2}{G}_\alpha = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{K^j E_\alpha^j(\xi_j^3-\xi_{j-1}^3)}{1-\mu_\alpha^j\mu_\beta^j}\sqrt{\frac{E_\beta^j}{E_\alpha^j}}\ ;\quad \overset{2}{G}_\beta = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{K^j E_\beta^j(\xi_j^3-\xi_{j-1}^3)}{1-\mu_\alpha^j\mu_\beta^j}\sqrt{\frac{E_\alpha^j}{E_\beta^j}}$$

$$\overset{1}{\mu}_\alpha = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1}\frac{E_\beta^j\mu_\alpha^j(\xi_j-\xi_{j-1})}{1-\mu_\alpha^j\mu_\beta^j}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1}\frac{E_\beta^j(\xi_j-\xi_{j-1})}{1-\mu_\alpha^j\mu_\beta^j}}\ ;\quad \overset{1}{\mu}_\beta = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1}\frac{E_\alpha^j\mu_\beta^j(\xi_j-\xi_{j-1})}{1-\mu_\alpha^j\mu_\beta^j}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1}\frac{E_\alpha^j(\xi_j-\xi_{j-1})}{1-\mu_\alpha^j\mu_\beta^j}}$$

$$\overset{2}{\mu}_\alpha = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1}\frac{E_\beta^j\mu_\alpha^j K^j(\xi_j-\xi_{j-1})}{1-\mu_\alpha^j\mu_\beta^j}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1}\frac{E_\beta^j K^j(\xi_j-\xi_{j-1})}{1-\mu_\alpha^j\mu_\beta^j}\sqrt{\frac{E_\alpha^j}{E_\beta^j}}}\ ;\quad \overset{2}{\mu}_\beta = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1}\frac{E_\alpha^j\mu_\beta^j K^j(\xi_j-\xi_{j-1})}{1-\mu_\alpha^j\mu_\beta^j}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1}\frac{E_\alpha^j K^j(\xi_j-\xi_{j-1})}{1-\mu_\alpha^j\mu_\beta^j}\sqrt{\frac{E_\beta^j}{E_\alpha^j}}}.$$

$$\overset{3}{\mu}_{\alpha} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n+1} \frac{E_{\beta}^{j} \mu_{\alpha}^{j} (\xi_{j}^{3} - \xi_{j-1}^{3})}{1 - \mu_{\alpha}^{j} \mu_{\beta}^{j}}}{\sum\limits_{j=1}^{n+1} \frac{E_{\beta}^{j} (\xi_{j}^{3} - \xi_{j-1}^{3})}{1 - \mu_{\alpha}^{j} \mu_{\beta}^{j}}} \; ; \quad \overset{3}{\mu}_{\beta} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n+1} \frac{E_{\alpha}^{j} \mu_{\beta}^{j} (\xi_{j}^{3} - \xi_{j-1}^{3})}{1 - \mu_{\alpha}^{j} \mu_{\beta}^{j}}}{\sum\limits_{j=1}^{n+1} \frac{E_{\alpha}^{j} (\xi_{j}^{3} - \xi_{j-1}^{3})}{1 - \mu_{\alpha}^{j} \mu_{\beta}^{j}}}$$

$$\overset{4}{\mu}^{\alpha} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n+1} \frac{K^{j} E_{\beta}^{j} \mu_{\alpha}^{j} (\xi_{j}^{3} - \xi_{j-1}^{3})}{1 - \mu_{\alpha}^{j} \mu_{\beta}^{j}}}{\sum\limits_{j=1}^{n+1} \frac{K^{j} E_{\beta}^{j} (\xi_{j}^{3} - \xi_{j-1}^{3})}{1 - \mu_{\alpha}^{j} \mu_{\beta}^{j}} \sqrt{\frac{E_{\alpha}^{j}}{E_{\beta}^{j}}}} \; ; \quad \overset{4}{\mu}_{\beta} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n+1} \frac{K^{j} E_{\alpha}^{j} \mu_{\beta}^{j} (\xi_{j}^{3} - \xi_{j-1}^{3})}{1 - \mu_{\alpha}^{j} \mu_{\beta}^{j}}}{\sum\limits_{j=1}^{n+1} \frac{E_{\alpha}^{j} K^{j} (\xi_{j}^{3} - \xi_{j-1}^{3})}{1 - \mu_{\alpha}^{j} \mu_{\beta}^{j}} \sqrt{\frac{E_{\beta}^{j}}{E_{\alpha}^{j}}}} \,..$$

*Primită la redacție la 1 octombrie 1960*

# КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ СЛОИСТЫХ ОБОЛОЧЕК КРУГЛОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ, РАСПОЛОЖЕННЫХ В ПОТОКЕ СВЕРХЗВУКОВОЙ ЖИДКОСТИ

## РЕЗЮМЕ

Рассматривается задача колебаний тонких упругих слоистых оболочек круглой цилиндрической формы, построенных произвольным наложением $m$ ортотропных слоев.

Построенная таким образом слоистая оболочка считается расположенной в потоке идеальной сверхзвуковой жидкости, который рассматривается потенциальным со скоростью на бесконечности $U$, вектор которой является параллельным оси цилиндрической слоистой оболочки. Отмечается, что задача колебаний цилиндра рассматривается для случая внутреннего или внешнего потока жидкости. В решении этой задачи учитываются как уравнения, относящиеся к упругости этих слоистых оболочек, так и уравнения гидродинамики.

В начале рассматривается задача поперечных колебаний и при этом выводится уравнение частот. Для этого же случая выводится критическая скорость потока жидкости, при которой появляется статическая неустойчивость слоистой оболочки. В продолжении рассматривается задача колебаний цилиндрических слоистых оболочек, расположенных в сверхзвуковом потоке жидкости, когда учитываются и составляющие сил касательной инерции, и для этого случая устанавливается уравнение частот.

Способ постановки задачи, а также полученные результаты представляет собой распространение полученных В. В. Болотиным результатов на случай однородных изотропных оболочек [1].

# VIBRATIONS DES STRUCTURES ÉLASTIQUES EN FORME DE CYLINDRE CIRCULAIRE SITUÉES DANS UN COURANT FLUIDE SUPERSONIQUE

## RÉSUMÉ

On aborde le problème des vibrations des structures minces élastiques, en forme de cylindre circulaire, construites par la superposition arbitraire de $m$ couches orthotropes.

On suppose que la structure ainsi construite se trouve dans un courant fluide, idéal, supersonique, potentiel, dont le vecteur de la vitesse à l'infini $U$ est parallèle à l'axe de la structure cylindrique. Il fait remarquer que le problème des vibrations du cylindre est traité dans les deux cas du courant fluide : intérieur et extérieur. Pour être à même de résoudre ce problème, il faut se servir aussi bien des équations concernant l'élasticité de ces structures, que des équations de l'hydrodynamique.

En partant du problème des vibrations transversales, on peut déduire l'équation des fréquences aussi bien que la vitesse critique du courant fluide, c'est-à-dire la vitesse où apparaît l'instabilité statique de la structure. L'auteur traite ensuite le problème des vibrations des structures cylindriques placées dans un courant fluide supersonique, dans le cas où l'on tient compte, en outre, des composantes des forces d'inertie tangentielles, et réussit à établir, dans ce cas aussi, l'équation des fréquences.

La manière d'aborder le problème, aussi bien que les résultats obtenus, représentent une extension des résultats fournis par V. V. Bolotine, dans le cas des coques homogènes et isotropes [1].

## BIBLIOGRAFIE

1. В. В. БОЛОТИН, *Колебания и устойчивость упругой цилиндрической оболочки в потоке сжимаемой жидкости.* Инж. сборник, **XXIV**, 1956.
2. L. LIBRESCU, *Asupra teoriei structurilor subțiri construite din straturi elastice.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, *4* (1960).
3. — *Elastische Mehrschichtenschallen.* Revue de mécanique appliquée, **V**, *5* (1960).
4. С. А. АМБАРЦУМЯН, *К вопросу слоистых анизотропных оболочек.* Изд. Акад. Наук Армянской ССР, **VI**, *3* (1953).
5. Э. И. ГРИГОЛЮК, *О прочности и устойчивости цилиндрических биметаллических оболочек.* Инж. Сборник **XV**, *5* (1953).
6. А. Л. ГОЛДЕНВЕЙЗЕР, *Теория упругих тонких оболочек.* Гостехиздат, Москва, 1953.

# NOI CERCETĂRI TEORETICE ŞI EXPERIMENTALE ÎN MECANICA CORPURILOR GRANULARE, TRATATE CA MEDII CARACTERIZATE PRIN ECUAŢII STOCHASTICE[1]

DE

J. LITWINISZYN
MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI DE ŞTIINŢE POLONEZE

Modelul cel mai frecvent folosit în fenomenele de mecanică ale corpurilor granulare este acela care acceptă corpurile granulare ca fiind medii continue. Mişcarea unui asemenea mediu este descrisă cu ajutorul aşa-numitei transformări de continuitate.

Explicarea fenomenelor de mişcare a corpurilor granulare cu ajutorul considerentelor clasice din mecanica mediilor continue prezintă dificultăţi reale. Aceste dificultăţi sînt cauzate de următoarele fapte :

— continuitatea transformărilor nu este păstrată în mişcare ;
— nu există ecuaţii reologice de stare pentru aceste medii.

Pentru înlăturarea acestor dificultăţi, se poate construi un nou model care să explice mişcarea acestor medii [1].

Acest model nu tratează corpurile granulare ca medii continue, ci ca un şir de numere mari de elemente, adică granule de nisip şi sfărîmături de rocă.

Lipsa de continuitate a caracterului transformărilor ce corespund deplasărilor unor asemenea medii, numărul mare de elemente (granule de nisip) implicate în fenomene, precum şi caracterul de masă al evenimentelor fac imposibilă descrierea deplasărilor într-un asemenea mediu cu ajutorul formelor cauzale de gîndire din mecanica clasică.

Aceste circumstanţe sugerează însă ideea folosirii pentru deplasările în corpurile de tipul considerat a unei forme matematice de gîndire bazată pe teoria proceselor stochastice, dîndu-se astfel o nouă interpretare fizică a teoriei.

---

[1] Lucrare prezentată la Sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului de mecanică aplicată ,,Traian Vuia'' al Academiei R.P.R., Bucureşti, 4—7 iulie 1960.

Aceste noi forme matematice necesită introducerea unor noi concepte, diferite de acelea aplicate în mecanica mediilor continue. Conceptele de deplasare şi viteză vor fi înlocuite prin alte concepte. Pentru aceasta, să presupunem că sistemul cartezian stabil de coordonate este dat. În punctul $P$ se dă elementul de suprafaţă $\Delta S$. Volumul mediului care în timpul $t$ se va deplasa prin acest element este $\Delta V\ (P, t, \Delta S)$.

Formăm limita

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta V(P, t, \Delta S)}{\Delta S} = w\,(P,t).$$

Funcţia $w = w\,(p,t)$ determină aşa-numitul *bazin de scufundare.* Mărimea obţinută, a cărei dimensiune este dimensiunea bazinului, corespunde conceptului de deplasare din mecanica mediilor continue.

Pentru claritate, raţionamentul va fi făcut pentru probleme tridimensionale spaţiu-timp. Se vor considera fenomene ce apar sub influenţa cîmpului de gravitaţie al pămîntului. Se va folosi un sistem de coordonate carteziene $\{x, z, t\}$, unde $x$, $z$ sînt coordonate spaţiale, $t$ este timpul, iar axa $Z$ are direcţia verticală în sus. Alegerea direcţiei $z$ este cauzată de cîmpul de gravitaţie menţionat mai sus.

Pentru a prezenta o idee generală a schemei, să ne imaginăm că aşa cum se arată în figura 1, pe nivelul 1 în momentul $a$ se dă un bazin de scufundare cu coordonatele de adîncime $w = w\ (1,\ a) = w\ (1)$.

Existenţa primului bazin are drept efect producerea unui al doilea bazin la nivelul 2 şi momentul $b$, de adîncime $w = w\ (2,\ b) = w(\mathrm{II})$.

Aceasta se poate exprima prin simboluri în felul următor

$$w\,(2,b) = F\,[w\,(1,\ a)\,;\ 1,\ a\,;\ 2,\ b],$$

unde prin $F$ se notează o transformare care urmează a fi făcută pe bazinul $w = w\,(1,\ a)$ în timpul tranziţiei de la 1, $a$ la 2, $b$ pentru a se obţine bazinul $w = w\,(2,\ b)$.

Bazinul $w = w\ (2,\ b)$ poate fi considerat drept cauza formării unui bazin superior la un moment ulterior $w = w\,(3,\ C) = w\ (\mathrm{III})$.

Se poate scrie

$$w\,(3,\ C) = F\,[w\,(2,\ b)\,;\ 2,\ b\,;\ 3,\ C].$$

Bazinul $w = w\ (3,\ c)$ poate fi direct obţinut ca efect al bazinului $w = w\,(1,\ a)$ în forma

$$w\,(3,C) = F\,[\,w(1,\ a)\,;\ 1,\ a\,;\ 3,\ C].$$

Din postulatul potrivit căruia prin compunerea a două operaţii succesive obţinem acelaşi efect ca şi printr-o operaţie directă, obţinem ecuaţia funcţională în forma următoare :

$$F\,\{F\,[w\,(1, a)\,; 1, a\,; 2, b]\,;\ 2,\ b\,;\ 3,\ C\,\} = F[w\,(1,\ a)\,;\ 1,\ a\,;\ 3,\ C]. \quad (1)$$

Operatorul $F$ permite să se obţină coordonatele bazinului la orice nivel şi moment arbitrar, dacă există dat un bazin pe un nivel mai inferior la un moment anterior.

Diversitatea numărului de soluții al ultimei ecuații funcționale pentru $F$ este atît de mare, încît pentru a alege o soluție utilă scopurilor

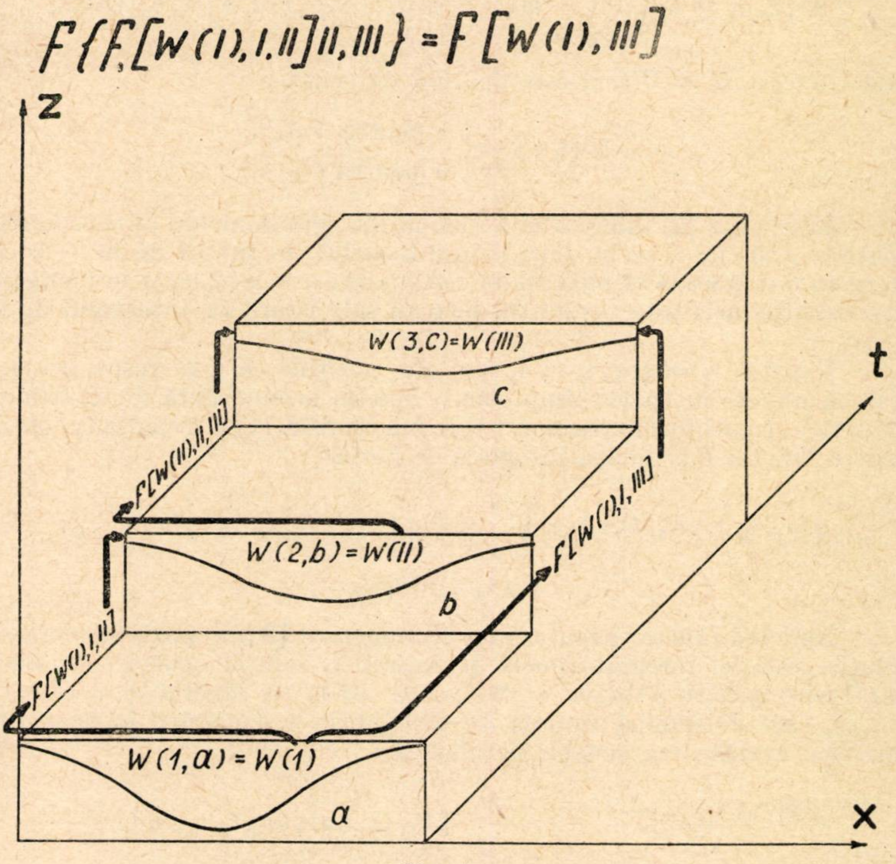

F{F[W(I),I,II]II,III} = F[W(I),III]
z
t
x
W(3,C)=W(III)
c
F[W(II),II,III]
F[W(I),I,III]
W(2,b) = W(II)
b
F[W(I),I,II]
W(1,a) = W(1)
a

Fig. 1

noastre este necesar să se facă ipoteze suplimentare care limitează această alegere.

O asemenea ipoteză este aceea a linearității și suprapunerii fenomenului în forma

$$F[\alpha w_1(1, a) + \beta w_2(1, a); 1, a; 2, b] = \alpha F[w_1(1, a); 1, a; 2, b] +$$
$$+ \beta F[w_2(1, a); 1, a; 2, b],$$

unde $\alpha$ și $\beta$ sînt constante arbitrare.

Ipoteza liniarității și suprapunerii ne permite să presupunem că operatorul poate fi dat în forma unui operator integral (2)

$$w(\xi, \tau, \mathfrak{z}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\tau} w(x, t, z)\varphi(x, t, z; \xi, \tau, \mathfrak{z})\, dx\, dt, \qquad (2)$$

sau în forma

$$w(\xi, \tau, \mathfrak{z}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} w(x, t, z)H(t, \tau)\varphi(x, t, z; \xi, \tau, \mathfrak{z})\, dxdt, \tag{2a}$$

unde funcția $H = H(t, \tau)$ este definită de ecuația

$$H(t, \tau) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } t \leqslant \tau, \\ 0 \text{ pentru } t > \tau. \end{cases}$$

În ecuația (2) integrările au loc în întregul domeniu al coordonatelor spațiale $x$ de la $-\infty$ la $+\infty$ și în intervalul de timp $t$ de la $-\infty$ la $\tau$. Aceasta înseamnează că bazinul de scufundare $w = w(\xi, \tau, \mathfrak{z})$ în momentul $\tau$ al existenței sale este rezultatul întregii sale istorii în intervalul de timp $-\infty, \tau$.

Funcția $\varphi = \varphi(x, t, z; \xi, \tau, \mathfrak{z})$ de pozițiile $x, t, z$, respectiv $\xi, \tau, \mathfrak{z}$ a două puncte în spațiu-timp este o funcție necunoscută de distribuție a densității. În conformitate cu ecuația funcțională (1) și ecuația (2) obținem pentru funcția $F$ o ecuație integrală de forma

$$\varphi(x_1, t_1, z_1; x_3, t_3, z_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1, t_1, z_1; x_2, t_2, z_2)\,\varphi(x_2, t_2, z_2; x_3, t_3, z_3)\, dx_2 dt_2 \tag{3}$$

Aplicînd funcției $\varphi$ ipoteza lui Kolmogorov [3], se poate demonstra că soluția ecuației integrale poate fi redusă la soluția ecuației diferențiale parabolice pentru funcția $\varphi$. Se poate arăta că funcția $\varphi = \varphi(x_0, t_0, z_0; x, t, z)$, care determină funcția de distribuție a densității în spațiu-timp satisface următoarea ecuație parabolică :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x_0, t_0, z_0; x, t, z)}{\partial z} = {} & \frac{\partial^2}{\partial x^2}[B_{11}(x, t, z)\varphi(x_0, t_0, z_0; x, t, z)] + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}[B_{12}(x, t, z)\varphi(x_0, t_0, z_0; x, t, z)] + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x}[B_{21}(x, t, z)\varphi(x_0, t_0, z_0; x, t, z)] + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial t^2}[B_{22}(x, t, z)\varphi(x_0, t_0, z_0; x, t, z)] - \\ & - \frac{\partial}{\partial z}[A_1(x, t, z)\varphi(x_0, t_0, z_0; x, t, z)] - \\ & - \frac{\partial}{\partial t}[A_2(x, t, z)\varphi(x_0, t_0, z_0; x, t, z)]. \end{aligned} \tag{4}$$

Funcțiile $B_{11} \ldots A_2$ sînt caracteristice pentru procesele de formare ale bazinului de scufundare în spațiu-timp.

Unii din acești coeficienți pot fi determinați specificînd proprietățile mediului. În particular, aceasta se poate face acceptînd anumite ipoteze cu privire la omogenitatea și simetria proprietăților spațiu-timp ale mediului.

Să presupunem că mediul este omogen față de coordonatele aspațiale orizontale $x$ și că este omogen față de coordonatele de timp $t$, adică proprietățile sale nu se schimbă în timp.

Date fiind ipotezele de mai sus, funcțiilor $B_{11} \ldots A_2$, care sînt coeficienți în ecuația (4) depind numai de coordonata de înălțime $z$. De aceea, ne vom limita considerațiile noastre cu privire la un mediu neomogen doar la înălțime.

O particularizare suplimentară a funcțiilor $B_{11} \ldots A_2$ care sînt coeficienți în ecuația (4) se poate obține presupunînd existența anumitor elemente spațiale de simetrie ale mediului [4].

În unele medii se poate presupune existența planurilor de simetrie perpendiculare pe axa de coordonate spațiale $x$. Pe de altă parte, nu există nici un motiv pentru a presupune o simetrie a fenomenului în timp. Aceste planuri de simetrie perpendiculare pe axa de coordonate de timp nu există.

De aceea, la considerarea proceselor spațiu-timp de apariție a bazinelor de scufundare, vom mai presupune existența doar a unui sistem de elemente de simetrie, adică a unui sistem de planuri de simetrie perpendiculare pe axa $x$.

În cazul unui mediu omogen care are un asemenea sistem de planuri de simetrie, ecuația (4) va avea următoarea formă

$$\frac{\partial \varphi(x_0, t_0, z_0; x, t, z)}{\partial z} = A(z) \frac{\partial^2 \varphi(x_0, t_0, z_0; x, t, z)}{\partial x^2} + $$

$$+ B(z) \frac{\partial^2 \varphi(x_0, t_0, z_0; x, t, z)}{\partial t^2} + C(z) \frac{\partial \varphi(x_0, t_0, z_0; x, t, z)}{\partial t} \tag{5}$$

Soluția fundamentală a acestei ecuații este

$$\varphi(x_0, t_0, z_0; x, t, z) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \{[\mathfrak{z}(z) - \mathfrak{z}(z_0)]\,[\bar{\mathfrak{z}}(z) - \bar{\mathfrak{z}}(z_0)]\}^{-\frac{1}{2}} \exp - \left\{ \frac{(x - x_0)^2}{4\,[\mathfrak{z}(z) \cdot \mathfrak{z}(z_0)} + \right.$$

$$\left. + \frac{[t - t_0 + \rho(z)]^2}{4[\bar{\mathfrak{z}}(z) - \bar{\mathfrak{z}}(z_0)]} \right\}, \tag{6}$$

unde

$$\mathfrak{z}(z) = \int_{z_0}^{z} A(s)\, ds, \quad \bar{\mathfrak{z}}(z) = \int_{z_0}^{z} B(s)\, ds, \quad \rho(z) = \int_{z_0}^{z} C(s)\, ds.$$

Coordonatele de adîncime ale bazinului de scufundare sînt date de ecuația (2). În conformitate cu ecuațiile (2) și (6) ordonatele bazinului în spațiu-timp sînt date de

$$w(x,t,z) = \frac{1}{4\pi}\{[\mathfrak{z}(z) - \mathfrak{z}(z_0)][\bar{\mathfrak{z}}(z) - \bar{\mathfrak{z}}(z_0)]\}^{-\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{t} w(x_0,t_0,z_0) \exp - \left\{\frac{(x-x_0)^2}{4\,[\mathfrak{z}(z) - \mathfrak{z}(z_0)]} + \right.$$

$$\left. + \frac{[t - t_0 + \rho(z)]^2}{4\,[\bar{\mathfrak{z}}(z) - \bar{\mathfrak{z}}(z_0)]}\right\} dx_0\, dt_0.$$

Această ultimă ecuație permite determinarea coordonatelor adîncimii bazinului $w = w(x,t,z)$ dacă condițiile de formare a bazinului sînt date pe un anumit nivel determinat $z_0$ cu ajutorul funcției $w = w(x_0, t_0, z_0)$.

Considerațiile de mai sus s-au referit la fenomenele proceselor de deplasare care apar în spațiu-timp. Un caz special al acestor procese îl constituie procesele independente de timp, adică procesele staționare.

Procesele staționare sînt un caz special al proceselor descrise de ecuațiile (4) și (5).

În procesele staționare, funcția $\varphi$ care definește așa-numita funcție de distribuție a densității este independentă de timp. De aceea, în acest caz, ecuația (4) ia forma

$$\frac{\partial\varphi(x_0, z_0; x, z)}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}[B(x,z)\varphi(x_0, Z_0; x, Z)] -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x}[A(x,z)\varphi(x_0, z_0; x, z)],$$

iar ecuația (5) devine

$$\frac{\partial\varphi(x_0, z_0; x, z)}{\partial z} = B(z)\frac{\partial^2\varphi(x_0, z_0; x, z)}{\partial x^2}. \tag{7}$$

Pentru verificarea rezultatelor teoretice obișnuite s-au început cercetări experimentale asupra posibilității de aplicare a acestor rezultate la deplasările unui mediu granular uscat [5], [6], [7]. Cercetările au fost executate cu ajutorul unei camere speciale prevăzută cu pereți de sticlă, umplută cu nisip de granulație uniformă. Aceste cercetări au arătat că în cazul în care se respectă condiții experimentale adecvate, bazinul de scufundare ce rezultă din condițiile inițiale Dirac (fantă îngustă în fundul camerei experimentale) pot fi descrise cu ajutorul soluției fundamentale a ecuației (7).

În particular, pentru un mediu cu izotropie orizontală și omogen, soluția fundamentală pentru un nivel fix $z$ ia forma curbei lui Gauss.

Rezultatele măsurătorilor executate în cursul cercetărilor experimentale menționate mai sus arată că există un domeniu de variație al condițiilor experimentale și o regiune în masa de nisip unde bazinele de scufundare pot fi aproximate foarte îndeaproape prin curbele lui Gauss.

# НОВЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В МЕХАНИКЕ ЗЕРНИСТЫХ ТЕЛ, РАССМАТРИВАЕМЫХ КАК СРЕДЫ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИЕСЯ СТОХАСТИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ

## РЕЗЮМЕ

В настоящей работе описывается теория зернистых сред, рассматриваемых как среды, характеризующиеся стохастическими уравнениями для явлений в пространствеи времени.

Получается закон образования бассейнов опускания под действием силы тяжести. Теоретические результаты проверяются экспериментально при помощи специального приспособления.

# NEW THEORETICAL AND EXPERIMENTAL INVESTIGATIONS IN THE MECHANICS OF LOOSE BODIES TREATED AS MEDIA CHARACTERIZED BY STOCHASTIC EQUATIONS

## ABSTRACT

This paper describes the theory of loose bodies treated as media characterized by stochastic equations for space—time phenomena.

The law of formation of the "subsidence basins" under the action of the gravity field is obtained. The theoretical results are verified experimentally with the aid of a special equipment.

## BIBLIOGRAFIE

1. J. Litwiniszyn, *Application of the Equation of Stochastic Processes to Mechanics of Loose Bodies*. Archiwum Mechaniki Stosowanej, **VIII**, *4* (1956).
2. — *Time-space Processes in Stochastic Media*. II. Bull. Acad. Polon. Sci., Série des sci. techn., **VII**, *5* (1959).
3. A. Kolmogorov, *Zur Theorie der statigen zufälligen Prozesse*. Math. Ann., *108* (1933).
4. A. Z. Smolarski, *Wplyw struktury osrodka na postae rownania stochastycznego*. Arch. Gorn., **I**, *3* (1956).

5. J. Litwiniszyn, J. Maczynski, A. Z. Smolarski, *O pewnych eksperymentalnych badaniach nad zachowaniem sie piasku jako osrodka stochastycznego*. Arch. Gern., **I**, *3* (1956).

6. J. Bodziony, A. Z. Smolarski, *Experimental Investigations of Loose Bodies, from the Aspect of the Theory of the Stochastic Medium*. Bull. Acad. Polon. Sci., Série des sci. techn., **VIII**, *3* (1960).

7. D. Krzyszton, L. Rogowski, *Gegenüberstellung der Versuchsergebnisse an einem Modell eines einfallend geschichteten Mediums mit der Gleichung stochastischer Prozesse*. Bul. Acad. Polon. Sci., Série des sci. techn. (sub tipar).

# STUDII

## MECANICA PĂMÎNTURILOR

# PROCESUL DE ELECTROOSMOZĂ APLICAT LA AMELIORAREA PĂMÎNTURILOR

DE

R. J. BALLY și I. ANTONESCU[1]

Studiile cu privire la acțiunea curentului electric continuu asupra pămînturilor au fost întreprinse în perioada 1953—1957 în cadrul Institutului de mecanică aplicată și continuate apoi la Institutul de studii și cercetări hidrotehnice. Au fost urmărite în paralel două aspecte ale acestei acțiuni :

— efectul procesului de electroosmoză asupra pămînturilor compresibile ;

— introducerea în pămînt cu ajutorul electroosmozei a substanțelor necesare întăririi lui prin silicatizare.

Rezultatele obținute au fost expuse pe parcurs în mai multe lucrări [1]—[7]. În prezenta expunere, făcută cu prilejul sesiunii jubiliare a Institutului de mecanică aplicată, se va face o scurtă prezentare de ansamblu a rezultatelor obținute prin studiile inițiate în acest institut.

Trecerea curentului electric continuu printr-o masă de pămînt ca urmare a stabilirii unei diferențe de potențial între două puncte ale acestei mase are ca principal efect deplasarea electroosmotică a unei părți din apa conținută în pămînt, dinspre un electrod spre celălalt (în majoritatea cazurilor dinspre anod spre catod). Deși fenomenul se produce în general în toate mediile poroase, la pămînturile compresibile, manifestarea sa are anumite particularități.

Interpretarea în calcul a circulației electroosmotice se face în mod curent potrivit ipotezei lui Helmholtz, valabilă pentru mediile poroase rigide, printr-o expresie analoagă legii Darcy

$$v_e = k_e . e. \tag{1}$$

---

[1] Institutul de studii și cercetări hidrotehnice.

În cazul existenţei simultane a unui gradient hidraulic şi a unuia electric, efectul combinat al acţiunilor respective se obţine prin simpla sumare vectorială a vitezelor (gravitaţională şi electroosmotică)

$$v_t = v_g + v_e = k \cdot i + k_e \cdot e, \tag{2}$$

în care $i$ este gradientul hidraulic, $e$ gradientul electric (raportul dintre diferenţa de potenţial şi lungimea liniilor de curent), iar $k$ şi $k_e$ coeficienţii de permeabilitate respectivi.

În ultimii ani, aprofundarea studiilor asupra electroosmozei a dus la concluzia că, în ceea ce priveşte pămînturile, fenomenul apare mai complex decît în mediile poroase nedeformabile, ceea ce face necesară o revizuire a ipotezelor lui Helmholtz.

Experimente întreprinse atît de autori, cît şi de alţi cercetători, au arătat că, în pămînturile compresibile, dezvoltarea proceselor electroosmotice este neuniformă, atît în timp, cît şi în spaţiu ; gradul de neuniformitate al acestor procese este în funcţie de natura pămîntului. Trecerea curentului electric provoacă, pe lîngă deplasarea apei din pămînt, o sensibilă drenare şi îndesare a pămîntului.

Pornind de la aceste constatări s-a căutat ca, prin luarea în considerare a constituţiei caracteristice a pămînturilor, să se emită ipoteze complimentare celor care stau la baza teoriei lui Helmholtz. Au fost avute în vedere următoarele trăsături specifice alcătuirii pămînturilor argiloase :

— microneomogenitatea pămînturilor (prezenţa chiar în pămînturile omogene, a particulelor şi porilor de dimensiuni diferite) ;

— interacţiunea dintre particulele coloidale, minerale şi apa mineralizată din pămînt (complexul de adsorbţie) ;

— prezenţa simultană în pămînt a apei adsorbite şi a celei libere.

Au fost emise două ipoteze complimentare :

1. Cîmpul de forţe generat de diferenţa de potenţial electric dintre electrozi provoacă, pe lîngă procesul de electroosmoză, o redistribuire a cîmpului de forţe existent în complexul de adsorbţie şi imprimă acestui cîmp, iniţial haotic, o orientare de ansamblu.

2. Prezenţa apei libere şi microneomogenitatea pămîntului fac ca procesul de electroosmoză să se dezvolte neuniform : în acelaşi timp şi în aceeaşi zonă, intensitatea procesului poate diferi în funcţie de mărimea porilor şi de raportul dintre volumul apei legate şi a celei libere cuprinse în ei (în unii pori, se poate chiar ca procesul să nu aibă loc).

Pentru verificarea justeţei acestor ipoteze s-au examinat mai multe fenomene caracteristice pentru efectul electroosmozei asupra pămînturilor compresibile, fenomene care pot fi explicate pe baza ipotezelor enunţate.

În această categorie de fenomene se încadrează intensificarea circulaţiei hidromecanice a apei prin pămînt datorită acţiunii simultane a cîmpului electric.

În cazul existenţei în pămînt a unui gradient electric concomitent cu unul hidraulic, acţiunea celui din urmă este uşurată prin faptul că o parte din moleculele de apă legată, aflate iniţial în cîmpul de atracţie al particulelor, îşi schimbă orientarea datorită cîmpului electric ; ca urmare ele pot fi antrenate mai uşor în curentul de apă provocat de gradientul hidraulic.

Această ipoteză a fost verificată experimental de către autori prin constatarea că viteza curentului de filtrație sub acțiunea simultană a cîmpului gravitațional și electric este mai mare decît suma vitezelor curentelor provocate de fiecare din cîmpuri în parte, dacă ar acționa separat

$$\alpha = \frac{q_{ei}}{q_e + q_i} > 1, \tag{3}$$

în care $q_e$, $q_i$ și $q_{ei}$ sînt debitele unitare sub acțiunea separată și respectiv simultană a celor două cîmpuri.

Constatarea de mai sus constituie o abatere de la ipoteza Helmholtz exprimată prin relația (2), în care $\alpha$, calculat potrivit expresiei (3) ar avea valoarea egală cu unitatea.

Experiențele întreprinse pe pămînturi compresibile foarte variate, de la argilele grase pînă la nisipurile fine, prăfoase, au arătat că valoarea raportului $\alpha$ este întotdeauna supraunitară (rezultatele au fost cuprinse între 1,14–1,72). Pentru materialul cu care s-a lucrat, s-a constatat că valoarea $\alpha$ crește, o dată cu creșterea densității de curent aplicată asupra pămîntului însă nu este influențată în mod sensibil de variația gradientului hidraulic.

Prin experiențele menționate s-a observat că trecerea curentului electric provoacă scăderea gradientului inițial al pămîntului (favorizînd infiltrarea apei), fapt care confirmă valabilitatea sub acest raport, a ipotezei trecerii unei părți din apa legată în starea de apă liberă.

O altă manifestare caracteristică a desfășurării proceselor electroosmotice în pămînturi este existența unor fenomene de inerție, caracterizată prin necesitatea atingerii unei anumite valori a gradientului electric, fără de care filtrația electroosmotică nu poate fi declanșată. Acest gradient trebuie să fie suficient de mare spre a învinge rezistența datorită vîscozității apei legate și inerției apei libere. El este analog cu gradientul hidraulic inițial care extinde legea lui Darcy sau cu efortul inițial de lunecare constatat la pămînturile vîscozoplastice.

O atenție deosebită a fost acordată studiului caracteristicilor electroosmotice ale pămînturilor. Drept coeficienți specifici pentru fenomenele de această natură au fost aleși : coeficientul de permeabilitate electroosmotică $k_e$ definit prin relația (1), rezistivitatea electrică a pămîntului $\rho$ și consumul specific de electricitate $c$ necesar eliminării din pămînt, prin electroosmoză, a unui volum unitar de apă. Pe considerente teoretice, relația dintre acești coeficienți este

$$c \,.\, k_e \,.\, \rho = 1, \tag{4}$$

indiferent de natura sau starea pămîntului.

Încercările efectuate în vederea verificării acestei relații, pe probe din pămînturi foarte diferite, de la loess pînă la argilă grasă, au arătat că într-adevăr domeniul de variație al valorii produsului $c \,.\, k_e \,.\, \rho$ este extrem de redus ; valoarea sa medie nu este însă 1, ci 0,8. Diferența găsită s-ar putea datora fie condițiilor experimentale, fie unor particularități ale desfășurării procesului de circulație electroosmotică.

În ceea ce priveşte gama de variaţie a fiecăruia dintre coeficienţi, cercetările întreprinse au confirmat rezultatele obţinute de alţi autori : rezistivitatea a variat între 500 şi 3 000 $\Omega$ cm, în funcţie de natura, porozitatea şi umiditatea materialului, consumul de electricitate a avut valori între 2,5—15 mAh/cm$^3$, iar coeficientul de permeabilitate electroosmotică, cuprins în general între 0,5 şi $2{,}5 . 10^{-5}$ cm$^2$/s V, s-a dovedit a avea un domeniu de variaţie incomparabil mai restrîns decît coeficientul $k$ din relaţia Darcy. Încercări sistematice efectuate cu amestecuri de argilă şi nisip au scos în evidenţă existenţa unui minim al consumurilor specifice de electricitate sau energie electrică necesare extragerii din pămînt a unei cantităţi unitare de apă, pentru amestecurile conţinînd 10—20% nisip. Această constatare este utilă pentru delimitarea domeniului de aplicabilitate practică a proceselor electroosmotice în lucrările de construcţii. Într-adevăr, circulaţia electroosmotică a apei are importanţă practică pentru pămînturile intermediare între nisipuri şi argile, care au un coeficient Darcy apropiat ca valoare de cel de permeabilitate electroosmotică ($k$ de ordinul a 0,1—10 $k_e$) ; pentru pămînturile mai permeabile (nisipuri) aportul adus de curentul electric este relativ neînsemnat, iar la cele foarte puţin permeabile (argile, argile grase) vîscozitatea ridicată a apei legate creşte considerabil consumul de energie necesar şi scade eficienţa electroosmozei.

Dintre multiplele aplicaţii practice ale fenomenelor descrise (electrodrenare, electro-îndesare etc.) în cercetările efectuate de autori s-a pus accentul pe folosirea curentului electric mai ales ca agent de introducere în pămînt a unor substanţe chimice folosite la întărirea unor pămînturi în care, datorită permeabilităţii lor scăzute, aceste substanţe nu pot pătrunde pe cale gravitaţională şi nici prin presiune.

Metoda de consolidare studiată în cadrul cercetărilor colectivului a fost electro-silicatizarea, care comportă folosirea ca substanţe chimice a unei soluţii de silicat de sodiu, urmată de o soluţie de clorură de calciu. Prin interacţiunea acestor două soluţii în pămînt are loc degajarea unui gel de silice care cimentează particulele din pămînt, transformîndu-l într-un material monolitic cu o apreciabilă rezistenţă la zdrobire. Cercetările întreprinse au arătat că în procesul de consolidare electro-chimică prin electrosilicatizare, rolul curentului electric nu se reduce numai la vehicularea soluţiilor în pămînt : prin micşorarea umidităţii materialului, precum şi prin acţiunea asupra gelului separat din substanţele care asigură cimentarea particulelor prin silicatizare, curentul electric contribuie la intensificarea efectului de consolidare.

Din încercările efectuate în laborator s-a ajuns la concluzia că electrosilicatizarea este eficientă în nisipurile fine, prăfoase, cu un coeficient de permeabilitate mediu de $10^{-4}$ cm/s.

Această constatare a condus la aplicarea electrosilicatizării la consolidarea formaţiunilor de *borchiş* din minele de lignit. Prin denumirea de *borchiş* se înţeleg formaţiunile de nisipuri fine acvifere care se întîlnesc de multe ori în vecinătatea stratelor de lignit aflate sub nivelul pînzei de apă subterană. Prezenţa acestor formaţiuni, a căror deschidere produce erupţii şi prăbuşiri importante de strate, face ca operaţiunile de excavare a galeriilor miniere să întîmpine dificultăți foarte mari, periclitîndu-se uneori exploatarea întregului zăcămînt carbonifer. Metodele obișnuite, miniere, de săpare, nu dau în numeroase cazuri nici un rezultat, galeriile urmînd a fi abandonate.

Studiile referitoare la consolidarea borchișurilor prin electrosilicatizare au fost întreprinse în colaborare cu un colectiv al Institutului de cercetări miniere. Prin încercările preliminare de tratare pe probe mici în laborator, întreprinse asupra unor borchișuri recoltate din principalele mine de lignit din țară, cu rezultate pozitive, s-a pus la punct în principiu metodica de tratare, putîndu-se trece la faza semi-industrială.

În această etapă au fost efectuate încercări în batale experimentale, la suprafață, la minele Șotînga și Mărgineanca de la Filipeștii de Pădure, cu material scos direct din galerie, cu care ocazie au fost precizați unii parametri referitori la raza de acțiune a electrozilor, consumul de energie electrică, la materialele necesare etc.

Prima aplicare directă în mină a fost efectuată în 1956—1957, în galeria „Palanga — Sud" de la Filipeștii de Pădure. Traversarea s-a făcut pe o lungime totală de aproximativ 23 metri, realizîndu-se o înaintare medie lunară de 1...2 metri. În cursul înaintării s-au întîlnit materiale variate. Astfel, pe primii 7 metri s-a trecut prin borchiș amestecat cu blocuri de marnă prăbușite anterior și cu fragmente din susținerea de lemn a galeriei vechi, în care avusese loc mai înainte o erupție de borchiș, următorii 3 metri au fost parcurși în marnă, iar restul de 13 metri în borchiș cu marnă. Utilajul folosit, oarecum improvizat, a constat dintr-un generator de curent continuu (convertizor de sudură) cu aparatele de măsură respective, un compresor și cîteva rezervoare închise pentru introducerea soluțiilor în teren cu o slabă presiune (cîteva zecimi de atmosferă), conductele și electrozii de injecție, alcătuiți din țeavă metalică perforată.

Pe baza experienței căpătate, colectivul Institutului de cercetări miniere a proiectat și realizat în 1957 o instalație perfecționată, cu care au fost executate toate celelalte lucrări de electrosilicatizare în mină.

Următoarea aplicare a metodei a fost făcută în 1957 într-o galerie a minei Șotînga, în condiții de teren asemănătoare celei de la Palanga. În timp de 6 luni s-a avansat cu 8,3 m într-un borchiș variat, cu coeficientul de permeabilitate de $3{,}1 \times 10^{-5}$ cm/s. Viteza de avansare a crescut în mod progresiv, ajungînd la 2,20 m pe lună. Rezultatele obținute au fost foarte bune, rezistența la zdrobire a materialului consolidat ajungînd pînă la 10···15 kg/cm$^2$.

Lucrările întreprinse începînd din anul 1958, după ce eficacitatea metodei fusese pe deplin verificată, au avut ca scop lărgirea domeniului de aplicare la borchișurile intacte, mărirea vitezei și îmbunătățirea indicilor tehnico-economici. În acest sens, lucrările executate în anii 1958—1959 la mina Ceptura au fost deosebit de concludente.

După ce s-a înaintat prin metode obișnuite de săpare pînă în apropierea formațiunii de borchiș, constatată prin mărirea infiltrațiilor și prin sondaje de probă, s-a construit un parapet de lemn și s-au introdus, ca și la lucrările anterioare electrozii în frontul de lucru. Lucrarea s-a desfășurat timp de 8 luni, în care s-au executat nouă tronsoane de tratare, avînd o lungime totală de 37 metri. Grosimea stratului de borchiș străbătut (în secțiune normală) a fost de 10 metri, înclinarea sa față de direcția de avansare fiind de 23°. Electrozii, avînd lungimi de 3...5 m, au fost introduși atît orizontal, cît și înclinat, căutînd să cuprindă întregul strat de borchiș.

Lucrările au decurs în bune condiții, fiecare tronson reprezentînd un progres față de cele precedente, atît în ceea ce privește mărirea vitezei de înaintare, cît și micșorarea consumurilor specifice. S-a ajuns astfel, la lucrările de la Ceptura, la un avans mediu de 5 metri pe lună, iar la ultimele două tronsoane chiar de 7,5 metri pe lună.

Aplicarea metodei descrise prezintă următoarele avantaje substanțiale :

— nu necesită materiale costisitoare sau deficitare, singurele substanțe folosite — silicatul de sodiu și clorura de calciu—fiind ieftine și găsindu-se în mari cantități în țară ;

— nu necesită utilaje complicate sau cu caracter special. Atît generatorul de curent, cît și compresorul și celelalte elemente ale instalației se produc în mod curent în țară ;

— manopera respectivă nu este dificilă, iar personalul operator nu are nevoie de o pregătire specială îndelungată. Echipele de tratare au fost formate din muncitori mineri, în scurt timp, la locul de muncă ;

— principalul avantaj îl constituie faptul că metoda înlătură primejdia erupțiilor de borchiș constituind astfel o soluție pentru probleme de traversări de strate considerate anterior, fie de nestrăbătut prin metodele clasice, fie legate de dificultăți și costuri de execuție excepțional de mari.

Avînd în vedere rezultatele favorabile obținute, Departamentul minelor a propus generalizarea aplicării metodei în producție, oriunde se vor ivi formațiuni de borchiș.

Electrosilicatizarea cu două soluții introduse succesiv prezintă însă și unele inconveniente, Astfel, efectul de întărire a materialului este de multe ori prea slab, rezistența la zdrobire fiind de numai 3 . . . 4 kg/cm$^2$, datorită probabil diluării avansate a soluțiilor (silicat de sodiu cu densitatea 1,15 . . .1,20, clorură de calciu 1,075 . . . 1,10). Soluțiile mai concentrate pătrund prea greu în pămînt ; de altfel, aceasta limitează și domeniul de aplicabilitate al metodei la pămînturile cu coeficientul de permeabilitate de minimum $10^{-4}$ cm/s. În afară de aceasta, aplicarea metodei este încă destul de complicată, comportînd introducerea pe rînd a soluțiilor în jumătate din electrozi (anozi), apoi în cealaltă jumătate (catozi), între fiecare etapă fiind necesară spălarea energică a electrozilor.

În vederea remedierii unora din aceste inconveniente, au fost preconizate recent următoarele măsuri :

— utilizarea unei singure soluții chimice, mixte ;

— utilizarea sucțiunii, paralel cu tratarea electrică.

Pînă în prezent, încercările în problema electrosilicatizării cu o singură soluție mixtă s-au mărginit numai la faza de laborator.

Ca reactivi au fost folosiți silicatul de sodiu amestecat cu acid acetic sau cu clorură de calciu. La alegerea proporțiilor în amestec s-au urmărit :

— timpul de coagulare a amestecului ;

— variația în timp a viscozității sale, pînă la coagulare;

— consistența gelului obținut prin coagulare;

— efectul curentului electric asupra formării gelului și comportării sale ulterioare.

Compoziția soluțiilor mixte a fost caracterizată prin raportul dintre volumul de silicat de sodiu și volumul apei din amestec, precum și de raportul dintre volumul soluției de silicat și cel al soluției de electrolit. S-a constatat că aceste rapoarte sînt suficiente pentru caracterizarea soluțiilor. Concentrațiile inițiale ale celor două substanțe folosite la realizarea amestecului nu influențează asupra caracteristicilor lui decît în măsura în care participă la determinarea celor două rapoarte. Rezultatele arată că viscozitatea soluției mixte și deci condițiile de pătrundere în pămînt sînt determinate numai de raportul silicat de sodiu /apă și nu de cantitatea de electrolit. Viscozitatea soluției mixte rămîne practic constantă aproximativ 75% din timpul de coagulare, apoi crește brusc. Consistența gelului crește o dată cu creșterea concentrației de silicat; pentru o concentrație de silicat dată, gelurile cu timpul de coagulare mai scurt sînt mai rezistente.

Încercările au permis stabilirea rețetelor de soluții mixte de silicat de sodiu și acid acetic sau clorură de calciu, cu diferiți timpi de coagulare, indicate a fi utilizate pentru electrosilicatizare.

Prin folosirea soluțiilor mixte pătrunderea în pămînt a agenților de întărire este mult ușurată, datorită viscozității mai reduse; aplicarea metodei este de asemenea simplificată, prin evitarea spălării electrozilor. Aplicarea curentului electric este indispensabilă, deoarece prin introducerea soluției numai prin presiune, întărirea pămîntului nu are loc. În orice caz, deoarece încercările de laborator nu au fost întotdeauna concludente, experiențele directe pe teren în acest domeniu sînt indispensabile.

Utilizarea sucțiunii pentru îmbunătățirea efectului electrosilicatizării a fost verificată de autori în laborator, apoi în colaborare cu colectivul Institutului de cercetări miniere, a fost realizată o experiență la scară mare, în anul 1959, într-un batal experimental la mina Ceptura.

Aplicarea sucțiunii la catod s-a făcut în laborator în paralel cu introducerea soluției cu presiune la anod, printr-un dizpozitiv folosind o coloană de apă de 2 metri, iar pe teren cu ajutorul unei pompe de vacuum, între electrozi și pompă introducîndu-se vase de decantare. Generatorul de curent a fost același cu cel folosit la electrosilicatizarea cu două soluții (un convertizor de sudură de 14 kW, 250 A).

Experiențele au arătat că aplicarea sucțiunii lărgește domeniul de aplicare al metodei la pămînturile cu coeficienți de permeabilitate mai mici, pînă la $10^{-6}$ cm/s, putînd fi introduse soluții cu densități ridicate (silicat de sodiu 1,35, clorură de calciu 1,25). Soluțiile pot pătrunde pînă în zona catodică, favorizînd întărirea pămîntului și în această zonă.

Aplicarea sucțiunii la catod s-a dovedit a fi mult mai eficace decît o presiune echivalentă a soluțiilor la anod, obținîndu-se o repartizare mai echilibrată a gradienților hidraulici în pămînt și evitîndu-se astfel gradienții excesivi, care ar provoca străpungerea masivului.

Încercarea semi-industrială a dovedit că, prin utilizarea sucţiunii, zona întărită prin electrosilicatizare devine de două ori mai mare.

În acelaşi timp, consumul specific de soluţii se reduce cu o treime, consumul de electricitate se reduce la jumătate iar cel de energie electrică se micşorează la 1/3 faţă de electrosilicatizarea cu două soluţii. În general, rezultatele obţinute la scară mare au fost mult mai bune decît cele din laborator. Rezistenţele la zdrobire obţinute în batalul experimental au fost în medie de 6,4 kg/cm$^2$ în zona anodică şi de 1,7 kg/cm$^2$ în zona catodică.

Metoda este susceptibilă de îmbunătăţiri şi în acest sens efectuarea unor noi încercări pe modele mari poate aduce multe elemente interesante.

*Primită la redacţie la 24 februarie 1960*

## ПРОЦЕСС ЭЛЕКТРООСМОЗА, ПРИМЕНЕННЫЙ ДЛЯ УЛУЧШЕНИЯ ГРУНТОВ

### РЕЗЮМЕ

Проведенные исследования преследовали цель, с одной стороны, проанализировать характерные аспекты развития процесса электроосмоза в сжимаемых грунтах, а с другой стороны, применить электросиликатизацию для закрепления мелкозернистых песков-плывунов.

Выявляются некоторые инерционные явления в развитии электроосмотического потока и высказываются две новые гипотезы, которые распространяют гипотезу Гельмгольца на случай сжимаемых грунтов, учитывая при этом эффект ориентации молекул адсорбированной воды и микрооднородности материала.

Введение в грунт растворов кремнекислого натрия и хлорида кальция при помощи электрического тока (электросиликатизация) успешно применялось при закреплении мелкозернистых водоносных песков в некоторых выработках бурого угля. Недавно эффективность метода стало возможным повысить путем применения подсоса у катодов.

## APPLICATION OF THE ELECTRO-OSMOTIC PROCESS TO THE IMPROVING OF SOIL PROPERTIES

### ABSTRACT

The investigations described in this paper aimed at analysing the characteristic aspects of the development of electro-osmosis in compressible soils and at applying the electro-silicification to the consolidation of fine quicksands.

To this effect certain inertial phenomena occurring in the development of the electro-osmotic current are emphasized and two new assumptions extending Helmholtz's hypothesis to compressible soils are put forth, taking into consideration the effect of the orientation of the adsorbed water molecules and the micro-heterogeneity of the material.

The introduction into the soil of certain solutions of sodium silicate and calcium chloride with the aid of the electro-osmotic current has been successfully applied to the consolidation of fine aquiferous sands in the galleries of lignite mines. Recently, the efficiency of the method has been increased by applying suction at the cathodes.

## BIBLIOGRAFIE

1. R. J. BALLY, I. ANTONESCU, M. MARCOVICI, *Încercări de laborator asupra electrosilicatizării pămînturilor.* Industria construcțiilor și a materialelor de construcție, *2* (1954).
2. R. J. BALLY, I. ANTONESCU, *Contribuții la problema electrosilicatizării pămînturilor.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VII**, 1037–1055, (1956).
3. — *Aplicarea în practică a electrosilicatizării nisipurilor fine acvifere.* Hidrotehnica, *5* (1957).
4. R. J. BALLY, *Metode electrice de îmbunătățire a pămînturilor în lucrările de construcție.* Ed. Acad. R.P.R., București, 1957.
5. S. SEGALL, *Aplicarea metodei de consolidare prin electrosilicatizare la săparea unei galerii prin formațiuni de nisipuri acvifere (borchișuri) la E.M. Filipeștii de Pădure.* Revista minelor, *9* (1957).
6. R. J. BALLY, I. ANTONESCU, *Aspecte caracteristice ale dezvoltării procesului de electroosmoză în pămînturile compresibile.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *3*, 759–776 (1958).
7. S. SEGALL, I. PETRESCU-CREȚU, *Continuarea experimentărilor pentru traversarea formațiunilor de borchiș prin metoda electrosilicatizării.* Sesiunea de comunicări științifice ICEM 3–5 nov., 12 (1959).

# STUDII

## METODE DE CALCUL

# INTEGRAREA NUMERICĂ A ECUAŢIEI INTEGRALE DE TIP VOLTERRA

DE

D. V. IONESCU[1])

În această lucrare vom considera ecuaţia integrală de tip Volterra, neomogenă

$$\varphi(x) + \int_a^x K(x, t)\varphi(t)\,dt = f(x) \tag{1}$$

şi vom trata următoarea problemă : să se determine o reţea de noduri în progresie aritmetică $\Gamma$, pe intervalul $[a, b]$ corespunzătoare unui număr pozitiv $\varepsilon$ dat, şi un algoritm pentru calculul unor numere $\varphi_i^{(p)}$, unde $p = 0, 1, \ldots, \nu$, astfel ca să avem

$$|\,\varphi(x_i) - \varphi_i^{(\nu)}\,| < 2\varepsilon,$$

pe toate nodurile $x_i$ ale reţelei $\Gamma$.

Aceeaşi problemă va fi reluată într-o altă lucrare pentru alte ecuaţii funcţionale.

Metoda de lucru în această problemă este analoagă cu metoda de lucru expusă în comunicările pe care le-am făcut despre integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale şi a ecuaţiilor cu derivate parţiale de tip hiperbolic, la Colocviul de Mecanică ţinut în Bucureşti 25–29 octombrie 1959 şi la Colocviul de teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale ţinut în Bucureşti 21–26 septembrie 1959.

1. În ecuaţia integrală (1) să presupunem că funcţia $f(x)$ este continuă în intervalul $[a, b]$ şi că sîmburele $K(x, t)$ este o funcţie continuă de $x$ şi $t$ în triunghiul $T$ definit de inegalităţile

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad a \leqslant t \leqslant x. \tag{2}$$

---

[1]) Institutul de calcul – Filiala Academiei R.P.R. – Cluj.

Se știe că în aceste condiții ecuația integrală (1) are o soluție unică $\varphi(x)$, continuă în intervalul $[a, b]$ și care poate fi obținută prin metoda aproximațiilor succesive, punînd

$$\varphi^{(0)}(x) = f(x),$$

$$\varphi^{(p)}(x) = f(x) - \int_a^x K(x, t)\,\varphi^{(p-1)}(t)\,dt, \tag{3}$$

unde $p = 1, 2, \ldots$, Integrala $\varphi(x)$ este suma seriei

$$\varphi^{(0)}(x) + [\varphi^{(1)}(x) - \varphi^{(0)}(x)] + \ldots + [\varphi^{(p)}(x) - \varphi^{(p-1)}(x)] + \ldots \tag{4}$$

care este absolut și uniform convergentă în intervalul $[a, b]$; avem

$$\varphi(x) = \lim_{p \to +\infty} \varphi^{(p)}(x). \tag{5}$$

Putem scrie

$$\varphi(x) - \varphi^{(p)}(x) = [\varphi^{(p+1)}(x) - \varphi^{(p)}(x)] + [\varphi^{(p+2)}(x) - \varphi^{(p+1)}(x)] + \ldots,$$

de unde rezultă că

$$|\,\varphi(x) - \varphi^{(p)}(x)\,| \leqslant F_0\, e^{K_0(b-a)} \frac{K_0^{\,p+1}(b-a)^{p+1}}{(p+1)!},$$

unde $F_0$ și $K_0$ sînt margini superioare ale lui $|\,f(x)\,|$ și $|\,K(x, t)\,|$ în intervalul $[a, b]$ și în triunghiul $T$.

Din inegalitatea precedentă rezultă că $\varepsilon$ fiind un număr pozitiv dat, se poate alege numărul natural $\nu$, astfel ca să avem

$$|\,\varphi(x) - \varphi^{(\nu)}(x)\,| < \varepsilon, \tag{6}$$

pentru orice $x$ din intervalul $[a, b]$. Numărul $\nu$ astfel ales, rămîne fix în toată această lucrare.

2. Pentru integrarea numerică a ecuației integrale (1), vom face următoarele ipoteze suplimentare asupra funcției $f(x)$ și asupra sîmburelui $K(x, t)$. Aceste ipoteze sînt legate de procedeul de integrare numerică pe care-l vom aplica. Vom presupune

1°. funcția $f(x)$ are derivatele $f'(x), f''(x)$ continue în intervalul $[a, b]$

2°. sîmburele $K(x, t)$ are derivatele parțiale $\dfrac{\partial K}{\partial x}, \dfrac{\partial K}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 K}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 K}{\partial t^2}$ continue în triunghiul $T$.

Din aceste ipoteze se deduce că funcțiile $\varphi^{(p)}(x)$ unde $p = 0, 1, \ldots, \nu$ au derivate de ordinul întîi și al doilea continue în intervalul $[a, b]$.

Aceasta este evident pentru funcția $\varphi^{(0)}(x)$ și presupunînd că $\varphi^{(p-1)}(x)$ are derivatele $\varphi^{(p-1)\prime}(x)$, $\varphi^{(p-1)\prime\prime}(x)$ continue în intervalul $[a, b]$, ceea ce are loc pentru $p = 1$, din formulele (3) se deduce că $\varphi^{(p)}(x)$ are derivate $\varphi^{(p)\prime}(x)$, $\varphi^{(p)\prime\prime}(x)$ continue în intervalul $[a, b]$ și avem

$$\varphi^{(p)\prime}(x) = f'(x) - K(x, x)\,\varphi^{(p-1)}(x) - \int_a^x \frac{\partial K(x, t)}{\partial x}\,\varphi^{(p-1)}(t)\,dt, \tag{7}$$

$$\varphi^{(p)''}(x) = f''(x) - \left[2\frac{\partial K(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial K(x,t)}{\partial t}\right]_{t=x} \varphi^{(p-1)}(x) - K(x,x)\varphi^{(p-1)'}(x) -$$
$$- \int_a^x \frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial x^2}\varphi^{(p-1)}(t)\,dt.$$

Funcțiile $|\varphi^{(p)}(x)|$, $|\varphi^{(p)'}(x)|$, $|\varphi^{(p)''}(x)|$ au margini superioare în intervalul $[a, b]$, care pot fi calculate fără să se fi calculat funcțiile $\varphi^{(p)}(x)$, $\varphi^{(p)'}(x)$, $\varphi^{(p)''}(x)$.

Aceasta este evident pentru $\varphi^{(0)}(x)$, $\varphi^{(0)'}(x)$, $\varphi^{(0)''}(x)$ căci dacă notăm cu $F_0$, $F_1$, $F_2$ marginile superioare ale lui $|f(x)|$, $|f'(x)|$, $|f''(x)|$ pe intervalul $[a, b]$, avem

$$|\varphi^{(0)}(x)| \leqslant F_0, \quad |\varphi^{(0)'}(x)| \leqslant F_1, \quad |\varphi^{(0)''}(x)| \leqslant F_2 \tag{8}$$

Dacă notăm cu $K_0$, $K_{10}$, $K_{01}$, $K_{20}$, $K_{02}$ marginile superioare ale lui

$$|K(x,t)|, \quad \left|\frac{\partial K}{\partial x}(x,t)\right|, \quad \left|\frac{\partial K}{\partial t}(x,t)\right|, \quad \left|\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,t)\right|, \quad \left|\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(x,t)\right|,$$

în triunghiul $T$, atunci din formulele (3) și (7), deducem că

$$|\varphi^{(p)}(x)| \leqslant F_0 + K_0\int_a^x |\varphi^{(p-1)}(t)|\,dt,$$

$$|\varphi^{(p)'}(x)| \leqslant F_1 + K_0|\varphi^{(p-1)}(x)| + K_1\int_a^x |\varphi^{(p-1)}(t)|\,dt, \tag{9}$$

$$|\varphi^{(p)''}(x)| \leqslant F_2 + (2K_{10} + K_{01})|\varphi^{(p-1)}(x)| + K_0|\varphi^{(p-1)'}(x)| +$$
$$+ K_{20}\int_a^x |\varphi^{(p-1)}(t)|\,dt.$$

Formulele (8) și (9) dau marginile superioare ale funcțiilor $|\varphi^{(p)}(x)|$, $\varphi^{(p)'}(x)|$, $|\varphi^{(p)''}(x)|$ în intervalul $[a, b]$. Mai departe, vom nota cu $\Phi_0$, $\Phi_1$, $\Phi_2$ marginile superioare ale lui $|\varphi^{(p)}(x)|$, $|\varphi^{(p)'}(x)|$, $|\varphi^{(p)''}(x)|$ în intervalul $[a, b]$ pentru toate valorile indicelui $p$, $p = 0, 1, \ldots, \nu$.

Din considerațiile precedente, rezultă că funcțiile

$$\psi^{(p)}(t) = K(x,t)\,\varphi^{(p)}(t) \tag{10}$$

unde $x$ este un număr din intervalul $[a, b]$, au derivate $\psi^{(p)'}(t)$, $\psi^{(p)''}(t)$ continue pentru $a \leqslant t \leqslant x \leqslant b$ și avem

$$\psi^{(p)'}(t) = \frac{\partial K}{\partial t}\varphi^{(p)}(t) + K(x,t)\,\varphi^{(p)'}(t),$$

$$\psi^{(p)''}(t) = \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}\varphi^{(p)}(t) + 2\frac{\partial K}{\partial t}\varphi^{(p)'}(t) + K(x,t)\,\varphi^{(p)''}(t).$$

Marginea superioară a lui $|\psi^{(p)''}(t)|$ în intervalul $[a, x] < [a, b]$ poate fi calculată folosind marginile superioare ale lui $|\varphi^{(p)}(t)|$, $|\varphi^{(p)'}(t)|$, $|\varphi^{(p)''}(t)|$ în intervalul $[a, b]$ vom avea

$$|\psi^{(p)''}(t)| \leqslant K_{02}\,\Phi_0 + 2K_{01}\,\Phi_1 + K_0\,\Phi_2.$$

Notînd

$$N = K_{02}\,\Phi_0 + 2K_{01}\,\Phi_1 + K_0\,\Phi_2,$$

vom avea deci

$$|\psi^{(p)''}(t)| \leqslant N, \tag{11}$$

pentru toate valorile indicelui $p$ adică pentru $p = 0, 1, \ldots, \nu$.

3. Să determinăm acum o rețea $\Gamma$ pe intervalul $[a, b]$, formată din nodurile $a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b$ și un algoritm pentru calculul numerelor $\varphi_i^{(p)}$ pentru $p = 0, 1, \ldots, \nu$ astfel ca pe nodurile rețelei $\Gamma$, să avem

$$|\varphi^{(\nu)}(x_i) - \varphi_i^{(\nu)}| < \varepsilon, \qquad (x_0 = a, \quad x_n = b).$$

Deoarece $\varphi^{(0)}(x) = f(x)$, vom lua

$$\varphi_i^{(0)} = f(x_i). \tag{12}$$

Fie $\varepsilon_1$ un număr pozitiv, pe care-l vom preciza mai departe și $n$ un număr natural atașat lui $\varepsilon_1$, într-un mod pe care-l vom explica mai departe. Împărțim intervalul $[a, b]$ în $n$ părți egale prin punctele $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ și astfel s-a format rețeaua $\Gamma$ din nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$. Vom calcula pe $\varphi^{(1)}(x)$ pe nodurile rețelei $\Gamma$, aplicînd la integrala din formula

$$\varphi^{(1)}(x_i) = f(x_i) - \int_a^{x_i} K(x_i, t)\,\varphi^{(0)}(t)\,dt,$$

formula de calcul dedusă din formula de cuadratură a trapezului care folosește nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_i$. Vom avea

$$\varphi^{(1)}(x_i) = f(x_i) - \frac{b-a}{2n}\Big[K(x_i, x_0)\,\varphi^{(0)}(x_0) + K(x_i, x_i)\,\varphi^{(0)}(x_i) + + 2\sum_{j=1}^{i-1} K(x_i, x_j)\,\varphi^{(0)}(x_j)\Big] - R_i^{(1)}, \tag{13}$$

unde, ținînd seama de formulele (10) și (11) avem

$$|R_i^{(1)}| < N\frac{(b-a)^3}{12\,n^2}. \tag{14}$$

Să alegem numărul $n$ egal cu cel mai mic număr natural care îndeplinește condiția

$$N\frac{(b-a)^3}{12\,n^2} < \varepsilon_1. \tag{15}$$

Atunci, dacă ţinem seama că $\varphi^{(0)}(x_j) = \varphi_j^{(0)} = f(x_j)$ şi notăm

$$\varphi_i^{(1)} = f(x_i) - \frac{b-a}{2n}\Big[K(x_i, x_0)\,\varphi_0^{(0)} + K(x_i, x_i)\,\varphi_i^{(0)} + + 2\sum_{j=1}^{i-1} K(x_i, x_j)\,\varphi_j^{(0)}\Big], \tag{16}$$

formula (13) se scrie

$$\varphi^{(1)}(x_i) = \varphi_i^{(1)} - R_i^{(1)}, \tag{17}$$

şi avem $| R_i^{(1)} | < \varepsilon_1$.

Să trecem la calculul lui $\varphi^{(2)}(x_i)$. Vom avea

$$\varphi^{(2)}(x_i) = f(x_i) - \int_a^{x_i} K(x_i, t)\,\varphi^{(1)}(t)\,dt.$$

Procedînd ca mai sus, şi aplicînd formula de calcul dedusă din formula de cuadratură a trapezului, vom avea

$$\varphi^{(2)}(x_i) = [\varphi_i^{(2)}] - r_i^{(2)}, \tag{18}$$

unde

$$[\varphi_i^{(2)}] = f(x_i) - \frac{b-a}{2n}\Big[K(x_i, x_0)\,\varphi^{(1)}(x_0) + K(x_i, x_i)\,\varphi^{(1)}(x_i) + + 2\sum_{j=1}^{i-1} K(x_i, x_j)\,\varphi^{(1)}(x_j)\Big], \tag{19}$$

iar

$$| r_i^{(2)} | < \varepsilon_1. \tag{20}$$

Să notăm

$$\varphi_i^{(2)} = f(x_i) - \frac{b-a}{2n}\Big[K(x_i, x_0)\,\varphi_0^{(1)} + K(x_i, x_i)\,\varphi_i^{(1)} + + 2\sum_{j=1}^{i-1} K(x_i, x_j)\,\varphi_j^{(1)}\Big]. \tag{21}$$

Din formulele (19) şi (20) deducem că

$$[\varphi_i^{(2)}] = \varphi_i^{(2)} + \rho_i^{(2)}, \tag{22}$$

unde

$$\rho_i^{(2)} = -\frac{b-a}{2n}\Big\{K(x_i, x_0)\,[\varphi^{(1)}(x_0) - \varphi_0^{(1)}] + K(x_i, x_i)\,[\varphi^{(1)}(x_i) - \varphi_i^{(1)}] + + 2\sum_{j=1}^{i-1} K(x_i, x_j)\,[\varphi^{(1)}(x_j) - \varphi_j^{(1)}]\Big\}.$$

Ţinînd seama de formulele (17), în care $| R_i^{(1)} | < \varepsilon_1$, deducem că

$$| \rho_i^{(2)} | \leqslant 2i\,\frac{b-a}{2n}\,K_0\,\varepsilon_1 < Q\varepsilon_1,$$

unde s-a notat

$$Q = (b-a)\, K_0. \tag{23}$$

Din formulele (18) şi (22) deducem că

$$\varphi^{(2)}(x_i) = \varphi_i^{(2)} + R_i^{(2)}, \tag{24}$$

unde

$$R_i^{(2)} = \rho_i^{(2)} - r_i^{(2)},$$

şi ţinînd seama de inegalităţile precedente, avem

$$| R_i^{(2)} | \leqslant (1 + Q)\, \varepsilon_1. \tag{25}$$

4. Să trecem la cazul general. Să presupunem că pentru indicele $p - 1$, avem

$$\varphi^{(p-1)}(x_i) = \varphi_i^{(p-1)} + R_i^{(p-1)}, \tag{26}$$

unde

$$\varphi_i^{(p-1)} = f(x_i) - \frac{b-a}{2n}\Big[ K(x_i, x_0)\varphi_0^{(p-2)} + K(x_i, x_i)\, \varphi_i^{(p-2)} + + 2 \sum_{j=1}^{i-1} K(x_i, x_j)\, \varphi_j^{(p-2)} \Big], \tag{27}$$

iar

$$| R_i^{(p-1)} | \leqslant (1 + Q + \ldots + Q^{p-2})\, \varepsilon_1, \tag{28}$$

ceea ce este exact pentru $p = 3$, deoarece în acest caz formulele (26), (27), (28) coincid cu formulele (24), (21), (25).

Să demonstrăm că formulele (26), (27), (28) sînt valabile în general. Într-adevăr, din formula (3) deducem că pe nodurile reţelei $\Gamma$, avem

$$\varphi^{(p)}(x_i) = f(x_i) - \int_a^{x_i} K(x_i, t)\, \varphi^{(p-1)}(t)\, dt.$$

La integrala din membrul al doilea să aplicăm formula de calcul dedusă din formula de cuadratură a trapezului pe nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_i$ Vom avea

$$\varphi^{(p)}(x_i) = [\varphi_i^{(p)}] - r_i^{(p)}, \tag{29}$$

unde

$$[\varphi_i^{(p)}] = f(x_i) - \frac{b-a}{2n}\Big[ K(x_i, x_0)\, \varphi^{(p-1)}(x_0) + K(x_i, x_i)\, \varphi^{(p-1)}(x_i) + + 2 \sum_{j=1}^{i-1} K(x_i, x_j)\, \varphi^{(p-1)}(x_j) \Big],$$

iar

$$| r_i^{(p)} | < \varepsilon_1. \tag{30}$$

Să introducem

$$\varphi_i^{(p)} = f(x_i) - \frac{b-a}{2n}\Big[K(x_i, x_0)\,\varphi_0^{(p-1)} + K(x_i, x_i)\,\varphi_i^{(p-1)} + \\ + 2\sum_{j=1}^{i-1} K(x_i, x_j)\,\varphi_j^{(p-1)}\Big]. \tag{31}$$

Avem

$$[\varphi_i^{(p)}] = \varphi_i^{(p)} + \rho_i^{(p)}, \tag{32}$$

unde

$$\rho_i^{(p)} = -\frac{b-a}{2n}\Big\{K(x_i, x_0)\,[\varphi^{(p-1)}(x_0) - \varphi_0^{(p-1)}] + K(x_i, x_i)\,[\varphi^{(p-1)}(x_i) - \\ - \varphi_i^{(p-i)}] + 2\sum_{j=1}^{i-1} K(x_i, x_j)\,[\varphi^{(p-1)}(x_j) - \varphi_j^{(p-1)}]\Big\},$$

avem

$$|\rho_i^{(p)}| \leqslant 2i\,\frac{b-a}{2n}\,K_0\,|R_i^{(p-1)}| \leqslant Q\,|R_i^{(p-1)}|. \tag{33}$$

Din formulele (29) și (32) deducem că

$$\varphi^{(p)}(x_i) = \varphi_i^{(p)} + R_i^{(p)}, \tag{34}$$

unde $\varphi_i^{(p)}$ este dat de formula (31), iar

$$R_i^{(p)} = \rho_i^{(p)} - r_i^{(p)}$$

Ținînd seama de inegalitățile (30), (33), (28) deducem că

$$|R_i^{(p)}| \leqslant (1 + Q + \ldots + Q^{p-1})\,\varepsilon_1 \tag{35}$$

și deoarece formulele (31), (34), (35) coincid cu formulele (27), (26), (28) cînd se schimbă $p$ în $p-1$, aceste formule sînt generale.

5. În rezumat, am elaborat un algoritm pentru calculul numerelor $\varphi_i^{(p)}$ relative la nodurile rețelei $\Gamma$ cu ajutorul formulelor (12) și (31). Pe nodurile rețelei $\Gamma$ avem formulele (34) unde restul $R_i^{(p)}$ verifică inegalitatea (35) Pentru $p = \nu$, avem

$$\varphi^{(\nu)}(x_i) = \varphi_i^{(\nu)} + R_i^{(\nu)}, \tag{36}$$

unde

$$|R_i^{(\nu)}| \leqslant (1 + Q + \ldots + Q^{\nu-1})\,\varepsilon_1. \tag{37}$$

Dacă alegem pe $\varepsilon_1$ astfel ca

$$(1 + Q + \ldots + Q^{\nu-1})\,\varepsilon_1 < \varepsilon_1 \tag{38}$$

în formula (36), vom avea

$$|R_i^{(\nu)}| < \varepsilon \tag{39}$$

Revenind la integrala $\varphi(x)$ a ecuației integrale (1) putem scrie următoarea identitate, pe nodurile rețelei $\Gamma$

$$\varphi(x_i) - \varphi_i^{(\nu)} = [\varphi(x_i) - \varphi^{(\nu)}(x_i)] + [\varphi^{(\nu)}(x_i) - \varphi_i^{(\nu)}],$$

și inegalitățile (6), (36) arată că vom avea

$$|\varphi(x_i) - \varphi_i^{(\nu)}| < 2\varepsilon. \tag{40}$$

Prin urmare la numărul pozitiv dat $\varepsilon$, s-a putut determina o rețea $\Gamma$ pe intervalul $[a, b]$, prin inegalitățile (15) și (38) și algoritmul de calcul pentru numerele $\varphi_i^{(p)}$, unde $p = 0, 1, \ldots, \nu$, astfel ca $\varphi_i^{(\nu)}$ să reprezinte aproximativ valorile integralei $\varphi(x)$, pe nodurile rețelei $\Gamma$ și să avem inegalitatea (40).

*Primită la redacție la 11 ianuarie 1960*

## ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

### РЕЗЮМЕ

В настоящей работе рассматривается следующая задача, относящаяся к численному интегрированию неоднородного интегрального уравнения Вольтерра (1): определить решетку $\Gamma$ узлов в арифметической прогрессии на интервале $[a, b]$, соответствующую заданному положительному $\varepsilon$, и алгорифм для вычисления чисел $\varphi_i^{(p)}$, где $p = 0, 1, \ldots, \nu$, так, чтобы в узлах решетки $\Gamma$ иметь неравенство $|\varphi(x_i) - \varphi_i^{(\nu)}| < 2\varepsilon$.

Предполагается, что функция $f(x)$ имеет производные $f'(x), f''(x)$, непрерывные на интервале $[a, b]$ и что ядро $K(x, t)$ имеет частные производные $\frac{\partial K}{\partial x}, \frac{\partial K}{\partial t}, \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}$, непрерывные в треуголнике $T$, определяющемся неравенствами (2).

Решетка $\Gamma$ получается путем разделения интервала $[a, b]$ на $n$ равных частей, причем $n$ определяется неравенством (15), а число $\varepsilon$ удовлетворяет неравенству (38). Числа $\varphi_i^{(p)}$ даны формулами (12) и (31).

В другой работе займемся этой же задачей в связи с другими функциональными уравнениями.

# INTÉGRATION NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION INTÉGRALE DU TYPE VOLTERRA

## RÉSUMÉ

Dans ce travail on considère le problème suivant relatif à l'intégration numérique de l'équation intégrale de Volterra (1), non homogène : déterminer un réseau $\Gamma$ de nœuds en progression arithmétique sur l'intervalle $[a, b]$, correspondant à un nombre positif donné $\varepsilon$, et un algorithme pour le calcul des nombres $\varphi_i^{(p)}$, où $p = 0, 1, \ldots, \nu$ tel que l'on ait sur les nœuds du réseau $\Gamma$, l'inégalité $|\varphi(x_i) - \varphi_i^{(\nu)}| < 2\varepsilon$.

On suppose que la fonction $f(x)$ ait des dérivées $f'(x), f''(x)$ continues sur l'intervalle $[a, b]$ et que le noyau $K(x, t)$ ait des dérivées partielles $\frac{\partial K}{\partial x}, \frac{\partial K}{\partial t}, \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}$ continues dans le triangle $T$ défini par les inégalités (2).

Le réseau $\Gamma$ s'obtient en partageant l'intervalle $[a, b]$ en $n$ parties égales, le nombre $n$ étant déterminé par l'inégalité (15), le nombre $\varepsilon_1$ satisfaisant à l'inégalité (38).

Les nombres $\varphi_i^{(p)}$ sont donnés par les formules (12) et (31).

Dans un autre travail, nous nous occuperons du même problème relatif à d'autres équations fonctionnelles.

## TEHNICA MĂSURĂTORILOR

# MĂSURAREA PRESIUNILOR AERODINAMICE ÎN TUBUL DE ŞOC

DE

E. PROCOPOVICI şi L. DUMITRESCU

1. Una din problemele importante ce trebuie soluţionată în cazul exploatării tubului de şoc [1] în scopul cercetărilor experimentale de aerodinamică, este problema măsurării evoluţiei presiunilor statice şi dinamice în diferitele puncte ale tubului de şoc şi a presiunilor ce se stabilesc pe modelul aerodinamic supus încercărilor. Rezolvarea acestei probleme deschide perspective largi tubului de şoc în cercetările experimentale de aerodinamică supersonică şi hipersonică, pentru obţinerea de rezultate cantitative. Un număr relativ mare de lucrări recent apărute subliniază importanţa acestei probleme [1], [2], [3].

Problema constă în a găsi o metodă care să permită măsurarea variaţiei presiunilor, care în cazul tubului de şoc au un caracter tranzitoriu cu o durată foarte scurtă (de ordinul a 20 m/s) [1]. În cuprinsul acestui regim tranzitoriu există un interval de timp în care regimul scurgerii gazului poate fi considerat staţionar, ceea ce corespunde prezenţei în camera de experienţă, a unui cîmp de presiuni constante. Acest regim cvasistaţionar de foarte scurtă durată, deschide perspectiva folosirii tubului de şoc în cercetări de aerodinamică pe modele la viteze mari [4].

În această lucrare, după o analiză a principalelor aspecte ale problemei se prezintă metoda şi aparatura originală, elaborată pentru măsurarea presiunilor în tubul de şoc construit la I.M.A. şi rezultatele experimentale ce s-au obţinut.

2. Variaţia presiunii într-un punct al camerei de experienţă este arătată schematic în figura 1. Deosebim : timpul de ridicare $t_r$ (de ordinul a 0,01 $\mu$s), palierul cu o durată $T$ (de ordinul $a$ 10—15 m/s) şi apoi căderea presiunii. Această evoluţie corespunde presiunii statice şi cuprinde numai prima parte a fenomenului (trecerea undei de şoc). După aceasta

---

[1] Acest ordin de mărime corespunde caracteristicilor tubului de şoc construit la I.M.A.

urmează o serie de reflexii ale undei de şoc precum şi ale undei de rarefiere [1]. Prin caracterul ei, variaţia presiunii în tubul de şoc se poate aproxima foarte bine prin funcţia lui Heaviside şi se poate menţiona că tubul de şoc a fost propus şi folosit ca mijloc de realizare fizică a acestei funcţii cu un înalt grad de precizie [5].

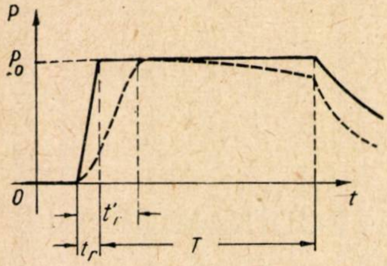


Fig. 1

Semnalul dat de aparatul de măsură, corespunzător unei variaţii a presiunii ca în figura 1 (curba cu linia întreruptă) va fi în general distorsionat, potrivit funcţiei de transfer a sistemului traductor-circuit electronic ce formează ansamblul aparatului de măsură, aşa cum este arătat schematic în figura 2. Astfel, timpul de ridicare se măreşte la valoarea $t_{r'}$, în special datorită traductorului de presiune. Acesta este în general un sistem mecanic de ordinul II, a cărui inerţie nu poate fi coborîtă suficient. Timpul de răspuns al unui sistem mecanic de ordinul II, la o excitaţie de tipul funcţiei lui Heaviside este determinat de frecvenţa proprie şi de factorul de amortizare (fig. 3). Este evident necesar pentru obţinerea unui timp de ridicare mic, o frecvenţă proprie cît mai înaltă şi o amortizare corectă pentru a evita supracreşterile ce pot introduce erori dinamice.

Durata frontului nu afectează principial posibilitatea de a măsura valoarea palierului presiunii, atît timp cît timpul de ridicare nu este o fracţie importantă a duratei totale a palierului de presiune. Se poate socoti ca suficientă realizarea condiţiei

$$t_{r'} \leqslant (0,1 \div 0,2)\, T. \qquad (1)$$

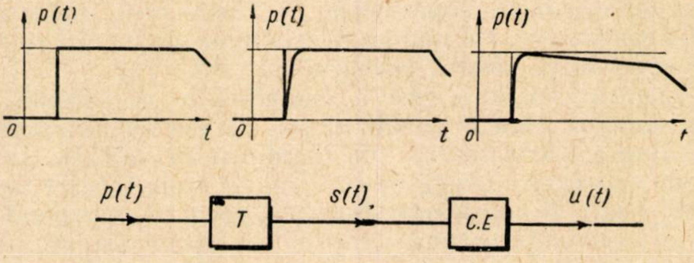


Fig. 2

Realizarea unor traductori de presiune care să aibă un timp de ridicare foarte mic (de ordinul microsecundei) constituie în sine o problemă foarte dificilă şi importantă în acelaşi timp. Astfel de traductori ar permite studiul în detaliu a fenomenelor tranzitorii ce au loc în tubul de șoc și în consecință, abordarea pe cale experimentală a unor probleme noi, foarte actuale, de aerodinamică, aeroelasticitate etc.

---

[1] Detalii asupra proceselor ce au loc în tubul de şoc sînt date în [1], [6].

Studii și cercetări recent făcute la Institutul de mecanică aplicată [7] au permis realizarea de detectori de presiune de tip special, cu un timp de ridicare de cca 2 — 3 μs, care pot fi dezvoltați pentru a satisface cerințele unui traductor de măsură. Unele rezultate din această lucrare sînt obținute cu ajutorul unor prototipuri de traductori derivați din detectorii amintiți mai sus.

Alte considerații care afectează în mod direct caracteristica dinamică a traductorului, sînt acelea referitoare la influența vibrațiilor parazite și a temperaturii. Este posibil ca în timpul experienței anumite perturbații să se propage prin corpul tubului de șoc, mai repede decît unda de șoc. Asemenea perturbații pot excita traductorul amestecîndu-se cu semnalul și producînd erori importante. Deoarece semnalul parazit $p_p$ în traductor are expresia:

$$p_p = a\left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)^2, \tag{2}$$

în care $a$ — amplitudinea vibrației parazite,
$\omega_p$ — frecvența ei unghiulară,
$\omega_0$ — frecvența unghiulară proprie,

este necesar ca frecvența proprie a traductorului să fie cît mai mare în raport cu cea a vibrațiilor parazite.

Efectul temperaturii asupra traductorului se manifestă de la modificarea constantelor fizice ale sistemului, pînă la distrugerea traductorului, deoarece variațiile de temperatură ce însoțesc unda de șoc pot avea valori importante (mii de grade Kelvin) cu tot timpul scurt în care aceasta acționează. Soluția constă fie în a mări inerția termică a suprafeței active a traductorului, fie a o proteja cu straturi termoizolante. Atît prima cît și a doua alternativă este legată de mărirea masei și deci influențează defavorabil frecvența proprie a sistemului, astfel încît trebuie căutată o soluție de compromis.

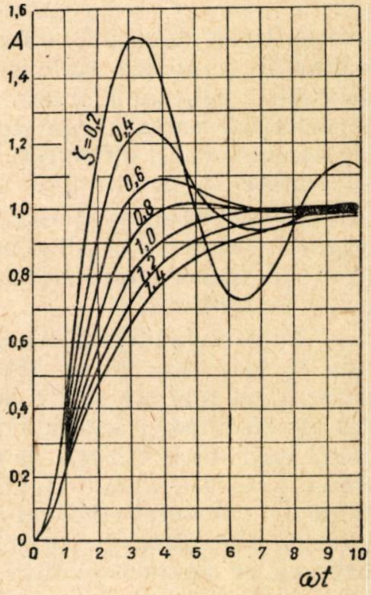


Fig. 3

În general, traductorul poate fi considerat veriga cea mai slabă în sistemul de măsură.

Deși traductoarele de presiune, ca sisteme de ordinul II redau în general componenta continuă a semnalului, este posibil ca funcția de transfer a blocului electronic să nu realizeze aceasta decît într-o măsură aproximativă, avînd spre exemplu un răspuns expotențial la o excitație de tipul unei funcțiuni Heaviside.

Apare astfel o cădere ($\Delta$) (vezi fig. 1) a palierului ce trebuie menționată în limitele unei erori tolerabile.

Pe baza unor astfel de considerente la care se adaugă condițiile deosebit de severe impuse gabaritului traductorilor s-au analizat diferitele tipuri de traductori de presiune. În urma analizei făcute, în condițiile specifice tubului de șoc, traductorii de presiune de tip capacitivi s-au dovedit a avea cele mai potrivite caracteristici, în special în ceea ce privește gabaritul. Odată rezolvată această problemă s-a trecut la alegerea tipului de circuit de măsură. Și aici, condițiile de gabarit impuse legăturilor electrice între traductor și circuitul electronic de măsură au avut un rol hotărîtor.

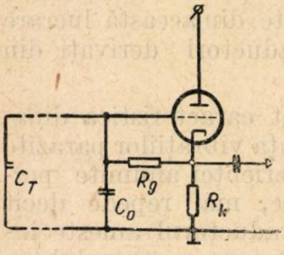


Fig. 4

Dintre circuitele de măsură specifice traductorilor capacitivi [8], [9], s-a renunțat la circuitele, tipice de altfel, ce folosesc înalta frecvență, la care legătura între traductor și aparat trebuie asigurată cu cabluri coaxiale de mică capacitate 1) care au diametre prea mari. În afară de acestea, problema capacităților parazite este deosebit de greu de stăpînit în condiții de exploatare. Aceleași dificultăți trebuie învinse și în cazul folosirii punților alimentate în curent alternativ.

Pentru ocolirea acestor dificultăți s-a adoptat un circuit de măsură original, propus și studiat într-o altă lucrare [10]. Acest circuit este de tipul circuitelor cu polarizare în curent continuu și este arătat principial în figura 4.

Capacitatea variabilă a traductorului $C_T$ este șuntată de o capacitate $C_0$ care este de cca 1000 ori mai mare astfel încît orice capacitate parazită nu mai are nici o influență. Capacitățile $C_T$ și $C_0$ sînt încărcate din bateria anodică a tubului prin rezistența de intrare a repetorului catodic, astfel încît orice variație de capacitate se transmite ca o variație de tensiune la bornele rezistenței $R_k$. Acest tip de circuit nu permite reproducerea componentei continui a variațiilor de capacitate. La o variație în treaptă a capacității circuitul răspunde cu o tensiune exponențială. Eroarea ce apare este dată de relația

$$\varepsilon_{\max} = 1 - \exp\,(T/\tau_0), \tag{3}$$

în care $T$ este durata maximă a palierului,

$\tau_0$ constanta de timp a circuitului de intrare.

Datorită rezistenței foarte mari de intrare a repetorului catodic se pot obține valori mari ale constantei de timp, $\tau_0$, ceea ce permite reducerea erorilor la valori admisibile.

---

1) Pentru rezolvarea acestor dificultăți în unele construcții traductorul și circuitul său de măsură se montează într-un singur bloc, ceea ce mărește considerabil gabaritul [2].

În scopul măsurării presiunilor în tubul de şoc a fost concepută o instalaţie a cărei schemă-bloc este arătată în figura 5.

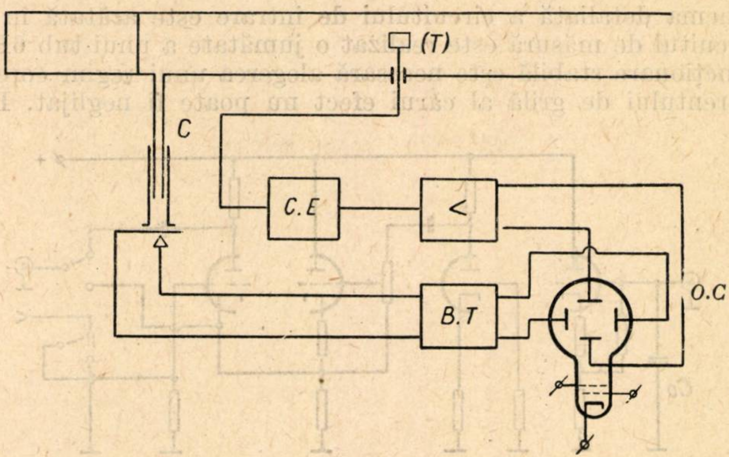


Fig. 5

Semnalul electronic dat de traductorul ($T$), ce se află montat în circuitul electronic de măsură ($CE$) este amplificat şi aplicat plăcilor de deflecţie verticală a unui oscilograf catodic ($OC$) unde imaginea produsă se fixează fotografic.

Pentru a comanda baza de timp ($BT$) a oscilografului catodic astfel ca semnalul dat de traductorul de presiune ($T$) să aibă o întîrziere faţă de momentul declanşării bazei de timp, se foloseşte un al doilea sistem. Acesta este compus dintr-un contactor cu membrană acţionată de o undă de şoc ce se propagă pe un canal derivat ($C$), a cărui lungime poate fi variată astfel încît întîrzierea semnalului să plaseze bine imaginea pe ecranul oscilografului [4].

Ca traductoare s-au folosit traductoare capacitive de tip clasic cu membrană elastică arătate în figura 6.

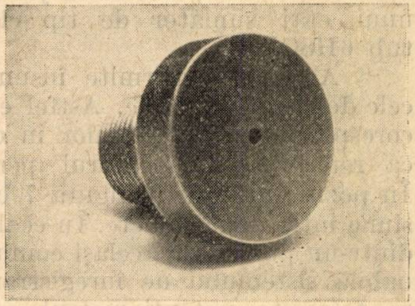


Fig. 6.

Pentru a se realiza amortizarea necesară a vibraţiilor proprii s-a prevăzut un film de aer între membrană şi capacul traductorului. Priza de presiune se realizează printr-un orificiu practicat în capacul traductorului dimensionat astfel încît să se realizeze un compromis între cuplajul acustic al traductorului şi obţinerea cît mai punctuală a valorii presiunii.

Au fost, de asemenea, încercaţi traductorii capacitivi de tip speciali cu dielectric solid ce au fost amintiţi mai sus.

Aceşti traductori au dovedit a avea un timp de ridicare mult superior traductorilor de tip clasic după cum reiese din oscilogramele obţinute.

Schema detaliată a circuitului de intrare este arătată în figura 7.

Circuitul de măsură este realizat o jumătate a unui tub 6H9C. Pentru o funcţionare stabilă este necesară alegerea unui regim corect în privinţa curentului de grilă al cărui efect nu poate fi neglijat. Rezistenţa de izolaţie a cablajului circuitului de intrare precum şi calitatea condensatorului Co trebuie să aibă valori mari în raport cu rezistenţa de intrare a circuitului şi să fie constante în timp. În acest scop s-a folosit cablu izolat în polietilenă şi condensatori „Stiroflex''. Constanta de timp a circuitului de intrare a fost dimensionat astfel încît să se asigure o eroare la redarea palierului de 2%. Semnalul dat de circuitul de intrare este apoi amplificat pe cealaltă jumătate a tubului 6H9C şi apoi este aplicat unui etaj sumator de tip clasic (cu cuplaj catodic) realizat pe un tub 6H8C.

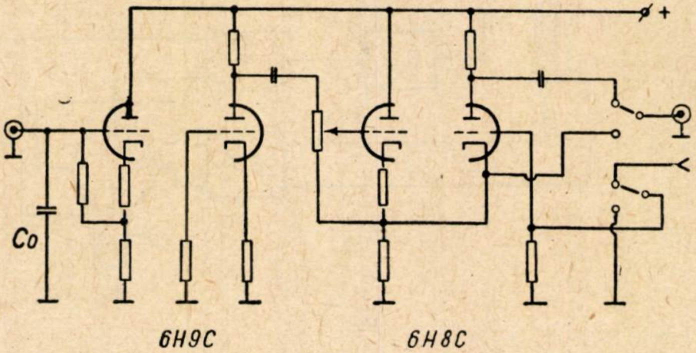


Fig. 7

Acest etaj permite însumarea algebrică a tensiunilor aplicate pe cele două grile ale sale. Astfel este posibilă obţinerea diferenţei semnalelor corespunzătoare presiunilor în două puncte, dintre care unul poate fi luat ca referinţă. Comutatorul permite alegerea modului de funcţionare. În poziţia arătată în figura 7 blocul electronic măsoară diferenţa de presiune între două puncte. În cealaltă poziţie se măsoară presiunea absolută dintr-un punct. Cu acelaşi comutator se alege impedanţa de ieşire convenabilă sistemului de înregistrare. Pentru reglarea amplificării canalului se foloseşte potenţiometrul

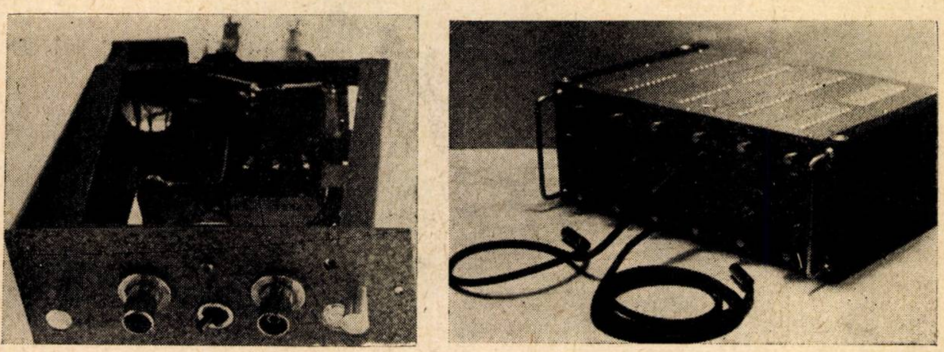
Limita superioară a benzii de frecvenţe transmise este de 50 Kc/s, ceea ce asigură reproducerea bună a frontului dat de traductori.

În scopul măsurării presiunilor în mai multe puncte un ansamblu de 6 canale de tipul celui descris mai sus, care este arătat în figura 8.

În experienţele ce s-au făcut cu cîte un singur canal s-a folosit pentru înregistrare un oscilograf catodic „Orion'' tip 1538, care posedă un tub catodic cu foarte mare remanenţă, fapt ce uşurează observarea şi fotografierea concomitentă a semnalului.

În scopul verificării metodei de măsură s-au făcut experienţe în tubul de şoc cu ansamblul arătat în figura 5.

În primul rînd s-au făcut o serie de experienţe pentru a se cerceta reproductibilitatea şi deci stabilitatea metodei. S-au repetat o serie de experienţe, menţinîndu-se pe cît posibil constanţi parametrii funcţionali ai tubului de şoc la diferite intervale de timp. Astfel de probe s-au făcut utilizîndu-se două tipuri de traductori (fig. 9, *a*, *b*). La aceste experienţe, ca şi la următoarele s-a utilizat un marcaj de timp prin modulaţia spatului luminos cu ajutorul unui generator de impulsuri.



*a* *b*

Fig. 8

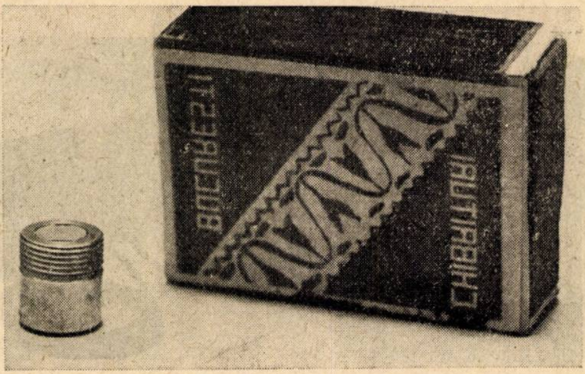
Analiza detaliată a rezultatelor obţinute arată că stabilitatea şi reproductibilitatea măsurătorilor sînt deosebit de bune. Acest lucru se datoreşte pe de o parte robusteţei traductorului, iar pe de altă parte — simplităţii circuitului de măsură care posedă proprietăţi remarcabile în privinţa raportului semnal/zgomot. În numeroasele experienţe efectuate circuitul de măsură s-a dovedit a fi deosebit de sigur în exploatare. Cele mai multe din defecţiuni întîlnite, datorîndu-se bazei de timp a oscilografului şi reglajului acesteia.

Pentru etalonarea întregii instalaţii de măsură s-a recurs la o etalonare dinamică chiar în tubul de şoc [2]. O etalonare statică nefiind posibilă, datorită funcţiei de transfer a circuitului de măsură care nu permite redarea componentei continue. În acest scop s-au făcut experienţe ridicîndu-se treptat presiunea în camera de presiune a tubului de şoc. Presiunea iniţială a fost măsurată cu un manometru cu mercur.

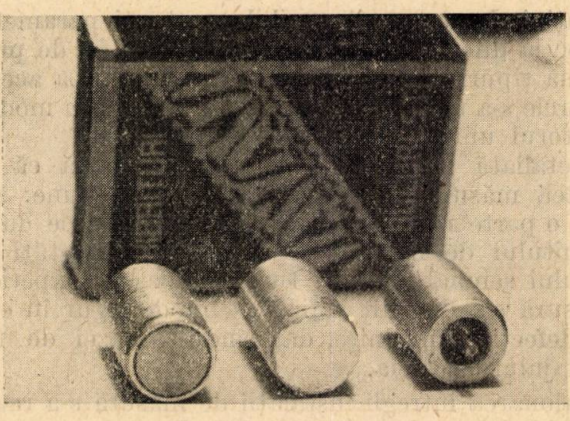
Rezultatul acestor experienţe este arătat în figura 10 (*a*, *b*) unde pentru cazul folosirii unui traductor cu dielectric solid se dă curba de etalonare, presiune în funcţie de deflecţia spatului pe ecranul oscilografului. De asemenea sînt arătate şi cîteva oscilograme obţinute cu acest prilej.

Curba de etalonare arată o legătură liniară între presiune și deflecția pe ecran a spatului ceea ce reprezintă evident un avantaj al metodei propuse.

Pentru analizarea în întregime a fenomenelor tranzitorii ce au loc în tubul de șoc s-au efectuat de asemenea experiențe pentru prinderea întregului proces. În figura 11 sînt arătate rezultatele parțiale obținute, care indică că unda de șoc suferă un număr mare de reflexie și că atenuarea acestora este destul de mică.



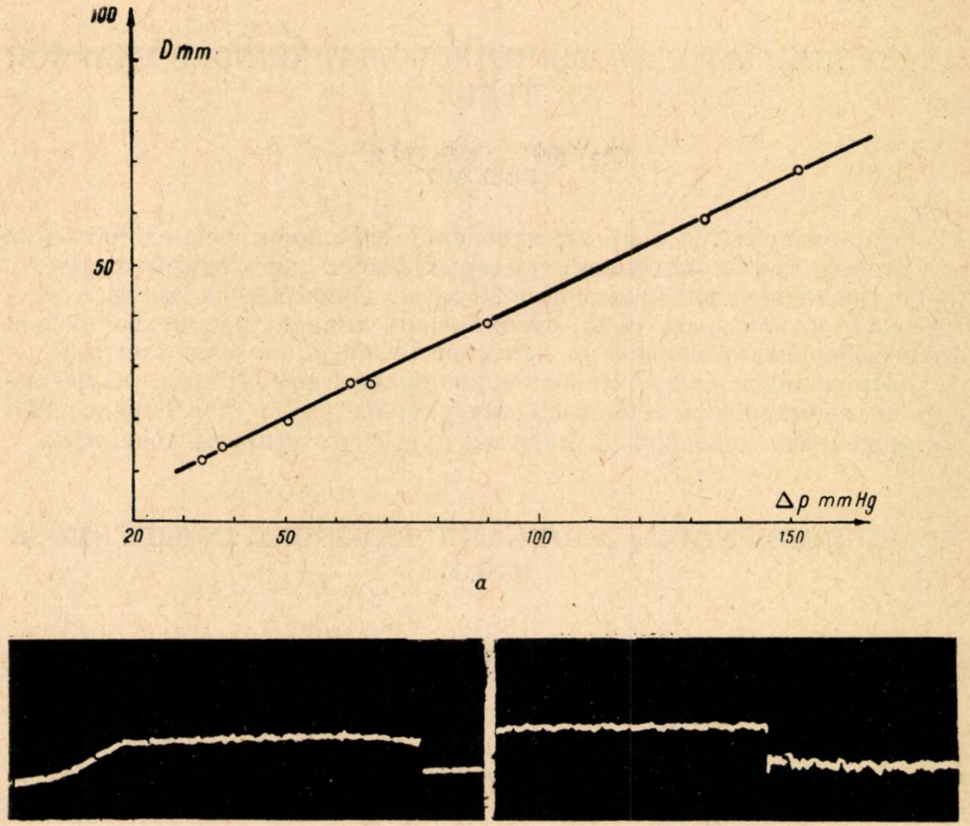
*a*



*b*

Fig. 9

Rezultatele obținute marchează o primă fază de dezvoltare a metodei propuse și a aparaturii destinate măsurătorilor de presiune în tubul de șoc, realizate la Institutul de mecanică aplicată.



*a*

*b*

Fig. 10

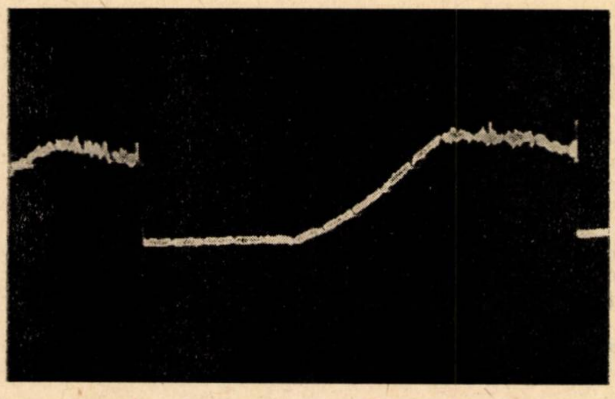


Fig. 11

# ИЗМЕРЕНИЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ В УДАРНОЙ ТРУБЕ

## РЕЗЮМЕ

Анализируются вопросы измерения аэродинамических давлений в ударной трубе, изменение которых имеет переходный характер продолжительностью примерно в 20 мсек. Описывается метод и разработанная для этой цели специальная аппаратура, позволяющая фотографирование изменения давлений на катодном осциллографе.

Приводятся некоторые экспериментальные результаты, указывающие на возможность использования ударной трубы для определения распределения давлений на моделях при сверхзвуковых течениях.

# MEASUREMENT OF AERODYNAMIC PRESSURE IN THE SHOCK TUBE

## ABSTRACT

This paper analyses problems pertaining to the measurement of aerodynamic pressures in the shock tube, whose variations have a transient character and a duration of about 20 m sec. The technique and the equipment employed which permits recording of the pressure variations on a cathode-ray oscilloscope are described.

Certain experimental results are presented, indicating the possibility of using the shock tube for determining the pressure distributions on models in supersonic flow.

## BIBLIOGRAFIE

1. I. Hall Gordon, *Shock Tubes.* Utia Review, Institute of Aerophysics University of Toronto *12.* Part. I, II. May (1958).
2. Y.T.Li, *High-frequency pressure indicators for aerodynamic problems.* N.A.C.A., TN *3042*.
3. W. W. Willmarth, *Small Barium Titanate Transducer for Aerodynamic or Acoustic Pressure Measurements.* Rev. Sci. Instr., **29**, *3*, 218, March (1958).
4. L. Dumitrescu, *Tubul de şoc şi aplicaţiile sale.* S.C.M.A. *1* (1956).
5. I. Miklowitz, *The Propagation of Compressional Waves in a Dispersive Elastic Rod.* Jour. App. Mech., **24**, *2* (1957).
6. L. Dumitrescu, *Calculul lungimii minime ale elementelor unui tub de şoc pentru o durată de funcţionare dată,* SCMA, *3* (1956).
7. E. Procopovici, *Traductor capacitiv de foarte mică inerţie pentru detectarea undelor de şoc în gaze.* IMA (1960).
8. Htteny, *Handbook of Experimental Stress Analysis.*
9. И. Маркус, В. Иелуф, *Технические применения электроноламповых схем.* Москва, 1954.
10. E. Procopovici, *Măsurarea vibraţiilor şi jocurilor mecanice în traductori capacitivi.* IMA (1960).

TEHNICA MĂSURĂTORILOR

# METODĂ PENTRU MĂSURAREA VITEZEI DE PROPAGARE A UNDELOR DE ŞOC

DE

I. JAKAB, A. ZAHARESCU şi L. DUMITRESCU

## 1. INTRODUCERE

La Institutul de mecanică aplicată „Traian Vuia" al Academiei R.P.R. se întreprinde un complex de lucrări [1], avînd ca scop elaborarea metodelor de măsură care să permită efectuarea cercetărilor cantitative de aerodinamică cu ajutorul tubului de şoc realizat la I.M.A. [2] şi înzestrarea acestei instalaţii cu aparatura electronică corespunzătoare. În articolul de faţă se prezintă rezultatele unora din aceste cercetări.

Printre mărimile aerodinamice, a căror cunoaştere este esenţială pentru studierea fenomenelor din tuburile de şoc, viteza de propagare a undei de şoc iniţiale are un rol important. Aceasta se datoreşte faptului că viteza undei determină în mod univoc toţi parametrii mişcării ulterioare din tub. În principiu viteza de propagare a undei precum şi toţi ceilalţi parametrii care interesează pot fi calculaţi, cunoscînd valorile presiunilor din cele două compartimente ale tubului de şoc, înaintea iniţierii mişcării prin percutarea diafragmei. Totuşi, acest mod de a proceda este susceptibil de erori, care pot proveni atît din imprecizia măsurării acestor presiuni şi în special a vidului, cît şi din cauze necontrolabile (imperfecţia spargerii diafragmei etc). În consecinţă este indispensabilă măsurarea unui parametru de referinţă, chiar în regim de funcţionare. Pentru aceasta s-a ales viteza de propagare a undei, mărime care după cum vom vedea poate fi măsurată cu precizie suficientă.

Pentru caracterizarea fenomenelor aerodinamice pe modelele plasate în tubul de şoc prezintă o importanţă primordială valoarea numărului Mach $M_2$ al scurgerii cvasistaţionare din tub. Întrucît $M_2$, în intervalul de valori care ne interesează, creşte sensibil mai repede decît numărul Mach $M_s$ al undei de şoc, rezultă că pentru determinarea lui $M_2$ cu o precizie satisfăcătoare, precizia cu care se măsoară $M_s$ trebuie să fie de ordinul zecimilor de procent $(0{,}1-0{,}3\%)$.

Măsurarea de viteză înseamnă în general fie determinarea unei viteze instantanee, determinare ce se face în mod continuu, fie determinarea unei viteze medii, pe o distanță oarecare parcursă de undă. Viteza de propagare a undei de șoc nu este însă constantă de-a lungul tubului, din diferite motive (procesul de formare a undei, atenuări vîscoase etc.). Avînd în vedere destinația principală a tubului de șoc, aceea de efectuare de cercetări pe modele, în care caz interesează în primul rînd viteza scurgerii cvasistaționare pe model, este important ca măsurarea vitezei de propagare a undei să se facă în apropierea zonei de experimentare, în amontele acesteia înainte ca unda să fie perturbată de model. De altfel, în această zonă viteza de propagare a undei se stabilizează.

Măsurarea directă și continuă a vitezei instantanee, deși principial posibilă, prin folosirea de ex. a efectului Doppler la reflexia undelor electromagnetice de foarte înaltă frecvență, [3] este legată de mari dificultăți tehnice și nu asigură precizia dorită.

În consecință, s-a ales metoda măsurării vitezei medii, prin determinarea intervalului de timp între momentele trecerii undei de șoc în fața a doi detectori de undă, plasați de-a lungul tubului la o distanță cunoscută convenabil aleasă. Atît distanța dintre cei doi detectori, cît și intervalul de timp pot fi măsurați cu precizie suficientă.

S-a urmărit realizarea unui sistem cît mai simplu și cu un număr cît mai redus de elemente, avîndu-se în vedere faptul, că o instalație mai complicată, chiar dacă în principiu asigură o precizie mai mare, este mai susceptibilă de defectări și instabilitate în funcționare, ceea ce reduce considerabil precizia efectivă obținută.

## 2. CONSIDERAȚII ASUPRA ALEGERII METODEI DE MĂSURĂ

Instalațiile pentru măsurarea vitezei undelor de șoc bazate pe principiul descris mai sus, folosesc pentru detectarea momentelor de trecere a undei, variația bruscă a vreunuia dintre parametrii fizici: presiunea, densitatea, temperatura sau gradul de ionizare. În funcție de aceasta s-au folosit diferite tipuri de detectori.

Detectorii termometrici și de ionizare sînt indicați pentru unde de mare intensitate, în timp ce la majoritatea tuburilor de șoc cu performanțele similare celor ale tubului de șoc IMA s-au întrebuințat detectori bazați pe variația de densitate, pusă în evidență prin mijloace optice (strioscopie) și înregistrate cu ajutorul fotomultiplicatorilor electronici [4], [5].

Această metodă prezintă însă o serie de inconveniente și anume : sistemul detector este complicat, cere un reglaj delicat și comportă elemente scumpe ; este sensibil la perturbații mecanice și electrice, dă un semnal slab și e incomod în exploatare.

Din aceste motive s-a căutat să se folosească detectori bazați pe alt principiu și care să evite inconvenientele amintite ; în acest sens s-a preconizat utilizarea detectorilor de presiune capacitivi, mai ales că în paralel cu studiile care fac obiectul articolului de față s-au întreprins lucrări pentru elaborarea unei metode de măsurare a presiunilor aerodinamice în tubul de şoc.

Detectorii de presiune capacitivi obişnuiţi au însă defectul că frecvenţa lor proprie neputînd fi ridicată prea mult fără o micşorare inadmisibilă a sensibilităţii, timpul lor de răspuns este relativ lung (de ordinul zecilor de microsecunde) [3]. S-a reuşit însă să se elaboreze un tip nou de detector de undă avînd dielectric solid. Acest tip de detector are o frecvenţă proprie foarte ridicată şi în consecinţă un timp de răspuns scurt, determinat în principal de timpul de trecere a undei de şoc peste armătura detectorului. Cum lăţimea acesteia poate fi redusă la aprox. 1 mm, se obţine un timp de răspuns de 2—5 microsec (în funcţie de viteza undei).

De fapt, ceea ce determină eroarea dată de detector asupra măsurării intervalului de timp nu este timpul de răspuns în sine, ci împrăştierea acestuia, atît ca diferenţă de timp de răspuns al celor doi detectori la aceeaşi undă, cît şi ca diferenţă a răspunsului detectorilor la unde de diferite intensităţi. Reducerea timpului de răspuns face însă ca împrăştieri procentuale mari să dea totuşi erori absolute suficient de mici.

În tubul de şoc I.M.A. se realizează scurgeri cu numere Mach $M_2$ variabile de la 0 la 5,3, corespunzînd unor viteze de propagare a undei de şoc iniţiale $M_s$, variind între 1 şi 3,5. Această variaţie se obţine variind raportul iniţial de presiuni ceea ce se realizează acţionîndu-se în special asupra presiunii din camera de vid.

În tabela de mai jos dăm valorile parametrilor caracteristici ai mişcării pentru cîteva regimuri obişnuite de funcţionare ale tubului de şoc IMA

*Tabela 1.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Raportul de presiuni iniţial | $p_1/p_0$ | 2,0 | 20,0 | 200,0 | 2000,0 |
| Presiunea iniţială în camera de vid | $p_0$ mm col. Hg | 760 | 76,0 | 10,0 | 2,0 |
| Numărul Mach al scurgerii în primul regim cvasistaţionar | $M$ | 0,23 | 0,85 | 1,24 | 1,45 |
| Numărul Mach al scurgerii în cel de-al doilea regim cvasistaţionar | $M_2$ | 0,27 | 1,35 | 3,0 | 5,30 |
| Saltul de presiune al undei | $p-p_0$ mm col. Hg | 300 | 200 | 67 | 26 |
| Numărul Mach al undei | $M_s$ | 1,16 | 1,83 | 2,60 | 3,40 |

Se observă că saltul de presiune, în valoare absolută, al undei şi deci presiunea care atacă detectorul, variază în limite foarte largi. Totuşi variaţia pantei semnalului electric este relativ mică, fapt ce influenţează favorabil precizia măsurătorii.

Această împrejurare se explică prin aceea că salturile mici de presiune ce apar la viteze mari au fronturi scurte, unda de şoc fiind foarte netă, iar timpul de trecere peste traductor foarte scurt, în timp ce salturile mari de presiune ce apar la viteze apropiate de cea a sunetului au fronturi lungi datorită timpului de trecere al undei peste traductor, mare, cît și faptului că grosimea stratului în care are loc saltul de presiune este considerabilă.

Acest din urmă lucru pare a se datori faptului că, în cazul undelor slabe procesul de formare a undei de șoc nu se termină pe distanța dintre diafragmă și camera de experiențe.

Experiențele efectuate arată că se obțin semnale electrice cu o amplitudine de ordinul a 50 mV cu un front de 2—5 microsec.

Semnalele date de cei doi detectori de undă definesc intervalul de timp care trebuie măsurat. Precizia de măsurare a acestuia e cu atît mai bună, cu cît distanța dintre cei doi detectori, de-a lungul tubului de șoc, este mai mare. Pe de altă parte însă inconstanța vitezei de propagare a undei, datorită fenomenelor de atenuare, cere ca această distanță să nu fie prea mare. Avînd în vedere aceste considerente, precum și cele de ordin constructiv, s-a ales o distanță de 700 mm. Ținînd seama de gama de variație a vitezei de propagare, rezultă că intervalele de timp care urmează să fie măsurate sînt cuprinse între 600 și 2 100 microsecunde.

Pentru măsurarea unor asemenea intervale de timp cu precizia dorită se folosesc sisteme cronografice electronice. În literatură există referiri la două tipuri de asemenea sisteme, care au fost folosite în măsurători de viteză în tuburi de șoc [3].

a. *Cronografe cu măsurare de impulsuri.* Aparatul numără impulsurile periodice produse de un generator cu o bună stabilitate a frecvenței de repetiție. Semnalele obținute de cei doi detectori de undă comandă începutul și sfîrșitul intervalului de numărare. Întrucît în acest sistem eroarea absolută maximă nu poate fi mai mică decît intervalul dintre două impulsuri consecutive, este necesar, pentru a se putea asigura precizia urmărită, ca frecvența de repetiție a impulsurilor să fie de cîțiva MHz. La asemenea frecvențe pot lucra numai numărătorii de impulsuri de construcție specială. În majoritatea instalațiilor descrise în literatură s-au folosit asemenea numărători, elaborați în alte scopuri (cercetări nucleare) și adaptați pentru măsurătorile în tuburile de șoc.

b. *Cronografe oscilografice.* Intervalele scurte de timp pot fi puse în evidență cu ajutorul unui tub catodic folosit într-un montaj adecvat. Sisteme de acest fel se utilizează și în alte domenii (radiolocație etc) și pot fi folosite și la măsurarea vitezei undelor de șoc. Spotul luminos al tubului oscilografic se mișcă pe ecran cu o viteză cunoscută ; marcîndu-se, într-un fel sau altul, începutul și sfîrșitul intervalului de măsurat, se deduce imediat mărimea acestui interval.

Pentru mărirea preciziei de citire este necesar folosirea unui baleiaj circular sau spiral. În acest caz măsurarea intervalelor scurte poate fi făcută cu o precizie superioară metodei cu numărare de impulsuri. Un dezavantaj îl constituie în schimb faptul că ecranul tubului catodic trebuie fotografiat, citirea făcîndu-se pe oscilograma convenabil mărită.

În urma studiului făcut, ținînd seama de cerințele tehnice concrete, cît și de considerente de dezvoltare viitoare a sistemului (în sensul studierii variației vitezei de-a lungul tubului) s-a adoptat cea de a doua metodă, reuşindu-se să se elaboreze un cronograf electrono-oscilografic conţinînd unele soluţii originale, care simplifică simţitor schema, asigurînd în acelaşi timp precizia de măsurare dorită.

În cele ce urmează vom descrie sistemul realizat, arătînd pe scurt caracteristicile blocurilor care-l compun.

### 3. SCHEMA STRUCTURALĂ A SISTEMULUI DE MĂSURĂ

În figura 1 e reprezentată schema structurală a sistemului de măsură. Cei doi detectori de undă *1* şi *1'* sînt montaţi în peretele tubului de şoc, la o distanţă $l = 700$ mm, fiind practic în planul peretelui, aşa încît prezenţa lor nu influenţează scurgerea în tub. Detectorul *1* este cel care este atacat primul de undă.

Funcţionarea sistemului, în linii generale, decurge în modul următor :

Generatorul de baleiaj (blocurile *7—8—9*) produce două tensiuni sinusoidale de aceeaşi frecvenţă şi defazate la 90°, care se aplică perechilor de plăci de deflecţie ale tubului catodic. Ca urmare, spotul electronic descrie un cerc pe ecranul tubului. În poziţia „de aşteptare", adică înainte de declanşarea fenomenului din tub, intensitatea spotului este redusă sub limita de vizibilitate, aşa încît ecranul nu este luminat.

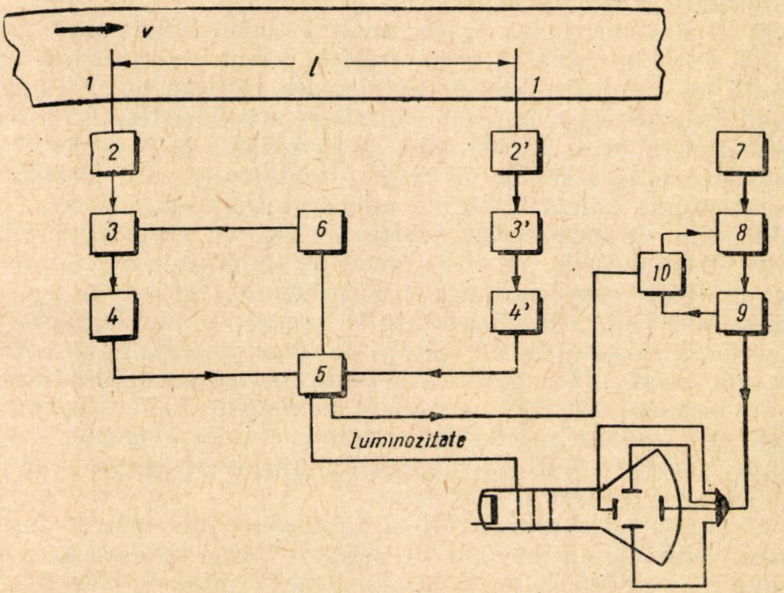


Fig. 1

Prin trecerea undei peste cei doi detectori de undă se obţin două semnale electrice, care sînt amplificate şi prelucrate de două lanţuri de amplificare (*2—3—4*, respectiv *2'—3'—4'*). Acestea acţionează asupra unui releu electronic (circuit bistabil) (*5*), care la rîndul său comandă aprinderea şi stingerea spotului tubului catodic. Concomitent cu aprinderea spotului releul electronic declanşează şi circuitul de modulaţie (*10*), care micşorează treptat amplitudinea tensiunilor de baleiaj. Drept consecinţă spotul electronic nu se mai mişcă pe cerc, ci descrie un arc de spirală luminat, care se fotografiază.

Este foarte uşor de arătat, că dacă cele două tensiuni de baleiaj sînt lipsite de armonice, sînt defazate la 90°, amplitudinile lor iniţiale pe ecran sînt egale, iar variaţia în timp a amplitudinilor se face după aceeaşi lege, avem relaţia

$$\varphi = 2\pi f . \Delta t,$$

unde $\varphi$ este unghiul de centru al arcului de spirală, $f$ — frecvenţa baleiajului, iar $\Delta t$ — intervalul de timp de măsurat. În consecinţă, viteza de propagare a undei se determină cu formula

$$v = \frac{2\pi f}{\varphi} \cdot l,$$

$l$ fiind distanţa dintre detectori.

Să reluăm puţin mai pe larg analiza schemei din figura 1.

Detectorii de undă sînt conectaţi la blocurile de intrare *2*, *2'*, care reprezintă un montaj special de amplificare realizat pe o dublă triodă. Montajul furnizează tensiunea de polarizare necesară detectorilor şi amplifică semnalul, fiind în acelaşi timp puţin sensibil la perturbaţii electrice de joasă frecvenţă (zgomot de reţea), împrejurare care măreşte stabilitatea sistemului. Amplificarea blocului de intrare este de 20.

Blocurile de intrare sînt urmate de cîte un etaj de amplificare *3*, respectiv *3'*, cu pentode, avînd un factor de amplificare de 100, iar acestea de cîte un amplificator-limitator *4*, respectiv *4'*, care pe de o parte reţin semnalele mici (sub 2 mV raportate la intrare), eliminînd astfel posibilitatea acţionării sistemului de măsură de către perturbaţii de orice provenienţă sub acest nivel, pe de altă parte limitează amplitudinea semnalelor care trec mai departe la o valoare maximă de 50 V, evitîndu-se astfel trecerea prin cuplaje capacitive parazite, a unor semnale nedorite, de polaritate inversă faţă de cea a impulsului util, şi care ar putea să provoace bascularea falsă a releului electronic.

Semnalele astfel amplificate şi limitate se diferenţiază, obţinîndu-se impulsuri scurte şi cu un timp de stabilire suficient de redus, care prin nişte diode, se aplică la intrările releului electronic *5*. Prezenţa diodelor face ca fiecare canal să poată acţiona circuitul bistabil doar într-un singur sens, în concordanţă cu destinaţia canalului respectiv, aceea de a marca începutul, respectiv sfîrşitul, intervalului de măsurat.

Circuitul bistabil furnizează un impuls dreptunghiular, avînd durata egală cu intervalul de măsurat şi care, printr-un etaj de amplificare, se aplică grilei de comandă a tubului catodic făcînd ca spotul acestuia să fie aprins numai pe durata intervalului de măsurat. Fronturile de aprindere şi stingere au o durată sub 0,3 microsecunde.

În figura 2 este reprezentată oscilograma semnalului electric dat de circuitul basculant, la trecerea undei de şoc prin dreptul celor doi detectori.

S-a utilizat un marcaj de timp al oscilogramei, la intervale de 1/1600 secunde.

După trecerea undei iniţiale în tubul de şoc au loc reflexii repetate, care ar putea să producă reaprinderea spotului compromiţînd măsurarea făcută, întrucît după stingerea spotului, sistemul revine în situaţia iniţială. Pentru evitarea acestui lucru s-a prevăzut un circuit special de blocare *6*, care după prima basculare a circuitului bistabil, blochează canalul de amplificare cu funcţiunea de aprindere a spotului. Acest lucru se realizează cu ajutorul unui tiratron, comandat de semnalul de basculare şi care acţionează concomitent asupra negativării şi tensiunii de ecran ale tubului amplificator. Blocarea se produce cu aproximativ 200 microsecunde după trecerea undei peste primul detector. Această întîrziere provocată de constantele de timp ale circuitelor amplificatorilor, nu e totuşi supărătoare, deoarece în acest interval de timp apariţia unor semnale perturbatoare nu e posibilă.

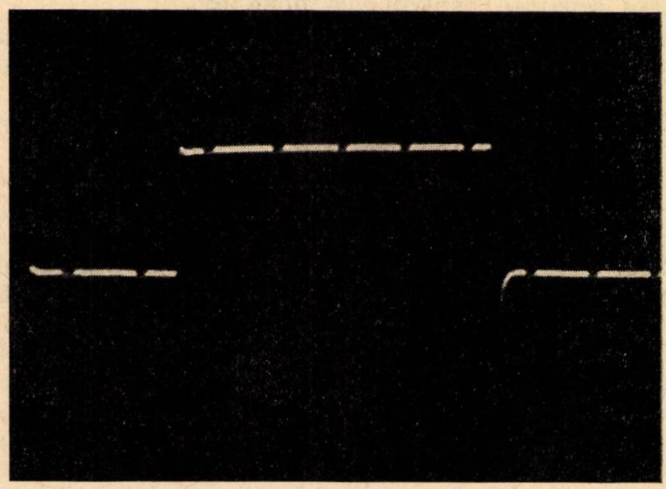


Fig. 2

Generatorul de baleiaj este compus dintr-un oscilator RC (*7*), un amplificator (*8*), un circuit de defazare (*9*), şi un amplificator de reacţie (*10*), cu ajutorul cărora se realizează după cum vom arăta mai jos mişcarea spotului pe o traiectorie spirală.

Oscilatorul RC are două etaje de amplificare şi foloseşte ca circuit de reacţie o punte Wien, avînd în semipuntea de reacţie negativă un element cu nelinearitate inerţială, care asigură stabilitatea de amplitudine şi totodată un conţinut de armonice redus (0,5 %) ceea ce este important din punct de vedere al preciziei de măsurare. Din acelaşi punct de vedere este necesară o bună precizie şi stabilitate a frecvenţei. Reglajul şi controlul stabilităţii s-a făcut cu un generator de frecvenţe etalon, constatîndu-se că performanţele oscilatorului sînt mulţumitoare.

Semnalul dat de oscilator este amplificat de un etaj de putere (*8*) care atacă un circuit de defazare simetric. Spre deosebire de alte scheme de defazare, cea propusă de noi nu reglează defazajul, care în cazul unei simetrii satisfăcătoare este suficient de apropiat de 90°, în schimb permite reglarea raportului amplitudinilor celor două tensiuni de ieşire, reglaj impus de inegalitatea sensibilităţii tubului catodic pe cele două axe. Folosirea acestui circuit simplifică mult schema, întrucît se obţin direct tensiunile defazate, simetrice faţă de masă, fără să mai fie nevoie de canale de amplificare separate pentru cele două axe.

Cele două tensiuni se aplică plăcilor de deflecţie ale tubului catodic, pe ecranul căruia, dacă raportul de amplitudini a fost convenabil reglat, se obţine un cerc.

S-a ales ca frecvenţă de baleiaj 2000 Hz, aşa încît spotul luminos descrie un arc de $2\pi$ în 500 microsecunde.

Întrucît s-a avut în vedere în faza preliminară, efectuarea unor măsurători de verificare cu baleiaj circular şi nu spiral, oscilatorul mai poate furniza şi o frecvenţă de 400 Hz, corespunzînd unui timp total de baleiaj de 2500 microsec mai mare decît intervalul maxim de măsurat.

Pentru obţinerea baleiajului spiral este necesar, ca după aprinderea spotului amplitudinea semnalului de intrare în defazor să descrească linear în timp. Modulaţia se realizează cu ajutorul unui etaj simetric diferenţial (*10*), care se află în circuitul de reacţie negativă al amplificatorului (*8*). Mărind gradul de reacţie se micşorează amplificarea şi deci amplitudinea tensiunii de baleiaj. Pentru aceasta se integrează saltul de tensiune obţinut la prima basculare a circuitului bistabil, iar tensiunea linear variabilă care rezultă, se aplică grilelor etajului (*10*). Semnalul de reacţie se aplică în contrafază celor două catode. Variaţia tensiunii grilelor provoacă deplasarea punctului de funcţionare a etajului, care iniţial se găseşte în cotul inferior al caracteristicii, spre porţiuni cu pantă din ce în ce mai mare, aşa încît amplificarea creşte în mod continuu. Semnalele celor două triode se adună în transformatorul de ieşire, pe cînd semnalul aplicat grilelor, dacă etajul este corect echilibrat, nu apare la ieşire [1]).

Schema adoptată permite micşorarea distorsiunilor provenite din faptul că etajul modulator lucrează în regim neliniar, întrucît modulatorul este el însuşi afectat de o reacţie negativă, prin amplificatorul principal (*8*).

În felul acesta s-a reuşit, folosind un număr relativ redus de blocuri, să se asigure funcţionarea corectă a sistemului.

## 4. PRECIZIA DE MĂSURĂ

Erorile care pot afecta rezultatele măsurătorilor se pot împărţi în mai multe categorii :

*a*) eroarea de citire, determinată de precizia cu care se apreciază arcul de spirală pe fotooscilogramă.

---

[1]) În caz contrar tensiunea liniar variabilă ar pătrunde în amplificator şi însumîndu-se cu semnalul sinusoidal, ar provoca deplasarea centrului spiralei.

*b*) Eroarea geometrică, datorită faptului că proporționalitatea intervalului de timp cu arcul descris de spot nu este riguroasă. Acest lucru poate proveni din mai multe cauze ca :

— inegalitatea amplitudinilor pe cele două axe,
— imprecizia defazajului,
— conținutul de armonice al tensiunii de baleiaj,
— dependența sensibilității tubului catodic pe o axă de coordonata pe cealaltă axă.
— erori provenite din procesul de modulație.

S-a făcut o analiză amănunțită a tuturor acestor surse de erori, stabilindu-se în felul acesta condițiile de proiectare pentru sistemul de baleiaj. Eroarea relativă datorită cauzelor de la (*a*) și (*b*) scade cu mărirea arcului, și poate fi adusă sub 0,1 % dacă numărul de spire descrise de spot este de aproximativ 10.

*c*) Eroarea sistematică datorită impreciziei frecvenței de baleiaj, care nu întrece însă 0,01 %.

*d*) Eroarea provenită din inegalitatea timpurilor de răspuns ale detectorilor de undă și ale canalelor de amplificare. Aceste erori sînt cu atît mai mici, cu cît panta semnalelor de intrare e mai mare. Studiul lor detaliat a arătat, că în condițiile de lucru existente ele nu depășesc în valoare absolută 0,3 microsecunde, ceea ce la un interval mediu de măsurat de 1000 microsecunde reprezintă 0,03 %.

*e*) Eroare de măsurare a distanței dintre detectori, care poate fi menținută sub 0,05 %.

La acestea se mai adaugă eventuale diferențe provocate de faptul, că unda de șoc poate să nu-și păstreze planeitatea în vecinătatea pereților tubului. Pentru evitarea acestui fenomen s-au luat anumite măsuri constructive. În concluzie, considerăm că eroarea totală maximă probabilă nu depășește 0,3 % în condițiile normale de funcționare.

## 5. REZULTATE EXPERIMENTALE

Cu ajutorul instalației realizate s-au efectuat o serie de încercări și măsurători de verificare la tubul de șoc.

Pentru aceste încercări detectorii de undă au fost plasați provizoriu la un interval de 1115 mm, primul dintre ei aflîndu-se la o distanță de aproximativ 20 diametre echivalente de diafragmă.

Oscilogramele au fost înregistrate fotografic pe film de 35 mm cu sensibilitate ridicată pentru verde-albastru (Agfa Fluorapid). În figura 3 este prezentată o oscilogramă tipică.

Pentru citirea arcului de spirală pe oscilogramă este necesar să se marcheze într-un fel oarecare poziția centrului spiralei. După ce s-au încercat mai multe metode pentru obținerea acestui marcaj, s-a adoptat următoarea : În fața ecranului tubului catodic se plasează un transparent pe care sînt trasate două axe perpendiculare. Acestea apar pe fotografie ca întreruperi ale spiralei luminate, permițînd determinarea centrului, cu precizie suficientă.

Experiențele au arătat, că prezența în tubul de șoc a resturilor de diafragmă, de la experiențele anterioare, influențează considerabil viteza de propagare a undei. Ca urmare este necesar, ca după fiecare experiență tubul să fie atent curățat. Asigurarea unui acces ușor în interiorul tubului de șoc prin măsuri constructive corespunzătoare, se dovedește util.

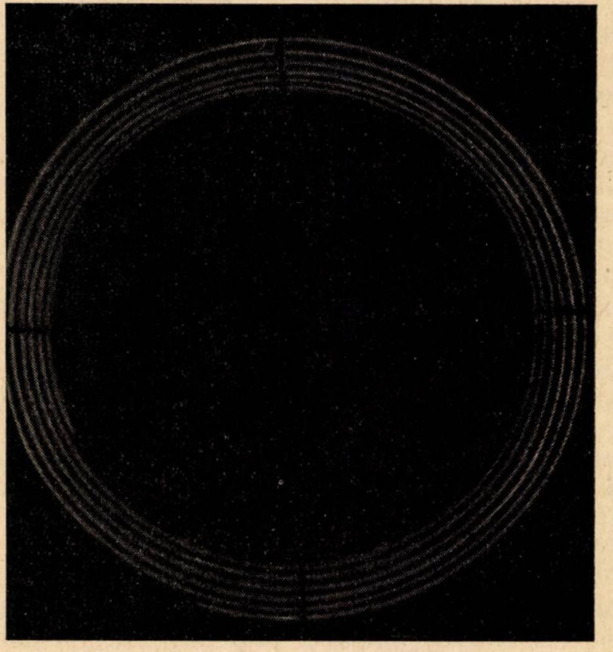


Fig. 3

*Primită la redacție la 12 mai 1960*

## МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УДАРНЫХ ВОЛН

### РЕЗЮМЕ

Излагается метод измерения скорости распространения волн применительно к ударной трубе, построенной в Институте прикладной механики имени Траяна Вуя Академии РНР.

Измерение основано на регистрации промежутка времени между прохождениями волны перед двумя неподвижными метками, расположенными на известном расстоянии. Улавливание моментов прохождения производится при помощи специальных емкостных датчиков с очень малой инерцией.

Для измерения интервала времени применяется электронный хронограф, специально разработанный для этой цели. Схема хронографа содержит оригинальные элементы, повышающие компактность и простоту установки. Метод обеспечивает точность измерения в пределах 0,2—0,5 % в диапазоне скоростей 1—4 Маха.

## METHOD FOR MEASURING THE VELOCITY OF PROPAGATION OF SHOCK WAVES

### ABSTRACT

This paper describes a method for measuring the velocity of shock waves, used in the shock tube built and installed at the Institute of Applied Mechanics "Traian Vuia", of the Academy of the Rumanian People's Republic.

The measurement is based on the recording of the time interval elapsed between the passage of the wave in front of two points spaced at a known distance. The detection of the passage moments is made with the aid of two specially developed capacitive pick-ups having a very short response time (2...5 $\mu$secs).

For measuring the time interval, an electronic cronograph developed for this purpose is used. The cronograph circuitry, involves original elements which increase the compactness and simplicity of the equipment. The method ensures an accuracy of $0 \cdot 2 - 0 \cdot 5$ per cent in the Mach number range 1...4.

### BIBLIOGRAFIE

1. L. Dumitrescu, I. Jakab, E. Procopovici şi A. Zaharescu, *Probleme ale cercetării experimentale de aerodinamica vitezelor mari în tubul de şoc.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **XI**, *6* (1960).
2. L. Dumitrescu, *Tubul de şoc pentru cercetări de aerodinamică.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **X**, *1* (1959).
3. J. Gordon Hall, *Shock tubes.* Institute of Aerophysics University of Toronto. UTIA Review, *12.* Part. II, May (1958).
4. R. Graindorge, *Utilisation d'une «barrière optique» pour la mesure de la vitesse de propagation d'une onde de choc dans un tube à chocs.* La Recherche Aéronautique, *41* (1954).
5. B. D. Henshall, *On Some Aspects of the Use of Shock Tubes for Aerodynamic Research* R & M. 3044, Londra, 1957.
6. A. M. Вонч-Бруевич, *Применение электронных ламп в экспериментальной физике.* Москва, Гостехиздат, 1955.

# — REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE —

## O METODĂ MATRICIALĂ PENTRU CALCULUL VIBRAŢIILOR GRINZILOR

DE

K. K. PONOMAREV[1]

În articol este expusă o metodă matricială pentru calculul vibraţiilor grinzilor static nedeterminate pentru orice condiţii la limită şi intermediare.

Folosirea matricilor şablon duce la un algoritm care simplifică în mod apreciabil întocmirea ecuaţiei caracteristice şi creează o nouă metodă de calcul deosebit de comodă pentru programarea la maşini electronice de calculat.

★

Ecuaţia diferenţială a vibraţiilor transversale a porţiunii grinzii de secţiune constantă (fig. 1) este

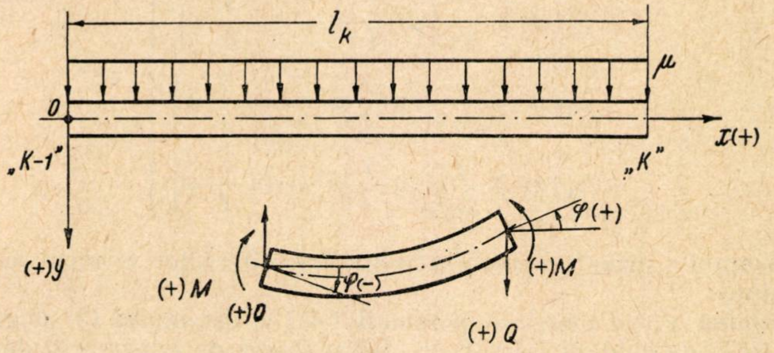


Fig. 1

$$y^{(IV)} - \frac{\mu_k \omega^2}{E I_k} y = 0 \quad \text{sau} \quad y^{IV} - \frac{\lambda^4}{l^4} y = 0, \tag{1}$$

---

[1] Institutul unional al industriei alimentare — Moscova.

unde $\mu$ — masa distribuită a porțiunii grinzii,
$\omega$ — frecvența vibrațiilor libere care urmează a fi determinată.

Integrala generală a ecuației (1) este

$$y = C_1 \sin \frac{\lambda}{l} x + C_2 \cos \frac{\lambda}{l} x + C_3 \operatorname{sh} \frac{\lambda}{l} x + C_4 \operatorname{ch} \frac{\lambda}{l} x . \tag{2}$$

Aplicînd metoda parametrilor inițiali obținem soluția ecuației (1) și primele trei derivate ale acesteia sub forma sistemului

$$\left.\begin{aligned}
y(x) &= \psi_1(x) \cdot y_0 + \psi_2(x) \cdot l\,\varphi_0 - \frac{l^2}{EI}\,\psi_3(x) \cdot M_0 - \frac{l^3}{EI}\,\psi_4(x) \cdot Q_0 \\
\varphi' = l\,\varphi(x) &= \lambda^4\,\psi_4(x) \cdot y_0 + \psi_1(x) \cdot l\varphi_0 - \frac{l^2}{EI}\,\psi_2(x) \cdot M_0 - \frac{l^3}{EI}\,\psi_3(x) \cdot Q_0 \\
M' = -\frac{l^2 \cdot M(x)}{EI} &= \lambda^4\,\psi_3(x) \cdot y_0 + \lambda^4\,\psi_4(x) \cdot l\varphi_0 - \\
&\qquad - \frac{l^2}{EI}\,\psi_1(x) \cdot M_0 - \frac{l^3}{EI}\,\psi_2(x) \cdot Q_0 \\
Q' = -\frac{l^3 \cdot Q(x)}{EI} &= \lambda^4\,\psi_2(x) \cdot y_0 + \lambda^4\,\psi_3(x) \cdot l\varphi_0 - \\
&\qquad - \lambda^4 \cdot \frac{l^2}{EI}\,\psi_4(x) \cdot M_0 - \frac{l^3}{EI}\,\psi_1(x) \cdot Q_0
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Aici

$$\left.\begin{aligned}
\psi_1(x) &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{\lambda}{l}x + \cos\frac{\lambda}{l}x\right) \\
\psi_2(x) &= \frac{1}{2\lambda}\left(\operatorname{sh}\frac{\lambda}{l}x + \sin\frac{\lambda}{l}x\right) \\
\psi_3(x) &= \frac{1}{2\lambda^2}\left(\operatorname{ch}\frac{\lambda}{l}x - \cos\frac{\lambda}{l}x\right) \\
\psi_4(x) &= \frac{1}{2\lambda^3}\left(\operatorname{sh}\frac{\lambda}{l}x - \sin\frac{\lambda}{l}x\right).
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Semnul ,,prim'' reprezintă reducerea diferiților termeni la aceleași dimensiuni.

Pentru $x = l$ matricea porțiunii $[A_k]$ a sistemului (3) degenerează în matricea deschiderii $[A_k(l)] = [L_k]$ și starea de tensiune și deformație într-o secțiune oarecare este

$$\{Y_k\} = [L_k]\{Y_0\}. \tag{5}$$

Din fiecare cele patru elemente ale matricilor-coloane $\{Y_h\}$ și $\{Y_o\}$ două sînt nule. Acestea duc la un sistem de două ecuații liniare care are soluție (adică grinda vibrează liber), dacă determinantul ei $\Delta = 0$. În felul acesta se obține ecuația frecvenței vibrațiilor proprii $\Delta = \Delta(\omega) = 0$ sau $\Delta = \Delta(\lambda) = 0$ pentru grinzile cu o singură deschidere. Pentru cele cu mai multe deschideri (fără reazeme rigide) pot fi folosite matricele simple de ordinul patru. Cînd există reazeme rigide se pot folosi matrice asociate, care se vor utiliza în expunerea ulterioară.

Pentru cazul vibrațiilor matricea asociată a deschiderii

$$[\overline{\overline{L}}_k] = \begin{bmatrix} \Phi_4 & \frac{l}{EI}\Phi_3 & \frac{l^2}{\varepsilon I}\Phi_2 & \frac{l^2}{\varepsilon I}\Phi_2 & \frac{l^3}{\varepsilon I}\Phi_1 & \frac{l^4}{(\varepsilon I)^2}(1-\Phi_4) \\ -\lambda^4\frac{\varepsilon I}{l}\Phi_1 & 2\Phi_4 - 1 & l\Phi_3 & l\Phi_3 & 2l^2\Phi_2 & \frac{l^3}{\varepsilon I}\Phi_1 \\ -\lambda^4\frac{\varepsilon I}{l^2}\Phi_2 & -\frac{\lambda^4}{l}\Phi_1 & \Phi_4 & \Phi_4 - 1 & l\Phi_3 & \frac{l^2}{\varepsilon I}\Phi_2 \\ -\lambda^4\frac{\varepsilon I}{l^2}\Phi_2 & -\frac{\lambda^4}{l}\Phi_1 & \Phi_4 - 1 & \Phi_4 & l\Phi_3 & \frac{l^2}{\varepsilon I}\Phi_2 \\ -\lambda^4\frac{\varepsilon I}{l^3}\Phi_3 & -2\frac{\lambda^4}{l^2}\Phi_2 & -\frac{\lambda^4}{l}\Phi_1 & -\frac{\lambda^4}{l}\Phi_1 & 2\Phi_4 - 1 & \frac{l}{\varepsilon I}\Phi_3 \\ \lambda^4\frac{(\varepsilon I)^2}{l^4}(1-\Phi_4) & -\lambda^4\frac{\varepsilon I}{l^3}\Phi_3 & -\lambda^4\frac{\varepsilon I}{l^2}\Phi_2 & -\lambda^4\frac{\varepsilon I}{l^2}\Phi_2 & -\lambda^4\frac{\varepsilon I}{l}\Phi_1 & \Phi_4. \end{bmatrix} \tag{6}$$

Aici

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{2\lambda^3}(\text{ch}\,\lambda\sin\lambda - \text{sh}\,\lambda\cos\lambda) \\ \Phi_2 &= \frac{1}{2\lambda^2}\text{sh}\,\lambda\sin\lambda \\ \Phi_3 &= \frac{1}{2\lambda}(\text{ch}\,\lambda\sin\lambda + \text{sh}\,\lambda\cos\lambda) \\ \Phi_4 &= \frac{1}{2}(1 + \text{ch}\,\lambda\cos\lambda). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Analog celor precedente elementele matricei (6) $\overline{\overline{L}}_{ik}$ reprezintă determinanții valorilor proprii (ecuațiile caracteristice) ale grinzilor cu o singură deschidere pentru diferite combinații ale condițiilor la limită.

Astfel, de exemplu, pentru grinda încastrată $\overline{\overline{L}}_{16} = 0$. În conformitate cu aceasta, în matricea asociată a deschiderii (7) termenul $\frac{l^4}{\varepsilon^2 I^2}(I - \Phi_4) = 0$, sau $\text{ch}\,\lambda\cos\lambda = 1$, de unde determinăm $\lambda$.

Pentru deschiderile fără masă $\mu = 0$ şi, prin urmare, $\lambda = 0$. Atunci $\psi_1 = \psi_2 = 1$, $\psi_3 = \frac{1}{2}$, $\psi_4 = \frac{1}{6}$ şi matricea asociată a deschiderii fără masă

$$[\overline{\overline{L}}_k] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{l_k}{\varepsilon I} & \frac{l_k^2}{2\varepsilon I} & \frac{l_k^2}{2\varepsilon I} & \frac{l_k^3}{3\varepsilon I} & \frac{l_k^4}{12(\varepsilon I)^2} \\ 0 & 1 & l_k & l_k & l_k^2 & \frac{l_k^2}{3\varepsilon I} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & l_k & \frac{l_k^2}{2\varepsilon I} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & l_k & \frac{l_k^2}{2\,\varepsilon I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{l_k}{\varepsilon I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Matricele asociate ale trecerilor:

1. Reazem elastic şi masă concentrată

$$[\overline{\overline{F}}_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \overline{k}_i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \overline{k}_i\overline{\mu}_i & \overline{k}_i & 0 & 0 & \overline{\mu}_i & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

unde $\overline{\mu}_i = \frac{l}{\varepsilon I}(\mu_i - \theta\,\omega^2)$; $\overline{k}_i = \frac{l^3}{\varepsilon I}(k_i - m_i\,\omega^2)$.

Aici $\theta$ — momentul de inerţie al masei;
$m$ — masa.

Cînd lipseşte una din legăturile elastice matricea (9) se simplifică şi mai mult, deoarece $\mu_i = 0$ sau $k_i = 0$. Pentru $\mu_i = k_i = 0$ se obţine matricea asociată a masei concentrate

$$[\overline{\overline{F}}_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\theta_i\,\omega^2 l}{\varepsilon I} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{m_i\,\omega^2 l^3}{\varepsilon I} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{m_i\,\theta_i\,\omega^4 l^4}{\varepsilon\,I^2} & -m_i\,\omega^2\frac{l^3}{\varepsilon I} & 0 & 0 & -\frac{\theta_i\,\omega^2 l}{\varepsilon I} & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

2. Reazemul rigid se consideră drept un caz particular al celui elastic pentru $k_i \to \infty$ și, prin urmare, $\bar{k}_i \to \infty$
Matricea asociată a trecerii

$$[\bar{\bar{F}}_i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{k}_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{k}_i \bar{\mu}_i & \bar{k}_i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Aici $\bar{k}_i$ — se ia în calitate de parametru. Termenii ecuației frecvenței vibrațiilor proprii fără coeficienții $\bar{k}_i$ sînt mici în comparație cu termenii care se înmulțesc cu o valoare foarte mare a lui $\bar{k}_i$ și de aceea se neglijează. Suma termenilor, care cuprind $\bar{k}_i$ în calitate de coeficient ($k_i$ se scoate în fața parantezei) pentru valoarea proprie a lui $\omega$ trebuie să fie egală cu zero, de unde obținem egalitatea pentru determinarea lui $\omega$.
3. Încastrări cu lunecare verticală. În acest caz $\mu_i \to \infty$ și $\bar{\mu}_i \to \infty$.
Matricea asociată a trecerii

$$[\bar{\bar{F}}_i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{k}_i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

4. Reazem elastic și articulație — la fel ca matricea obținută pentru calculul stabilității.

După cum se vede din structura matricelor, cînd există mase distribuite pe lungimea grinzii, masele pe unitatea de lungime este mai indicat să fie concentrate.

Dacă deschiderea este formată din $k$ porțiuni de diferite secțiuni (fără existența unor eforturi exterioare în locurile trecerilor), atunci

$$[\bar{\bar{A}}_k]\,[\bar{\bar{A}}_{k-1}]\ldots[\bar{\bar{A}}_2]\,[\bar{\bar{A}}_1] = [\bar{\bar{P}}_k]\ldots \tag{13}$$

unde $[\bar{\bar{P}}_k]$ este matricea asociată a produsului diferitelor matrice ale porțiunilor care reprezintă matricea vibrațiilor grinzii.

În cazul general, matricea vibrațiilor grinzii ținînd seamă de condițiile de trecere este

$$[\bar{\bar{\bar{L}}}_k]\,[\bar{\bar{\bar{F}}}_{k-1}]\,[\bar{\bar{\bar{L}}}_{k-1}]\,[\bar{\bar{\bar{F}}}_{k-2}]\ldots[\bar{\bar{\bar{L}}}_2]\cdot[\bar{\bar{\bar{F}}}_1]\,[\bar{\bar{\bar{L}}}_1] = [\bar{\bar{\bar{P}}}_k] \tag{14}$$

unde $[\bar{\bar{F}}_i]$ — matricele asociate ale trecerilor,
$[\bar{\bar{L}}_i]$ — matricele asociate ale deschiderilor.

Folosirea metodei matriceale permite să se găsească ușor forma vibrațiilor proprii și vibrațiile forțate ale sistemului. *Exemplu.* Să se determine frecvențele vibrațiilor unei grinzi continue cu două deschideri (fig. 2) la încărcare cu o masă uniform distribuită.

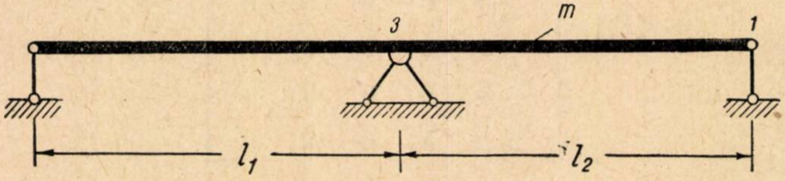


Fig. 2

*Rezolvare.* Ca modele se iau $l^* = l_2 = l_4 = 1$ ; $E I = 1$. Matricea asociată a vibrațiilor grinzii considerate este

$$[\bar{\bar{P}}] = [\bar{\bar{L}}_4] \cdot [\bar{\bar{F}}_3] \cdot [\bar{\bar{L}}_2].$$

Ecuația frecvenței vibrațiilor proprii ținînd seamă de condițiile la limită $\bar{\bar{P}}_{25} = 0$. Matricele asociate se întocmesc mecanic :

*a*) pentru deschideri (vezi partea teoretică a articolului) :

$$[\bar{\bar{L}}_2] \cdot [\bar{\bar{L}}_4] = \begin{bmatrix} \Phi_4 & \Phi_3 & \Phi_2 & \Phi_2 & \Phi_1 & 1-\Phi_4 \\ -\lambda^4\Phi_1 & 2\Phi_4-1 & \Phi_3 & \Phi_3 & 2\Phi_2 & \Phi_1 \\ -\lambda^4\Phi_2 & -\lambda^4\Phi_1 & \Phi_4 & \Phi_4-1 & \Phi_3 & \Phi_2 \\ -\lambda^4\Phi_2 & -\lambda^4\Phi_1 & \Phi_4-1 & \Phi_4 & \Phi_3 & \Phi_2 \\ -\lambda^4\Phi_3 & -2\lambda^4\Phi_2 & -\lambda^4\Phi_1 & -\lambda^4\Phi_1 & 2\Phi_4-1 & \Phi_3 \\ \lambda^4 & -\lambda^4\Phi_3 & -\lambda^4\Phi_2 & -\lambda^4\Phi_2 & -\lambda^4\Phi_1 & \Phi_4 \end{bmatrix}$$

(valorile funcțiilor $\Phi_1$, $\Phi_2$, $\Phi_3$ și $\Phi_4$ sînt date mai sus) ;

*b*) pentru reazemul rigid :

$$[\bar{\bar{F}}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\varkappa} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\varkappa} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Operînd înmulțirea elementară a celor trei matrice se obține elementul

$$\overline{\overline{P}}_{25} = 4\,\overline{\varkappa}\,\Phi_1 \cdot \Phi_2 = \frac{\overline{\varkappa}}{\lambda^6}(\sin^2 \operatorname{sh}\lambda \operatorname{ch}\lambda - \sin\lambda\cos\lambda \operatorname{sh}^2\lambda).$$

Egalînd cu zero membrul al doilea al egalității (conform condițiilor la limită), după împărțirea prin $\cos\lambda \operatorname{sh}\lambda \operatorname{ch}\lambda$, obținem ecuația frecvențelor

$$\sin\lambda\,(\operatorname{tg}\lambda - \operatorname{th}\lambda) = 0.$$

Rădăcinile ecuației $\lambda_1 = \pi$, $\lambda_2 = 3{,}927$, $\lambda_3 = 2\pi$, $\lambda_4 = 7{,}068, \ldots$, iar frecvențele corespunzătoare

$$\omega_1 = \frac{9{,}87}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \omega_2 = \frac{15{,}4}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}},$$

$$\omega_3 = \frac{39{,}5}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \omega_4 = \frac{49{,}9}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

Rezultatul obținut este confirmat în întregime prin rezolvarea aceleiași probleme prin metoda obișnuită (vezi prof. S.A. Bernstein, *Bazele dinamicii construcțiilor*, Moscova, 1939, p. 66).

Trebuie să remarcăm că la rezolvarea problemei, întocmirea matricelor se face mecanic, iar operațiunile efectuate sînt șablonate.

După cum se vede din exemplul de calcul, metoda folosită diferă numai pînă la întocmirea ecuației caracteristice (seculare). Ultimul mers al operațiunilor, de exemplu determinarea forței critice sau a frecvenței vibrațiilor, rămîne neschimbat.

*Primită la redacție la 15 septembrie 1959*

## МАТРИЧНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА КОЛЕБАНИЙ БАЛОК

### РЕЗЮМЕ

В статье излагается матричный метод, шаблонирующий расчет колебаний статически неопределимых балок при любых предельных и промежуточных условиях.

## UNE MÉTHODE MATRICIELLE POUR LE CALCUL DES VIBRATIONS DES POUTRES

### RÉSUMÉ

L'auteur décrit une méthode matricielle fournissant des solutions-type pour le calcul des vibrations des poutres statiquement non déterminées, quelles que soient les conditions à la limite ou intermédiaires.

# DIN ACTIVITATEA INSTITUTULUI DE MECANICĂ APLICATĂ

## CONSFĂTUIREA ASUPRA TEHNICII AȘCHIERII METALELOR ȘI TEHNICII RODAJULUI

Între 15 și 17 decembrie 1960, a avut loc la București *Consfătuirea asupra tehnicii așchierii metalelor și tehnicii rodajului*, organizată de Institutul de mecanică aplicată ,,Traian Vuia" al Academiei R.P.R. în colaborare cu Ministerul Industriei Grele.

Consfătuirea s-a situat pe linia sarcinilor ce decurg din documentele Congresului al III-lea al Partidului Muncitoresc Romîn și a Hotărîrii Comitetului Central al Partidului Muncitoresc Romîn și a Consiliului de Miniștri cu privire la ridicarea nivelului tehnic al producției.

Scopul consfătuirii a fost strîngerea legăturilor dintre cercetările științifice și producție, realizarea unui amplu schimb de experiență și dezbaterea unor probleme de actualitate ale industriei noastre constructoare de mașini, privitoare la introducerea tehnicii noi.

Consfătuirea a fost deschisă de acad. E. Carafoli, directorul Institutului de mecanică aplicată.

Din partea Institutului, N. Tipei, șeful secției mașini și mecanisme a prezentat conferința : *Cercetări asupra așchierii metalelor și rodajului efectuate la Institutul de mecanică aplicată*, iar din partea Ministerului Industriei Grele, Al. Ivancenco a prezentat conferința : *Tehnica nouă în așchierea metalelor și rodaj la uzinele constructoare de mașini.*

În aceste conferințe s-a arătat activitatea și rezultatele mai importante obținute în Institutul de mecanică aplicată, stadiul de dezvoltare și nivelul lucrărilor de așchiere și rodaj în industria noastră constructoare de mașini. În cadrul consfătuirii au fost expuse 35 comunicări de specialitate din cele două domenii. Comunicările au fost elaborate de către specialiști din partea unor instituții și întreprinderi, ca : Institutul de mecanică aplicată ,,Traian Vuia" ; Institutele politehnice, București, Brașov și Timișoara ; Combinatul Metalurgic Reșița ; Uzinele ,,Steagul Roșu" Brașov ; Uzinele ,,Ernst Thälmann "Brașov ; Fabrica de Rulmenți Bîrlad ; Industria metalurgică de stat Cîmpulung-Mușcel ; Uzinele ,,T. Vladimirescu" București ; Uzinele ,,23 August" București ; Institutul de studii, cercetări și proiectări tehnologice pentru industria constructoare de mașini, utilaje și industria electrotehnică (ITCME) ; Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor (INCERC) ; Institutul de fizică atomică.

Din tematica lucrărilor prezentate s-a desprins o serie de probleme, cum ar fi geometria sculelor așchietoare, regimuri economice și normative de așchiere, utilizarea materialelor mineralo-ceramice la așchiere, metode tehnologice moderne ca vibronetezirea sau execuția filetelor de precizie, utilizarea izotopilor radioactivi în studii de așchierea metalelor și rodaj, date noi în tehnica rodajului ansamblurilor de frecare, rodajul motoarelor cu combustie internă, rezultate privind rodajul unor mașini construite în R.P.R., metode moderne de rodaj etc.

Consfătuirea s-a bucurat de o largă participare a specialiștilor din uzine, institute de proiectări, institute de învățămînt superior și institute de cercetări din întreaga țară.

Discuțiile purtate la sfîrșitul ședințelor de comunicări au demonstrat interesul participanților pentru lucrările expuse, spiritul lor critic și atenția deosebită ce se acordă tehnicii noi. Cu acest prilej s-au făcut propuneri și recomandări pentru extinderea cercetărilor științifice în aceste domenii și lărgirea bazei materiale aferente, extinderea aplicării rezultatelor obținute în activitatea de cercetare și o serie de măsuri tehnice, care să asigure în cadrul diferitelor întreprinderi succesul aplicării rezultatelor prezentate la consfătuire.

La ședința de închidere a consfătuirii, acad. E. Carafoli, directorul Institutului de mecanică aplicată „Traian Vuia" a prezentat concluziile consfătuirii, care cuprind propuneri și recomandări referitoare la dezvoltarea cercetărilor în domeniile așchierii metalelor și rodajului, linia aplicațiilor viitoare ale rezultatelor obținute în cadrul acestor cercetări și strîngerea continuă a colaborării dintre cercetările științifice și industria noastră constructoare de mașini.

# RECENZII

MIRON NICOLESCU, *Analiză matematică*, vol. III, Ed. tehnică, Bucureşti, 1960, 300 p.

Al treilea volum al tratatului de analiză matematică al acad. prof. Miron Nicolescu este consacrat problemei integrării. Cele mai cunoscute monografii cuprinzînd această problemă sînt datorite lui S. Saks (1933), R. Halmos (1950) şi N. Bourbaki (două fascicule din tratatul său). Lucrarea prof. M. Nicolescu se alătură acestor monografii, aducînd însă noutăţi, fie în prezentarea materialului, fie în adăugarea de rezultate noi sau în extinderea de rezultate cunoscute. În felul acesta volumul capătă o individualitate proprie în literatura de specialitate.

Ca fir conducător al lucrării a fost ales modul de a expune integrala (deci măsura) ca o funcţie de mulţime, aşa cum au făcut la început Lebesgue şi alţii, aşa cum au făcut şi Saks şi Halmos. În felul acesta etapele intermediare sînt mai puţin numeroase decît în cazul în care s-ar fi adoptat altă metodă de expunere (considerarea integralei ca o funcţională liniară).

Cartea cuprinde 6 capitole, primul capitol fiind capitolul XXI al tratatului.

Primele două capitole sînt consacrate teoriei măsurii şi funcţiilor măsurabile. Găsim astfel o serie de rezultate clasice: măsura Jordan, măsura Lebesgue-Radon etc., precum şi considerarea funcţiilor măsurabile cu valori într-un spaţiu Banach.

În felul acesta autorul poate defini, în al treilea capitol, integrala unei funcţii cu valori într-un spaţiu Banach, aşa cum se defineşte în mod obişnuit integrala unei funcţii reale, integrală pe care o denumeşte integrala Bochner-Stieltjes. Integrala lui Bochner este astfel extinsă la funcţii vectoriale, definiţia sa fiind regăsită în acest volum ca o teoremă.

Capitolul următor cuprinde integrala pe un spaţiu-produs. Găsim aici teorema lui Fubini, precum şi o extensiune a sa la funcţii cu valori într-un spaţiu liniar normat.

În penultimul capitol se dau diferite aplicaţii. Menţionăm că teorema lui Lebesgue-Nikodym din cazul real este extinsă la cazul măsurilor vectoriale. De asemenea, se face şi o extensiune a principiului selecţiei pentru familii de măsuri vectoriale.

Ultimul capitol al lucrării este consacrat unor rezultate din teoria spaţiilor funcţiilor $p$-integrabile. Menţionăm astfel problema de compacitate şi criteriile corespunzătoare.

Fiecare capitol este însoţit de un mare număr de exerciţii şi completări.

Studiul integralelor de tip Riemann-Stieltjes nu este cuprins în această lucrare, el făcînd obiectul unei monografii separate.

În acest tratat autorul a înglobat şi unele rezultate mai recente obţinute de cercetători romîni. Menţionăm astfel o teoremă de derivare, de tip Lebesgue, a funcţiilor de mulţime definite într-un spaţiu metric, cu ajutorul unei măsuri ,,Vitali'', introdusă de C. Foiaş, precum şi teoremele de reprezentare a aplicaţiilor liniare cu valori în dualul unui spaţiu Banach, datorite lui C. Foiaş şi N. Dinculeanu.

EGYETEM * BUDAPEST

Ultimul volum al tratatului acad. prof. M. Nicolescu, scris cu o deosebită claritate și la un înalt nivel științific, completează literatura noastră matematică și reprezintă o frumoasă contribuție la literatura de specialitate din întreaga lume.

*P. P. Teodorescu*

---

VICTOR POPESCU, *Construcții metalice*, Ed. tehnică, București, 1959, 352 p.

Lucrarea *Construcții metalice* este rezultatul unei îndelungate activități a autorului la catedra de construcții metalice de la Institutul de construcții București, ca și a unei îndelungate experiențe în domeniul proiectării și execuției lucrărilor de construcții metalice.

După o introducere în care se prezintă evoluția în general și în țara noastră a construcțiilor metalice și după o vedere critică a acestora, lucrarea prezintă două părți. O primă parte tratează elemente generale pentru construcții, alcătuind partea teoretică a lucrării, iar partea a doua privește execuția și montajul construcțiilor metalice.

În prima parte, primul capitol prezintă calitățile materialelor folosite la construcțiile metalice atît funcție de compoziție cît și funcție de solicitări.

Stabilirea încărcărilor și metodele de dimensionare ale acestor construcții formează obiectul capitolului următor.

După o succintă prezentare a laminatelor folosite, se trece la calculul elementelor de asamblare, arătîndu-se pentru fiecare caz și în special în cazul sudurii și aspectul tehnologic al operațiunilor aferente.

Alcătuirea construcțiilor metalice și calculul pieselor componente formează obiectul capitolului următor.

Pe lîngă calculul clasic al elementelor componente este expus aici calculul inimii longeroanelor, ținînd seamă de voalare precum și calculul răsucirii împiedecate.

În continuare, sînt prezentate regulile generale privitoare la înădirea barelor, cu numeroase exemplificări, noțiunile necesare pentru prinderea barelor și formarea nodurilor, precum și alcătuirea reazemelor.

Un capitol special este dedicat construcțiilor din metale ușoare și un altul problemelor de viitor în tehnica construcțiilor metalice.

Partea a II-a a lucrării prezintă execuția construcțiilor metalice, începînd de la faza de proiectare, continuînd cu confecționarea șabloanelor, operațiile din depozitul de materiale, din secția de pregătire, din secțiile de execuție și de produse finite, terminînd cu operațiile de expediție.

Operațiile de montaj sînt prezentate începînd cu depozitarea pieselor la șantier și terminînd cu vopsirea construcției.

Lucrarea se încheie cu o serie de anexe conținînd principalele standarde privitoare la construcții metalice precum și numeroase culegeri de date utile.

Față de bogatul conținut prezentat sistematizat și metodic, lucrarea pune la îndemîna inginerilor și tehnicienilor din proiectare, precum și studenților, un material complet, bine legat de cerințele practice și la un nivel teoretic corespunzător.

*Augustin Petre*

В. Г. ЛЕВИЧ, *Физико-химическая гидродинамика* (Hidrodinamica fizico-chimică) ediţia a II-a revăzută, Fizmatghizd, Moscova, 1959, 699 p.

Această carte, a doua ediţie adăugită a lucrării aceluiaşi autor apărută în 1952, prezintă o serie de probleme de mecanica fluidelor care sînt mai puţin dezvoltate în tratatele de specialitate.

După un prim capitol introductiv, care conţine noţiuni de bază din mecanica fluidelor (ecuaţii generale, similitudine, noţiuni din teoria stratului limită şi turbulenţă), în următoarele două capitole se tratează pe larg problema difuziei în lichide. Astfel în capitolul 2 sînt prezentate : cinetica difuziei, problema generală a difuziei în mişcări laminare, analogia între ecuaţia difuziei şi ecuaţia transmisiei căldurii, analogia între difuzia convectivă şi frecarea de suprafaţă precum şi o serie de aplicaţii la cazul discului în rotaţie, mişcării în jurul unei plăci plane, scurgerii în tuburi, căderii particulelor grele în lichide etc. În capitolul 3 sînt reluate problemele de mai sus pentru cazul mişcărilor turbulente.

Capitolele 4 şi 5 sînt consacrate prezentării succinte a unor probleme privind transmiterea căldurii în lichide şi unor elemente din teoria coagulării sistemelor disperse (coloizi şi aerosoli) în curenţi de lichide şi gaze.

Capitolul 6 prezintă utilizarea mecanicii fluidelor la unele probleme de electrodinamică (trecerea curenţilor prin soluţii electrolitice). Dintre problemele tratate remarcăm : condiţiile de echilibru ale soluţiilor electrolitice, influenţa supratensiunilor chimice, distribuţia curentului în soluţiile electrolitice în mişcare laminară sau turbulentă, pentru diferite tipuri de electrozi, stabilirea regimului staţionar pentru o densitate de curent dată etc.

Unele probleme privind fenomenul de capilaritate şi mişcările datorită capilarităţii formează obiectul capitolului 7. În continuare, în capitolul 8 se tratează pe larg mişcarea picăturilor şi bulelor de gaze în medii lichide şi unele probleme legate de acest subiect ca : mişcarea de cădere a picăturilor în prezenţa unor substanţe superficial active, mişcarea picăturilor de dimensiuni mari, mişcarea bulelor de gaz de dimensiuni mici, medii şi mari, pulverizarea picăturilor în bulele de gaze, dizolvarea bulelor de gaze etc.

La capitolul 9 se tratează mişcarea particolelor în soluţii electrolitice, fenomenul de electroforeză, mişcările electrocapilare ale picăturilor de mercur, mişcarea picăturilor de metale în cîmpuri electrice sau magnetice etc.

Capitolul 10 este destinat teoriei metodei polarografiei, iar capitolul 11 tratează problema undelor de pe suprafaţa lichidelor (undele pe suprafaţa lichidelor ideale şi reale, undele capilare, undele pe suprafaţa picăturilor, pulverizarea prin jet etc.). În sfîrşit, ultimul capitol (cap. 12) este destinat prezentării unor probleme legate de mişcarea şi difuzia în pelicule subţiri de lichide.

Faţă de prima ediţie, există adăogiri şi completări importante în prezentarea fenomenelor de difuzie, mişcarea şi pulverizarea picăturilor, mişcarea bulelor de gaz etc.

În ansamblu, se remarcă dezvoltarea dată şi modul de tratare a fenomenului de difuzie, mişcarea picăturilor şi bulelor de gaze, studiul soluţiilor electrolitice, teoria metodei polarografice. Lucrarea conţine pe lîngă rezultatele clasice în problemele studiate unele rezultate recente obţinute de cercetătorii sovietici, în special în cadrul Institutului de Electrochimie al Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S. Prin cuprinsul şi modul de tratare, lucrarea se adresează în egală măsură specialiştilor în probleme de chimie şi electrochimie, cît şi specialiştilor în problemele generale de mecanica fluidelor şi hidrodinamică.

*V. N. Constantinescu*

⁂ *Труды института машиноведения* (Lucrările Institutului de mașini. Seminarul de teoria mașinilor și mecanismelor) **XX**, *78*, 60 (1960).

Revista publică lucrări din domeniul teoriei mașinilor și mecanismelor, lucrări de analiză și sinteză a mecanismelor ce au fost prezentate și susținute în cadrul Seminarului de teoria mașinilor și mecanismelor de la Institutul de Studii a Mașinilor al Academiei de Științe a U.R.S.S. — Moscova.

Seminarul de Teoria mașinilor și mecanismelor din cadrul acestui Institut este condus de cunoscutul om de știință sovietic acad. I. I. Artobolevscki.

Fascicula 78 a revistei cuprinde 5 comunicări :

1. K. H. SAHBAZIAN — *Metodă analitică de proiectare a unui mecanism bielă-manivelă, spațial, cu cuple inferioare.* Această comunicare este o continuare a unor lucrări anterioare publicate de autor, împreună cu N. I. Levitski.

Metodelor de proiectare a mecanismului spațial tip bielă-manivelă, le-au mai fost consacrate și alte lucrări, de diferiți cercetători printre care V. A. Zinoviev, E. P. Novodvorski, P. V. Tviac și alții.

În această lucrare însă K. H. Sahbazian a simplificat operațiile de calcul referitoare la calcularea parametrilor căutați și a ușurat construcția schemei mecanismului în proiecții ortogonale pe calea unei alegeri adecvate a sistemului de axe de coordonate.

2. K. F. SASSKI — *Cîteva probleme ale calculului mecanismelor articulate sferice.* În această lucrare autorul propune pentru determinarea vitezelor unghiulare și liniare cît și a accelerațiilor elementelor mecanismelor articulate sferice, formule de calcul foarte comode. Stabilește, de asemenea, formule de calcul pentru analiza cinetostatică a mecanismelor sferice cu un număr oarecare *n* de elemente.

Autorul folosește metoda analogiei dintre mecanismele sferice și cele plane.

3. A. N. BOGOLIUBOV — *Asupra istoricului de dezvoltare a teoriei mecanismelor și mașinilor.* În articolul lui A. N. Bogolibov este trecută în revistă una din etapele de dezvoltare a științei despre mecanisme.

Este indicată literatura bibliografică în original din sec. XVIII și începutul sec. XIX care a fost parcursă de autor. Au fost studiate, de asemenea, amănunțit, lucrările primilor fondatori ai teoriei mașinilor și mecanismelor moderne. Diferitele lucrări au fost supuse de autor unei analize aprofundate, fiind date și unele aprecieri de ordin istoric și critic.

4. M. L. BÎHOVSKI, V.A. ZINOVIEV, T. T. PAVLOVA — *Cercetări experimentale asupra sistemelor dinamice cu acționare electrică.* Lucrarea este consacrată studiului și cercetărilor experimentale asupra influenței inerției electromagnetice a motorului asupra modului de lucru a unui agregat de mașini.

În funcționarea mașinilor de lucru, dotate cu motoare electrice, o influență apreciabilă asupra caracteristicilor procesului dinamic, o exercită apariția fenomenului electromagnetic.

Pentru stabilirea calitativă a acestei influențe a fost concepută o instalație pentru experimentări și care este descrisă în articol. De asemenea, în lucrare este expusă și metoda de lucru pentru determinarea parametrilor dinamici ai electromotorului bazată pe principiul rezonanței.

În urma cercetărilor experimentale efectuate, autorii ajung la concluzia că multe din metodele de lucru pentru determinarea și calculul caracteristicilor dinamice ale mașinilor, trebuie revăzute. Cele spuse se pot referi de exemplu, la calcul volanților pentru diferite agregate.

5. I. L. GHERONIMUS — *Utilizarea punctelor lui Ball și Cebîșev la rezolvarea unor probleme de sinteză a mecanismelor.* În lucrare este dată rezolvarea analitică și grafică a problemei

de sinteză a mecanismelor directoare, la care un punct de pe bielă este tangent de ordinul 3 (punctul lui Ball) sau de ordinul 5 (punctul lui Cebîşev) cu un segment de dreaptă.

Rezolvarea acestei probleme este bazată pe teoria lui Burmester, dar se distinge prin folosirea unor serii de transformări geometrice care pînă în prezent nu şi-au găsit o utilizare în sinteza mecanismelor.

*L. Calmaciuc*

⁂ *Гидравлика сооружений и динамика речных русел* (Hidraulica construcţiilor şi dinamica albiilor) Издательство Академии Наук СССР, Москва, 1959, 244 p.

Acest volum prezintă rezultatele a 18 studii relativ recente, efectuate de cercetătorii secţiei pentru problemele ştiinţifice ale gospodăririi apelor a Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S., parte din ele în colaborare cu diverse alte institute de proiectare sau învăţămînt.

Volumul cuprinde, după cum arată şi titlul, în două părţi: hidraulica construcţiilor şi dinamica albiilor fluviale, iar articolele sînt grupate în jurul cîtorva probleme importante: studiul hidraulicii biefului aval, studiul hidraulicii unor albii schematice cu fund fix sau cu fund mobil, probleme hidromecanice ale mişcărilor unor medii cu două faze (rezistenţa conductelor transport hidraulic, viteza de pornire a materialelor granulare, aparatura de măsură).

În plus, sînt tratate şi probleme cu caracter mai general, cum ar fi unele aspecte ale hidraulicii stratului limită.

Hidraulica biefului aval al barajelor deversoare ocupă un loc important în literatura sovietică de specialitate, dată fiind marea importanţă practică a problemelor. În volumul recenzat acestor probleme le sînt consacrate articolele lui Rossinski Fomicev Antonnikov.

Rossinski analizează, pentru un caz schematizat la maximum, problema spaţială a repartiţiei vitezelor la evazarea bruscă a secţiunii vii (pentru problema plană autorul a propus o soluţie încă în 1956).

Pornind de la ecuaţiile generale ale hidrodinamicii în forma scrisă de Reynolds, particularizate la schema considerată şi admiţînd o serie de simplificări, autorul ajunge la o ecuaţie

$$\frac{\partial \bar{v}_{x}^{*}}{\partial x} = A\,\frac{\partial^2 v_i^{*}}{\partial y^2} + B\,\frac{\partial\, v_x^{*}}{\partial z},$$

în care $\bar{v}_x^{*} = \bar{v}_x^{2} + \varphi(x)$ şi $\varphi(x) = \int g\, i(x)\, dx$ sînt funcţii ajutătoare. Soluţia ecuaţiei conţine coeficienţii Fourrier ai funcţiei $F(x, y)$ descompusă în serie de consinuşi în domeniul $(OH, OB)$.

Soluţia obţinută a fost verificată experimental pentru un caz particular. Compararea rezultatelor experimentale cu calculele a arătat că metoda propusă este aplicabilă într-o zonă aflată în apropiere nemijlocită de secţiunea contractată şi numai în această zonă. Autorii consideră necesară continuarea experienţelor începute.

Un alt aspect al hidraulicii biefului aval — concentrarea debitelor specifice — este tratat în articolul lui A. F. Antonnikov. Pe baza încercărilor pe două modele ale unei construcţii concrete, se obţine o formulă pentru calculul concentrării debitului specific în cazul unei scurgeri lente.

Formula nu depinde de $\mathcal{F}r_0$, ceea ce pare inexplicabil.

Antonnikov analizează și diferite metode și dispozitive constructive de combatere a concentrării debitelor specifice, din care recomandă un prag șicanat însoțit de un redan în zig-zag. Criteriul de comparare îl constituie afuierile locale din aval.

Articolele lui M. S. Fomicev tratează un alt aspect important al hidraulicii biefului aval, și anume, pulsațiile de presiune și viteză în zona de disipare a energiei cinetice.

Pulsațiile de presiune au fost măsurate pe instalații experimentale cu ajutorul unor captori capacitivi, atît pentru regim de conjugare cu salt îndepărtat cît și pentru regim cu salt înecat.

Pulsațiile de viteză au fost măsurate cu termoanemometrul numai în regim de conjugare cu salt înecat. În plus, curenții au fost vizualizați cu o emulsie de $\gamma = 1$, iar imaginile au fost fotocinematografiate; un dispozitiv special de tarare a permis determinarea cîmpului vitezelor după prelucrarea imaginilor astfel obținute. În toate cazurile pulsațiile au fost înregistrate pe bandă cu ajutorul unui oscilograf catodic, ceea ce a permis determinarea amplitudinilor și frecvențelor respective. Sînt analizate aspectele cinematicii mișcării și s-a efectuat o primă prelucrare a măsurătorilor. Rezultă că amplitudinea pulsațiilor devine neglijabilă la $(10 \div 15)\ c$ ($c$ fiind înălțimea barajului). Pentru calculul presiunilor asupra albiei aval se dă și o formulă, însoțită de tabele care ușurează calculul unor cazuri concrete.

În sfîrșit, sînt studiate comparativ diverse dispozitive destinate să reducă pulsațiile de presiune aval dintre acestea se recomandă un sistem de ziduri-șicane curbe în plan.

Din articolele tratînd probleme de dinamică a albiilor menționăm următoarele:

*Rolul mișcării riflurilor de aluviuni asupra formării albiilor de rîuri* de N. S. Sarașkin, în care se expun rezultate obținute pe o platformă de încercări de dimensiuni însemnate (6 × × 60 m). S-au observat două faze în formarea albiilor: în prima, are loc trecerea de la o albie pur prismatică la alta în care apar brațe și în cursul ei apar rifluri și dune. Într-o a doua fază se dezvoltă brațele și apare un tip sau altul în proces de albie. Se indică unele metode de tehnologie a încercărilor pe modele de albii cu fund mobil.

În *Metodica pentru calculul deformației albiilor cu considerarea lărgirii lor* de Kuzmin și Vikulova, pornesc de la o ecuație diferențială a bilanțului debitului solid

$$\frac{1}{\gamma_N}\frac{\partial P}{\partial l} + \frac{\partial (BZ)}{\partial t} = 0,$$

în care $B$ este lățimea variabilă a albiei.

Ecuația aceasta se trece în diferențe finite și se urmărește determinarea relației dintre elementele morfometrice și $\Delta B$, sau mai bine între $\Delta B / \Delta t = I$ — intensitatea variației lățimii. Variația parametrului $I$ a fost determinată de autorii articolului, pe baza unor rezultate experimentale precum și a unor măsurători în natură pe canalul Volga—Ahtuba.

Mai multe articole se grupează în jurul problemelor mișcării unor medii cu două faze, lichidă și solidă.

Astfel A. P. Iufin publică unele rezultate experimentale asupra rezistențelor hidraulice la mișcarea pulpei omogene în conducte. Se examinează separat: variația rugozității în procesul de hidrotransport, influența temperaturii asupra rezistențelor hidraulice. Se recomandă formule pentru valorile critice ale pantei și vitezei. Se anexează tabele de calcul și nomograme.

Afară de aceasta s-au determinat formule pentru pierderile de sarcină la transportul fracțiilor mici de cărbuni. Formulele recomandate dau rezultate care coincid cu altele, analoage, ale lui Trainis.

Într-un articol al lui Rusinov, *Proprietățile fizico-mecanice ale pămînturilor nisipoase puse în operă prin hidromecanizare* sînt examinate textura, densitatea, izotropia, îndesarea, compresibilitatea și rezistența la tăiere — a pămînturilor, în funcție de factorii care îi determină și în particular, de tehnologia punerii în operă.

Mai trebuie amintit un articol al lui K. A. Cernoskutov, *Aplicarea γ-consistometrelor pentru determinarea greutății specifice a pulpei.* Sînt analizate diferite tipuri de consistometre inclusiv cele cu raze γ. Sînt recomandate ca surse de radiații elementele Co 60 sau Ce 137. Se indică o formulă directă a densității în funcție de intensitatea fluxului și grosimea stratului.

Privite în ansamblu studiile publicate în această culegere oferă un material interesant pentru cei care lucrează în domeniul cercetărilor hidraulice. Rezultatele nemijlocite ale măsurătorilor, metodica și aparatura de măsură modernă pot fi de folos direct și laboratoarelor din R.P.R.

*E. Răzvan*

SEGAL HUGO, LINDE CRISTIAN și PURCĂRIU ION, *Mașini de ridicat și de transportat* Ed. tehnică, București, 1960, 614 p.

Un domeniu deosebit de important al tehnicii și de o actualitate indiscutabilă este acela al mașinilor și instalațiilor de ridicat și transportat, indispensabil realizării planului în industria grea, organizarea marilor șantiere de construcții, proceselor tehnologice în uzinele importante, activității în industria minieră și petrolieră, în porturi etc.

Însemnătatea excepțională a acestui domeniu a determinat unele țări cu potențial industrial foarte ridicat, cum este U.R.S.S., să creeze un institut special, VNIIPTMAS, pentru studii și cercetări asupra mașinilor și instalațiilor de ridicat și transportat.

Lucrarea recenzată îmbrățișează toate chestiunile fundamentale care interesează sectoarele de proiectare, construcție și exploatare, precum și învățămîntul tehnic superior în ce privește domeniul amintit mai sus.

Autorii au redactat lucrarea după un plan judicios și logic care cuprinde o succesiune normală a diferitelor părți, după cum urmează :

— O expunere introductivă cu indicarea terminologiei strict necesare.

— Studiul organelor specifice ale mașinilor de ridicat, o adevărată „anatomie” a acestor mașini, cuprinzînd descrierea și date asupra diferitelor organe, aranjate pe grupe după misiunea lor : ghidare, suspendare, blocare, frînare, deplasare, acționare.

— Expunerea principiilor pentru calculul și construcția scheletului metalic al macaralelor.

— Descrierea diverselor mașini de ridicat : cricuri, palane, trolii, macarale de diverse tipuri, ascensoare.

— Descrierea mașinilor și instalațiilor de transport continuu : transportoare, elevatoare, mașini de aruncat, instalații de transport pneumatic, precum și descrierea unor instalații auxiliare ca : buncăre, închizătoare și alimentatoare.

Concepția și redactarea lucrării care cuprinde patru părți și o amplă bibliografie, are la bază o bogată documentare din literatura tehnică sovietică de specialitate precum și experiența proprie a autorilor.

Datele referitoare la clasificarea, proiectarea și construcția mașinilor studiate sînt urmate de indicații ale standardelor și prescripțiilor Direcției metrologice din R.P.R. fapt deosebit de util.

S-au evitat expuneri teoretice complicate și pretențioase, dîndu-se forma cea mai simplă și confirmată de practică pentru calculele de rezistență a diverselor organe studiate.

Examinînd lucrarea, se constată că autorii au fost puşi în faţa unei sarcini grele de a concentra în cele 614 pagini un material vast, dată fiind amploarea deosebită a domeniului maşinilor şi instalaţiilor de ridicat şi de transportat.

Sperăm că la o viitoare ediţie să se afecteze un număr mai mare de pagini pentru a se face loc următoarelor completări pe care le sugerăm :

— Cîteva indicaţii asupra ascensoarelor tip ,,pater noster" care lipsesc din text.

— Completări la paragrafele referitoare la macaralele turn, portal, pe cale ferată şi plutitoare, deoarece ar fi necesare unele indicaţii referitoare la stabilitate.

— Introducerea unui capitol referitor la tehnica securităţii în ce priveşte utilajul şi personalul pentru a se evita accidente, atît de frecvente în exploatarea maşinilor de ridicat şi de transportat.

— Introducerea unui paragraf referitor la docurile plutitoare, care interesează industria de construcţii navale, atît de prosperă în R.P.R. sub actualul regim.

Pentru titlul lucrării sugerăm forma de mai jos care este mai completă :

*Maşini şi instalaţii de ridicat şi de transportat.*

În încheiere ţinem să relevăm valoarea şi utilitatea lucrării pentru sectoare de proiectare, construcţie, şantiere, uzine şi învăţămînt superior.

*V. Marcu*

EGON CERNEA, *Maşini termice cu pistoane libere*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1960, 367 p., 152 fig.

Exemplarul de bază al acestui gen de maşini este motocompresorul cu pistoane libere.

Astăzi, maşinile termice cu pistoanele libere şi-au lărgit sfera de aplicaţii şi pentru pregătirea fluidului motor destinat turbinelor cu gaz, iar instalaţiunile de forţă respective fac obiectul unor studii şi proiecte de mare anvergură în toate ţările înaintate din punct de vedere ştiinţific şi industrial, în frunte cu U.R.S.S. Trebuie menţionat că maşinile termice cu pistoanele libere nu produc direct energie mecanică sau electrică ci numai prin intermediul turbinelor de gaz.

Literatura romînească nu este prea bogată în material documentar în acest domeniu. De aceea lucrarea pe care o recenzăm vine să umple un gol în această privinţă.

Concepută pe o linie între nivelul mediu şi înalt (avînd însă caracter mai pronunţat spre înalt), autorul grupează materialul în 4 părţi şi apoi fiecare parte în cîte 4 capitole şi căutînd să familiarizeze pe cititori cu domeniul maşinilor cu pistoane libere, parcurge într-o succesiune logică drumul de la fundamentarea teoretică la realizările practice.

*Partea I* se referă la teoria maşinilor termice cu pistoane libere şi cuprinde la început un scurt istoric al evoluţiei ideilor şi realizărilor, apoi arată avantajele şi dezavantajele acestor maşini şi face o clasificare pe baze constructive. După ce expune bazele generale de calcul în raport cu specificul funcţional, se trece la reglajul acestor maşini în funcţie de ansamblul general al instalaţiei de forţă. În ultimul capitol se tratează posibilităţile de perfecţionare a acestor maşini prin : supraalimentarea cilindrului compresor, postarderea sau transmiterea unei părţi din căldura gazelor asupra procesului de formarea aburilor, realizîndu-se în acest ultim caz un complex ca turbină cu gaz şi turbină cu abur.

*Partea a II-a.* Prezintă mai întîi calculul propriu-zis al maşinii termice cu pistoane libere, analizîndu-se detaliat ciclurile din cilindrul compresor şi cilindrul motor pe bază de diagrame

$p-V$. Se determină apoi caracteristicile energetice ale mașinilor termice cu pistoane libere, considerate ca generatoare de gaze de lucru. În final, tratează răcirea (pentru partea de compresor și pentru partea de motor), pornirea mașinii și ungerea.

*Partea a III-a.* Se ocupă mai întîi cu organele fixe (cilindru motor, cilindru compresor etc.) și examinează solicitarea termică a acestora; apoi tratează organele mobile ale mașinii, inclusiv supapele și în continuare alimentarea cu combustibil, dînd directive generale pentru calculul sistemelor de alimentare cu combustibil.

*Partea a IV-a.* Expune cele două tipuri de mașini cu acțiune simplă și contrapistoane *spre exterior* și *spre interior*, această clasificare legîndu-se de timpul cursei (spre exterior sau spre interior) cînd se realizează compresiunea aerului și refularea aerului de baleiaj. După ce se prezintă pe scurt și mașinile cu acțiuni duble cu mai multe contrapistoane și de asemenea cu un singur piston pentru motor și un singur piston pentru compresor, pistoanele fiind legate printr-o tijă, se arată pe larg aplicațiile acestui gen de mașini termice: la propulsia locomotivelor, navelor, autocamioanelor și în instalații energetice stabile (centrale termoelectrice, stații de compresoare, stații de pompare).

*Is. Niculescu*

G. GOERTZEL, N. TRALLI, *Some Mathematical Methods of Physics* (Cîteva metode matematice în fizică), Mc Graw-Hill Book Co., Inc., New York, Toronto, London, 1960, XIV + 300 p.

În diferite domenii ale fizicii teoretice și aplicate, cum sînt mecanica cuantică, acustica, teoria electromagnetică, fizica reactorilor etc., sînt necesare metode matematice de calcul. Fără a încerca să acopere toată varietatea de metode matematice în fizică, cartea lui G. Goertzel și N. Tralli dă suficiente rezultate în legătură cu studiul sistemelor liniare, menționîndu-se în special problemele de valori proprii, funcții proprii și funcții Green.

Lucrarea este împărțită în trei părți.

În partea I (6 capitole) se studiază sistemele cu un număr finit de grade de libertate, pornind de la diferite modele de ordin fizic. Aceste sisteme sînt reprezentate din punct de vedere matematic cu ajutorul unor matrici, studiile respective fiind bazate pe calcul matricial. După ce se formulează problema, se trece la determinarea soluției ei prin metoda diagonalizării matricilor. Se dau apoi noțiuni în legătură cu evaluarea funcțiilor de o matrice pentru o matrice oarecare și în legătură cu spații vectoriale și operatori liniari. Urmează apoi un studiu al structurilor periodice și se introduc notațiile lui Dirac.

Partea a II-a (7 capitole) se ocupă de sistemele cu un număr infinit de grade de libertate. După o introducere privind trecerea la sisteme continue și operatori pentru aceste sisteme, autorii studiază ecuațiile de tip hiperbolic corespunzătoare cazurilor mono-, bi- și tridimensionale. Se dau rezultate pentru diferite probleme concrete la limită, folosind sisteme de coordonate corespunzătoare. Urmează unele aplicații, privind în special probleme de radiație a căldurii.

Diferite metode de aproximație se dau în partea a III-a a lucrării (5 capitole). Cităm astfel metoda perturbării valorilor proprii, metodele variaționale, metodele iterative de calcul precum și diferite metode numerice, cum sînt ecuațiile cu diferențe. Aceste metode de calcul sînt aplicate în diferite cazuri particulare.

În anexe, autorii dau unele rezultate privind probleme de ordin matematic netratate în cuprinsul volumului, pentru a nu strica unitatea de prezentare. Găsim astfel studii sumare privind determinanţii, teoria funcţiilor de o variabilă complexă, transformările Fourier şi funcţiile cilindrice.

Cartea lui G. Goertzel şi N. Tralli este interesantă pentru cei care vor să se informeze rapid şi corect în cîteva domenii ale ecuaţiilor fizicii matematice.

*P. P. Teodorescu*

# CĂRȚI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACȚIE

A. V. Kapacisev, *Problemî dinamiki estestvennîh vodnîh potokov.* Ghidrometeoizdat, Leningrad, 1960, 390 p.

S. K. Cerkavskii, *Ghidrologhia dlia nabliudatelei.* Ghidrometeoizdat, Leningrad, 1950, 145 p.

V. I. Cebotarov, A. R. Skue, *Ghidrometriceskie sovrujenia.* Ghidrometeoizdat, Leningrad, 1954, 370 p.

A. A. Luciseva, *Prakticeskaia ghidrometria.* Ghidrometeoizdat, Leningrad, 1954, 336 p.

D. E. Anapolskaia, *Vetrovoi rejim vodohranilișci stepnogo raiona.* Ghidrometeoizdat, Leningrad, 1950, 62 p.

V. S. Sovetov, *Recinoe sudohodstvo i ghidrologhia.* Ghidrometeoizdat, Leningrad, 1950, 55 p.

G. I. Samov, D. I. Kocerin — *osnovopolojnik uceniia o recinom stoke.* Ghidrometeoizdat, Leningrad, 1950, 35 p.

A. K. Proskuriakov, V. M. Lohtin, N. S. Leliavskii, *Osnovateli uceniia o formirovanii rusla.* Ghidrometeoizdat, Leningrad, 63 p.

B. V. Poliakov, *Osvoenie malîh rek i izucenie ghidrologhiceskogo rejima*

**Trudî Moskovskogo Instituta Neftehniceskoi i gazovoi promîșlennosti**

— *Neftehnika, pererabotka nefti, i gaza.* Vîp. 28, 1960, 197 p.

— *Gheologhia neftegazonosnîh raionov SSSR.* Vîp. 27, 1960, 280 p.

— *Burenie i ekspluatația skvajin.* Vîp. 29, 1960, 145 p.

— *Promîslovîe i razvedocinîe gheofiziceskie issledovania.* Vîp. 31, 1960, 202 p.

— *Razvitie gazovoi promîșlennosti SSSR.*

*Materialî mejvuzovskoi naucinoi konferenții po voprosam gazovoi promîșlennosti.* Gostoptehizdat, Moskva, 1960, 450 p.

— Trudî Instituta Mașinovedenia, t. XX, nr. 78, nr. 80/1960.

— Trudî Tallinkogo Politehniceskogo Instituta, 172, 173/1960.

A. Kneschke, *Differentialgleichungen und Randwertprobleme.* Vol. II. Verlag Technik, Berlin 1960, 628 p.

H. B. Kepler, *Basic graphical kinematics.* McGraw Hill, London, 1960, 314 p.

— Proceedings of the IUTAM Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells. Delft, August, 1959.
North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1960, 495 p.

— Berichte der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, Nr. 130, 135, 141/1960.

— Annales de la Faculté de Science de Marseille, t. XXIX, 1959 350 p.

— Wissenschaftliche Abhandlungen der physikalisch-technischen Bundesanstalt, Berlin-Dahlem, Bd. 11, 1959. Teil 1, 2.

— Hydraulics Research, Hydraulics Research Stations, Wallingford, 1959, 169 p.

H. OPITZ, *Über Weggeber für automatisch gesteuerte Arbeitsmaschinen. Forschungsberichte.* Nordrhein-Westfalen, nr. 811/1960.

## Disertații primite de la Institutul Politehnic Aachen

G. OSTERMANN, *Neuere Erkenntnisse über die Ursachen des Verschleisses auf der Spanfläche von Hartmetall-Drehwerkzeugen*, 1960, 93 p.

K. H. KUPFERSCHMIDT, *Messung elektronischer Leitwerte bei cm-Wellen*, 1960, 94 p.

F. TÜBERGEN, *Untersuchung über Möglichkeiten zur Berücksichtigung unterschiedlicher Erzeugungsqualitäten bei der Produktivitätsmessung*, 1960, 101 p.

P. H. BRAMMERTZ, *Ursachen für Form- und Messfehler an feinbearbeiteten Werkstücken*, 1960, 105 p.

## Disertații primite de la Institutul Politehnic Braunschweig

K. H. HERTZER, *Über die Dauerfestigkeit und das Setzen von Tellerfedern*, 1959, 67 p.

W. SCHEIBE, *Herstellung und Betrieb von Doppelskelett-Katalysator-Elektroden* (DSK-Elektroden) *für Wasserstoff*, 1960, 103 p.

W. PIEPER, *Entwicklung eines Versuchsstandes zur Durchführung von Messungen an Vakuumgebläsen*, 1960, 143 p.

M. R. TAHER, *Schnittkräfte beim Einstechschleifen und ihr Einfluss auf den Schleifscheibenverschleiss und die Werkstückrauhtiefe*, 1960, 90 p.

A. KRUG, *Eine Farbfernsehanlage für die europäische 625-Zeilen-Norm in Analogie zum amerikanischen NTSC-System*, 1959, 115 p.

2557

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

R

2

ANUL XII

1961

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM * KÖZPONTI KÖNYVTÁR 1848

# STUDII ȘI CERCETĂRI DE

# MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

# COMITETUL DE REDACŢIE

*Redactor responsabil:*

ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri :

ACADEMICIAN N. PROFIRI ;

A. BELEŞ, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;

GR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;

R. BOGDAN, conferenţiar la Institutul de petrol, gaze şi geologie, Bucureşti ;

N. TIPEI, conferenţiar la Institutul politehnic, Bucureşti ;

M. ARCAN, şef secţie, Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor (INCERC), Bucureşti.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
APARE DE 6 ORI PE AN

*Redacţia*: INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ ,,TRAIAN VUIA''
**Str. Const. Mille 15, tel. 17.34.09**

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

# STUDII ȘI CERCETĂRI
# DE
# MECANICĂ APLICATĂ

2

ANUL XII

1961

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

## Revista

## STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

*publică :*

— Studii originale de *înalt nivel cu caracter fundamental de interes general științific și reflectare în practică.*

— Note (*lucrări mai scurte*) *cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.*

— Referate științifice și tehnice *în care se expune : stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observații și discuții asupra unor lucrări de mecanică aplicată.*

— Recenzii *asupra cărților și studiilor romîne sau străine.*

*Domeniile de specialitate ale revistei sînt :*

— *Aeromecanică* (*mecanica fluidelor, aerodinamică, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacție, ventilație, aeromotori*).

— *Hidromecanică* (*hidraulică, construcții hidrotehnice, irigație, turbine hidraulice și pompe, amenajări hidraulice*).

— *Construcții de mașini* (*cinematica și dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul mașinilor, automatizare, studiul suprafețelor, tehnologia mediilor solide continue*).

— *Mecanică generală* (*rezistența materialelor, elasticitate, plasticitate, vibrații și șocuri, stabilitate, analogii electrice și hidraulice*)

— *Statica și dinamica construcțiilor* (*metode pentru calculul static și dinamic al construcțiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode de executarea lucrărilor de construcții*).

— *Tehnica măsurătorilor* (*aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului și a izotopilor radioactivi în tehnică*).

*Revista urmărește stimularea activității științifice precum și difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toți specialiștii din țară și de la colaboratorii din străinătate.*

★

*Articolele vor fi redactate într-o formă concisă și clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părțile cunoscute ale problemei.*

*Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar și citeț cu cerneală. Figurile și graficele se vor desena în tuș pe hîrtie de calc. Se vor utiliza, figuri numai cînd este absolut necesar și în număr cît mai mic.*

*Literatura citată în text se va însera la sfîrșitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariție, iar pentru revistă se va indica și numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.*

*Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză și germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.*

*Aceleași norme sînt valabile și pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.*

*Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, București, str. C. Mille nr. 15, raionul Gh. Gheorghiu-Dej.*

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA”

# STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul XII, nr. 2 1961

## SUMAR

Pag.

**STUDII**

*ELASTICITATE – PLASTICITATE – REZISTENŢA MATERIALELOR*

M. MIŞICU şi FL. DINCĂ, Încovoierea dinamică a barelor cu proprietăţi vîscoelastice. I . . . . . . . . . . 239
M. IFRIM, Concepţii moderne privind determinarea forţelor seismice . . . . . . . 255
M. SOARE, O metodă generală de rezolvare a plăcilor dreptunghiulare . . . . . . 277
H. SANDI, Plăci rezemate pe un semispaţiu solid, solicitate dinamic . . . . . . . 293

*UNGERE – FRECARE – UZURĂ*

D. PAVELESCU, I. ILIUC şi SANDA BARBUL, Studiul unei metode radioactive pentru aprecierea calităţilor lubrifiante a uleiurilor aditivate, prin prisma uzurii suprafeţelor . . . . . . . . . . 311
N. G. POPINCEANU şi M. D. GAFIŢEANU, Contribuţii în problema legăturii dintre rugozitate, procedeu de prelucrare, dimensiune, clasa de precizie şi funcţiune în construcţia de maşini . . . . . . . . . . 323
V. N. CONSTANTINESCU, Criterii de similitudine în funcţionarea lagărelor lubrificate cu lichide sau gaze . . . . . . . . . . 343

*DINAMICA GAZELOR*

ŞT. ANDREI, Studiu critic al generatoarelor de gaze motocompresoare pentru antrenarea pneumatică a rotorului de elicopter . . . . . . . . . . 363
V. KMONICEK, Scurgerea subsonică în difuzoare conice . . . . . . . . . . 383
H. PASCAL, Curgerea tranzitorie a gazelor în conducte magistrale . . . . . . . . 391

*SCURGERI PRIN MEDII POROASE*

T. OROVEANU, Consideraţii asupra scurgerii lichidelor compresibile prin medii poroase neomogene . . . . . . . . . . 405
M. P. RANGA RAO, Curgerea radială nestaţionară şi nedarcyană a unui lichid printr-un mediu poros . . . . . . . . . . 413

Pag.

*METODE DE CALCUL*

A. RIPIANU, Contribuţie la calculul aproximativ al coeficienţilor seriei Fourier a unei funcţii periodice . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 423

*TEHNICA MĂSURĂTORILOR*

A. LISOWSKI, Măsurarea vibraţiilor pe modele de plăci curbe subţiri şi pe modele tridimensionale de sisteme de bare cu ajutorul unui aparat electronic . . . . 433

**DIN ISTORIA TEHNICII ROMÎNEŞTI**

G. ŞT. ANDONIE, Inginerul arhitect Alex. Costinescu, primul profesor de mecanică populară, predată la noi în limba romînă (1812—1872) . . . . . . . . . . . 441

**RECENZII** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 447

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ „ТРАЯН ВУЯ"

# ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том XII, № 2 1961

## СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

**СТАТЬИ**

*УПРУГОСТЬ-ПЛАСТИЧНОСТЬ-СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ*

М. МИШИКУ и Ф. ДИНКЭ, Динамический изгиб стержней с вязко-упругими свойствами. I. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 239
М. ИФРИМ, Современные представления в связи с определением сейсмических сил . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 255
М. СОАРЕ, Общий метод решения прямоугольных пластинок . . . . . . 277
Х. САНДИ, Пластинки, опертые на твердую полуплоскость, подверженные динамическим нагрузкам . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 293

*СМАЗКА-ТРЕНИЕ-ИЗНОС*

Д. ПАВЕЛЕСКУ, И. ИЛЮК и САНДА БАРБУЛ, Исследование радиоактивного метода для оценки смазочных свойств масел с присадками по износу поверхностей . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 311
Н. Г. ПОПИНЧАНУ и Н. Д. ГАФИЦАНУ, Связь между шероховатостью, способом обработки, размером, классом точности и назначением в машиностроении . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 323
В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, Критерии подобия для работы подшипников при жидкостной или газовой смазке . . . . . . . . . . . . . 343

*ГАЗОВАЯ ДИНАМИКА*

Ш. АНДРЕЙ, Критическое исследование мотокомпрессорных газовых генераторов для пневматического привода несущего винта вертолета . . 363
В. КМОНИЧЕК, Дозвуковое течение в конических диффузорах . . . . . . . 383
Х. ПАСКАЛ, Переходное течение газов в магистралях . . . . . . . . . . . 391

*ТЕЧЕНИЯ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ*

Т. ОРОВЯНУ, Соображения о течении сжимаемых жидкостей в неоднородных пористых средах . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 405
РАНГА РАО, Нестационарное радиальное течение жидкости, неподчиняющееся закону Дарси, в пористой среде . . . . . . . . . . . . . . . . . 413

Стр.

*МЕТОДЫ РАСЧЕТА*

А. РИПЯНУ, К приближенному расчету коэффициентов ряда Фурье периодической функции . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 423

*ТЕХНИКА ИЗМЕРЕНИЙ*

А. ЛИСОВСКИЙ, Измерение колебаний на моделях тонких оболочек и на трехмерных моделях стержневых систем при помощи электронного аппарата 433

**ИЗ ИСТОРИИ РУМЫНСКОЙ ТЕХНИКИ**

Г. Ш. АНДОНИЕ, Инженер-архитектор Александру Костинеску — первый профессор, преподававший элементарную механику на румынском языке (1812—1872 гг) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 441

**РЕЦЕНЗИИ** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 447

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

**Журнал**

## ,,*ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ*"

*публикует:*

— Оригинальные исследования *высокого уровня, представляющие общий научный интерес, связанный с практикой.*

— Заметки (*краткие работы*) *оригинального характера, представляющие уточнение некоторого вопроса.*

— Научные и технические рефераты, *в которых излагаются: современное состояние определенной задачи с выявлением нового подхода к ней, замечания и обсуждения некоторых работ по прикладной механике.*

— Рецензии *на румынские или зарубежные книги и исследования. В журнале публикуются работы по следующим специальностям:*

— *Аэромеханика* (*механика жидкостей и газов, аэродинамика, газодинамика, механика самолета, аэроупругость, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, термоаэродинамика реактивных двигателей, вентиляция, ветродвигатели*).

— *Гидромеханика* (*гидровлика, гидротехнические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства*).

— *Машиностроение* (*кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей, механика сплошных твердых сред*).

— *Общая механика* (*сопротивление материалов, упругость, пластичность, вибрация и удары, устойчивость, электрические и гидравлические аналогии*).

— *Статика и динамика сооружений* (*методы статического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, механика грунтов, устойчивость грунтов, методы производства строительных работ*).

— *Техника измерений* (*электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в технике*).

*Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех отечественных специалистов и зарубежных сотрудников.*

★

*Статьи болжны быть написаны в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений* (*относящихся к уже известным частям проблемы*).

*Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала, формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует делать китайской тушью на кальке. Присылать русунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.*

*Литература, цитированная в тексте должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указать инициалы и фамилию автора, заглавие работы, том, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов — и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.*

*Кроме текста, для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском языке или же на русском, французском, английском или немецком языках. Резюме должно составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к работам зарубежных сотрудников, редактированным на русском, английском, французском или немецком языках.*

*Рукописи препровождаются по адресу: Институт прикладной механики. Бухарест, ул. Константин Милле, № 15, район Г. Георгиу-Деж.*

## Le périodique

### *« STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ »*
### *(ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE)*

*publie :*

— *des* études originales *à caractère hautement scientifique, des recherches fondamentales d'intérêt général, orientées vers l'activité pratique* ;

— *des* notes (*communications brèves*) *à caractère général, ou constituant une mise au point d'une certaine question* ;

— *des* exposés scientifiques et techniques *où l'on expose* : *l'état actuel d'un certain problème, en soulignant son aspect nouveau ; des remarques et discussions concernant certains travaux de mécanique appliquée.*

— *des* notes bibliographiques *au sujet des livres et des études roumains et étrangers.*

*Les domaines de spécialité de la revue sont les suivants* :

— *Aéromécanique* (*mécanique des fluides, aérodynamique, dynamique des gaz, mécanique de l'avion, aéroélasticité, aérodynamique des moteurs à combustion interne, thermo-aérodynamique de l'avion, aéroélasticité, aérodynamique des moteurs à combustion interne, thermo-aérodynamique des moteurs à réaction, ventilation, aéromoteurs)* ;

— *hydromécanique* (*hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines hydrauliques et pompes*) ;

— *constructions mécaniques* (*cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des machines, automation, étude des surfaces, technologie des milieux solides continus*) ;

— *mécanique générale* (*résistance des matériaux, élasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques*) ;

— *statique et dynamique des constructions* (*méthodes de calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilité des terrains, méthodes d'exécution des travaux de construction*) ;

— *technique des mesures* (*appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation des ultra-sons et des isotopes radioactifs en technique*).

*La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires en publiant, dans ce but, les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.*

*Les articles seront rédigés dans un style concis et clair, étant évitées les introductions trop longues concernant les données connues des problèmes.*

★

*Les manuscrits seront envoyés en trois exemplaires, dactylographiés, aux formules écrites de manière lisible, à l'encre. Les figures, ainsi que les diagrammes, seront tracés à l'encre de Chine sur du papier calque. On utilisera le nombre de figures strictement indispensable.*

*Les références bibliographiques seront mentionnées à la fin de l'article. On y indiquera le nom de l'auteur, le titre de l'ouvrage, le tome, la page, le lieu de la parution et, pour les périodiques on ajoutera le numéro auquel on se réfère. On ne fera pas mention des travaux non publiés.*

*Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé en roumain ou, éventuellement, en russe, français, anglais ou allemand* (*environ une page pour 20 pages dactylographiées de texte*).

*Les mêmes normes sont valables pour les collaborateurs étrangers, qui peuvent rédiger leurs travaux en russe, anglais, français ou allemand.*

*Les manuscrits seront envoyés à l'adresse suivante : Institut de Mécanique Appliquée « Traian Vuia », 15, str. Constantin Mille, Bucarest, Roumanie.*

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE «TRAIAN VUIA»

# ÉTUDES ET RECHERCHES
# DE
# MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome XII, nº 2 1961

## SOMMAIRE

Page

**ÉTUDES**

*ÉLASTICITÉ – PLASTICITÉ – RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX*

M. MIŞICU et FL. DINCĂ, Flexion dynamique des barres à propriétés visco-élastiques I 239
M. IFRIM, Modern conceptions on the determination of seismic forces . . . . . . 255
M. SOARE, Une méthode générale pour la solution des dalles rectangulaires . . . . 277
H. SANDI, Plaques dynamiquement sollicitées, appuyées sur un demi-espace solide 293

*LUBRIFICATION – FROTTEMENT – USURE*

D. PAVELESCU, I. ILIUC and SANDA BARBUL, Study on a radioactive method for estimating the lubricating qualities of compound oils by means of friction parts . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 311
N. G. POPINCEANU und M. D. GAFIŢEANU, Zum Problem des Zusammenhanges zwischen Rauheit, Bearbeitungsweise, Dimension, Qualitätsklasse und Funktion im Maschinenbau . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 323
V. N. CONSTANTINESCU, Similarity conditions for the liquid or gas bearings . . 343

*DYNAMIQUE DES GAZ*

ŞT. ANDREI, Critical study on gas generators with reciprocating engine driven compressors for pressure jet helicopter rotor propulsion . . . . . . . . . . . . 363
V. KMONIČEK, Unterschallströmung in Kegeldiffusoren . . . . . . . . . . . . . . 383
H. PASCAL, Transient flow of gases through main pipelines . . . . . . . . . . . 391

*ÉCOULEMENTS À TRAVERS DES MILIEUX POREUX*

T. OROVEANU, Considérations sur l'écoulement des liquides compressibles dans les milieux poreux non homogènes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 405
M. P. RANGA RAO, Non-Darcian unsteady radial flow of compressible liquids through a porous medium . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 413

Page

*MÉTHODES DE CALCUL*

A. RIPIANU, Contribution au calcul approximatif des coefficients de la série de Fourier d'une fonction périodique . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 423

*TECHNIQUE DES MESURES*

A. LISOWSKI, Measurement of the vibrations of shell models and three-dimensional models of bar systems by means of an electronic apparatus . . . . . . . . 433

**DE L'HISTOIRE DE LA TECHNIQUE ROUMAINE**

G. ŞT. ANDONIE, L'ingénieur-architecte Alexandru Costinescu, le premier professeur ayant enseigné la mécanique en roumain (1812–1872) . . . . . . . . . . . 441

**REVUE BIBLIOGRAPHIQUE** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 447

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

# STUDII

## ELASTICITATE–PLASTICITATE–REZISTENȚA MATERIALELOR

# ÎNCOVOIEREA DINAMICĂ A BARELOR CU PROPRIETĂȚI VÎSCOELASTICE. I

DE

M. MIȘICU și FL. DINCĂ

Teoria de încovoiere a barelor vîscoelastice prezintă un interes deosebit din punct de vedere tehnic în cazul existenței unor solicitări dinamice staționare sau cu caracter tranzitoriu în domeniul critic de stabilitate. Acolo unde teoria elasticității conduce la contradicții flagrante cu realitatea, în nepotrivirea între mărimea deplasării și tensiunilor observate și calculate sau între determinarea calitativă a mișcării și cea constatată, teoria vîscoelastică de încovoiere permite explicarea a o serie de fenomene calitativ distincte de cele cunoscute în elasticitate și totodată o determinare mai exactă a mărimilor care intervin în procesele dinamice.

Practic aceasta conduce la posibilitatea unei dimensionări justificate teoretic și totodată mai economice decît cele care se bazează pe normative cu caracter empiric sau pe baza unor calcule la nivelul rezistenței materialelor.

Drept scheme fizice ale proprietăților materialului vîscoelastic vom considera o serie de scheme uzuale în teoria vîscoelasticității, inițial considerate de L. Boltzmann și care ulterior au fost precizate sub denumirea de modelele lui Voigt și Maxwell.

Aceste modele combinate în cadrul unui model cu 4 parametri dau o imagine mai completă a comportării materialelor înlăturînd parțial contradicțiile care apar prin considerarea fie a modelului Voigt fie a modelului Maxwell. O schemă completă din punctul de vedere al vîscoelasticității liniare se obține considerînd un spectru continuu al fenomenelor de relaxare, conform schemelor utilizate de H. Leaderman [16], [17], T. Alfrey [1], [2], B. Goss [10], [11]. Pentru informare în această privință trimitem la lucrările citate în bibliografie ale lui A. Kolski [13], [14], [15], R. M. Davies [6].

În domeniul teoriei de propagare a undelor unidimensionale în bare după un model maxwellian citām lucrarea lui E. H. Lee şi I. Kanter [18] utilizînd transformata Laplace şi a lui L.E.Malvern [20] utilizînd metoda caracteristicilor.

În cazul unui model voigtian citām lucrările lui I. N. Zverev [24], S. K. Gosh, R. A. Eubancs [7], J. A. Morrisson [21].

Este de menţionat că la aceste modele separat considerate apar anumite inadvertenţe în raport cu datele experimentale. Astfel la modul voigtian rezultă că vitezele de propagare în lungul barelor cresc indefinit cu frecvenţa, iar aceasta excesiv de mult în raport cu distanţele — ceea ce nu este concordant cu realitatea şi conduce la necesitatea considerării unui model cu 3 parametri şi chiar cu 4 parametri, ca în cazul lucrărilor lui R. D. Glauz şi E. H. Lee [8], format dintr-un model maxwellian şi un model voigtian în serie sau din două modele maxwelliene în paralel.

Într-o lucrare mai nouă E. H. Lee şi J. A. Morrisson [19] compară rezultatele obţinute pe modele diferite. Ca o concluzie a acestor studii rezultă că materialele reale nu pot fi exact reprezentate prin modele izolate Voigt sau Maxwell. Dimpotrivă modelele cu 3 parametri descriu mai precis scăderea frecvenţei cu distanţa iar cele cu 4 parametri dau o mai exactă evaluare a însuşi ordinului de mărime al acestora.

Pentru diferite modele cu caracter mai general au apărut ulterior studii utilizînd în general transformata Laplace pentru cazul undelor unidimensionale (bare infinite sau semiinfinite) pe scheme de tip Boltzmann (vezi de ex. A. Charles [5], A. I. Gubanov [12], R. Sips [92], D. S. Berry [3], S. C. Unter [3]).

În toate situaţiile este de remarcat că pînă în actuala perioadă experienţele au fost făcute într-un număr restrîns de cazuri (A. Kolski [2]).

În domeniul încovoierii barelor, menţionăm lucrările lui E. S. Sorokin [23] în care se face uz de o teorie compatibilă cu un model de tip Voigt. În lucrarea [23] Sorokin stabileşte o serie de date experimentale în această problemă.

Pentru a răspunde unor necesităţi de ordin tehnic privind o serie de elemente de structuri supuse la sarcini transversale dinamice intense şi active s-a elaborat o metodă de evaluare a solicitărilor şi mişcărilor barelor drepte ţinînd seama de comportarea reală a materialului care este neelastică şi anume limitată în domeniul deformaţiilor mici elastovîscoase. În acest mod se tine seama mai riguros de disipaţiile de energie care în prezent sînt considerate în tehnică doar global, pe întreaga structură de rezistenţă [1]. Nu s-au considerat fenomenele de natură plastică deoarece acestea prin ipoteză nu sînt admisibile în structurile considerate.

Teoria generală de mişcare a fost făcută pentru un model de oscilaţie liniar general de tip Alfrey, rezultatele putînd fi particularizate direct.

---

[1] Lucrarea a fost elaborată în legătură cu unele traversări de conducte proiectate şi executate în ţară.

Deoarece în cazul oscilațiilor de frecvență ridicată nu intervin fenomenele de fluaj și curgere, s-a considerat în aplicațiile privind oscilațiile de frecvență peste 5—10 Hz un model Maxwell. Rezultatele experimentale confirmă această ipoteză.

## 1. ECUAȚIA DIFERENȚIALĂ A OSCILAȚIILOR TRANSVERSALE ALE BARELOR DREPTE. CONDIȚII LA LIMITĂ ȘI INIȚIALE

Vom considera o bară dreaptă de lungime $L$ raportată la un sistem ortogonal de axe $O_{xyz}$ axa $Oz$ coincizînd cu axa nedeformată a barei iar axa $Ox$ în planul secției transversale orientată astfel încît sistemul de coordonate să fie un sistem drept (fig. 1). Ecuațiile de mișcare se pot deduce fie din teoria reologică a mediilor continui [1], fie direct. Fie $\sigma(z)$ tensiunea normală pe secțiunea transversală la distanța $z$ de axă. Vom admite următoarele ipoteze :

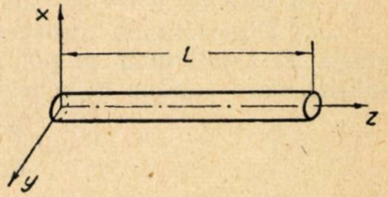


Fig. 1

*a*) Materialul se deformează conform unei scheme reologice generale

$$P\sigma = EQ\varepsilon, \tag{1.1}$$

$E$ — fiind un modul analog celui de elasticitate al materialului,
$\varepsilon$ — alungirea în lungul axei $Oz$, iar $P$ și $Q$ operatori diferențiali liniari inversabili astfel încît

$$\sigma = \mathcal{E}\varepsilon, \tag{1.2}$$

cu

$$\mathcal{E} = EP^{-1}\cdot Q, \tag{1.3}$$

$P^{-1}$ fiind inversul lui $P$.

*b*) Operatorii $P$ și $Q$ sînt pur diferențiali

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) &= \sum_0^r p_n \frac{\partial^n}{\partial t^n}, \\ Q\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) &= \sum_0^{r'} q_n \frac{\partial^n}{\partial t^n}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Pentru simplificarea formulărilor ulterioare facem convenția ca în cazul în care de exemplu $r' > r$ să se sumeze și în prima expresie pînă la $r'$ cu convenția ca

$$p_{r+1} = \ldots = p' = 0$$

și o convenție asemănătoare în cazul în care $r > r'$.

*c*) $p_n$ și $q_n$ sînt coeficienți constanți.

---

[1] În altă lucrare urmează să apară teoria generală reologică a barelor.

În aceste condiţii relaţiile reologice pot fi inversate în raport cu $\sigma$ sau $\varepsilon$

$$\sigma = \int_0^t K(t-\tau)\,\varepsilon(\tau)\,d\tau + D(\varepsilon) + F(\varepsilon_0\dot{\varepsilon}_0 \ldots),$$

$$\varepsilon = \int_0^t K'(t-\tau)\,\sigma(\tau)\,d\tau + D'(\sigma) + F'(\sigma_0,\ \dot{\sigma}_0 \ldots),$$

$K$ şi $K'$ fiind nuclee care verifică principiul ciclului închis al lui Volterra iar $D$ şi $D'$ operatori diferenţiali, funcţiile $F$ şi $F'$ depinzînd de condiţiile iniţiale.

Demonstraţia acestor relaţii formează obiectul unei alte lucrări. În cele ce urmează nu vom utiliza decît forma pur diferenţială.

*d*) Dimensiunile transversale ale barei sînt reduse în raport cu lungimea $L$, astfel încît se pot accepta ipotezele curente în teoria barelor subţiri, care conduc la ecuaţia vibraţiilor transversale

$$\mathcal{E} I \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(z,\ t), \tag{1.5}$$

unde $I$ este momentul de inerţie al secţiunii transversale; $u$ deplasarea globală în sensul axei $Ox$; $m$ este masa unităţii de lungime; $f(z, t)$ este forţa exterioară raportată la unitatea de lungime. Demonstraţia acestei formule este identică cu cea din rezistenţa materialelor, cu adoptarea modulului de elasticitate operaţional definit de (1.3).

Din 1.5 şi 1.4 rezultă

$$EI \sum_{n=0}^{r} q_n \frac{\partial^{n+4} \cdot u}{\partial t^n \partial z^4} + m \sum_{n=0}^{r} p_n \frac{\partial^{n+2} \cdot u}{\partial t^{n+2}} = \sum_{n=0}^{r} p_n \frac{\partial^n f}{\partial t^n}. \tag{1.6}$$

Condiţiile la limită le presupunem liniare şi omogene

$$\begin{aligned} \sum_i \alpha_i u^{(i)}(0,\ t) &= \sum_i \beta_i u^{(i)}(0,\ t) = 0, \\ \sum_i \alpha_i' u^{(i)}(0,\ t) &= \sum_i \beta_i' u^{(i)}(0,\ t) = 0, \end{aligned} \tag{1.7}$$

prin simbolul $(i)$ s-a notat derivata de ordin $i$ în raport cu $z$ derivata de ordin 0 fiind funcţia însăşi. Semnificaţia acestor relaţii este : la capetele barei o anumită combinaţie liniară între săgeata barei, tangenta la fibra medie deformată, momentul încovoietor şi forţa tăietoare să fie nulă.

De exemplu, în cazul barei simplu rezemată avem

$$\alpha_0 = \beta_0 = \alpha_2' = \beta_2' = 1, \tag{1.8}$$

ceilalţi coeficienţi fiind nuli.

Condiţiile iniţiale sînt de forma

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial t^n}\right)_{t=0} = u_n(z) \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{1.9}$$

$u_n(z)$ fiind funcţii cunoscute.

În cazul unor oscilații de lungă durată, adică în cazul în care se studiază mișcarea barei atunci cînd efectul condițiilor inițiale nu mai este important, se pot lua condiții inițiale convenabile pentru o exprimare mai concisă a soluției. Mai menționăm că în cazul proceselor rapide, fenomene speciale iar relaxarea și curgerea sînt secundare.

## 2. REZOLVAREA PROBLEMEI CAUCHY PENTRU OSCILAȚIILE TRANSVERSALE ALE BARELOR

Din cele spuse anterior rezultă că rezolvarea completă a problemei constă în determinarea soluției ecuației diferențiale (1.6) în condițiile la limită (1.7) și condițiile inițiale (1.8). Acestea din urmă (cu condițiile specificate în încheierea paragrafului precedent) pot fi alese convenabil.

Pentru rezolvare vom considera soluția de forma

$$u(z,\ t) = \sum_{l=0}^{\infty} Z_l(z)\, T_l(t), \tag{2.1}$$

$Z_l(z)$ și $T_l(t)$ fiind funcții care trebuie determinate.

Vom considera acele solicitări exterioare care pot fi exprimate prin serii de același tip, adică

$$f(z,\ t) = \sum_{l=0}^{\infty} Z_l(z)\, f_l(t), \tag{2.2}$$

$Z_l(z)$ fiind aceleași din (2.1) iar $f_l(t)$ determinate îndată ce sînt cunoscute funcțiile $Z_l(z)$ [1])

Introducînd (2.1) și (2.2) în (1.6) se obține următoarea relație :

$$EI\left(\sum_0^r q_n T_l^{(n)}\right) Z_l^{\mathrm{IV}}(z) + m\left(\sum_0^r p_n T_l^{(n+2)}\right) Z_l(z) = \left(\sum p_n f_l^{(n)}(t)\right) Z_l(z), \tag{2.3}$$

unde s-a notat cu

$$\begin{aligned} T_l^{(n)}(t) &= \frac{\partial^n T_l(t)}{\partial t^n}, \\ Z_l^{\mathrm{IV}}(z) &= \frac{\partial^4 Z_l(z)}{\partial z^4}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Prin separarea variabilelor în (2.3) se obține

$$Z_l^{\mathrm{IV}} - \lambda_l^4 Z_l = 0, \tag{2.5}$$

$$EI\lambda_l^4 \sum_0^r q_n T_l^{(n)} + m \sum_0^r p_n T_l^{(n+2)} = \sum_0^r p_n f_l^{(n)}(t).$$

---

[1]) Se demonstrează că funcțiile $Z_l(z)$ sînt ortogonale. În cazul în care sînt normate avem $f_l(z) = \int_0^L f(z,\ t)\, Z_l(z)\, dz$. În cazul în care nu sînt normate ele se normează apoi se aplică formula precedentă.

Prima ecuaţie (2.5) împreună cu condiţiile la limită (1.7) furnizează funcţiile proprii $Z_l(z)$ şi valorile proprii $\lambda_l$ în modul următor :

Soluţia generală a primei ecauţii (2.5) (renunţăm momentan pentru simplificarea scrisului la indici)

$$Z(z) = C_1 A_{\lambda x} + C_2 B_{\lambda x} + C_3 C_{\lambda x} + C_4 D_{\lambda x} \tag{2.6}$$

unde $C_i (i = 1, 2, 3, 4)$ sînt numerele constante ce urmează a fi determinate iar funcţiile $A_{\lambda x}$, $B_{\lambda x}$, $C_{\lambda x}$, $D_{\lambda x}$ sînt

$$\begin{aligned} A_{\lambda x} &= \frac{1}{2}(\mathrm{ch}\, \lambda x + \cos \lambda x), \\ B_{\lambda x} &= \frac{1}{2}(\mathrm{sh}\, \lambda x + \sin \lambda x), \\ C_{\lambda x} &= \frac{1}{2}(\mathrm{ch}\, \lambda x - \cos \lambda x), \\ D_{\lambda x} &= \frac{1}{2}(\mathrm{sh}\, \lambda x - \sin \lambda x). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Introducînd expresia lui $Z(z)$ în (1.7) se obţine un sistem omogen de patru ecuaţii cu patru necunoscute $C_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Pentru ca sistemul să admită soluţii nebanale trebuie ca determinantul său (care este funcţie de $\lambda$) să fie nul. Se ajunge în modul acesta la o ecuaţie transcendentă în $\lambda$ care furnizează o infinitate de valori $\lambda_1$, $\lambda_2 \ldots$ pentru care sistemul iniţial admite soluţii nebanale. Fie $\lambda_l$ unul din termenii şirului precedent. Introducîndu-l în sistemul de ecuaţii iniţial obţinem valorile $C_{il}$ cu aproximaţia unui factor şi prin urmare vom obţine o familie de funcţii $Z_l(z)$. Se poate verifica că aceste funcţii sînt ortogonale¹) adică

$$\int_0^L Z_m(z)\, Z_n(z)\, dz = 0. \tag{2.8}$$

Ele se pot totdeuna norma. În cele ce urmează le vom presupune totdeauna ortogonale şi normate adică vom presupune îndeplinită relaţia (2.8) şi

$$\int_0^L Z_m^2(z)\, dz = 1. \tag{2.9}$$

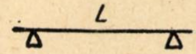
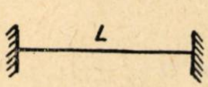
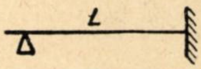
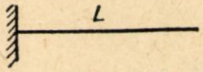
O altă remarcă este următoarea : ecuaţiile care determină funcţiile proprii şi valorile proprii sînt independente de modelul reologic considerat. Deci ele vor fi aceleaşi pentru orice model reologic, coincizînd cu cele cunoscute din elasticitate. În tabelă, se dau valorile proprii şi funcţiile proprii pentru

---

¹) Tolstov, *Serii Fourier*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1955.

cazuri mai des întîlnite. Pentru alte cazuri se vor consulta lucrările cunoscute asupra vibrațiilor elastice ale barelor

*Tabelă*

| | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_n$ | $Z_n(z)$ |
|---|---|---|---|---|
|  | $\frac{\pi}{L}$ | $\frac{2\pi}{L}$ | $\frac{n\pi}{L}$ | $C \sin \frac{n\pi}{L} Z$ |
|  | $\frac{4{,}73}{L}$ | $\frac{7{,}85}{L}$ | $\frac{2n+1}{L} \frac{\pi}{L}$ | $C\left[\frac{D_{\lambda_n} L}{C_{\lambda_n} L} C_{\lambda_n} z - D_{\lambda_n} z\right]$ |
|  | $\frac{3{,}9266}{L}$ | $\frac{7{,}0685}{L}$ | $\frac{4n+1}{4} \frac{\pi}{L}$ | – „ – |
|  | – „ – | – „ – | – „ – | $C\left[\frac{B_{\lambda_n} L}{D_{\lambda_n} L} D_{\lambda_n} z - B_{\lambda_n} z\right]$ |

Cea de-a doua ecuație (2.5) se scrie (renunțînd pentru motivele specificate la scrierea cu indici)

$$\sum_{0}^{r} (\omega^2 q_{n+2} + p_n) T^{(n+2)} + \omega^2 (q_0 T + q_1 T') = F, \tag{2.10}$$

cu notațiile

$$\omega^2 = \frac{EI}{m} \lambda^4 ; \; F(t) = \frac{1}{m} \sum_{0}^{r} p_n f^{(n)}(t). \tag{2.11}$$

În conformitate cu condițiile inițiale (1.9) va trebui să avem

$$\sum_{s=0}^{\infty} Z_s(z) T_s^{(n)}(0) = u_n(z) \quad n=0, 1, 2 \ldots \tag{2.12}$$

Presupunînd că $u_n(z)$ este dezvoltabil în serie de funcții proprii

$$u_n(z) = \sum_{0}^{\infty} Z_s(z) T_{0s}^{(n)}, \tag{2.13}$$

cu

$$T_{0s}^{(n)} = \int_0^L Z_s(z) u_n(z) \, dz \tag{2.14}$$

rezultă că funcțiile $T_s(t)$ definite de ecuația diferențială (2.8) vor satisface următoarele condiţii iniţiale :

$$T_s^{(n)}(0) = T_{0s}^{(n)} . \tag{2.15}$$

Pentru rezolvarea ecuaţiei diferenţiale (2.10) în condiţiile iniţiale (2.13) utilizăm transformata Laplace[1])

$$\begin{aligned} \overline{T}(p) &= \int_0^\infty T(t)\, e^{-pt} \cdot dt, \\ \overline{f}(p) &= \int_0^\infty F(t)\, e^{-pt} \cdot dt. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Notînd

$$\pi_0 = \omega^2 q_0 \quad \pi_1 = \omega^2 q_1 \quad \pi_2 = \omega^2 q_2 + p_0 \dots \pi_n = \omega^2 q_n + q_{n-2}, \tag{2.17}$$

ecuaţia (2.8) se scrie

$$\sum_0^n \pi_s\, T(t)\, T^{(s)}(t) = F(t) ; \tag{2.18}$$

iar prin aplicarea transformatei Laplace

$$\overline{T} = \frac{\overline{f(p)}}{\pi(p)} + \frac{\pi_n T_0^{(n-1)} + T_0^{(n-2)}(\pi_n p + \pi_{n-1}) + T_0^{(n-3)}(\pi_n p^2 + \pi_{n-1} p + \pi_{n-2}) +}{\pi(p)}$$

$$\frac{+ \dots + T_0^{(0)}(\pi_n p^{n-1} + \pi_{n-1} p^{n-2} + \dots + \pi_1)}{\pi(p)}, \tag{2.19}$$

unde

$$\pi(p) = \sum_0^n \pi_s p^s . \tag{2.20}$$

Pentru a trece la funcţia originală este foarte comod să se utilizeze funcţia lui Green specială corespunzătoare acestei probleme. Aceasta este definită de ecuaţia diferenţială

$$\pi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) Y = 0 \tag{2.21}$$

şi condiţiile iniţiale

$$Y(0) = Y'(0) \dots = Y^{(n-2)}(0) = 0 \quad Y^{(n-1)}(0) = 1. \tag{2.22}$$

Aplicînd transformata Laplace ecuaţia (2.11) se deduce (în condiţiile iniţiale 2.12)

$$\overline{Y}(p) = \frac{1}{\pi(p)}, \tag{2.23}$$

---

[1]) G. Doetsch, *Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*. Birkhäuserverlag, Basel, 1958, 78.

sau aplicînd integrala Broomwich

$$Y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pt}}{\pi(p)}\, dp. \tag{2.24}$$

Notăm cu $p_j$ rădăcinile (pe care le presupunem simple) ecuației $\pi(p) = 0$ Atunci conform unei teoreme cunoscute[1])

$$Y(t) = \sum_j \frac{e^{p_j t}}{\pi'(p_j)}, \tag{2.25}$$

suma extinzîndu-se la toate zerourile ecuației $\pi(p) = 0$. Prin $\pi'(p_j)$ s-a notat prima derivată în raport cu $p$ a polinomului $\pi(p)$ luată în punctul $p = p_j$.

Ținînd seama de condițiile inițiale și de o teoremă cunoscută[2]) avem

$$Y(t) = L^{-1} \frac{1}{\pi(p)};\ Y'(t) = L^{-1} \frac{p}{\pi(p)} \dots;\ Y^{(n-1)}(t) = L^{-1} \frac{p^{n-1}}{\pi(p)}. \tag{2.26}$$

Dacă se ține seama de (2.26) în (2.19) se obține

$$\begin{aligned} T(t) = {} & L^{-1} \frac{\overline{f(p)}}{\pi(p)} + T_0^{(n-1)} \pi_n Y(t) + T_0^{(n-2)} [\pi_n Y'(t) + \pi_{n-1} Y(t)] + \\ & + T_0^{(n-3)} [\pi_n Y''(t) + \pi_{n-1} Y'(t) + \pi_{n-2} Y(t)] + \dots + \\ & + T_0^{(0)} [\pi_n Y^{(n-1)}(t) + \pi_{n-1} Y^{n-2}(t) + \dots \pi_1 Y(t)] = \\ & = T_1(t) + T_2(t), \end{aligned} \tag{2.27}$$

unde

$$\begin{aligned} & T_1(t) = L^{-1} \frac{\overline{f(p)}}{\pi(p)}, \\ & T_2(t) = T_0^{(n-1)} [\pi_n Y'(t) + \pi_{n-1} Y(t)] + \dots + \\ & + T_0^{(0)} [\pi_n Y^{(n-1)}(t) + \pi_{n-1} Y^{(n-2)}(t) + \dots + \pi_1 Y(t)], \end{aligned} \tag{2.28}$$

$T_1(t)$ reprezintă soluția ecuației diferențiale pentru condiții inițiale omogene iar $T_2$ pentru condiții inițiale date.

$T_2$ este complet determinată de condițiile inițiale iar $T_1$ de funcția perturbatoare.

Mai remarcăm că $T_2$ este obținută în planul fizic iar $T_1$ este determinată de produsul de convoluție

$$T_1(t) = \int_0^t Y(t-\alpha) F(\alpha)\, d\alpha. \tag{2.29}$$

---

[1]) G. Doetsch, *op. cit.*, p. 79.

[2]) G. Doetsch, *op. cit.*, p. 52.

*Exemple*

*a*) Cazul unei forțe perturbatoare periodice

$$f(z, t) = He^{i\nu t} = e^{i\nu t} \sum_{n=0}^{\infty} H_n Z_n(z), \tag{2.30}$$

cu

$$H_n = \int_0^L Z_n(z)\, dz, \tag{2.31}$$

$H$ — fiind amplitudinea forței perturbatoare iar $\nu$ — frecvența ei.

Cea de-a doua formulă (2.11) dă

$$F_l = \frac{H_l e^{i\nu t}}{m} \sum_{n=0}^{r} p_n (i\nu)^n, \tag{2.32}$$

introducînd în (2.29) se obține

$$T_{1l} = \frac{H_l}{m} \sum_{n=0}^{r} \frac{P_n (i\nu)^n e^{p_j t}}{\pi'(p_j)} I_j \tag{2.33}$$

cu

$$I_j = \int_0^t e^{(i\nu - p_j)\alpha} \cdot d\alpha = \frac{e^{(i\nu - p_j)\alpha} - 1}{i\nu - p_j}. \tag{2.34}$$

*b*) În cazul unei forțe perturbatoare dată de legea

$$f(z, t) = He^{i\left(\varepsilon \frac{t^2}{2} + \Theta\right)}, \tag{2.35}$$

care conduce ca în cazul precedent la

$$F_l = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{r} H_l p_n \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{i\left(\varepsilon \frac{t^2}{2} + \Theta\right)}, \tag{2.36}$$

și cu ajutorul formulei (2.29)

$$T_{1l} = \frac{1}{m} \sum_{j} \sum_{n=0}^{r} \frac{P_n H_l e^{p_j t}}{\pi'(p_j)} \int_0^t e^{-p_j \alpha} \left[ \frac{\partial^n e^{i\left(\varepsilon \frac{t^2}{2} + \Theta\right)}}{\partial t^n} \right]_{t-\alpha} d\alpha. \tag{2.37}$$

## 3. OSCILAȚIILE TRANSVERSALE ALE BARELOR CU SUSPENSII ELASTICE

În cazul unei bare cu suspensii elastice, în punctele $z_j$ ale barei (punctele de prindere ale suspensiilor elastice) vor apărea forțe perturbatoare suplimentare proporționale cu deplasările în punctele $z = z_j$

$$f_j(z, t) = -k_j u(z, t)\, \Delta(z - z_j), \tag{3.1}$$

unde $\Delta(z-z_j)$ este funcția lui Dyrac definită în modul următor :

$$\begin{gathered}\Delta(z-z_j)=0 \quad \text{pt. } z=z_j \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(z-z_j)\,dz=1,\end{gathered}\tag{3.2}$$

iar $k_j$ este constanta elastică a suspensiei corespunzătoare punctului $z=z_j$.

În acest caz, funcția perturbatoare este

$$f(z,t)=-\sum_j k_j u(z,t)\,\Delta(z-z_j)+g(z,t),\tag{3.3}$$

$g(z,t)$ fiind perturbarea exterioară.

Introducînd (3.3) în ecuația (1.6) se obține

$$\begin{aligned}EI\sum_{n=0}^{r}q_n\frac{\partial^{n+4}u}{\partial t^n\partial z^4}+m\sum_{n=0}^{r}p_n\frac{\partial^{n+2}u}{\partial t^{n+2}}+\sum_j\sum_{n=0}^{r}k_jp_n\frac{\partial^n u}{\partial t^n}\Delta(z-z_j)=\\ =\sum_{n=0}^{r}p_n\frac{\partial^n g}{\partial t^n},\end{aligned}\tag{3.4}$$

la care se adaugă condițiile la limită de forma (1.7) și condițiile inițiale de forma (1.9).

Soluția problemei se poate obține fie cu ajutorul funcțiilor proprii pe linia celor expuse anterior, fie cu ajutorul transformatei Laplace.

a. *Soluția generală cu ajutorul transformatei Laplace.* Pentru a obține soluția ecuației (3.4) cu ajutorul transformatei Laplace, înmulțim ambii membrii cu $e^{-pt}$ și integrăm de la 0 la $\infty$. Ținînd seama de formulele cunoscute

$$\int_0^\infty\frac{\partial^n u}{\partial t^n}e^{-pt}\cdot dt=p^n\overline{u}-u_0(z)\,p^{n-1}-\ldots-u_{n-1}(z),\tag{3.5}$$

unde

$$\overline{u}=\int_0^\infty ue^{-pt}\cdot dt,\tag{3.6}$$

se obține

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\frac{\partial^{n+4}\cdot u}{\partial t^n\partial z^4}e^{-pt}\cdot dt=\frac{\partial^4}{\partial z^4}\int_0^\infty\frac{\partial^n u}{\partial t^n}e^{-pt}\cdot dt=\frac{\partial^4}{\partial z^4}[p^n\overline{u}-u_0p^{n-1}-\ldots-u_{n-1}],\\ &\int_0^\infty\frac{\partial^{n+2}u}{\partial t^n}e^{-pt}dt=p^{n+2}\overline{u}-u_0p^{n+1}-\ldots-u_{n+1},\\ &\int_0^\infty\frac{\partial^n g}{\partial t^n}e^{-pt}\cdot dt=p^n\overline{g}-g_0p^{n-1}-\ldots-g_{n-1},\end{aligned}\tag{3.7}$$

unde $u_0, u_1 \ldots u_{n-1}$ sînt din formulele (1.9) iar $g_0$, $g_1$ sînt valorile lui $g$ şi ale derivatelor sale pînă la ordinul $n - 1$ luate în $t = 0$.

Ţinînd seama de aceste formule ecuaţia (3.4) devine

$$\left\{EI \sum_{n=0}^{r} q_n p^n\right\} \frac{\partial^4 \overline{u}}{\partial z^4} + \left\{m \sum_{n=0}^{r} p_n p^{n+2} + \sum_{j} \sum_{n=0}^{r} p_n p^n k_j \Delta (z - z_j)\right\}_{\overline{u}} = \\ = \overline{F}(z, p), \tag{3.8}$$

cu notaţia

$$\overline{F}(z, p) = \sum_{0}^{r} p_n (p^n \cdot \overline{g} - g_0 p^{n+1} - \ldots - g_{n-1}) + \\ + EI \sum_{0}^{r} \frac{\partial^4}{\partial z^4} (u_0 p^{n-1} + \ldots + u_{n-1}) + m \sum_{0}^{r} p_n (u_0 p^{n+1} + \ldots + u_{n+1}) + \\ + \sum_{j} \sum_{0}^{r} p_n \Delta (z - z_j) (u_0 p^{n-1} + \ldots + u_{n-1}).$$

Însă după (1.4) avem

$$\begin{aligned} &\sum_{0}^{r} q_n p^n = Q(p), \\ &\sum_{0}^{r} p_n p^{n+2} = p^2 P(p), \\ &\sum_{0}^{r} p_n p^n = P(p), \end{aligned} \tag{3.9}$$

Ecuaţia (3.8) devine

$$EIQ(p) \frac{\partial^4 \overline{u}}{\partial z^4} + P(p) \left[mp^2 + \sum_{j} k_j \Delta (z - z_j)\right] \overline{u} = \overline{F}(z, p), \tag{3.9'}$$

la care se ataşează condiţiile la limită (1.7) (invariante prin transformata Laplace din cauza omogeneităţii).

Căutăm soluţia ecuaţiei (3.9) sub forma

$$\overline{U}(p, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(p) Z_n(z), \tag{3.10}$$

în ipoteza că $\overline{F}(z, s)$ poate fi desfăşurată în serie de funcţii $Z_n(z)$

$$\overline{F}(z, p) = \sum_{0}^{\infty} \alpha_n(p) Z_n(z), \tag{3.11}$$

cu

$$\alpha_n(p) = \int_0^L \overline{F}(z, p) Z_n(z)\, dz \tag{3.12}$$

funcțiile $Z_n(z)$ fiind cele definite anterior (par. 1). Introducînd (3.10) în (3.9) se obține

$$\begin{aligned} &EIQ(p)\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^4 P_n(p) Z_n(z) + mP^2 P(p)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(p) Z_n(z) + \\ &+ P(p)\sum_j \sum_{n=0}^{\infty} k_j \Delta(z - z_j) P_n(p) Z_n(z) = \sum_0^{\infty} \alpha_n(p) Z_n(z). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Dezvoltînd coeficientul lui $P(p)$ în serie de funcții $Z_n(z)$ se obține

$$\sum_j \sum_{l=0}^{\infty} k_j \Delta(z - z_j) p_l(p) Z_l(z) = \sum_n \left(\sum_l b_{ln} p_l(p)\right) Z_n(z), \tag{3.14}$$

cu notația

$$b_{ln} = \sum_j k_j Z_l(z_j) Z_n(z_j), \tag{3.15}$$

iar ecuația (3.13) devine după simplificare cu $Z_n(z)$

$$[EIQ(p)\lambda_n^4 + mp^2 P(p)] P_n(p) + P(p)\sum P_l(p) b_{ln} = \alpha_n(P). \tag{3.16}$$

În ipoteza că sistemul algebric infinit (2.44) face parte din clasa celor care conduc la soluții unice (lucru care va trebui să fie verificat în fiecare caz în parte) putem scrie soluția lui sub forma

$$P_n(p) = \frac{\Delta_n(p)}{\Delta(p)}, \tag{3.17}$$

unde $\Delta(p)$ este determinantul sistemului (3.16) iar $\Delta_n(p)$ este determinantul ce se obține din $\Delta(p)$ prin înlocuirea coloanei ce conține coeficienții necunoscutei $P_n(p)$ ca termeni liberi.

În acest mod soluția ecuației (3.9) se scrie

$$\bar{u}(z, p) = \sum_0^{\infty} \frac{\Delta_n(p)}{\Delta(p)} Z_n(z) \tag{3.18}$$

care în cazul în care este uniform convergentă, reprezintă soluția problemei deoarece satisface condițiile la limită propuse. În cazul în care nu este convergentă vom avea numai o echivalență în sensul precizat în teoria seriilor Fourier.

Trecerea în planul fizic se face pe baza teoremei reziduurilor

$$u(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(z)\left(\sum_j \frac{\Delta_n(p_j)}{\Delta'(p_i)} l^{p_j t}\right), \tag{3.19}$$

suma din paranteză extinzîndu-se la zerourile ecuației

$$\Delta(p) = 0. \tag{3.20}$$

Prin $\Delta'(p_j)$ s-a notat derivata determinantului $\Delta$ luată în punctul $p = p_j$. S-a presupus că zerourile sînt simple.

Validarea calculului precedent trebuie făcută pentru fiecare caz în parte prin verificarea convergentă seriilor obținute.

b. *Soluția prin funcții proprii în cazul forței perturbatoare periodice.* Dacă forța perturbatoare este de forma

$$g(z, t) = He^{i\nu t}, \tag{3.21}$$

$H$ fiind amplitudinea maximă a forței perturbatoare și $\nu$ frecvența, termenul perturbator devine

$$\sum_0^r p_n \frac{\partial^n g}{\partial t^n} = H \sum_0^r P_n (i\nu)^n \cdot e^{i\nu t}. \tag{3.22}$$

În acest caz, soluția pentru un regim permanent se obține ușor. Într-adevăr, luînd o soluție de forma

$$u = e^{i\nu t} \sum a_n Z_n(z), \tag{3.23}$$

funcțiile $Z_n(z)$ fiind cele definite anterior și introducînd (3.23) și (3.22) în (3.24) se obține

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \left[ EI\lambda_n^4 \sum_0^r q_l (i\nu)^l + m(i\nu)^2 \sum_{l=0}^r p_l (i\nu)^l \right] a_n + \\ + \sum_j \sum_{n=0}^r k_j p_n (i\nu)^n \left[ \sum_{s=0}^{\infty} a_s Z_s(z) \right] \Delta(z - z_j) = \\ = \sum_l H_l \left( \sum_{n=0}^r p_n (i\nu)^n \right) Z_l,\end{aligned} \tag{3.24}$$

cu notațiile

$$Q(i\nu) = \sum_0^r q_n (i\nu)^n; \; (i\nu)^2 \sum_0^r p_n (i\nu)^n = (i\nu)^2 p(i\nu) \tag{3.25}$$

și

$$\sum_0^{\infty} a_n Z_n \sum\nolimits_j k_j \Delta(z - z_j) = \sum_{n=0} Z_n \left( \sum_{s=0}^{\infty} a_s b_{sn} \right). \tag{3.26}$$

Se obține următorul sistem algebric infinit pentru determinarea lui $a_l$:

$$[EI\lambda_l^4 Q(i\nu) + m(i\nu)^2 P(i\nu)] a_l + P(i\nu) \sum a_l b_{sl} = P(i\nu) H_l, \tag{3.27}$$

unde

$$H_l = H \int_0^L Z_l(z)\, dz \tag{3.28}$$

În ipoteza că sistemul (3.27) admite soluție unică coeficienții $a_n$ introduşi în (3.23) determină soluția căutată anume soluția efectivă în cazul în care seria (3.23) este uniform convergentă sau echivalentă în sensul teoriei seriilor Fourier în cazul în care acest lucru nu se va întîmpla.

*Primită la redacție la 21 decembrie 1960*

## ДИНАМИЧЕСКИЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ С ВЯЗКО-УПРУГИМИ СВОЙСТВАМИ. I

### РЕЗЮМЕ

В работе устанавливается уравнение поперечных колебаний для прямого стержня, обладающего линейными вязко-упругими свойствами с произвольным числом параметров. Получается соответствующее решение задачи Коши для двух случаев: *а*) стержень без подвесок вдоль пролета и *б*) стержень с упругими подвесками вдоль пролета.

Способ решения основывается на применении метода собственных функций и преобразования Лапласа.

В продолжении будут описаны применения в связи с поведением этих стержней при резонансе.

## FLEXION DYNAMIQUE DES BARRES À PROPRIÉTÉS VISCO-ÉLASTIQUES. I

### RÉSUMÉ

Les auteurs établissent l'équation des vibrations transversales d'une barre droite, qui possède des propriétés visco-élastiques linéaires, dépendant d'un nombre arbitraire de paramètres. Ils obtiennent la solution du problème de Cauchy, dans les deux cas suivants : *a*) barre sans suspension le long de la portée et *b*) barre pourvue de suspensions élastiques le long de la portée.

La manière de trouver les solutions est fondée sur l'application de la méthode des fonctions propres et de la transformée de Laplace.

Les auteurs présentent ensuite des applications concernant le comportement de ces barres en régime de résonance.

### BIBLIOGRAFIE

1. T. ALFREY, *Mechanical behaviour of high polymers*. New York, Interscience, 1948.
2. — *Non homogeneous stresses in viscoelastic media*. Quart. Appl. Math., *2*, 113—119 (1944).

3. D. S. Berry, S. C. Hunter, *The propagation of dynamic stresses in viscoelastic rods.* J. Mech. Phys. Solids, *4*, 72—95 (1956).
4. L. Boltzmann, Ann. Phys., *7*, 624 (1876); Gesammelte Abhandlungen. *1*— 616 (1909).
5. A. Charles, *On the wave equation in a hereditary field.* Bull. Soc. Sci. Liège, *20*, 195—198 (1951).
6. R.M. Davies, *Stress wave in solids. Surveys in Mechanics. G. E. Taylor 10 th Anniversary.* Volume 64—138, Un v. Press. Cambridge.
7. R. A. Eubanks, D. Muster, E. Volterra, *An investigation in the dynamic proporties of plastics and rubber-like materials.* Illinois. Institute Thn. Rep. No. 1 Contract No. 7 ONR — 32911 Project No. Nor D64369 (1952).
8. R. D. Glauz, E. H. Lee, *Transient wave equation in a linear-time dependent material.* J. of. Appl. Phys., **25**, 947—953 (1954).
9. S. K. Gosh, *Dynamics of plastic deformations in a bar exhibiting strain-rate effect and subjected to alternating stresses.* Indian Journ. of. Phys., **27**, **II**, 541—546 (1953).
10. B. Gross, *Mathematical structure of the theory of viscoelasticity.* Hersenn et Cie, Paris 1953.
11. B. Gross, Rheologische Verteilungs-Funktionen Kolloid Zeitschr., **134**, *2/3*, 65—76 (1953).
12. А. И. Губанов, *Элементарные деформации упругих тел.* Журнал технической физики, **XVII**, *41947.*
13. H. Kolski, *Stress wave in solids.* Oxford, Clarendon Press, 1953.
14. — *The propagation of stress in viscoelastic solids.* Applied Mechanics Review, **II**, *9*, 465—68 (1958).
15. — *Attenuation of short mechanic pulse by high polymers.* Proc. *2.* Int. Congr. on Rheology, 79—84, London, Butterworths, 1954.
16. H. Leaderman, *Elastic and plastic propagation of filamentous materials and other high polymers.* Washington, Textile Foundation, 1943.
17. — *Calculation of the retardation time functions and dynamic response from creep-data.* Proc. of the second International Congress on rheology. A. Press New York, 203—213, 1954.
18. E. H. Lee, I. Kanter, *Wave propagation in finite rods of viscoelastic materials.* J. of. Appl. Phys., **24**, *9*, 1115—1122 (1953).
19. E. H. Lee, J. A. Morrisson, *A comparison of propagation of longitudinal waves in rods of viscoelastic materials.* J. Poly. Sci., *19*, 93—110 (1956).
20. L. E. Malvern, *Plastic wave propagation in a bar of material exhibiting a strain rate effect.* Quarterly of Applied Mathematics, *8*, 405—411 (1951).
21. J. A. Morrisson, *Wave propagation in rods of Voigt material and viscoelastic materials with three parameter models.* Quart. Appl. Math, *14*, 153—169, (1956).
22. R. Sips, *General theory of viscoelastic substances.* J. Poly, Sci., 7, 191—205.
23. E. C. Сорокин, *Динамический расчет несущих конструкции заданий.* Москва, Гостехиздат, 1956.
24. I. N. Zverev, *The propagation of a disturbation in a viscoelastic and viscoplastic bar.* Prikladnaia Matematika i Mehanika, **14**, 295—302 (1950).

# CONCEPȚII MODERNE PRIVIND DETERMINAREA FORȚELOR SEISMICE

DE

MIHAIL IFRIM

Ultimul deceniu s-a caracterizat printr-o activitate științifică, extrem de susținută, în domeniul seismologiei inginerești. În acești ani s-au înregistrat însemnate progrese atît teoretice cît și practice în legătură cu construcțiile rezistente la cutremure. Avîndu-se în vedere importanța economică ce o prezintă proiectarea rațională a construcțiilor la acțiunea seismică, problemele privind *dimensionarea* și *concepția tehnică* a structurilor în ansamblu au constituit și constituie încă elementele esențiale în cercetările de seismologie inginerească. Idealul constă în a crea construcții concepute de așa manieră încît aceleași elemente de rezistență necesare preluării sarcinilor verticale să prezinte la forțe orizontale un coeficient de siguranță corespunzător. Aceste mari obiective ce s-au pus în fața inginerilor, îndeosebi constructori, au animat puternic lumea științifică de pretutindeni. Așa se explică faptul că în ultimul timp au apărut numeroase lucrări, la un înalt nivel științific și s-au produs poate cele mai de seamă manifestații științifice în acest domeniu și anume : *Symposium-ul privind efectul cutremurului asupra construcțiilor* ținut la Los Angeles (California) în 1952 [19], *Prima Conferință Mondială de seismologie inginerească ținută la San Francisco* (California) în 1956 [20] și *Conferința Unională privind construcțiile situate în regiuni seismice*, desfășurată la Moscova în 1956 [22]. Pe linia acestor dezbateri publice a problemelor fundamentale privind construcțiile antiseismice, anul acesta, în iulie, se vor desfășura la Tokio lucările celei de-a doua *Conferință Mondială de seismologie inginerească* la care își vor aduce aportul numeroși specialiști din diferite țări.

## I. TENDINŢE MODERNE DE APRECIERE A EFECTULUI CUTREMURULUI ASUPRA CONSTRUCŢIILOR

Mişcarea seismică produce cea mai complexă solicitare care acţionează asupra construcţiilor. Ea se manifestă cu totul haotic avînd direcţii, sensuri de propagare, amplitudini, viteze şi acceleraţii extrem de variabile în timp.

Calculul modern al construcţiilor antiseismice se bazează pe analiza dinamică a fenomenelor ce iau naştere în timpul cutremurelor. De aceea, aprecierea efectului cutremurelor asupra construcţiilor se face ţinîndu-se seama atît de proprietăţile elastice ale structurilor cît şi de caracteristicile dinamice ale undelor seismice. Referindu-ne la forţele seismice care solicită construcţiile în timpul cutremurului, din punct de vedere al calculului practic, se consideră că ele acţionează static la valoarea lor maximă, deşi sînt de natură dinamică.

Vom menţiona faptul că metodele elementare de calcul antiseismic, neglijează proprietăţile elastice ale structurii iar aprecierea efectului cutremurului se face prin intermediul unui coeficient seismic global determinat în mod subiectiv. Metoda *procentului din g* elaborată încă la începutul acestui secol de savantul japonez F. Omori şi care este şi astăzi oficializată în multe ţări, consideră forţele seismice proporţionale cu sarcinile gravitaţionale prin intermediul unui *coeficient seismic C* constant pe înălţimea construcţiei. Această metodă se reduce de fapt în a considera construcţia de rigiditate infinită avînd acceleraţia constantă în toate punctele sale. Coeficientul $C$ reprezintă raportul dintre acceleraţia convenţională atribuită cutremurului şi acceleraţia gravitaţională. Se ştie că funcţie de gradul cutremurului se stabilesc acceleraţiile atribuite mişcării seismice, implicit valorile coeficienţilor seismici $C$ (vezi scara Mercalli-modificată).

Neglijarea caracteristicilor elastice ale structurii conduce la o evaluare subiectivă şi neştiinţifică a forţelor seismice. În funcţie de flexibilitatea sau rigiditatea unei construcţii variază sensibil intensitatea sarcinilor seismice. Se poate afirma că rigiditatea unei construcţii în ansamblu, guvernează comportarea ei la solicitările provenite din cutremure, aducînd modificări esenţiale *răspunsului dinamic* al structurii la acţiunea seismică. Prin *răspuns dinamic* sau *spectru de răspuns* vom înţelege reprezentarea variaţiei deplasărilor relative, a vitezelor absolute sau a acceleraţiilor relative în funcţie de perioada proprie de vibraţie neamortizată a structurii, cînd fundaţia sa este supusă unor perturbaţii seismice. Pe baza variaţiei curbelor spectrale se stabilesc coeficienţii seismici spectrali care caracterizează intensitatea forţelor seismice. Cunoscînd variaţia coeficienţilor seismici spectrali, adică a legăturii dintre coeficienţii seismici şi rigiditatea dinamică a construcţiei exprimată prin perioadă, calculul forţelor seismice capătă o fundamentare ştiinţifică faţă de metodele arbitrare ale coeficienţilor seismici unici care fac abstracţie de caracteristicile elastice ale structurii. În anii din urmă, o preocupare de cea mai mare importanţă pentru seismologi, a constituit-o aprecierea puterii destructive a cutremurelor bazaţi pe fenomenele obiective. În general, s-a căutat să se pună în evidenţă energia de absorbţie a undelor seismice. Aşa au apărut noţiunile de : magnitudine Gutenberg-Richter, intensitate spectrală Housner, spectrul acţiunii Medvedev etc.

Cercetările de seismologie inginerească s-au axat, mai ales după importantele studii efectuate de M.A. Biot [2] spre o evaluare realistă a efectului cutremurului asupra construcţiilor folosind analiza spectrală a înregistrărilor obţinute la cutremurele cele mai puternice, pe baza cărora se pot construi *spectrele de răspuns* prin diferite metode : analitice exacte şi aproximative sau prin analogii electrice, folosind calculatorul electronic analog [3].

În continuare, vom lua în discuţie modul practic de utilizare a spectrelor de răspuns, concretizat prin coduri şi recomandări privind determinarea forţelor seismice apărute în diverse ţări [9], [16], [18], [21], [23].

Din punct de vedere analitic pot fi studiate vibraţiile forţate ale unei structuri elastice, avînd $n$ grade de libertate (luînd în considerare şi amortizarea), cînd baza sa este supusă unei deplasări arbitrare $U_0(t)$ corespunzătoare mişcării seismice. În lucrarea [10] s-a abordat această problemă detaliat. Pentru modul normal $i$ de vibraţie au rezultat :

— *variaţia deplasărilor*

$$Z_k(i) = \frac{a_{ki}}{\omega_i} \int_0^t \ddot{U}_0(\tau)\, e^{-\nu_i\omega_i(t-\tau)} \cdot \sin \omega_i (t-\tau)\, d\tau ; \qquad (I.1)$$

— *variaţia vitezelor*

$$\dot{Z}_k(i) = a_{ki} \int_0^t \ddot{U}_0(\tau)\, e^{-\nu_i\omega_i(t-\tau)} \cdot \cos \omega_i (t-\tau)\, d\tau ; \qquad (I.2)$$

— *variaţia acceleraţiilor*

$$\ddot{Z}_k(i) = \omega_i a_{ki} \int_0^t \ddot{U}_0(\tau)\, e^{-\nu_i\omega_i(t-\tau)} \cdot \sin \omega_i (t-\tau)\, d\tau ; \qquad (I.3)$$

— *variaţia forţelor de inerţie*

$$F_k(i) = M_k\ddot{Z}_k(i) = M_k\omega_i a_{ki} \int_0^t \ddot{U}_0(\tau)\, e^{-\nu_i\omega_i(t-\tau)} \cdot \sin \omega_i (t-\tau)\, d\tau ; \qquad (I.4)$$

— *forţa tăietoare de bază*

$$F(i) = \sum_{k=1}^{n} F_k(i) = \sum_{k=1}^{n} M_k\omega_i a_{ki} \int_0^t \ddot{U}_0(\tau) e^{-\nu_i\omega_i(t-\tau)} \cdot \sin \omega_i (t-\tau)\, d\tau . \qquad (I.5)$$

În aceste expresii s-au folosit notaţiile următoare :

$a_{ki}$ — coeficient de formă care precizează răspunsul dinamic din punctul $k$, corespunzător formei principale $i$ de vibraţie ;

$F_k(i)$ — forţa seismică care acţionează în punctul $k$ al construcţiei şi care corespunde formei principale $i$ de vibraţie ;

$i$ — indice care precizează ordinul formelor principale (sau moduri normale), al frecvențelor circulare și perioadelor proprii de vibrație;

$M_k = \frac{Q_k}{g}$ — masa sarcinii gravitaționale a construcției ($Q_k$) aferentă nivelului $k$;

$n$ — numărul punctelor de fixare a sarcinilor gravitaționale egal cu numărul etajelor și gradelor de libertate dinamice a construcției;

$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$ — perioada proprie de vibrație a construcției, corespunzătoare formei principale $i$ de vibrație;

$U_0(t)$ — funcția mișcării care acționează construcția la baza sa datorită perturbațiilor seismice;

$Z_{ki}$ — deplasarea punctului $k$, corespunzătoare formei principale $i$;

$Z_k(i)$ — deplasarea reală a punctului $k$, pe direcția oscilațiilor (orizontală);

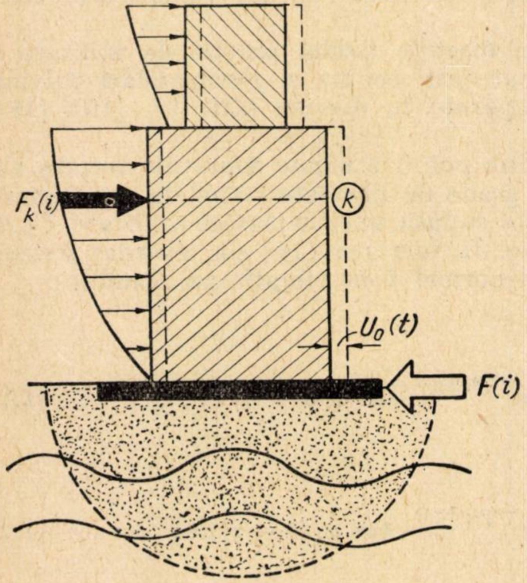


Fig. 1

$\delta$ — decrementul logaritmic al amortizării;

$\nu$ — factor critic de amortizare;

$\omega_i$ — frecvența proprie circulară de vibrație a construcției corespunzătoare formei principale $i$;

Coeficientul $a_{ki}$ are expresia

$$a_{ki} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} M_k Z_{ki}}{\sum\limits_{k=1}^{n} M_k Z_{ki}^2} Z_{ki} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} Q_k Z_{ki}}{\sum\limits_{k=1}^{n} Q_k Z_{ki}^2} Z_{ki}. \tag{I.6}$$

Forma expresiilor (1.1), (I.2), (I.3), (I.4) și (I.5) ne permite să punem în evidență separarea analitică a caracteristicilor statico-dinamice ale structurii de proprietățile dinamice ale cutremurului [3], [8] (fig. 1).

Principial poate fi scrisă următoarea relație generală:

$$R_k(t) = R_{k\mathrm{I}} \cdot R_{k\mathrm{II}}, \tag{I.7}$$

unde

$R_k(t)$ — reprezintă răspunsul dinamic al structurii corespunzător punctului $k\,[Z_k(i),\ \dot{Z}_k(i),\ \ddot{Z}_k(i),\ F_k(i),\ F(i)]$, datorită perturbațiilor seismice;

$R_{k\mathrm{I}}$ — reprezintă influența caracteristicilor statico-dinamice, specifice fiecărui tip de structură, asupra comportării construcției;

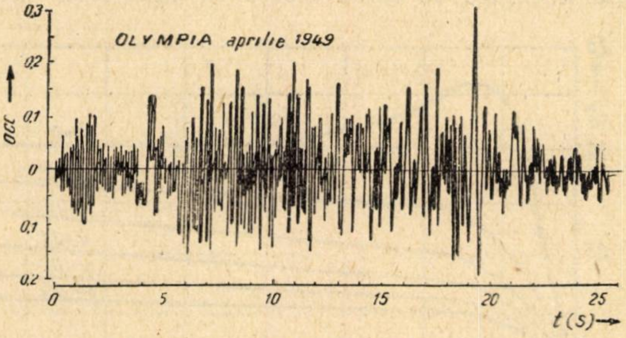


Fig. 2

$R_{k\mathrm{II}}$ — reprezintă influența proprietăților dinamice ale undei seismice precum și a mediului prin care aceasta se propagă asupra comportării construcției.

Vom sublinia că funcție de modul în care este asimilată mișcarea terenului, pot rezulta diverse formulări ale acestei probleme. Influența cutremurului reiese din integrala

$$\int_0^t \ddot{U}_0(\tau)\, e^{-\nu_i \omega_i (t-\tau)} \cdot \sin \omega_i (t-\tau)\, d\tau, \qquad (1.8)$$

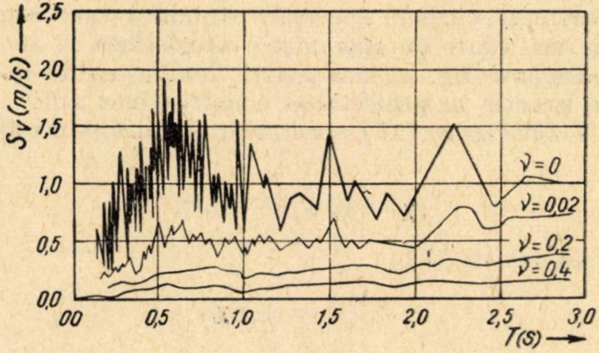


Fig. 3

care intervine în valoarea forțelor seismice și se referă la un sistem cu o singură masă. Această integrală poartă numele de *spectrul vitezelor* ($S_V$) în studiile americane. În cele sovietice apare noțiunea de spectrul acțiunii ($\chi$) [12], care se referă la spectrul deplasărilor $S_V/\omega$.

Integrala (I.8) se poate efectua utilizînd direct înregistrarea accelerațiilor (fig. 2) [3] cu ajutorul calculatorului electronic analog, și se reprezintă funcție de factorul critic de amortizare și perioada structurii (fig. 3).

În U.R.S.S. I. L. Korcinski [11] a asimilat mișcarea seismică prin suma unei serii de curbe armonice convergente. S. V. Medvedev [12] care a introdus noțiunea de *spectrul acțiunii*, apreciază integrala de mai sus funcție de o scară proprie de intensitate seismică, gradul de amortizare și perioada proprie a structurii.

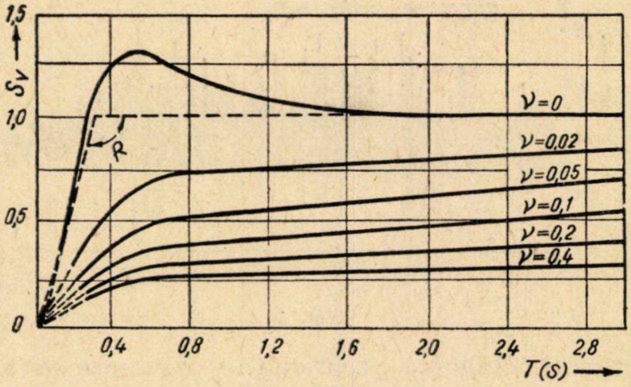


Fig. 4

Soluționările date în U.R.S.S. iau în considerație cutremurele maxime înregistrate în anumite regiuni, rezultatele extinzîndu-se pentru zonele ce au un același grad de intensivitate seismică. În S.U.A. pentru scopurile practice se întocmesc curbele spectrale standard care reprezintă media unui număr cît mai mare de cutremure înregistrate în acea regiune [4]. Acest *spectru standard* (fig. 4) mai poartă denumirea de *spectrul de calcul* și se utilizează practic în proiectarea construcțiilor antiseismice.

După S. V. Medvedev [12], spectrul acțiunii are următoarea expresie analitică :

$$\chi = x_0 \, \psi (T) \cdot \varepsilon (\delta), \tag{I.9}$$

care intervine în relația (I.1) :

$$Z_k (i) = a_{ki} \cdot \chi,$$

unde

$x_0$ — reprezintă amplitudinea deplasării unui pendul standard avînd perioada $T_0 = 0{,}25$ s. și decrementul logaritmic $\delta_0 = 0{,}50$. Valorile lui $x_0$ pentru calculele practice se iau din graficul din figura 5 pe baza căruia se determină și gradul cutremurului după metoda originală a lui Medvedev ;

$\psi(T)$ – este un coeficient spectral care pune în evidenţă influenţa perioadei structurii (fig. 6);

$\varepsilon(\delta)$ – reprezintă coeficientul de amortizare care defineşte dependenţa spectrului acţiunii de amortizarea structurii (fig. 7).

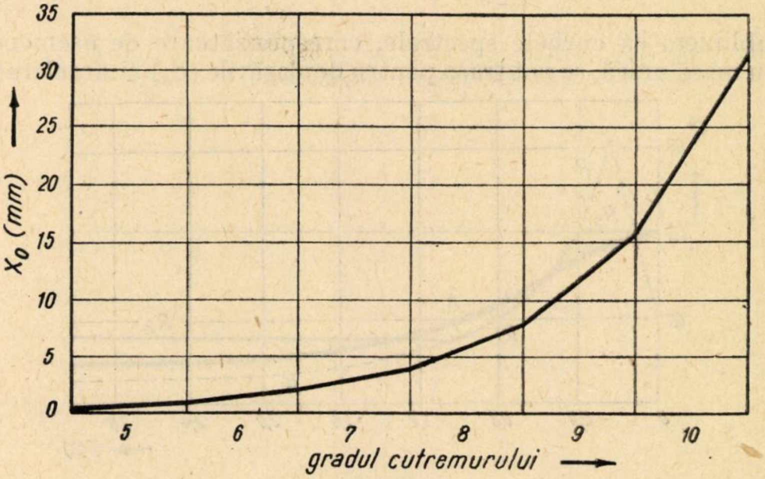


Fig. 5

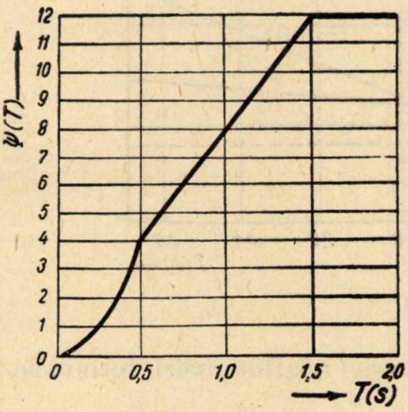


Fig. 6

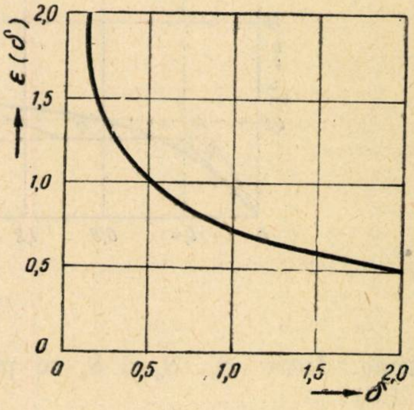


Fig. 7

Coeficientul spectral $\psi(T)$ se exprimă diferit pentru anumite intervale ale perioadelor $T$, şi anume:

$$\text{pentru } 0{,}1 \text{ s} < T < 0{,}5 \text{ s} \qquad \psi = \frac{T^2}{T_0^2};$$

$$\text{pentru } 0{,}5 \text{ s} < T < 1{,}5 \text{ s} \qquad \psi = 2\frac{T}{T_0};$$

$$\text{pentru } 1{,}5 \text{ s} < T < 2{,}5 \text{ s} \qquad \psi = 12.$$

Legătura dintre coeficientul de amortizare ($\varepsilon$) și valoarea decrementului ($\delta$) se exprimă prin relația

$$\varepsilon(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \text{ pentru } 0{,}25 \leqslant \delta \leqslant 2{,}00.$$

Subliniem că curbele spectrale, corespunzătoare de asemenea unui sistem cu masă unică, se pot trasa pentru deplasările ($S_d$) și accelerațiile ($S_a$) maxime. Între $S_d$, $S_a$ și $S_v$ se pot scrie relațiile (vezi formulele I.1, I.2, I.3)

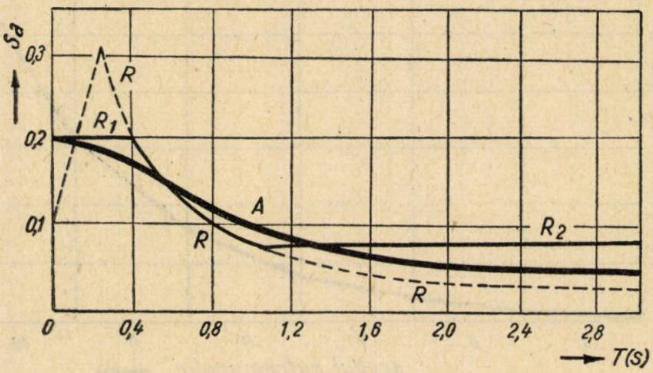


Fig. 8

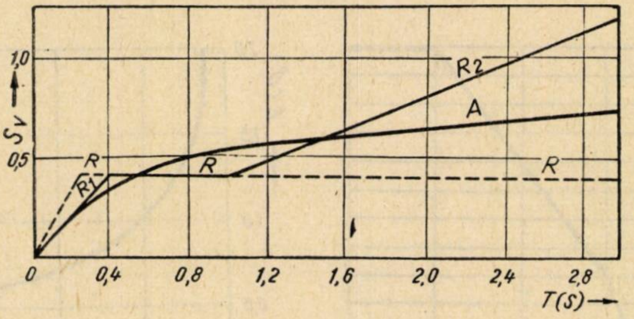


Fig. 9

$$\left.\begin{aligned} S_d &= \frac{T}{2\pi}\cdot S_v, \\ S_a &= \frac{2\pi}{T}\cdot S_v. \end{aligned}\right\} \qquad (\text{I.10})$$

Este cel mai convenabil a introduce în calcul spectrul vitezelor deoarece el caracterizează energia maximă atinsă de sistem $\left(\frac{1}{2}\,M S_v^2\right)$, în timp ce $S_d$ și $S_a$ nu prezintă o prea mare exactitate întrucît sînt obținuți prin intermediul perioadei $T$.

Pe baza analizei curbelor spectrale medii se pot stabili spectre standard pentru proiectare. După G. W. Housner se poate stabili *spectrul redus* al unui cutremur ($R$) pe baza spectrului mediu al vitezelor (fig. 4), al accelerațiilor (fig. 8) și a spectrului de proiectare al vitezelor (fig. 9)

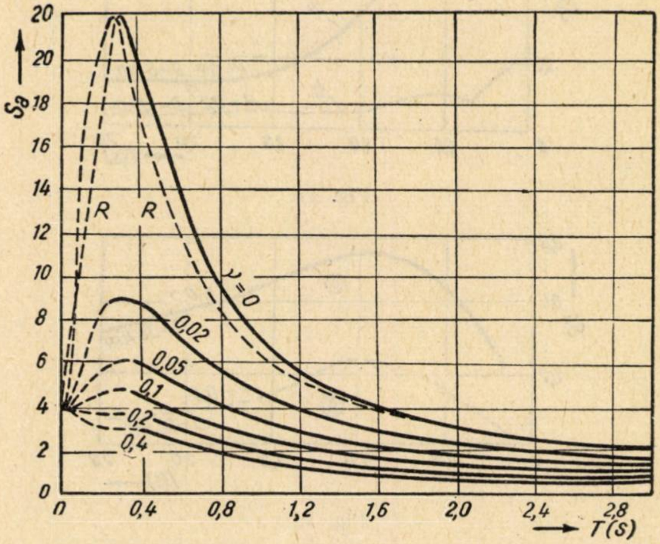


Fig. 10

și accelerațiilor (fig. 10). Curba $R$ reprezintă *spectrul redus*. Curba $A$ din figura 9 reprezintă spectrul propus de Housner iar curba $R_1\ RR_2$ (fig. 10) constituie spectrul accelerațiilor pentru proiectare [5]. Se observă o plafonare a acesteia în regiunile scăzute și ridicate ale perioadei $T$, unde spectrul are valori prea mari respectiv prea reduse.

Curba de calcul $R_1\ RR_2$ este reprezentată prin trei intervale și anume :

intervalul (1) $S_a = 0{,}2\,g$ (ft/s²) pentru $0 < T < 0{,}4$ s ;

intervalul (2) $S_a = \dfrac{0{,}08 g}{\sqrt{T}}$ (ft/s²) „ $0{,}4 < T < 1{,}0$ s ;

intervalul (3) $S_a = 0{,}08\,g$ (ft/s²) „ $1{,}0 < T < 3$ s.

Se observă deci că pînă la sfîrșit se obține un spectru de calcul al accelerațiilor prin intermediul căruia se poate stabili valoarea forțelor seismice.

Se constată totuși că spectrul standard al accelerațiilor ($S_a$) poate prezenta variații sensibile atît ca mod de reprezentare cît și ca intensitate funcție de distanța epicentrală. Astfel în apropiere de epicentru valorile spectrului cresc (fig. 11 și 12). De asemenea, se constată că ordonatele spectrului accelerațiilor corespunzător unor distanțe epicentrale mici, la valori reduse ale perioadei (deci construcții rigide și semirigide) sînt mai mari decît în zona perioadelor ridicate (construcții flexibile) (fig. 11).

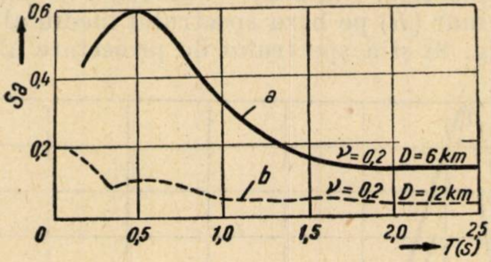


Fig. 11

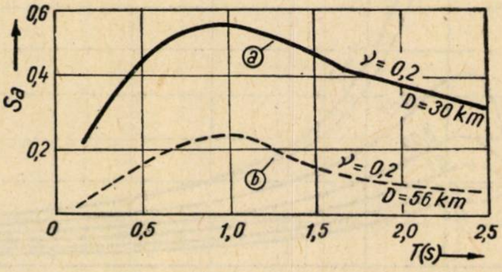


Fig. 12

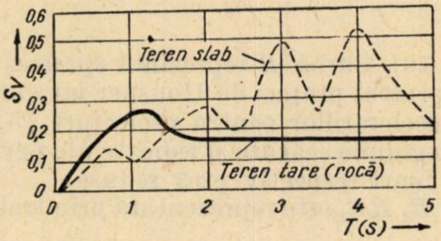


Fig. 13

Cu cît înregistrările se fac la o distanță epicentrală mai mare se observă o creștere a valorilor spectrului în zona construcțiilor flexibile (fig. 12). Exemplificarea dată în figura 11 se referă la cutremurul înregistrat în localitatea Helena (statul Montana) la 31 octombrie 1935 (de grad 7) și distanța epicentrală $D = 6$ km (curba $a$) și cutremurul din El Centro (California) din 18 mai 1940 (de grad 8) avînd distanța epicentrală $D = 12$ km (curba $b$). În figura 12 s-au reprezentat spectrele corespunzătoare înregistrărilor din Los Angeles (California) a cutremurului din 10 martie 1933 (de gradul 8) și cu o distanță epicentrală $D = 30$ km (curba $a$) și spectrul stației Vernon (California) tot a cutremurului din 10 martie 1933 (de gradul 8) pentru o distanță epicentrală $D = 58$ km (curba $b$).

Se înţelege că valorile ordonatelor din curbele spectrale depind şi de natura terenului prin care se propagă undele seismice.

În figura 13 este reprezentată variaţia spectrului vitezelor pe baza mediei a 20 spectre. Aceste spectre corespund unor cutremure intensive înregistrate pe coasta occidentală a Statelor Unite, toate avînd epicentrul destul de apropiat.

Aceste concluzii pot fi exemplificate şi în baza cutremurului catastrofal care a produs completa distrugere a oraşului marocan, Agadîr, în nopatea de 29 februarie —1 martie 1960 [25].

Epicentrul cutremurului era situat chiar în zona oraşului şi prin urmare acceleraţiile undelor seismice au atins valori maxime (asemănătoare fig. 11, curba *a*). Pe de altă parte construcţiile de înălţime redusă aveau o rigiditate dinamică ridicată, adică o perioadă destul de scăzută. Desigur că la această distrugere catastrofală a contribuit şi efectul undelor verticale care ating intensităţi importante în regiunea epicentrală. Vom remarca de asemenea că oraşul Agadîr era situat la litoralul oceanului Atlantic, adică într-un teren îmbibat cu apă care amplifică simţitor efectul seismic.

După cum se poate observa anumite înregistrări şi constatări practice ne fac să mai avem însă o serie de rezerve în ceea ce priveşte repartiţia reală a forţelor seismice pentru diferitele tipuri de structuri.

Din punct de vedere practic, spectrul acceleraţiilor relative se referă la sistemul cu un singur grad de libertate. De aceea, pentru o structură complexă trebuie calculat sistemul cu o masă unică, redus prin metoda echivalenţei.

Folosind relaţia (I.4) pentru calculul forţelor seismice, se constată că spectrul nu capătă alterări întrucît coeficientul $a_{ki}$ ţine seama de faptul că sistemul are mai multe grade de libertate. Un asemenea mod de calcul s-a adoptat în U.R.S.S. [23]. Pentru ţara noastră autorul acestei comunicări a propus o cale analoagă pentru determinarea forţelor seismice [9].

În S.U.A. se lucrează cu forţa tăietoare de bază corespunzător primului mod şi acesta reprezintă produsul dintre întreaga sarcină a clădirii (neredusă) multiplicată cu un coeficient seismic echivalent [18]. Acest coeficient seismic echivalent decurge din spectrul acceleraţiei corespunzător sistemului cu masă unică, din care este redus, ţinîndu-se seama de faptul că în realitate clădirea are mai multe grade de libertate.

## II. DETERMINAREA FORŢELOR SEISMICE ŢINÎND SEAMA DE VARIAŢIA CURBELOR DE RĂSPUNS

Introducerea elementelor dinamice în calculul forţelor seismice s-a făcut oficial pentru prima oară în 1951 o dată cu apariţia lucrării *Lateral Forces of Earthquake and Wind* [18]. Această lucrare conţine recomandări în legătură cu determinarea forţelor seismice pentru regiunea Californiei. În anii 1956 şi 1959 au apărut unele modificări ale acestor recomandări. În U.R.S.S. s-a adoptat, de asemenea, un calcul dinamic privind sarcinile seismice concretizat prin normele de calcul apărute în 1957 [23] şi modificate în 1959. În aceste recomandări apare influența caracteristicilor dinamice ale construcției prin intermediul perioadei proprii de vibrație. De fapt, au existat tendințe anterioare de a introduce caracteristicile elastice ale structurilor prin variația coeficientului seismic funcție de înălțimea sau numărul de etaje ale construcției. Așa de pildă pot fi citate instrucțiunile sovietice din 1951 precum și cele americane Unifom Building Code (ediție veche) care variau coeficientul seismic funcție de înălțimea respectiv numărul de etaje ale construcției. Recomandările în vigoare din Japonia (1955) și Algeria (1955) prevăd coeficienți seismici funcție de înălțimea clădirii.

Pe scurt, se va arăta modul în care este tratată problema determinării forțelor seismice în acele țări în care s-a oficializat metoda dinamică bazată pe variația curbelor de răspuns funcție de perioada $T$ a construcției. Se trec, de asemenea, în revistă unele puncte de vedere recent apărute.

## 1. NORMELE SOVIETICE [23]

Aceste norme au la bază în general studiile efectuate de Korcinski [11] care, cum s-a mai arătat, asimilează funcția $U_0(t)$ care apare în integrala (I.8) printr-o serie de curbe armonice convergente. Pentru determinarea forței seismice care acționează în punctul $k$, corespunzătoare modului $i$ s-a stabilit formula

$$F_k(i) = K_c \cdot \beta_i \cdot a_{ki} \cdot Q_k. \tag{II.1}$$

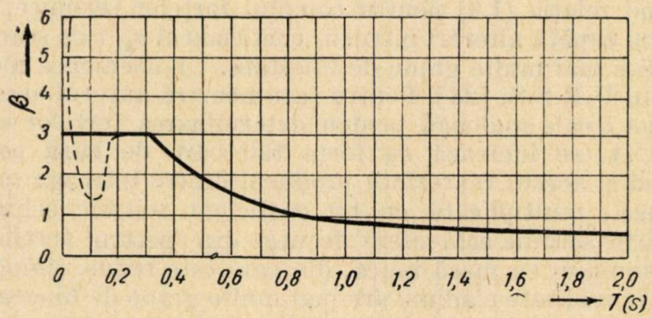


Fig. 14

În această expresie apar următoarele notații noi

$K_c$ — coeficient care reprezintă raportul dintre accelerația cutremurului și accelerația gravitațională ($g$), caracteristic celor trei zone de macroraionare seismică a teritoriului U.R.S.S. (0,025 ; 0,05 ; 0,10) ;

$\beta_i$ — coeficient spectral care caracterizează efectul dinamic al deplasării bazei asupra structurii depinzînd de perioada proprie de vibrație. Acest coeficient are expresiile :

$$\beta_i = \frac{0,9}{T_i} \text{ pentru construcții obișnuite (fig. 14) ;}$$

$\beta_i = \frac{1,5}{T_i}$ pentru construcţii flexibile la care amortizarea este mai redusă.

Pentru determinarea perioadelor proprii de vibraţie se dau detalii în noile instrucţiuni redactate în cursul anului 1959.

## 2. RECOMANDĂRILE AMERICANE [18]

Ne vom referi la recomandările californiene din 1951 care au adoptat pentru prima dată *metoda spectrală* de apreciere a integralei (I.8).

Spre deosebire de normele sovietice, se calculează mai întîi forţa tăietoare de bază corespunzătoare primului mod $\left(F = \sum_{k=1}^{n} F_k\right)$ (1) care este proporţională cu sarcina totală a structurii $Q = \sum_{k=1}^{n} Q_k$. Forţa $F$ se repartizează apoi suprastructurii.

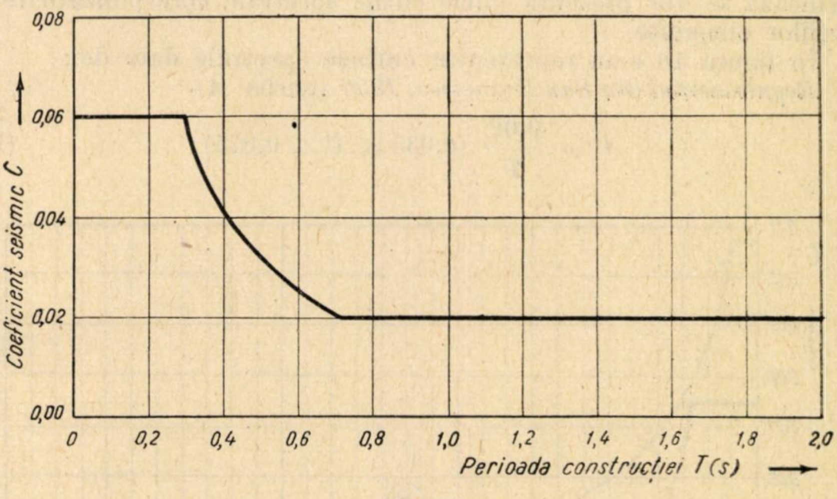


Fig. 15

Forţa tăietoare de bază are expresia

$$F = CQ, \tag{II.2}$$

unde

$C$ — este coeficientul seismic spectral echivalent care ţine seama de faptul că sistemul are mai multe grade de libertate.

Coeficientul $C$ are expresiile

$C = \frac{0,015}{T}$ pentru construcţii obişnuite (fig. 15) $(0,02 \leqslant C \leqslant 0,06)$;

$C = \frac{0,025}{T}$ pentru construcţii flexibile $(0,03 \leqslant C \leqslant 0,10)$.

U.S. Coast and Geodetic Survey recomandă pentru calculul perioadei următoarea formulă stabilită empiric :

$$T = 0{,}09 \frac{H}{\sqrt{B}}, \tag{II.3}$$

în care $H$ este înălţimea construcţiei iar $B$ lăţimea acesteia în direcţia vibraţiilor. Atît $H$ cît şi $B$ se iau în metri.

Vom sublinia că primul spectru seismic a fost efectuat de E. C. Robison pentru cutremurul din El Centro (Statul California) înregistrat la 18 mai 1940.

### 3. REPREZENTAREA COEFICIENŢILOR SEISMICI SPECTRALI DE CALCUL ELABORAŢI PÎNĂ ÎN PREZENT

În scopul de a avea o privire de ansamblu asupra variaţiei coeficienţilor seismici propuşi de diverse instrucţiuni sau cercetători, în cele ce urmează se vor prezenta unele curbe spectrale corespunzătoare construcţiilor obişnuite.

În figura 16 s-au reprezentat curbele spectrale date de :

*Regulamentul din San Francisco, 1956* (curba $A$)

$$C = \frac{0{,}02}{T} \quad (0{,}035 \leqslant C \leqslant 0{,}075)\,; \tag{II. 4}$$

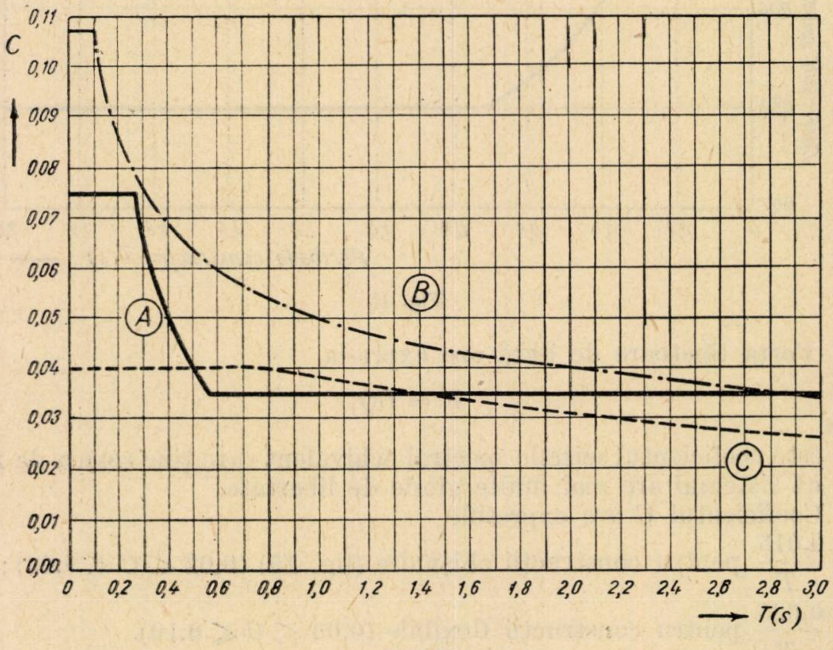


Fig. 16

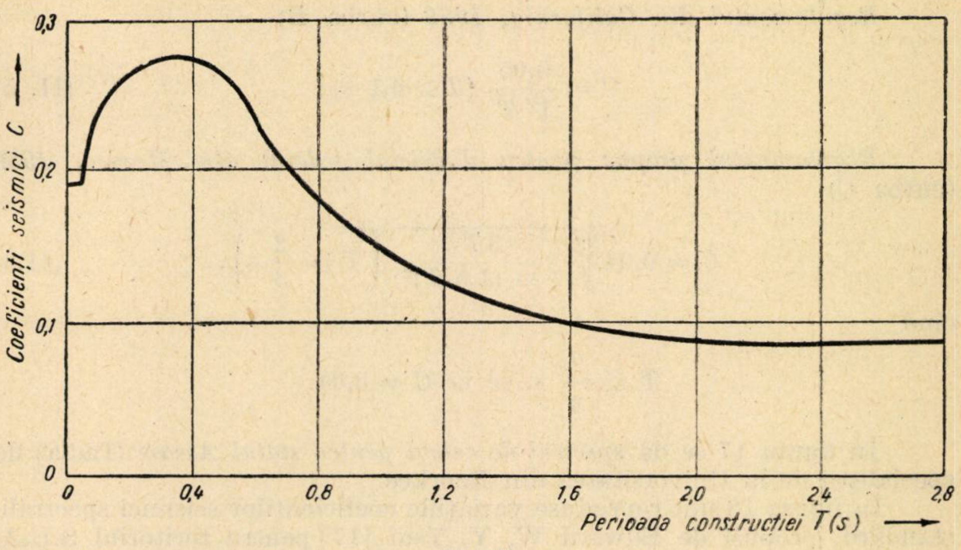

0,3
0,2
0,1
0
Coeficienți seismici C
0
0,4
0,8
1,2
1,6
2,0
2,4
2,8
Perioada construcției T(s)

Fig. 17

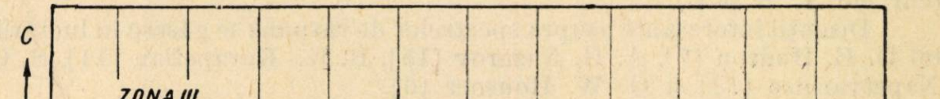

C
ZONA III
ZONA II
ZONA I
0,20
0,15
0,10
0,07
0,05
0,035
0,02
0,00
C
B
A
0,07
0,035
0,02
0,0
0,5
1,5
2,0
T (S)
3,0

Fig. 18

*Regulamentul din California, 1959* (curba $B$)

$$C = \frac{0{,}05}{\sqrt[3]{T}} \quad (T > 0{,}1 \text{ s}); \qquad \text{(II. 5)}$$

*Regulamentul propus pentru districtul federal din Mexico, 1959* (curba $C$)

$$C = 0{,}04 \sqrt{\frac{3T}{1 + (1{,}5\,T)^2}} \left(T \geqslant \frac{2}{3}\text{s}\right), \qquad \text{(II.6)}$$

cînd

$$T \leqslant \frac{2}{3} \text{ s. se ia } C = 0{,}04.$$

În figura 17 se dă *spectrul de calcul pentru statul Assam* (India) de specialiştii de la Universitatea din Roorkee.

În figura 18 sînt reproduse variaţiile coeficienţilor seismici spectrali, standard, propuşi de Edward W. Y. Tsui [17] pentru teritoriul S.U.A. Ei corespund celor trei zone de intensitate seismică ale Statelor Unite (curbele $A$, $B$ şi $C$).

Discuţii interesante asupra spectrelor de răspuns se găsesc în lucrările lui D. E. Hudson [7], A. G. Nazarov [15], B. K. Karapetian [14], S. G. Napetvaridze [13] şi G. W. Housner [6].

## 4. CURBE SPECTRALE STANDARD PROPUSE PENTRU ZONELE SEISMICE DIN ROMÎNIA [9]

În lucrarea [9] autorul acestui studiu a propus curbe seismice standard pentru evaluarea sarcinilor seismice pentru construcţiile civile şi indusstriale, situate pe teritoriul R.P.R.

În legătură cu aceasta s-a ţinut seama de următorii factori principali care influenţează comportarea construcţiilor la efectul seismic :

A. *Caracteristicile dinamice ale structurilor* :

*a*) perioadele proprii de vibraţii care definesc rigiditatea dinamică a structurii;

*b*) modurile normale de vibraţie ;

*c*) gradul de amortizare ;

*d*) mărimea şi distribuţia maselor.

B. *Proprietăţile dinamice ale mişcării seismice* :

Intensitatea energiei de absorbţie a undelor seismice pentru zona în care este amplasată construcţia. Pentru scopuri practice teritoriul ţării a fost împărţit în trei zone de egală magnitudine relativă (fig. 19).

C. *Proprietăţile fizico-mecanice ale terenului*:

*a*) rigiditatea dinamică a terenului de fundaţie ;

*b*) natura, din punct de vedere geotehnic, a terenului prin care se propagă undele seismice.

În baza relaţiei (I.4), forţa seismică corespunzătoare modului $i$ de vibraţie s-a propus de forma

$$F_k(i) = C(T_i)\cdot a_{ki}\cdot Q_k, \tag{II.7}$$

în care

$$C(T_i) = \frac{1}{g}\cdot\frac{2\pi}{T_i}\int_0^t \ddot{U}_0(\tau)\, e^{-\nu_i\omega_i(t-\tau)}\cdot \sin\omega_i(t-\tau)\, d\tau \tag{II.8}$$

reprezintă coeficientul seismic spectral de calcul.

Întrucît nu a existat posibilitatea efectuării unor calcule corespunzătoare analizei spectrale, din lipsă de înregistrări de la cele mai puternice mişcări seismice, coeficientul $C(T_i)$ s-a apreciat global, bazaţi pe normele şi recomandările din alte ţări precum şi pe analiza inginerească a efectului cutremurului din 10 noiembrie 1940.

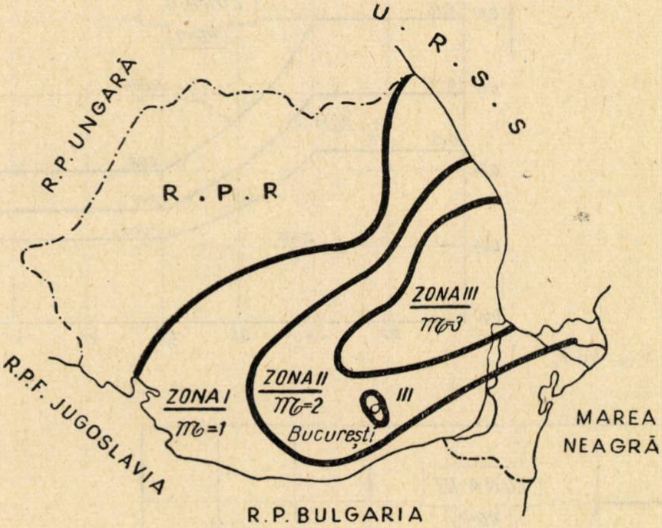

U.R.S.S
R.P. UNGARĂ
R.P.R
ZONA III
$\mathfrak{M}=3$
ZONA II
$\mathfrak{M}=2$
III
ZONA I
$\mathfrak{M}=1$
Bucureşti
R.P.F. JUGOSLAVIA
MAREA NEAGRĂ
R.P. BULGARIA

Fig. 19

Variaţia coeficienţilor seismici standard $C(T_i)$ pentru construcţiile obişnuite din beton armat este reprezentată în figurile 20 *a*, 20 *b* şi 20 *c* pentru cele trei zone seismice reprezentate în figura 19.

Funcţia $C(T_i)$ pentru cazurile terenurilor medii (curbele din mijloc), a fost stabilită sub forma

$$C(T_i) = \frac{0{,}024}{T_i}\,\mathfrak{M}, \tag{II.9}$$

avînd limitele

$$0{,}03\,\mathfrak{M} \leqslant C \leqslant 0{,}06\,\mathfrak{M}. \tag{II.10}$$

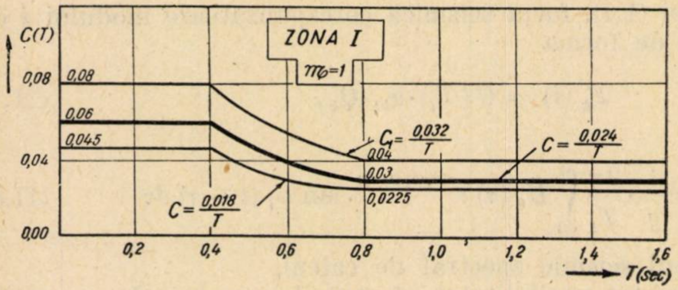


Fig. 20 *a*

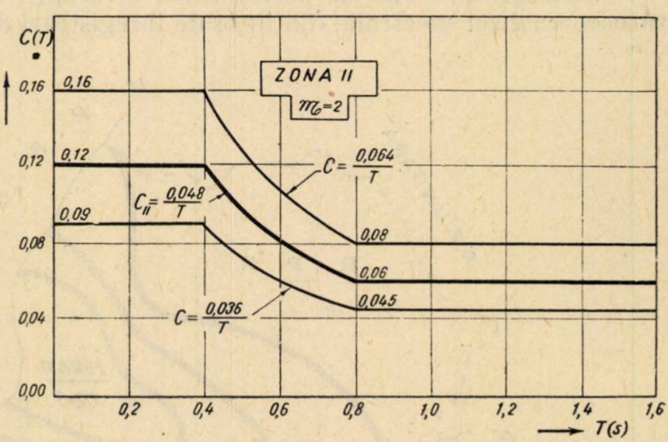


Fig. 20 *b*.

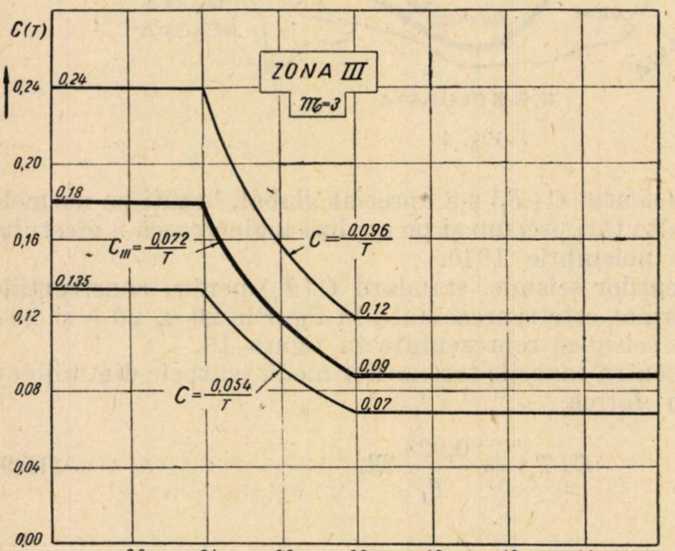


Fig. 20 *c*

Variația hiperbolică adaptată pentru $C(T_i)$ se apropie cel mai mult de spectrele analitice obținute de M.A. Biot și E. C. Robison.

Curbele superioare din diagramele din figura 20 se referă la terenurile slabe $\left(\text{pentru care } C(T) \text{ s-a majorat cu circa } \frac{1}{3}\ \%\right)$ iar curbele inferioare la terenurile tari $\left(\text{pentru care } C(T) \text{ s-a redus cu circa } \frac{1}{4}\ \%\right)$. Justificări asupra acestor modificări ale coeficientului seismic în raport cu natura terenului se găsesc în lucrarea [9].

Menționăm că pentru construcțiile speciale, flexibile în care amortizarea structurii este mai redusă, coeficienții seismici se măresc cu 50%, adică

$$C(T_i) = \frac{0{,}036}{T_i}\,\mathfrak{M}, \tag{II.11}$$

avînd limitele

$$0{,}045\,\mathfrak{M} \leqslant C \leqslant 0{,}09\,\mathfrak{M}. \tag{II.12}$$

S-a notat aici cu $\mathfrak{M}$ magnitudinile relative ale cutremurelor din cele trei zone de intensivitate seismică a R.P.R., conform figurii 19. Aceste zone au caracteristicile următoare :

*Zona I* (cutremure de magnitudine redusă) $\mathfrak{M}_{\mathrm{I}} = 1$,

*Zona II* (cutremure de magnitudine medie) $\mathfrak{M}_{\mathrm{II}} = 2$,

*Zona III* (cutremure de magnitudine ridicată) $\mathfrak{M}_{\mathrm{III}} = 3$.

Noțiunea de magnitudine relativă introdusă aici, nu are sensul strict dat de B. Gutenberg și C.F. Richter, ci reprezintă raportul dintre efectele seismice maxime ce se dezvoltă în două regiuni diferite. O precizare a acestei scări se poate face prin analiza statistică a avariilor și distrugerilor semnalate în timpul cutremurelor și puse apoi de acord cu datele ce rezultă din prelucrarea înregistrărilor obținute dintr-o rețea cît mai densă de stații seismice.

Amănunte privind : stabilirea curbelor de răspuns Standard $C(T_i)$, perioadele proprii $(T_i)$ limită între care se situează diversele tipuri de construcție, influența naturii terenului prin care se propagă unda seismică, interacțiunea dintre teren și construcție, influența amortizării structurii, se găsesc în lucrarea [9].

## III. CONCLUZII

Dezvoltarea pe care a înregistrat-o seismologia inginerească permite să se perfecționeze un calcul antiseismic bazat pe analiza dinamică a fenomenelor ce iau naștere în timpul cutremurelor.

Nu se poate concepe astăzi o metodă modernă de evaluare a forțelor seismice fără a se ține seama de *caracteristicile statico-dinamice ale structurii*, *proprietățile dinamice ale undelor seismice și proprietățile fizico-mecanice ale terenului.*

Metoda analizei spectrale unanim recunoscută în toată lumea este la ora actuală singura cale simplă și realistă prin care se poate ține seama de majoritatea elementelor care caracterizează efectele seismice.

Desigur, sînt numeroase fenomene secundare a căror pondere nu a putut fi stabilită în etapa actuală de dezvoltare. De asemenea, mai există multe probleme în curs de cercetare care-și mai cer încă rezolvare, iar altele anumite precizări sau confirmări practice.

Toate aceste cercetări, deși necesită timp de lucru și gîndire vor conduce cu siguranță la rezultate pozitive.

Pe plan mondial s-a reușit a se crea, deocamdată mutual, o organizată activitate seismică. Acest lucru nu este de mirare astăzi cînd *seismologia inginerească* a devenit o știință creatoare, ca toate celelalte.

*Primită la redacție la 9 aprilie 1960*

## СОВРЕМЕННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В СВЯЗИ С ОПРЕДЕЛЕНИЕМ СЕЙСМИЧЕСКИХ СИЛ

### РЕЗЮМЕ

В настоящей работе представляются самые недавние мнения в связи с определением сейсмических сил, основанных на понятии о *спектре ответа* землетрясений.

Оценка сейсмических сил на основе элементов динамики сооружений связана с уточнением, приближающимся возможно больше к действительности, статико-динамических характеристик упругих систем, а также динамических свойств сейсмических волн и среды, в которой они распространяются.

Современный расчет сооружений, возведенных в сейсмических зонах, должен учитывать все эти элементы, влияющие на поведение систем, подвергающихся сейсмическим воздействиям.

Для Румынии делается в главе II, часть 4, предложение относительно оценки сейсмических сил на основе изменения спектральных сейсмических коэффициентов (см. формулу 11—7 и рисунки 19 и 20).

## MODERN CONCEPTIONS ON THE DETERMINATION OF SEISMIC FORCES

### ABSTRACT

This paper presents the most recent opinions concerning the determination of seismic forces on the basis of the response spectrum.

The determination of the seismic forces on the basis of the dynamic theory of structures involves a very accurate estimation of the static and dynamic characteristics of elastic structures, as well as of the dynamic

properties of seismic waves and of the medium through which these propagate.

A modern calculation of structures situated in seismic areas should consider all these elements which would influence the behaviour of structures subjected to the seismic action.

As regards Rumania, a proposal is presented for estimating the seismic forces on the basis of the variation of the spectral seismic coefficients (formula II—7 and figures 19 and 20).

## BIBLIOGRAFIE

1. BELEŞ AUREL A., IFRIM MIHAIL, *Aspecte actuale ale calculului construcţiilor la acţiunea seismică.* Consfătuirea de seismologie, tectonică seismică şi seismologie inginerească, Bucureşti 6—12 octombrie 1959.
2. BIOT M. A., *A Mechanical Analizer for the Prediction of Earthquake Stresses.* Bulletin of the Seismological Society of America, **31**, *2*, April (1941).
3. HOUSNER G. W., MARTEL R.R., ALFORD J.L., *Spectrum Analysis of Strong-Motion.* Bulletin of the Seismological Society of America, **43**, *2* (1953).
4. HOUSNER G.W., *Limit Design of Structures to Resist Earthquake.* World Conference on Earthquake Engineering, Berkeley, California, 1956.
5. HOUSNER G.W., *Earthquake Design Criteria for Stack-Like Structures. Discussion.* Proceedings ASCE, **84**, *7*, November (1958).
6. HOUSNER G.W., *Behaviour of Structures During Earthquakes.* Proceedings ASCE, **85**, oct. (1959).
7. HUDSON D.E., *Response Spectrum Techniques in Engineering Seismology.* World Conference on Earthquake Engineering, Berkeley, California, 1956.
8. IFRIM MIHAIL, *Appreciation on the Fundamental Vibration Frequency of Tall Structures Subjected to Seismic Action.* Revue de Mécanique appliquée, **IV**, *1* (1959).
9. IFRIM MIHAIL, *Propunere privind determinarea forţelor seismice pe teritoriul R.P.R. pe baza criteriului rigidităţii dinamice.* Revista construcţiilor şi materialelor de construcţii, ASIT, *3* (1960).
10. — *Influenţa perturbaţiilor seismice asupra structurilor elastice.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **XI**, *3* (1960).
11. КОРЧИНСКИЙ И. Л., *Сейсмические нагрузки на здания и сооружения.* Москва, 1959.
12. МЕДВЕДЕВ, С. В., *Определение баллийности землетрясений.* Бюллетень Совета по Сейсмологии, АН СССР, 6 (1957).
13. НАПЕТВАРИДЗЕ С. Г., *Особенности расчета гидротехнических сооружений на сейсмостойкость.* Сборник статей ТНИИСК, Москва (1958).
14. НАЗАРОВ А. Г., КАРАПЕТИАН Б. К., *Упрощенный способ расчета сооружений на сейсмостойкость.* Сборник статей ТНИИСК, Москва (1958).
15. НАЗАРОВ А. Г., *Метод инженерного анализа сейсмических сил.* Ереван, 1959.
16. ROSENBLUETH EMILIO, *Consideraciones sobre diseño seismico.* Mexico, Abril, 1959.
17. TSUI, EDWARD Y. W., *Aseismic Design of Structures by Rigidity Criterion.* Proceedings ASCE February, (1959).
18. — *Lateral Forces of Earthquake and Wind* Proceedings ASCE, **77**, April (1951).
19. — *Symposium on Earthquake and Blast Effects on Structures.* Los Angeles, California, 1952.
20. — *World Conference on Earthquake Engineering.* Berkeley, California, 1956.
21. — *Lateral Forces Building Code Requirements.* Recommendations of the Structural Engineers Association of Northen California, 1956.
22. — *Строительство в сейсмических районах.* Москва, 1957.
23. — *Нормы и правила строительства в сейсмических районах.* (С.Н.8—57), Москва, 1957.
24. — *Recommended Lateral Force Requirements.* Seismology Committee Structural Engineers Association of California, San-Francisco, July, 1959.
25. FERRY BORGES I., *Étude du comportement des constructions lors du tremblement de terre d'Agadir.* Lisbonne, Juin 1960.

# O METODĂ GENERALĂ DE REZOLVARE A PLĂCILOR DREPTUNGHIULARE

DE

MIRCEA SOARE [1]

## INTRODUCERE

Plăcile dreptunghiulare cu diferite rezemări pe contur au făcut obiectul a numeroase studii în literatura de specialitate. Cazul plăcii simplu rezemată în lungul a două laturi opuse poate fi tratat relativ simplu, cu ajutorul seriilor trigonometrice cu coeficienți variabili; calculul este mult ușurat cînd se poate găsi o soluție particulară sub formă finită, deoarece soluția ecuației omogene este o serie trigonometrică rapid convergentă.

Alte cazuri de rezemare se prezintă mult mai complex, conducînd, în general, la rezolvarea unor sisteme infinite de ecuații liniare pentru determinarea constantelor de integrare [3], [11].

Soluțiile numerice, obținute prin aplicarea metodei diferențelor finite, necesită alegerea unei rețele destul de dese, pentru obținerea unor rezultate acceptabile. Calculele numerice efectuate de P. Dubas cu metoda poligonului funicular [2] și de alții arată că la același număr de ochiuri ale rețelei, aproximațiile sînt mai slabe pentru încastrarea perfectă, decît pentru simpla rezemare a plăcii.

Aplicarea metodelor variaționale sub diferite forme a fost, de asemenea, larg aplicată în literatura de specialitate (vezi de exemplu [3], [4], [5], [8], [9], [10], [11], [14]), obținînd rezultate valoroase.

Vom mai remarca suplimentar un studiu al lui P. Lardy [6]; ideea soluției este foarte simplă și constă în utilizarea unor funcții care satisfac riguros condițiile limită pe două laturi opuse ale plăcii. Aceste funcții, denumite fundamentale, se deduc din linia elastică a grinzii supusă la vibrații transversale.

---

[1] Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor (INCERC).

Așa cum sînt aplicate în studiul amintit al lui Lardy, funcțiile fundamentale extind, pentru placa dreptunghiulară încastrată perfect pe contur, metoda seriilor duble trigonometrice (a lui Navier), aplicabilă plăcilor simplu rezemate.

Autorul apreciază că soluțiile cunoscute pînă acum în literatură nu derivă dintr-o metodă unitară, ceea ce face ca pentru fiecare tip de rezemare și mod de încărcare să se tatoneze o soluție.

Scopul lucrării de față este de a extinde metoda seriilor trigonometrice cu coeficienți variabili, utilizînd funcțiile fundamentale generale; prin aceasta pot fi satisfăcute *orice* condiții de rezemare în lungul laturilor, iar modul de calcul este perfect sistematizat.

Metoda a fost aplicată pentru prima dată, sub o formă puțin diferită de V. Z. Vlasov [13] la studiul plăcilor subțiri prismatice.

După cunoștința autorului, problema similară a plăcilor oblice (paralelogram) a fost studiată pentru un caz particular de V. Ille [4].

## § 1. RELAŢII GENERALE

Problema generală a plăcilor plane elastice se reduce la integrarea ecuației cu derivate parțiale.

$$\Delta\Delta w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p\,(x, y)}{K}, \tag{1.1}$$

în care $w$ reprezintă săgeata suprafeței mediane,

$K = \dfrac{E\delta^3}{12\,(1-\mu^2)}$ — modulul de rigiditate la încovoiere a plăcii,

$E$ — modulul de elasticitate a materialului,

$\delta$ — grosimea plăcii (presupusă constantă),

$\mu$ — coeficientul lui Poisson.

O dată determinată necunoscuta de bază $w$, celelalte mărimi rezultă din aplicarea relațiilor ce urmează :

— rotirile

$$\varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y}; \tag{1.2}$$

— momentele încovoietoare

$$\left.\begin{aligned} m_x &= -K\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & m_y &= -K\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ M_x &= m_x + \mu\, m_y, & M_y &= m_y + \mu\, m_x; \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

momentele de torsiune

$$M_{xy} = M_{yx} = -K\,(1-\mu)\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}; \tag{1.4}$$

— forțele tăietoare

$$Q_x = -K\frac{\partial}{\partial x}\Delta w, \qquad Q_y = -K\frac{\partial}{\partial y}\Delta w; \tag{1.5}$$

— forțele tăietoare generalizate

$$\left.\begin{aligned} T_x &= -K\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\right], \\ T_y &= -K\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}\right]; \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

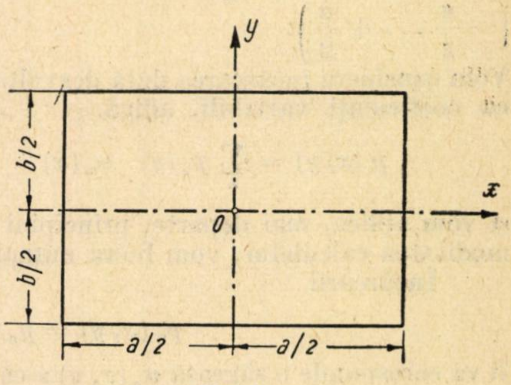


Fig. 1

— energia potențială totală a plăcii

$$\pi = \frac{K}{2}\iint\limits_{D}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - 2\frac{p(x, y)}{K}w\right]dx\,dy, \tag{1.7}$$

integrala dublă fiind extinsă pe întreg domeniul plăcii.

Sistemul de axe de coordonate se alege ca în figura 1.

## § 2. METODA GENERALĂ DE REZOLVARE

Vom căuta soluția ecuației (1.1) sub forma

$$w = \sum_n w_n = \sum_n W_n(y)\cdot\omega_n(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2.1}$$

în care $\omega_n(x)$ reprezintă o serie de funcții, pe care le denumim *funcții fundamentale*.

Expresia fiecăreia asemenea funcții cuprinde cîte patru constante arbitrare care se determină astfel încît să fie satisfăcute *toate* condițiile limită pe laturile paralele cu axa $Oy$.

Anticipînd cele dezvoltate la § 3, vom menționa că ele reprezintă soluții ale ecuației diferențiale

$$\frac{d^4\omega}{dx^4} - \frac{\alpha^4}{a^4}\omega = 0 \qquad (\alpha = \text{const.}). \tag{2.2}$$

Ele prezintă două particularități remarcabile și anume :

1° derivata a patra reproduce funcția, multiplicată cu o constantă (așa cum reiese direct din (2.2)) ;

2° funcțiile fundamentale sînt ortogonale în intervalul considerat $\left(-\frac{a}{2} \ldots +\frac{a}{2}\right)$.

Vom considera încărcarea dată dezvoltată în serie de funcții fundamentale cu coeficienți variabili, adică

$$p\,(x, y) = \sum_n p_n(y) \cdot \omega_n(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2.3}$$

și vom aplica, mai departe, principiul suprapunerii efectelor ; pentru comoditatea calculelor, vom lucra numai cu termenul de rang $n$.

Încărcării

$$p_n\,(x, y) = p_n\,(y) \cdot \omega_n\,(x), \tag{2.4}$$

îi va corespunde o săgeată $w_n(x, y)$ a cărei expresie are variabilele separate

$$w_n(x, y) = W_n(y) \cdot \omega_n(x). \tag{2.5}$$

Conform convenției admise, expresia (2.5) satisface condițiile limită pe laturile opuse paralele cu axa $Oy$, fie $x = \pm \frac{a}{2}$.

Urmează că funcția încă necunoscută $W_n(y)$ va trebui să fie astfel determinată încît să satisfacă condițiile pe laturile $y = \pm \frac{b}{2}$.

Ecuația cu derivate parțiale pe care trebuie s-o satisfacă soluția (2.5) se obține din (1.1), ținînd seamă de (2.4).

$$\frac{\partial^4 w_n}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 w_n}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w_n}{\partial y^4} = \frac{p_n(y) \cdot \omega_n(x)}{K}. \tag{2.6}$$

Introducînd expresia (2.5) în (2.6) se constată că nu o verifică astfel încît precizarea funcției $W_n(y)$ urmează să se facă printr-o metodă variațională.

Soluția aleasă trebuie să satisfacă condiția de minim a energiei totale a plăcii, dată de (1.7).

Se știe (vezi de exemplu [5]) că în metoda Ritz-Galerkin se alege soluția generală sub forma

$$w = \sum_k c_k \cdot \varphi_k(x, y), \tag{2.7}$$

în care funcțiile $\varphi_k$ satisfac toate condițiile limită. Constantele $c_k$ se determină din sistemul

$$\frac{\partial \pi}{\partial c_k} = \iint_D \left(\Delta\Delta w - \frac{p}{K}\right) \varphi_k \cdot dxdy = 0. \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.8}$$

Vom aplica acum metoda precedentă, într-o formă propusă de L. V. Kantorovici [5] fapt prin care problema minimului integralei duble se reduce la problema minimului unei integrale simple. ,,Avantajul acestei metode, în afară de precizia ei mare, constă în faptul că în ea numai o parte a expresiei care dă soluția se alege aprioric, iar o parte din funcții se determină potrivit caracterului problemei''[1]).

De aceea în (2.7) vom putea lua

$$c_n = W_n(y), \quad \varphi_n = \omega_n(x).$$

Cu aceasta, integrala dublă din (2.8) se scrie

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \left( W_n \cdot \omega_n^{\mathrm{IV}} + 2W_n'' \cdot \omega_n'' + W_n^{\mathrm{IV}} \cdot \omega_n - \frac{p_n \omega_n}{K} \right) \omega_n \, dx dy = 0,$$

în care semnele $''$ și $^{\mathrm{IV}}$ reprezintă ordinul de derivare în raport cu $x$ sau $y$, după funcția la care se referă.

Vom integra mai întîi în raport cu $x$ obținînd

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left[ W_n^{\mathrm{IV}} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \omega_n^2 \, dx + 2W_n'' \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \omega_n'' \, \omega_n \, dx + W_n \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \omega_n^{\mathrm{IV}} \, \omega_n \, dx - \right.$$
$$\left. - \frac{p_n}{K} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \omega_n^2 \, dx \right] = 0. \tag{2.9}$$

Luînd $\omega_n^{\mathrm{IV}} = \frac{\alpha_n^4}{a^4} \omega_n$ — conform (2.2) —, notînd

$$\beta_n \cdot \frac{\alpha_n^2}{a^2} = - \frac{\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \omega_n'' \, \omega_n \, dx}{\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \omega_n^2 \, dx} \tag{2.10}$$

și observînd că, condiția ca integrala (2.9) să fie nulă este ca funcția de integrat să fie nulă, se ajunge, pentru determinarea lui $W_n(y)$, la următoarea ecuație diferențială :

$$W_n^{\mathrm{IV}} - 2\beta_n \frac{\alpha_n^2}{a^2} W_n'' + \frac{\alpha_n^4}{a^4} W_n = \frac{p_n(y)}{K}. \tag{2.11}$$

---

[1]) Loc. cit. [5], p. 426.

*Tabela 1* [1]

| Variația parametrului β | Natura rădăcinilor | Valorile rădăcinilor [2] | | $\overline{W} =$ [3] | Soluție tip nr. |
|---|---|---|---|---|---|
| $\beta < -1$ | patru rădăcini imaginare pure | $r_1 = i\gamma_1$<br>$\gamma_1 = \sqrt{\frac{-\beta+1}{2}} + \sqrt{\frac{-\beta-1}{2}}$ | $r_2 = i\gamma_2$<br>$\gamma_2 = \sqrt{\frac{-\beta+1}{2}} - \sqrt{\frac{-\beta-1}{2}}$ | $C_1 \cdot \cos\gamma_1\alpha\frac{y}{a} + C_2 \cdot \cos\gamma_2\alpha\frac{y}{a} +$<br>$+ C_3 \cdot \sin\gamma_1\alpha\frac{y}{a} + C_4 \cdot \sin\gamma_2\alpha\frac{y}{a}$ | 1 |
| $\beta = -1$ | două rădăcini imaginare duble | $r_1 = r_2 = i$ | | $\left(C_1 + C_3\frac{\alpha y}{a}\right)\cos\frac{\alpha y}{a} + \left(C_4 + C_2\frac{\alpha y}{a}\right)\sin\frac{\alpha y}{a}$ | 2 |
| $-1 < \beta < 1$ | patru rădăcini complexe | $r_1 = \gamma_1 + i\gamma_2$<br>$\gamma_1 = \sqrt{\frac{1+\beta}{2}}$ | $r_2 = \gamma_1 - i\gamma_2$<br>$\gamma_2 = \sqrt{\frac{1-\beta}{2}}$ | $C_1 \cdot \operatorname{ch}\gamma_1\alpha\frac{y}{a}\cos\gamma_2\alpha\frac{y}{a} +$<br>$+ C_2 \cdot \operatorname{sh}\gamma_1\alpha\frac{y}{a}\sin\gamma_2\alpha\frac{y}{a} +$<br>$+ C_3 \cdot \operatorname{ch}\gamma_1\alpha\frac{y}{a}\sin\gamma_2\alpha\frac{y}{a} +$<br>$+ C_4 \cdot \operatorname{sh}\gamma_1\alpha\frac{y}{a}\cos {}_2\gamma\,\alpha\frac{y}{a}$ | 3 |
| $\beta = 1$ | două rădăcini reale duble | $r_1 = r_2 = 1$ | | $\left(C_1 + C_3\frac{\alpha y}{a}\right)\operatorname{ch}\frac{\alpha y}{a} + \left(C_4 + C_2\frac{\alpha y}{a}\right)\operatorname{sh}\frac{\alpha y}{a}$ [4] | 4 |
| $\beta > 1$ | patru rădăcini reale | $r_1 = \gamma_1$<br>$\gamma_1 = \sqrt{\frac{\beta+1}{2}} + \sqrt{\frac{\beta-1}{2}}$ | $r_2 = \gamma_2$<br>$\gamma_2 = \sqrt{\frac{\beta+1}{2}} - \sqrt{\frac{\beta-1}{2}}$ | $C_1 \cdot \operatorname{ch}\gamma_1\alpha\frac{y}{a} + C_2 \cdot \operatorname{ch}\gamma_2\alpha\frac{y}{a} +$<br>$+ C_3 \cdot \operatorname{sh}\gamma_1\alpha\frac{y}{a} + C_4 \cdot \operatorname{sh}\gamma_2\alpha\frac{y}{a}$ | 5 |

[1] Pentru simplificare, s-a suprimat indicele $n$.

[2] $r_3 = -r_1$; $r_4 = -r_2$.

[3] Coeficienții $C_1$, $C_2$ definesc soluția pară, iar coeficienții $C_3$, $C_4$ soluția impară a ecuației (2.12).

[4] Reprezintă soluția riguroasă pentru plăcile simplu rezemate pe două laturi opuse.

Vom presupune cunoscută o soluție particulară $W_n^{(0)}$ a ecuației (2.11). Aceasta se poate obține prin încercări sau mai general, prin metoda variației constantelor, o dată cunoscută soluția ecuației omogene

$$\overline{W}_n^{IV} - 2\beta_n \frac{\alpha_n^2}{a^2}\overline{W}_n'' + \frac{\alpha_n^4}{a^4}\overline{W}_n = 0. \tag{2.12}$$

Pentru acesta, se caută soluții de forma

$$\overline{W}_n = e^{\frac{r_n \alpha_n y}{a}}. \tag{2.13}$$

Constantele $r_n$ rezultă din ecuația caracteristică

$$r_n^4 - 2\beta_n r_n^2 + 1 = 0. \tag{2.14}$$

Discuția rădăcinilor $r_n$ și forma reală a soluțiilor $\overline{W}_n$ este trecută în tabela 1.

Putem trece acum la studierea funcțiilor fundamentale.

## § 3. FUNCȚIILE FUNDAMENTALE

La studiul vibrațiilor transversale ale grinzilor drepte, ținînd seamă de masa proprie, se ajunge la ecuația cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + k \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

a cărei soluție se poate obține prin metoda separării variabilelor sub forma

$$w(x, t) = T(t) \cdot \omega(x).$$

Reținem numai ecuația diferențială obișnuită, care determină pe $\omega$ și care este (2.2). Parametrul $\alpha$ reprezintă o valoare proprie care urmează a fi determinată.

Soluția generală a ecuației (2.2) se poate pune sub forma

$$\omega(x) = A_1 \cdot \sin \alpha \frac{x}{a} + A_2 \cdot \cos \alpha \frac{x}{a} + A_3 \cdot \operatorname{sh} \alpha \frac{x}{a} + A_4 \cdot \operatorname{ch} \alpha \frac{x}{a}, \tag{3.1}$$

în care $A_1, A_2, A_3, A_4$, reprezintă constante de integrare, iar $\alpha$ o constantă ce se determină dintr-o condiție de compatibilitate.

Pentru exemplificare, ne vom fixa, mai departe, la un caz particular de rezemare, anume încastrarea perfectă la ambele capete.

Condițiile limită sînt

$$\text{pentru } x = \pm \frac{a}{2} \rightarrow \omega\left(\pm \frac{a}{2}\right) = 0 \quad \text{și} \quad \omega'\left(\pm \frac{a}{2}\right) = 0.$$

Aceste condiții se scriu explicit

$$\left.\begin{aligned}
+ A_1 \sin\frac{\alpha}{2} + A_2 \cos\frac{\alpha}{2} + A_3 \operatorname{sh}\frac{\alpha}{2} + A_4 \operatorname{ch}\frac{\alpha}{2} &= 0,\\
- A_1 \sin\frac{\alpha}{2} + A_2 \cos\frac{\alpha}{2} - A_3 \operatorname{sh}\frac{\alpha}{2} + A_4 \operatorname{ch}\frac{\alpha}{2} &= 0,\\
+ A_1 \cos\frac{\alpha}{2} - A_2 \sin\frac{\alpha}{2} + A_3 \operatorname{ch}\frac{\alpha}{2} + A_4 \operatorname{sh}\frac{\alpha}{2} &= 0,\\
+ A_1 \cos\frac{\alpha}{2} + A_2 \sin\frac{\alpha}{2} + A_3 \operatorname{ch}\frac{\alpha}{2} - A_4 \operatorname{sh}\frac{\alpha}{2} &= 0.
\end{aligned}\right\}$$

Cele patru ecuații care determină constantele $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ fiind omogene, condiția de existență a unei soluții nebanale este ca determinantul principal să fie nul. Dezvoltînd acest determinant rezultă condiția

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \operatorname{th}^2\frac{\alpha}{2},$$

care se separă în următoarele două condiții :

$$\operatorname{th}\frac{\alpha}{2} = -\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \qquad (3.2\ \text{a})$$

$$\operatorname{th}\frac{\alpha}{2} = +\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}. \qquad (3.2\ \text{b})$$

Se constată că fiecare din cele două ecuații transcendente (3.2) are o infinitate de rădăcini $\alpha_n$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ deci există o infinitate de funcții $\omega_n(x)$. De aceea, soluția generală a ecuației diferențiale (2.2) poate fi considerată ca o dezvoltare în serie de funcții fundamentale, la care fiecare termen satisface condițiile marginale.

Rădăcinile ecuației (3.2 a) definesc funcții $\omega_n(x)$ pare, adică simetrice în raport cu originea; rădăcinile ecuației (3.2 b) definesc funcții $\omega_n(x)$ impare, adică antisimetrice în raport cu originea.

Să ne ocupăm de prima soluție (pară). Luînd

$$A_1 = A_3 = 0\,; \quad A_2 = -\frac{1}{\cos\frac{\alpha_n}{2}}\,; \quad A_4 = +\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\alpha_n}{2}},$$

rezultă familia de funcții fundamentale pare

$$\omega_n(x) = \frac{\operatorname{ch} \alpha_n \frac{x}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\alpha_n}{2}} - \frac{\cos \alpha_n \frac{x}{a}}{\cos \frac{\alpha_n}{2}}. \quad (n = 1, 3, 5 \ldots) \tag{3.3}$$

Prima valoare proprie, rezultînd din rezolvarea ecuației (3.2 a) este

$$\alpha_1 = 4{,}730.08.$$

Pentru valorile următoare, avem cu bună aproximație

$$\alpha_n \approx \frac{2n+1}{2}\pi \qquad (n = 3, 5, 7, \ldots)$$

$\left(\text{deoarece pentru } \alpha_n > 6 \text{ avem } \operatorname{th} \frac{\alpha_n}{2} \approx 1\right).$

Valorile funcției $\omega_1(x)$ și ale primelor sale trei derivate — vezi formulele (3.5) — sînt trecute în tabela 2 și reprezentate în figura 2.

*Tabela 2*

| $x/a$ | $\omega_1$ | $\frac{a}{\alpha_1} \cdot \omega_1'$ | $\frac{a^2}{\alpha_1^2} \cdot \omega_1''$ | $\frac{a^3}{\alpha_1^3} \cdot \omega_1'''$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,588.10 | 0 | −1,215.61 | 0 |
| 0,05 | 1,554.31 | −0,284.01 | −1,171.35 | 0,372.93 |
| 0,10 | 1,455.42 | −0,547.22 | −1,040.47 | 0,730.06 |
| 0,15 | 1,298.69 | −0,769.74 | −0,828.43 | 1,056.77 |
| 0,20 | 1,095.96 | −0,933.34 | −0,543.97 | 1,340.69 |
| 0,25 | 0,863.10 | −1,022.22 | −0,198.36 | 1,572.78 |
| 0,30 | 0,619.37 | −1,023.38 | +0,195.48 | 1,748.09 |
| 0,35 | 0,386.73 | −0,927.03 | +0,624.00 | 1,866.61 |
| 0,40 | 0,189.09 | −0,726.52 | +1,074.34 | 1,933.78 |
| 0,45 | 0,051.61 | −0,418.06 | +1,535.52 | 1,960.78 |
| 0,50 | 0 | 0 | +2,000.00 | 1,964.87 |

În mod analog se pot obține funcțiile impare sub forma

$$\omega_n(x) = \frac{\operatorname{sh} \alpha_n \dfrac{x}{a}}{\operatorname{sh} \dfrac{\alpha_n}{2}} - \frac{\sin \alpha_n \dfrac{x}{a}}{\sin \dfrac{\alpha_n}{2}}, \qquad (n = 2, 4, 6 \ldots), \tag{3.4}$$

în care valorile proprii au următoarele valori asimptotice

$$\alpha_n \approx \frac{2n+1}{2}\pi \qquad (n = 2,\ 4, 6 \ldots).$$

Aceste funcții au fost întabulate de V. Z. Vlasov [13], [14] sub o altă formă. Alegînd originea la marginea plăcii (în loc de centru cum am ales-o în prezenta lucrare) funcțiile simetrice și antisimetrice nu se mai separă, păstrînd forma generală (3.1).

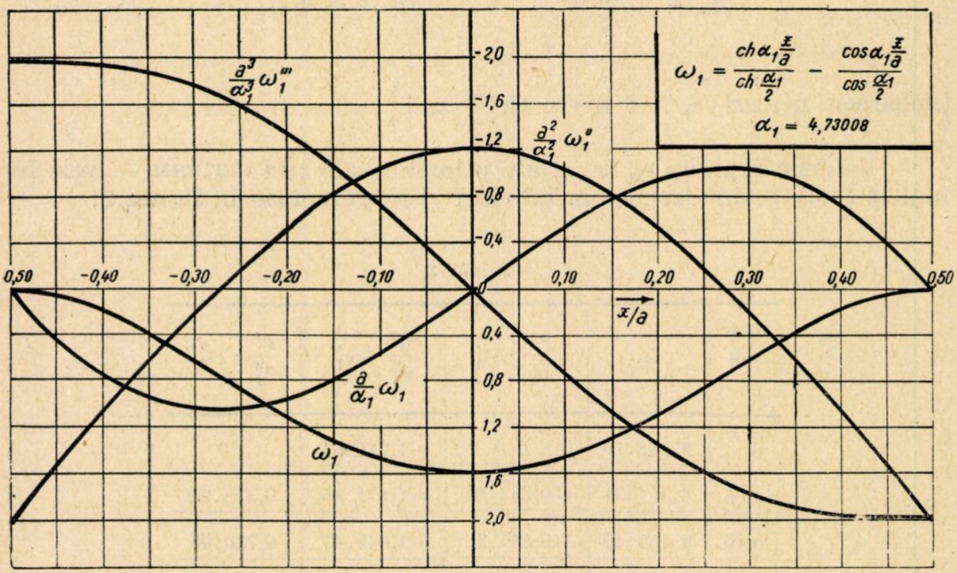


Fig. 2

Valorile numerice din tabela 2 diferă de cele calculate de Vlasov prin factorul $\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2} = -\operatorname{th}\frac{\alpha_1}{2} = -0{,}98252$, fapt care nu alterează rezultatele, întrucît ecuația (2.2) este omogenă.

În lucrările citate [13], [14] ale lui V. Z. Vlasov sînt întabulate funcțiile fundamentale corespunzătoare la 6 cazuri de rezemare diferite.

În particular, pentru ambele capete simplu rezemate, se regăsesc liniile trigonometrice sin și cos, cărora le corespunde soluția riguroasă pentru $W_n(y)$ (vezi tabela 1, cazul $\beta = 1$).

Pentru calculele noastre ulterioare este necesar să mai calculăm următoarele expresii (ne limităm la funcțiile simetrice):

$$\left.\begin{aligned}
\omega_n'(x) &= \frac{\alpha_n}{a}\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha_n\frac{x}{a}}{\operatorname{ch}\frac{\alpha_n}{2}}+\frac{\sin\alpha_n\frac{x}{a}}{\cos\frac{\alpha_n}{2}}\right),\\
\omega_n''(x) &= \frac{\alpha_n^2}{a^2}\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha_n\frac{x}{a}}{\operatorname{ch}\frac{\alpha_n}{2}}+\frac{\cos\alpha_n\frac{x}{a}}{\cos\frac{\alpha_n}{2}}\right),\\
\omega_n'''(x) &= \frac{\alpha_n^3}{a^3}\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha_n\frac{x}{a}}{\operatorname{ch}\frac{\alpha_n}{2}}-\frac{\sin\alpha_n\frac{x}{a}}{\cos\frac{\alpha_n}{2}}\right);
\end{aligned}\right\}\tag{3.5}$$

$$\left.\begin{aligned}
\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\omega_n''\,\omega_n\,dx &= \frac{\alpha_n^2}{a^2}\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\left(\frac{\operatorname{ch}^2\alpha_n\frac{x}{a}}{\operatorname{ch}^2\frac{\alpha_n}{2}}-\frac{\cos^2\alpha_n\frac{x}{a}}{\cos^2\frac{\alpha_n}{2}}\right)dx =\\
&= -a\operatorname{tg}\frac{\alpha_n}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha_n}{2}+\frac{2}{\alpha_n}\right),\\
\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\omega_n^2\,dx &= a\left(\frac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{\alpha_n}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha_n}{2}}\right)=2a.
\end{aligned}\right\}\tag{3.6}$$

Pentru diferite valori $\alpha_n$, coeficientul $\beta_n$ dat de (2.10) devine

$$\beta_n=\operatorname{tg}\frac{\alpha_n}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha_n}{2}+\frac{2}{\alpha_n}\right),$$

sau cu valori numerice

$$\beta_1 = 0{,}549.91,$$

$$\beta_n \approx 1-\frac{4}{(2n+1)\,\pi}. \qquad (n=3,\,5,\,7,\ldots).$$

Pentru aceste valori ale lui $n$ rezultă că $0<\beta_n<1$, adică soluția pentru $\overline{W}_n(y)$ este de tipul 3 (vezi tabela 1).

## § 4. PLACA ÎNCASTRATĂ PERFECT PE CONTUR, ÎNCĂRCATĂ CU SARCINĂ UNIFORM DISTRIBUITĂ

Vom exprima în primul rînd încărcarea sub formă de serie de funcții fundamentale

$$p\,(x, y) \equiv p = \sum_n p_n \cdot \omega_n(x),$$

în care coeficienții $p_n$ rezultă din relația generală

$$p_n = \frac{p \displaystyle\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \omega_n(x)\,dx}{\displaystyle\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \omega_n^2(x)\,dx} = \frac{4 \operatorname{th} \dfrac{\alpha_n}{2}}{\alpha_n}\,p,$$

cu

$$p_1 = 0{,}83087\,p,$$

$$p_n \approx \frac{8p}{(2n+1)\,\pi} \qquad (n = 3, 5, 7\dots)$$

O soluție particulară $w^{(0)}$ se poate găsi prin analogie cu grinda dublu încastrată :

$$w^{(0)} = \frac{pa^4}{384\,K}\left(1 - 8\,\frac{x^2}{a^2} + 16\,\frac{x^4}{a^4}\right), \tag{4.1 a}$$

care satisface ecuația (1.1). Soluția precedentă se poate exprima și sub formă de serie de funcții fundamentale

$$w^{(0)} = \sum_n \frac{p_n a^4}{K\alpha_n^4} \cdot \omega_n(x) \qquad (n = 1, 3, 5\dots). \tag{4.1 b}$$

Factorul $p_n a^4/K\alpha_n^4$ joacă rolul soluției particulare $W_n^{(0)}$ a ecuației (2.11).

Din soluția omogenă vom reține doar termenii pari (vezi tabela 1, cazul 3). Scoțînd termenul dimensional în factor, soluția pentru săgeți se va scrie în funcție de două constante de integrare

$$\begin{aligned} w\,(x, y) = \sum_n \frac{p_n a^4}{K\alpha_n^4}\Big(1 &+ C_{1n} \operatorname{ch} \gamma_{1n}\,\alpha_n\,\frac{y}{a} \cdot \cos \gamma_{2n}\,\alpha_n\,\frac{y}{a} + \\ &+ C_{2n} \operatorname{sh} \gamma_{1n}\,\alpha_n\,\frac{y}{a}\,\sin \gamma_{2n}\,\alpha_n\,\frac{y}{a}\Big)\,\omega_n(x)\,; \qquad (n = 1, 3, 5\dots) \end{aligned} \tag{4.2}$$

și analog prima derivată

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\sum_n \frac{p_n a^3}{K\alpha_n^3}\left[C_{1n}\left(\gamma_{1n}\,\mathrm{sh}\,\gamma_{1n}\alpha_n\frac{y}{a}\cos\gamma_{2n}\alpha_n\frac{y}{a}-\gamma_{2n}\,\mathrm{ch}\,\gamma_{1n}\alpha_n\frac{y}{a}\sin\gamma_{2n}\alpha_n\frac{y}{a}\right)+\right.$$

$$\left.+\,C_{2n}\left(\gamma_{1n}\,\mathrm{ch}\,\gamma_{1n}\alpha_n\frac{y}{a}\cdot\sin\gamma_{2n}\alpha_n\frac{y}{a}+\gamma_{2n}\,\mathrm{sh}\,\gamma_{1n}\alpha_n\frac{y}{a}\cos\gamma_{2n}\alpha_n\frac{y}{a}\right)\right]\omega_n(x).\quad(4.3)$$

Constantele $C_{1n}$ și $C_{2n}$ se determină din condițiile

$$\text{pentru } y=\pm\frac{b}{2}\quad\rightarrow\quad w=0\quad\text{și}\quad\frac{\partial w}{\partial y}=0.$$

Notînd

$$\frac{\gamma_{1n}\alpha_n b}{2a}=u_n,\qquad\frac{\gamma_{2n}\alpha_n b}{2a}=v_n,\qquad(4.4)$$

cele două condiții se scriu

$$\left.\begin{aligned}&C_{1n}\cdot\mathrm{ch}\,u_n\cos v_n+C_{2n}\cdot\mathrm{sh}\,u_n\sin v_n=0,\\&C_{1n}(\gamma_{1n}\,\mathrm{sh}\,u_n\cos v_n-\gamma_{2n}\,\mathrm{ch}\,u_n\sin v_n)+C_{2n}(\gamma_{1n}\,\mathrm{ch}\,u_n\sin v_n+\gamma_{2n}\,\mathrm{sh}\,u_n\cos v_n)=0,\end{aligned}\right\}$$

cu rădăcinile

$$\left.\begin{aligned}C_{1n}&=-\frac{u_n\,\mathrm{ch}\,u_n\sin v_n+v_n\,\mathrm{sh}\,u_n\cos v_n}{u_n\sin v_n\cos v_n+v_n\,\mathrm{sh}\,u_n\,\mathrm{ch}\,u_n},\\C_{2n}&=+\frac{u_n\,\mathrm{sh}\,u_n\cos v_n-v_n\,\mathrm{ch}\,u_n\sin v_n}{u_n\sin v_n\cos v_n+v_n\,\mathrm{sh}\,u_n\,\mathrm{ch}\,u_n}.\end{aligned}\right\}\quad(4.5)$$

Să calculăm de exemplu săgeata la centrul plăcii ($x=y=0$). Din formula (4.2) și ținînd seamă că soluția particulară are forma finită (4.1 a) rezultă

$$w_{\max}=\frac{pa^4}{384\,K}+\sum_n\frac{p_n a^4}{K\alpha_n^4}\,C_{1n}\cdot\omega_n(0).$$

Se observă ușor că seria precedentă este rapid convergentă, termenul general avînd rangul $1/n^5$.

Pentru aplicația numerică, vom reține doar primul termen și vom presupune că placa este patrată adică $a=b$.

Cu aceste precizări, rezultă succesiv

$$\gamma_{11} = \sqrt{\frac{1+\beta_1}{2}} = 0{,}880.31\,; \qquad \gamma_{21} = \sqrt{\frac{1-\beta_1}{2}} = 0{,}474.39$$

$$u_1 = \frac{\gamma_{11}\,\alpha_1}{2} = \frac{0{,}880.31 \times 4{,}730.08}{2} = 2{,}081.97,$$

$$v_1 = \frac{\gamma_{21}\,\alpha_1}{2} = 1{,}121.95,$$

$$\operatorname{sh} u_1 = 3{,}9479\,; \qquad \operatorname{ch} u_1 = 4{,}0726\,;$$

$$\sin v_1 = 0{,}900.97\,; \qquad \cos v_1 = 0{,}433.88.$$

$$C_{11} = -\frac{2{,}081.97 \times 0{,}900.97 \times 4{,}0726 + 1{,}121.95 \times 3{,}9479 \times 0{,}433.88}{2{,}081.97 \times 0{,}900.97 \times 0{,}433.88 + 1{,}121.95 \times 3{,}9479 \times 4{,}0726} = -\,0{,}507.15.$$

$$\frac{p_1}{\alpha_1^4} = \frac{4 \operatorname{th} \frac{\alpha_1}{2}}{\alpha_1^5}\, p = \frac{0{,}830.87}{4{,}73008^4}\, p = 0{,}001.659.8\, p\,; \qquad \omega_1(0) = 1{,}588.10$$

$$w_{\max.} = \frac{pa^4}{K}\left[\frac{1}{384} - 0{,}001.659.8 \times 0{,}507.15 \times 1{,}588.10\right] = 0{,}001.267\,\frac{pa^4}{K}.$$

După Timoshenko, soluția exactă este $0{,}00126\,\frac{pa^4}{K}$, iar după Girkmann $0{,}00127\,\frac{pa^4}{K}$. Se vede astfel că am obținut practic valoarea exactă.

Pentru obținerea momentelor încovoietoare este necesar să se ia în considerare și al doilea termen al dezvoltării în serie.

*Primită la redacție la 16 noiembrie 1960*

## ОБЩИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК

### РЕЗЮМЕ

Представляется унитарный вариационный метод для исследования прямоугольных пластинок с произвольным опорным закреплением. Метод основывается на применении фундаментальных функций. Он содержит в качестве строго точного частного случая метод тригонометрических рядов с переменными коэффициентами для прямоугольной пластинки, свободно опертой по контуру.

Рассматривается более детально прямоугольная пластинка, полностью защемленная по контуру, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой. Численный пример даёт для максимального прогиба значение, равное полученному более трудоемким путем при помощи точного метода.

## UNE MÉTHODE GÉNÉRALE POUR LA SOLUTION DES DALLES RECTANGULAIRES

### RÉSUMÉ

On expose une méthode variationnelle unitaire pour l'étude des dalles rectangulaires à appuis arbitraires. La méthode utilise les fonctions fondamentales ; elle comprend comme un cas particulier, rigoureusement exact, la méthode des séries trigonométriques à coefficients variables pour la dalle rectangulaire simplement appuyée sur le contour.

L'étude de la dalle rectangulaire encastrée, sous charge uniforme, est plus détaillée. L'application numérique indique pour la déformation de flexion maximum la même valeur que celle fournie par la méthode exacte, bien plus laborieuse.

### BIBLIOGRAFIE

1. A. A. BELEȘ, R. P. VOINEA, *Rezistența materialelor, II — pentru ingineri constructori*. Ed. tehnică, București, 1958, 251.
2. P. DUBAS, *Calcul numérique des plaques*. Ed. Leemann, Zürich, 1955, 96.
3. K. GIRKMANN, *Flächentragwerke*, 4-te Aufl., Springer-Verlag, Wien, 1956, 226.
4. V. ILLE, *Deformații și solicitări într-o placă oblică*. Inst. Politehnic Cluj, Lucrări științifice, 2, 1959.
5. L. V. KANTOROVICI, V. I. KRILOV, *Metode de aproximație ale analizei superioare*, Inst. Studii Romîno-Sovietice al Acad. R.P.R., București, 1956, 450.
6. P. LARDY, *Über eine neue Lösungsmethode des Problems der eingespannten Rechteckplatte*. Abhandl. der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, **XIII**, Zürich, 1953. 197.
7. R. L'HERMITE, *Résistance des Matériaux théorique et expérimentale*. **I**. Ed. Dunod, Paris, 1954, 523.
8. S. T. A. ÖDMAN, *Studies on Boundary Value Problems*. Stockholm, 1955.
9. I. A. PRATUSEVICI, *Metode variaționale în mecanica construcțiilor*. Inst. documentare tehnică, București, 1955, 257.
10. SEMENOV, *Aplicarea metodei variaționale a prof. L. V. Kantorovici la rezolvarea problemelor deformării plăcilor dreptunghiulare subțiri*. Прикладная математика и механика, 4, 107 (1940).
11. ST. P. TIMOSHENKO, S. WOINOWSKY-KRIEGER, *Theory of Plates and Shells*. 2d Ed., Mc Graw-Hill Book Company, New York-Toronto-London, 1959, 202.
12. Д. В. ВАЙНБЕРГ, Е. Д. ВАЙНБЕРГ, *Пластины, Диски, Балки-Стенки*. Государственное издательство Литературы по строительству и архитектуре УССР, Киев, 1959, 452.
13. В. З. ВЛАСОВ, *Общая теория оболочек и ее приложение в технике*. Гостехиздат, Москва, 1949.
14. — *Тонкостенные пространственные системы*. Госстройиздат, Москва, 1958, 405.

[illegible]

## [illegible]

### RÉSUMÉ

[illegible]

[illegible]

BIBLIOGRAFIE

1. [illegible]
2. [illegible]
3. [illegible]
4. [illegible]
5. [illegible]
6. [illegible]
7. [illegible]
8. [illegible]
9. [illegible]
10. [illegible]
11. [illegible]
12. [illegible]
13. [illegible]
14. [illegible]

# PLĂCI REZEMATE PE UN SEMISPAȚIU SOLID, SOLICITATE DINAMIC

DE

H. SANDI[1]

## 1. INTRODUCERE

Obiectul lucrării este formularea matematică, în cadrul unor ipoteze curent admise, a problemei de contact dinamic între o placă și un semispațiu solid.

Un număr mare de probleme practice conduc la necesitatea studiului unor astfel de probleme de contact. Acesta este cazul, spre exemplu, al structurilor de rezistență ale construcțiilor solicitate dinamic, rezemate pe teren prin intermediul unor fundații deformabile.

Încercările făcute în literatură de a se studia probleme de solicitare dinamică a unor corpuri rezemate pe semispațiul elastic au plecat, în general pînă acum, de la ipoteze simplificatoare (ipoteza tasării proporționale instantanee, ipoteza Winkler în regim dinamic — eventual pentru rezemare vîscoelastică — ipoteza distribuției liniare a tensiunilor pe suprafața de contact etc.).

În lucrare este expusă o metodă generală de studiu pentru problemele de contact dinamic cu suprafață de contact dată, cu aplicație la cazul contactului dintre placă și semispațiul solid. Metoda conduce la descrierea fenomenului printr-o ecuație integrală vectorială multiplă de tip Volterra-Fredholm. Adoptarea diferitelor ipoteze simplificatoare de tipul celor enumerate mai sus, conduce la degenerarea ecuației în ecuații mai simple.

## 2. ECUAȚIILE DE CONTINUITATE

### 2.1. IPOTEZE

În cele de mai jos vor fi admise următoarele ipoteze :

*a*) Există liniaritate geometrică (deplasările, deformațiile și derivatele lor în raport cu timpul sînt de patrat neglijabil).

---

[1] Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor (INCERC).

*b*) Există liniaritate fizică (proprietățile reologice ale materialelor pot fi descrise printr-o lege liniară, intensitatea fenomenului nefiind atît de mare încît să producă deformații plastice sau separarea corpurilor în contact).

*c*) Mulțimea punctelor de contact este dată și rămîne fixă pe toată durata fenomenului.

Ipotezele adoptate asigură posibilitatea descrierii fenomenului cu ajutorul unor relații matematice liniare.

## 2.2. INFLUENȚA FORȚELOR DINAMICE ASUPRA MIȘCĂRII CORPURILOR DEFORMABILE

Se va considera un corp deformabil, care satisface ipotezele *a*) și *b*) de mai sus și ale cărui puncte materiale acoperă domeniul $\Omega$. Dacă pe o mulțime măsurabilă de puncte, $\Sigma$, $(\Sigma \subset \Omega)$ se dă un sistem de forțe dinamice distribuite, $\frac{\partial F^j}{\partial \Sigma}(Q, t)$, $(Q \in \Sigma)$, iar aceste forțe dinamice sînt de patrat integrabil spațial la orice moment $t$, $(t \geqslant t_0)$, atunci deplasările dinamice ale punctelor materiale $P$, $(P \in \Omega)$, se pot exprima pentru $t \geqslant t_0$ cu ajutorul formulei (cu sumarea automată a indicilor muți)

$$u^{*i}(P, t) = u^{0i}(P, t) + \int_{\Sigma} \int_{t_0}^{t} \frac{\partial u^i}{\partial H^j}(P, Q; t-\tau) \frac{\partial F^j}{\partial \Sigma}(Q, \tau)\, d\tau\, d\Sigma(Q). \tag{1}$$

În expresia (1) s-au utilizat următoarele notații :

$u^{0i}(P, t)$ — deplasările dinamice neperturbate ale punctului $P$ $\left(\text{presupunînd forțele } \frac{\partial F^j}{\partial \Sigma}(Q, t) \text{ nule}\right)$;

$u^{*i}(P, t)$ — deplasările dinamice ale punctului $P$, perturbate de acțiunea forțelor $\frac{\partial F^j}{\partial \Sigma}(Q, t)$;

$\frac{\partial u^i}{\partial H^j}(P, Q; t)$ — deplasările $u^i(P, t)$ produse de percusiunea concentrată (adică de sistemul de forțe avînd componenta $j$ egală cu $\delta(P-Q) \cdot \delta(t)$, unde $\delta(t)$ este funcția generalizată a lui Dirac, unidimensională, iar $\delta(P-Q)$ este funcția generalizată a lui Dirac de dimensiune egală cu aceea a domeniului $\Omega$);

$\frac{\partial F^j}{\partial \Sigma}(Q, t)$ — densitatea forțelor dinamice distribuite, în punctul $Q$, $(Q \in \Sigma)$, la momentul $t$;

$d\Sigma(Q)$ — măsura elementului mulțimii $\Sigma$ în punctul $Q$.

Din dinamica solidului deformabil este cunoscută proprietatea de simetrie

$$\frac{\partial u^i}{\partial H^j}(P,\ Q\,;\ t) = \frac{\partial u^j}{\partial H^i}(Q,\ P\,;\ t). \tag{2}$$

Relaţiile (1) şi (2) rezultă din aplicarea proprietăţii dinamice de reciprocitate. Ordinea de integrare în (1) poate fi schimbată în cazurile practice.

În cele de mai jos se va presupune că mulţimea $\Sigma$ este reuniunea unei mulţimi finite de domenii separate.

### 2.3. DEDUCEREA ECUAŢIILOR DE CONTINUITATE

Fie două corpuri deformabile, $C_{\mathrm{I}}$ şi $C_{\mathrm{II}}$, între care există contact pe partea comună, $\Sigma$, a suprafeţei lor exterioare. Mulţimea $\Sigma$ se va numi suprafaţa de contact a celor două corpuri.

În vederea stabilirii ecuaţiilor de continuitate pe întinderea suprafeţei de contact se va imagina o separare a celor două corpuri pe toată această suprafaţă şi se va adopta notaţia $f^j\,(Q,\ t) = \frac{\partial F^j}{\partial \Sigma}\,(Q,\ t)$, pentru forţele de contact, care reprezintă interacţiunea mecanică a celor două corpuri. După efectuarea separării, formula (1) este direct aplicabilă oricăruia din cele două corpuri $C_\alpha\,(\alpha = I,\ II)$. În fiecare caz, se va putea scrie

$$u^{*i}_\alpha(P,\ t) = u^{0i}_\alpha(P,\ t) + \int_\Sigma \int_{t_0}^{t} \frac{\partial u^i_\alpha}{\partial H^j_\alpha}(P, Q\,;\ t-\tau)\ f^j_\alpha(Q,\ \tau)\, d\tau\, d\Sigma_\alpha(Q). \tag{3}$$

Semnificaţia tuturor mărimilor din expresia (3) este omologă semnificaţiei mărimilor din expresia (1).

Condiţia de contact între cele două corpuri în intervalul de timp al desfăşurării fenomenului dinamic, revine la relaţia

$$u^{*i}_{\mathrm{I}}(P,\ t) - u^{*i}_{\mathrm{II}}(P,\ t) = 0 \qquad (P \in \Sigma). \tag{4}$$

Introducînd în relaţia (4) expresia (3) pentru oricare din cele două corpuri $C_\alpha$ şi ţinînd seama de principiul acţiunii şi reacţiunii

$$f^j_{\mathrm{I}}(Q,\ t) + f^j_{\mathrm{II}}(Q,\ t) \equiv 0, \tag{5}$$

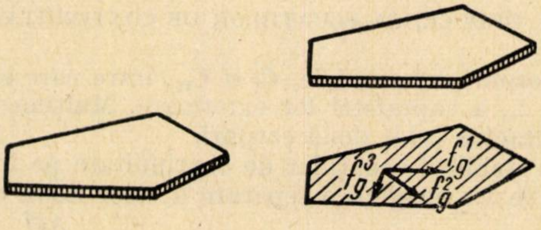
se obţin ecuaţiile de continuitate pentru forţele de interacţiune.

Revenind la cazul plăcii rezemate pe semispaţiul solid, reprezentat în figura 1 *a*, separarea celor două corpuri va fi imaginată ca în figura 1*b*. Suprafaţa de contact va fi egală cu suprafaţa mediană a plăcii. Înlocuind indicii I şi II respectiv prin *s* (pentru placă) şi *g* (pentru semispaţiul solid, care va fi denumit teren), ecuațiile de continuitate obținute prin aplicarea relației (4) vor avea forma

$$u_s^{0i}(P,t) - u_g^{0i}(P,t) + \int_{\Sigma}\int_{t_0}^{t} \frac{\partial u^i}{\partial H^j}(P,\ Q\,;t-\tau)\, f^j(Q,\tau)\, d\tau\, d\Sigma\,(Q) = 0,$$

$$f^j(Q,t) = f_s^j(Q,t) = -f_g^j(Q,t),\quad \frac{\partial u^i}{\partial H^j}(P,Q\,;t) = \frac{\partial u_s^i}{\partial H_s^j}(P,Q\,;t) + \qquad (6)$$

$$+\frac{\partial u_g^i}{\partial H_g^j}(P,Q\,;t),\qquad P,Q\in\Sigma.$$



a b

Fig. 1

Nucleul $\frac{\partial u_s^i}{\partial H_s^j}(P,Q\,;t)$ este o combinație liniară, ușor de pus în evidență, a vibrațiilor libere ale plăcii separate de teren (incluzînd roto-translațiile rigide). Placa poate să fie izolată sau legată de alte corpuri (constituind, spre exemplu, fundația unei construcții).

Nucleul $\frac{\partial u_g^i}{\partial H_g^j}(P,\ Q\,;\ t)$ poate fi calculat considerînd propagarea undelor în teren plecînd de la problema lui Lamb și considerînd, spre exemplu, expresiile date în [6].

În stabilirea ecuațiilor (6) s-a admis că fenomenul dinamic începe la momentul $t = t_0$, cu deplasări și viteze inițiale nule.

## 3. PROPRIETĂȚI ALE FENOMENULUI DE CONTACT DINAMIC ȘI ECUAȚIILOR DE CONTINUITATE

### 3.1. GENERALITĂȚI

Relațiile (6) reprezintă condițiile matematice de contact dinamic și ele constituie o ecuație vectorială lineară integrală multiplă, de tip Volterra în raport cu timpul și de tip Fredholm în raport cu punctul curent al suprafeței de contact, avînd drept necunoscute forțele dinamice de contact $f^j(Q,\ t)$. Fenomenul descris de aceste relații este în general nestaționar. Ecuațiile (6) pot fi utilizate pentru studiul contactului în cazul fenomenelor de origină subterană, caracterizate prin termenul liber

$u_g^{0i}(P,\ t)$ (unde seismice, propagare de vibrații prin teren etc.), sau de origină supraterană, caracterizate prin termenul liber $u_s^{0i}(P,\ t)$ (șocuri, vibrații întreținute etc.). Întotdeauna cînd sînt respectate ipotezele de la punctul 2.1., fenomenul de contact dinamic între două corpuri deformabile poate fi formulat matematic sub forma unui sistem de ecuații de tipul (6).

Discuția detaliată a naturii soluției implică determinarea expresiei exacte a nucleului $\dfrac{\partial u^i}{\partial H^j}(P,\ Q\,;\ t)$. Se poate arăta însă că soluția este unică. Pentru aceasta este suficient să se observe că nu poate să existe nici un sistem de forțe dinamice de contact care să nu producă deplasări relative între placă și teren în cazul separării celor două corpuri.

Expresia formală a soluției sistemului (6) va fi

$$f^j(Q,\ t) = \int_\Sigma \int_{t_0}^t R_i^j(Q,\ P\,;\ t-\tau)\,[\ddot{u}_g^{0i}(P,\ \tau) - \ddot{u}_s^{0i}(P,\ \tau)]\ d\tau\, d\Sigma(P). \qquad (7)$$

Semnificația tensorului $R_i^j(Q,\ P\,;\ t)$ este imediată: el reprezintă sistemul de forțe de contact aplicate în punctul $Q$, pe direcția $j$, care produc în punctul $P$, $(P \in \Sigma)$ deplasarea dinamică relativă $u_s^i(P,\ t) - u_g^i(P,\ t) = t\,\varepsilon(t)\left(\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau)\, d\tau\right)$, menținînd fixă poziția relativă în celelalte puncte.

Mişcarea comună a plăcii și terenului, perturbată de forțele de contact, $u^i(P,\ t)$, va fi exprimată cu ajutorul soluției (7), sub una din formele echivalente,

$$\begin{aligned} u^i(P,\ t) &= u_s^{0i}(P,t) + \int_\Sigma \int_{t_0}^t \frac{\partial u_s^i}{\partial H_s^j}(P,\ Q\,;\ t-\tau)\, f^j(Q,\ \tau)\, d\tau\, d\Sigma(Q) = \\ &= u_g^{0i}(P,\ t) - \int_\Sigma \int_{t_0}^t \frac{\partial u_g^i}{\partial H_g^j}(P,\ Q\,;\ t-\tau)\, f^j(Q,\ \tau)\, d\tau\, d\Sigma(Q). \end{aligned} \qquad (8)$$

Fluxul de energie dinspre placă spre teren prin toată suprafața de contact va avea expresia

$$\Phi(t) = \frac{dL}{dt} = -\int_\Sigma f_i(P,\ t)\,\dot{u}^i(P,\ t)\, d\Sigma(P). \qquad (9)$$

Relațiile (8) permit studiul direct al comportării fie a plăcii, fie a terenului, fără a mai rezolva explicit problema de contact. Condițiile la limită pe suprafața de contact pentru studiul plăcii sau terenului, vor fi respectiv

$$\begin{aligned} &\text{(a)}\quad u_s^i(P,t) + \int_\Sigma \int_{t_0}^t \frac{\partial u_g^i}{\partial H_g^j}(P,\ Q\,;\ t-\tau)\, f_s^j(Q,\tau)\, d\tau\, d\Sigma(Q) = u_g^{0i}(P,t) \\ &\text{(b)}\quad u_g^i(P,t) + \int_\Sigma \int_{t_0}^t \frac{\partial u_s^i}{\partial H_s^j}(P,\ Q\,;\ t-\tau)\, f_g^j(Q,\tau)\, d\tau\, d\Sigma(Q) = u_s^{0i}(P,\ t). \end{aligned} \qquad (10)$$

În calculele tehnice legate de problema rezemării unor elemente de construcție pe teren se adoptă ipoteze simplificatoare, în scopul obținerii unor relații matematice simple, ușor de studiat. Este ușor de văzut ce erori introduc aceste ipoteze, în raport cu condițiile exacte (10).

Ipoteza tasării liniare instantanee înlocuiește condițiile la limită (10 a) prin condițiile

$$u_s^i(P,t) + \int_\Sigma \frac{\partial u_g^i}{\partial F_g^j}(P,\,Q)\, f_s^j(Q,\,t)\, d\Sigma\,(Q) = u_g^{0i}(P,\,t), \tag{11}$$

care rezultă din admiterea ipotezei

$$\frac{\partial u_g^i}{\partial H_g^j}(P,\,Q\,;\,t) = \delta\,(t)\,\frac{\partial u_g^i}{\partial F_g^j}(P,\,Q), \tag{12}$$

valabilă în cazul limită al terenului elastic cu densitate nulă (și viteză de propagare infinită a undelor) și care exprimă identitatea alurii spațiale dintre deplasările dinamice produse de o percusiune concentrată și deplasările statice produse de o forță concentrată.

Pe de altă parte, ipoteza tasării liniare reologice locale, înlocuiește condițiile la limită (10 a) prin condițiile

$$u_s^i(P,\,t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial u_g^i}{\partial h_g^j}(P,\,t-\tau)\, f_s^j(P,\,\tau)\, d\tau = u_g^{0i}(P,\,t), \tag{13}$$

care rezultă din admiterea ipotezei

$$\frac{\partial u_g^i}{\partial H_g^j}(P,\,Q\,;\,t) = \delta\,(P-Q)\,\frac{\partial u_g^i}{\partial h_g^j}(P,\,t), \tag{14}$$

care contrazice proprietățile mediului continuu solid.

Compunerea celor două ipoteze de mai sus conduce la admiterea, în locul condițiilor la limită (10 a), a condițiilor

$$u_s^i(P,\,t) + \frac{\partial u_g^i}{\partial f_g^j}(P)\, f_s^j(P,\,t) = u_g^{0i}(P,\,t), \tag{15}$$

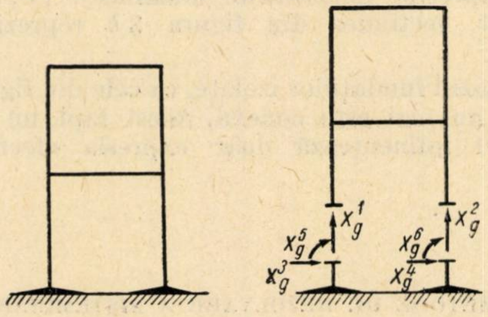
care rezultă din admiterea ipotezei de tip Winkler în regim dinamic,

$$\frac{\partial u_g^i}{\partial H_g^j}(P,\,Q\,;\,t) = \delta\,(P-Q)\,\delta\,(t)\,\frac{\partial u_g^i}{\partial f_g^j}(P) \tag{16}$$

și pe baza căreia se poate efectua un studiu simplu al plăcii pornind de la ecuația diferențială de vibrații, în care apare un termen adițional, dat de expresia lui $f_s^j(P,\,t)$ obținută din condiția (15) cu ajutorul unor operații algebrice simple.

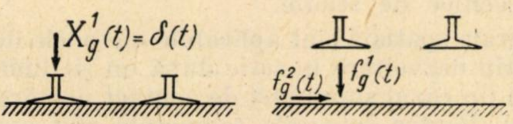
Ipoteza tasării instantanee sub forma (12) sau (16), introdusă în expresia (9), conduce la concluzia incorectă că nu ar exista o disipație, prin trecerea în teren, a energiei plăcii. Într-adevăr, admiterea acestei ipoteze face ca mărimea $\Phi(t)$ să fie derivata în raport cu timpul a unei funcţionale patratice de valorile tensiunilor $f^j(Q, t)$, luate la un moment dat, iar în cazul fenomenului periodic rezultă clar că energia transmisă spre teren se reîntoarce spre placă, concluzie falsă, datorită existenţei în realitate a fenomenului de radiaţie a energiei prin undele mecanice.

În lucrarea [3] problema rezemării construcţiilor solicitate dinamic a fost redusă matematic (acceptînd ipotezele de la punctul 2.1. şi în plus ipoteza că legătura între construcţie şi fundaţie poate fi caracterizată printr-un număr finit de condiţii geometrice), la un sistem liniar de ecuaţii integrale Volterra, de forma



*a* *b*

Fig. 2



*a* *b*

Fig. 3

$$u_s^{0a}(t) - u_g^{0a}(t) + \int_{t_0}^{t} u_b^a(t-\tau)\, X^b(\tau)\, d\tau = 0, \tag{17}$$

unde tensorul $u_b^a(t)$ şi vectorul $X^b(t)$ satisfac relaţiile

$$\begin{aligned} u_b^a(t) &= s_b^a(t) + g_b^a(t), \\ X^b(t) &= X_s^b(t) = - X_g^b(t). \end{aligned} \tag{18}$$

În relaţiile (17) şi (18), mărimile $u_s^{0a}(t)$, $u_g^{0a}(t)$, $X_s^b(t)$, $X_g^b(t)$, $s_b^a(t)$, $g_b^a(t)$ corespund, respectiv, pentru cazul numărului finit de condiţii de contact, mărimilor $u_s^{0i}(P, t)$, $u_g^{0i}(P, t)$, $f_s^j(Q, t)$, $f_g^j(Q, t)$, $\frac{\partial u_s^i}{\partial H_s^j}(P, Q; t)$, $\frac{\partial u_g^i}{\partial H_g^j}(P, Q; t)$, introduse în paragraful 2 al prezentei lucrări (fig. 2).

Principala dificultate în scrierea efectivă a sistemului (17), constă în determinarea expresiei tensorului $g_b^a\,(t)$ din (18). Tensorul $g_b^a\,(t)$ poate fi determinat pe baza ecuațiilor (6). În acest scop se consideră secțiunea imaginată conform figurii 2 *b* și se introduce percusiunea unitară $X_g^b\,(t) = \delta\,(t)$. Fundația asupra căreia s-a aplicat percusiunea se consideră separată de teren ca în figura 3 *b* și se rezolvă problema de contact formulată prin relațiile (6), adoptînd drept termen liber sistemul de deplasări dinamice $u_s^i\,(P, t)$ al fundației separate de teren, datorită percusiunii $X^b(t) = \delta\,(t)$. După calculul expresiilor (7) și (8) corespunzătoare termenului liber dat, expresiile deplasărilor dinamice $u^i\,(P, t)$ ale punctelor în care s-a imaginat secțiunea din figura 2 *b* reprezintă funcția căutată, $g_b^a\,(t)$.

Evident, în cazul fundațiilor izolate, ca cele din figurile 2 și 3, suprafața de contact $\Sigma$ nu mai este conexă. Acest fapt nu introduce dificultăți principale, ci influențează doar expresia efectivă a tensorului $\dfrac{\partial u^i}{\partial H^j}\,(P,\ Q\,;\ t)$.

## 3.2. METODE DE REZOLVARE A SISTEMULUI (6)

Pentru fiecare din cele două integrale care apar în sistemul (6) există metode specifice de studiu.

Pentru integrala spațială sînt aplicabile metodele de algebrizare prin sume finite sau prin dezvoltare în serie după un șir liniar independent și complet de funcții (în cazul suprafeței de contact nemărginite, prin transformare integrală). Pentru integrala temporală sînt aplicabile metodele de algebrizare prin sume finite sau prin transformare integrală Laplace și prin aproximații succesive. Se va presupune că natura nucleului și termenului liber asigură corectitudinea operațiilor formale efectuate.

Metodele aplicate fiecăruia din tipurile de integrale amintite se pot combina arbitrar. Se vor enumera cîteva variante.

Aplicarea metodei sumelor finite pentru ambele integrări este elementară. Ea este susceptibilă de a oferi rezultate numerice interesante în cazul unei mecanizări a calculului.

Aplicarea metodei sumelor finite în raport cu timpul conduce la un șir triunghiular de sisteme integrale simple Fredholm, de specia 1-a. Indiferent de modul de integrare a sistemului Fredholm, este necesară cunoașterea rezolventei doar la momentul inițial, soluția la momentele următoare obținîndu-se prin recurență.

În legătură cu metoda aproximațiilor succesive se va discuta mai jos, legînd-o de transformarea integrală în raport cu timpul.

În cele de mai jos se va considera drept metodă principală adoptarea transformării operaționale în raport cu timpul și a dezvoltării în serie de funcții în raport cu punctul curent al suprafeței de contact.

Fie un șir de funcții $\varphi_m^i(P)\ (m = 1 \ldots \infty)$, liniar independent și complet pe $\Sigma$ și șirul său reciproc $\varphi_i^n(P)$. Cele două șiruri satisfac relația

$$\int_\Sigma \varphi_m^i(P)\, \varphi_i^n(P)\, d\Sigma(P) = \delta_m^n . \tag{19}$$

Mărimile $u^i(P, t)$, $\frac{\partial u^i}{\partial H^j}(P, Q\,; t)$ și $f^j(Q, t)$ vor avea în acest caz dezvoltările (se sumează în raport cu indicii muți $m, n \ldots$)

$$\begin{aligned} &u^i(P, t) = u^m(t)\, \varphi_m^i(P),\\ &\frac{\partial u^i}{\partial H^j}(P, Q\,; t) = u_n^m(t)\, \varphi_m^i(P)\, \varphi_j^n(Q),\\ &f^j(Q, t) = f^n(t)\, \varphi_n^j(Q), \end{aligned} \tag{20}$$

cu coeficienții $u^m(t)$, $u_n^m(t)$ și $f^n(t)$ dați, respectiv, de relațiile

$$\begin{aligned} u^m(t) &= \int_\Sigma u^i(P, t)\, \varphi_i^m(P)\, d\Sigma(P),\\ u_n^m(t) &= \int_\Sigma \int_\Sigma \frac{\partial u^i}{\partial H^j}(P, Q\,; t)\, \varphi_i^m(P)\, \varphi_n^j(Q)\, d\Sigma(P)\, d\Sigma(Q),\\ f^n(t) &= \int_\Sigma f^j(Q, t)\, \varphi_j^n(Q)\, d\Sigma(Q). \end{aligned} \tag{21}$$

Efectuînd produsul scalar al relațiilor (6) cu $\varphi_i^m(P)$, ca în (21) și ținînd seama de relațiile (19) și expresiile (20), se obține sistemul liniar numerabil de ecuații simple Volterra,

$$u_s^{0m}(t) - u_g^{0m}(t) + \int_{t_0}^{t} u_n^m(t-\tau)\, f^n(\tau)\, d\tau = 0. \tag{22}$$

Asemănarea formală a sistemelor (17) și (22) este evidentă, singura diferență între cele două sisteme fiind faptul că primul este finit, iar al doilea numerabil.

Corespondența operațională biunivocă între originalul $f(t)$ și imaginea sa $\mathcal{F}(p)$ prin transformarea lui Laplace [5],

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(p) = p\int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt, && \mathrm{Re}\ p \in (\alpha, \beta)\\ &f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt}\, \frac{\mathcal{F}(p)}{p}\, dp, && c \in (\alpha, \beta) \end{aligned} \tag{23}$$

se va nota simbolic prin una din relațiile

$$\begin{aligned} f(t) &\fallingdotseq \mathcal{F}(p), \\ \mathcal{F}(p) &\risingdotseq f(t). \end{aligned} \tag{24}$$

Imaginea operațională a sistemului (22) va fi

$$\begin{gathered} \mathcal{U}_s^{0m}(p) - \mathcal{U}_g^{0m}(p) + \frac{1}{p}\mathcal{U}_n^m(p)\,\mathcal{F}^n(p) = 0, \\ u_s^{0m}(t) \fallingdotseq \mathcal{U}_s^{0m}(p)\,;\ u_g^{0m}(t) \fallingdotseq \mathcal{U}_g^{0m}(p)\,;\ u_n^m(t) \fallingdotseq \mathcal{U}_n^m(p)\,;\ f^n(t) \fallingdotseq \mathcal{F}^n(p). \end{gathered} \tag{25}$$

Soluția sistemului (25)

$$\begin{gathered} \mathcal{F}^n(p) = \frac{1}{p}\mathcal{R}_m^n(p)\,p^2\,[\mathcal{U}_g^{0m}(p) - \mathcal{U}_s^{0m}(p)], \\ \mathcal{R}_m^n(p)\,\mathcal{U}_q^m(p) = \delta_q^n\,;\ R_m^n(t) = \mathcal{R}_m^n(p), \end{gathered} \tag{26}$$

$R_m^n(t)$ reprezentînd componentele în sistemul $\varphi_m^i(P)$ ale tensorului $R_i^j(Q, P\,;\,t)$, justifică formal expresia (7).

O dată soluția $\mathcal{F}^n(p)$ a sistemului (25) cunoscută, sub forma (26), se poate calcula sistemul de deplasări dinamice $u^i(P, t)$. Într-adevăr, adoptînd imaginea expresiei (3), ținînd seama de definiția lui $\frac{\partial u^i}{\partial H^j}(P, Q\,;\,t)$ din (6) și introducînd soluția (26), se obține în final expresia

$$\begin{gathered} \mathcal{U}^m(p) = \mathcal{S}_n^m(p)\,\mathcal{R}_p^n(p)\,\mathcal{U}_g^{0p}(p) + \mathcal{G}_n^m(p)\,\mathcal{R}_p^n(p)\,\mathcal{U}_s^{0p}(p), \\ \int_\Sigma\int_\Sigma \frac{\partial u_s^i}{\partial H_s^j}(P, Q\,;\,t)\,\varphi_m^i(P)\,\varphi_j^n(Q)\,d\Sigma(P)\,d\Sigma(Q) \fallingdotseq \mathcal{S}_n^m(p), \\ \int_\Sigma\int_\Sigma \frac{\partial u_g^i}{\partial H_g^j}(P, Q\,;\,t)\,\varphi_m^i(P)\,\varphi_j^n(Q)\,d\Sigma(P)\,d\Sigma(Q) \fallingdotseq \mathcal{G}_n^m(p). \end{gathered} \tag{27}$$

Fie un tensor, $\mathcal{T}_n^m(p)$, definit prin relația

$$\mathcal{T}_n^m(p) = -\,\mathcal{G}_p^m(p)\overset{(-1)}{\mathcal{S}_n^p}(p)\,;\ \overset{(-1)}{\mathcal{S}_p^m}(p)\,\mathcal{S}_n^p(p) = \delta_n^m\,. \tag{28}$$

Cu ajutorul său se poate da o nouă expresie mărimilor $\mathcal{U}^m(p)$ din (27), sub forma

$$\mathcal{U}^m(p) = \mathcal{S}_p^m(p)\,\mathcal{R}_n^p(p)\,[\mathcal{U}_g^{0n}(p) - \mathcal{T}_q^n(p)\,\mathcal{U}_s^{0q}(p)]. \tag{29}$$

Dacă seria avînd termenul general $\mathcal{T}_{q1}^m(p)\ \mathcal{T}_{q2}^{q1}(p)\ldots\mathcal{T}_n^{qr}(p)$ este uniform convergentă, expresia (29) poate fi înlocuită prin expresia

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^m(p) = {} & [\delta_n^m(p) + \mathcal{T}_n^m(p) + \mathcal{T}_p^m(p)\,\mathcal{T}_n^p(p) + \ldots]\cdot \\ & \cdot[\mathcal{U}_g^{0n}(p) - \mathcal{T}_q^n(p)\,\mathcal{U}_s^{0q}(p)]. \end{aligned} \tag{30}$$

Seria (30) justifică permutarea efectuată în obţinerea expresiei (29).

Dacă placa este mult mai deformabilă decît terenul, termenii $\mathcal{T}_n^m(p)$ sînt foarte mici, iar expresia (30) oferă posibilităţi de aproximare a soluţiei fără a se mai rezolva sistemul (25).

Ţinînd seama de faptul că deplasările şi vitezele iniţiale sînt considerate nule, relaţiile (27), (29) şi (30) între deplasările libere şi cele reale se conservă şi pentru viteze şi acceleraţii, fapt care aduce un instrument util de calcul pentru corpurile rezemate pe placă.

Fie sistemele de forţe aplicate pe suprafaţa de contact a plăcii şi terenului, avînd respectiv imaginile $\mathcal{F}_s^{0n}(p)$ şi $\mathcal{F}_g^{0n}(p)$. Relaţiile (3) şi (27) conduc la expresia

$$\mathcal{U}^m(p) = \mathcal{S}_p^m(p)\mathcal{R}_q^p(p)\mathcal{G}_n^q(p)\mathcal{F}_g^{0n}(p) + \mathcal{G}_p^m(p)\mathcal{R}_q^p(p)\mathcal{S}_n^q(p)\mathcal{F}_s^{0n}(p). \quad (31)$$

Întrucît efectul forţelor $\mathcal{F}_s^{0n}(p)$ şi $\mathcal{F}_g^{0n}(p)$ trebuie să fie echivalent, rezultă relaţia de simetrie

$$\mathcal{S}_p^m(p)\mathcal{R}_q^p(p)\mathcal{G}_n^q(p) \equiv \mathcal{G}_p^m(p)\mathcal{R}_q^p(p)\mathcal{S}_n^q(p), \quad (32)$$

care justifică de asemenea permutarea efectuată în (29) în raport cu (27).

Practic, este satisfăcătoare aproximarea tuturor mărimilor (deplasări, forţe de interacţiune, nuclei) în dezvoltarea în serie după funcţiile $\varphi_m^i(P)$ printr-o secţiune avînd un număr finit, convenabil, de termeni. Acest fapt conduce la aproximarea sistemelor liniare numerabile în care intervin indicii $m$, $n$... prin sisteme liniare finite, ceea ce permite rezolvarea pe căi obişnuite a sistemelor respective. Se va considera, practic, că s-a înlocuit şirul $\varphi_m^i(P)$ printr-o secţiune a sa.

Calculul prin aproximaţii succesive va fi considerat într-o formă specifică problemei de contact. În primă aproximaţie, se va considera că soluţia $u^i(P, t)$ este egală cu mişcarea liberă a terenului, $u_g^{0i}(P, t)$. Aproximaţia de ordin $r$, $u^{i(r)}(P, t)$, va fi dedusă calculînd mişcarea terenului sub acţiunea forţelor $-f^{j(r-1)}(Q, t)$ ce corespund aproximaţiei $u^{i(r-1)}(P, t)$. Mişcarea exactă rezultă prin sumarea aproximaţiilor $u^{i(r)}(P, t)$. Dacă procesul converge, imaginea lui operaţională este constituită de seria (30), care obţine astfel un sens intuitiv.

### 3.3. UTILIZAREA VIBRAŢIILOR MONOCROMATICE STAŢIONARE ÎN STUDIUL PROBLEMEI DE CONTACT DINAMIC

La punctul 3.2 s-a presupus că în vederea studiului ecuaţiilor (6) se aplică întîi dezvoltarea în serie în raport cu coordonatele spaţiale, iar după aceea se trece la transformata integrală a sistemului liniar (22).

Dacă se aplică transformata integrală direct sistemului (6), acesta este înlocuit prin sistemul echivalent

$$\begin{gathered}\mathcal{U}_s^{0i}(P,p)-\mathcal{U}_g^{0i}(P,p)+\frac{1}{p}\int_\Sigma\frac{\partial\mathcal{U}^i}{\partial\mathcal{H}^j}(P,Q;\,p)\,\mathcal{F}^j(Q,p)\,d\Sigma\,(Q)=0,\\ u^i(P,t)\doteq\mathcal{U}^i(P,p);\ \frac{\partial u^i}{\partial H^j}(P,Q;\,t)\doteq\frac{\partial\mathcal{U}^i}{\partial\mathcal{H}^j}(P,Q;p);f^j(Q,t)\doteq\mathcal{F}^j(Q,p).\end{gathered}\tag{33}$$

Relații analoge înlocuiesc respectiv relațiile (7) și (8).

Se știe [5] că imaginea operațională a funcției $e^{i(\omega t+\alpha)}$ este dată prin relația

$$e^{i(\omega'+\alpha)}\doteq\pi(p+i\omega)\,e^{i\alpha}\,\delta(p^2+\omega^2);\qquad(\mathrm{Re\ p}=0).\tag{34}$$

Se verifică ușor, pe baza relației (34), faptul că introducerea unor deplasări libere oscilatorii monocromatice staționare, $u_s^{0i}(P,t)-u_g^{0i}(P,t)=$ $=U^{0i}(P)\,e^{i[\omega t+\alpha_u(P)]}$ conduce la apariția unor forțe de contact tot monocromatice staționare, de aceeași pulsație, $f^j(Q,t)=F^j(Q)\,e^{i[\omega t+\alpha_f(Q)]}$, iar relația între ele este descrisă de ecuația (33), unde $p=\omega i$.

Rezultă de aici posibilitatea de utilizare pentru cazul general a cercetărilor teoretice sau experimentale avînd drept obiect problemele de contact dinamic în cazul particular al solicitărilor monocromatice staționare. În acest scop este suficient să se calculeze transformata integrală în raport cu timpul a termenului liber al problemei, să se utilizeze rezultatele obținute în studiul fenomenelor periodice monocromatice (pe baza ecuației integrale Fredholm (33)) și să se calculeze originalul soluției.

În majoritatea cazurilor utilitatea practică a studiului contactului dinamic între placă și teren constă în determinarea influenței cedării fundației asupra solicitării dinamice a suprastructurii rezemate pe plăci. Influența cedării fundației poate fi studiată pe baza mărimilor $X^b(t)$, $u^a(t)$, $u_s^{0a}(t)$, $u_g^{0a}(t)$, $s_b^a(t)$, $g_b^a(t)$, introduse la punctul 3.1 și care caracterizează secțiunea din figura 2. Studiul problemei de contact între suprastructură și fundație conduce la o expresie a deplasărilor (în cîmpul imaginilor) asemănătoare cu (27),

$$\mathcal{U}^a(p)=\mathcal{S}_b^a(p)\,\mathcal{R}_c^b(p)\,\mathcal{U}_g^{0c}(p)+\mathcal{G}_b^a(p)\,\mathcal{R}_c^b(p)\,\mathcal{U}_s^{0c}(p).\tag{35}$$

Se vor considera $M$ sisteme liniar independente de termeni liberi, $\mathcal{U}_{sr}^{0c}(p)$ $(r,\ a,\ b,\ c,\ \ldots=1\ \ldots\ M)$, cu $\mathcal{U}_{gr}^{0c}(p)=0$. Introducînd aceste sisteme în (35), rezultă un sistem de $M^2$ relații,

$$\mathcal{G}_b^a(p)\,\mathcal{R}_c^b(p)\,\mathcal{U}_{sr}^{0c}(p)=\mathcal{U}_r^a(p),\tag{36}$$

care pot fi considerate ca ecuații în raport cu cele $M^2$ necunoscute $\mathcal{G}_b^a(p)\,\mathcal{R}_c^b(p)$.

Dacă sistemul de termeni liberi $\mathcal{U}_{sr}^{0c}(p)$ (cu $r$ fix) din (36) corespunde unei vibrații staționare monocromatice, soluția $\mathcal{U}_r^a(p)$ corespunde unei mișcări asemănătoare (cu o anumită modificare a amplitudinii și a fazei pentru fiecare termen, atît modificarea amplitudinii, cît și defazajul, depinzînd de pulsația $\omega$). Din ecuațiile (36) se determină tensorul $\mathcal{C}_c^a(p) = \mathcal{G}_b^a(p)\,\mathcal{R}_c^b(p)$, ca funcție complexă de $\omega$ ($\omega = \operatorname{Im} p$).

Rezultă de aici posibilitatea de determinare empirică a tensorului $\mathcal{C}_c^a(p)$ din înregistrarea vibrațiilor $u_r^a(t) \fallingdotseq \mathcal{U}_r^a(p)$ produse de $M$ sisteme liniar independente de solicitări periodice monocromatice (cu pulsația $\omega$ variind, de fiecare dată, de la 0 la $\infty$) și rezolvarea în raport cu $\mathcal{C}_c^a(i\omega)$ a sistemului (36), unde mărimile $u_{sr}^{0c}(t) \fallingdotseq \mathcal{U}_{sr}^{0c}(p)$ sînt obținute prin calculul vibrațiilor întreținute ale structurii nelegate de fundație.

Din valorile lui $\mathcal{C}_c^a(i\omega)$ determinate experimental se pot calcula ușor, pe cale algebrică, valorile lui $\mathcal{G}_b^a(i\omega)$, a căror determinare constituie principala dificultate a problemei de contact. Valorile lui $\mathcal{C}_c^a(i\omega)$, determinate experimental, pentru o suprastructură simplă, pot fi utilizate pentru determinarea valorilor corespunzătoare $\mathcal{C}_c'^a(i\omega)$, în cazul unei suprastructuri mai complicate, dacă în ambele cazuri sistemul de fundare este identic. Determinarea valorilor lui $\mathcal{C}_c'^a(i\omega)$ se efectuează impunînd identitatea tensorilor $\mathcal{G}_b^a(i\omega)$ pentru ambele cazuri. Astfel, experimentînd comportarea unui masiv rigid fundat pe placă, se pot trage concluzii pentru comportarea unei construcții înalte fundate în același mod.

### 3.4. PROPRIETĂȚI ALE FENOMENULUI DE CONTACT ÎN CAZUL SOLICITĂRILOR ALEATOARE

În cele de mai sus fenomenul de contact între placă și semispațiu a fost considerat dintr-un punct de vedere exclusiv determinist. În multe cazuri, mișcarea liberă atît a plăcii, $u_s^{0i}(P, t)$, cît și a terenului, $u_g^{0i}(P, t)$, nu pot fi exprimate determinist, căci au un caracter aleator. Astfel de situații apar în cazul acțiunii vîntului asupra structurii rezemate pe placă, sau în cazul acțiunii seismice.

În aceste condiții, rezultă necesitatea considerării termenilor liberi $u_s^{0m}(t)$ sau $u_g^{0m}(t)$ drept funcții aleatoare vectoriale, iar problema de contact trebuie studiată ca un proces stochastic (staționar sau nestaționar, după natura termenului liber). Dacă se admit ipotezele de la punctul 2.1 este practic satisfăcător să se cunoască, pentru necunoscutele $u^m(t)$ și $f^n(t)$ valorile medii și covarianțele [1].

Calculul tensorilor corelativi ai funcțiilor aleatoare vectoriale $u^m(t)$ și $f^m(t)$ este permutabil cu transformările liniare din punctul 3.2, de aceea se poate efectua fie plecînd de la relațiile (6), fie de la ori care din transformatele corespunzătoare. Se vor considera deci, ca fiind cele mai simple, transformatele (25), (26), (27), (31), ale ecuațiilor fenomenului. Ori care din aceste relații are forma

$$\mathcal{A}_n^m(p)\,\mathcal{X}^n(p) = \mathcal{B}_n^m(p)\,\mathcal{Y}^n(p). \tag{37}$$

Pentru valorile medii $\overline{\mathcal{X}^{n}(p)}$ și $\overline{\mathcal{Y}^{n}(p)}$ și covarianțele $\overline{\mathcal{X}^{m}(p_1)\,\mathcal{X}^{n}(p_2)}$ și $\overline{\mathcal{Y}^{m}(p_1)\,\mathcal{Y}^{n}(p_2)}$ ale funcțiilor aleatoare vectoriale $\mathcal{X}^{m}(p)$ și $\mathcal{Y}^{m}(p)$ rezultă, respectiv, relațiile [1]

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}_{n}^{m}(p)\,\overline{\mathcal{X}^{n}(p)} = \mathcal{B}_{n}^{m}(p)\,\overline{\mathcal{Y}^{n}(p)},\\
&\mathcal{A}_{p}^{m}(p_1)\,\mathcal{A}_{q}^{n}(p_2)\,\overline{\mathcal{X}^{p}(p_1)\,\mathcal{X}^{q}(p_2)} = \mathcal{B}_{p}^{m}(p_1)\,\mathcal{B}_{q}^{n}(p_2)\,\overline{\mathcal{Y}^{p}(p_1)\,\mathcal{Y}^{q}(p_2)},
\end{aligned} \tag{38}$$

valabile în cazul general al unui proces stochastic nestaționar.

Relațiile (38) pot fi extinse, în caz de necesitate, pentru tensori corelativi de ordin superior.

În cazul particular al unui proces stochastic staționar, se pot utiliza pe lîngă relațiile (38) și relațiile

$$\mathcal{A}_{p}^{\star m}(i\omega)\,\mathcal{A}_{q}^{n}(i\omega)\,S^{pq}(x\,;\,\omega) = \mathcal{B}_{p}^{\star m}(i\omega)\,\mathcal{B}_{q}^{n}(i\omega)\,S^{pq}(y\,;\,\omega), \tag{39}$$

unde prin $S^{mn}(x\,;\,\omega)$ s-a notat tensorul spectral al funcției vectoriale aleatoare $x^{m}(t)$, definit prin relațiile [1]

$$\begin{aligned}
&S^{mn}(x\,;\,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}\,K^{mn}(x\,;\,\tau)\,d\tau,\\
&K^{mn}(x\,;\,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}\,S^{mn}(x\,;\,\omega)\,d\omega,\\
&\left(\text{unde } K^{mn}(x\,;\,\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^{m}(t)\,x^{n}(t+\tau)\,dt\,;\; x^{m}(t) \doteq \mathcal{X}^{m}(p)\right),
\end{aligned} \tag{40}$$

iar prin $A^{\star}$ s-a notat conjugata complexă a mărimii $A$.

Relațiile (38), (39), (40) se conservă, ca și relațiile deterministe omologe, pentru viteze și accelerații.

## 4. PLACA ELASTICĂ INFINITĂ REZEMATĂ FĂRĂ FRECARE PE SEMISPAȚIUL ELASTIC

Se vor admite următoarele ipoteze :

— placa este elastică, de grosime constantă, simplu conexă și nemărginită în toate direcțiile ;

— mediul care umple semispațiul este perfect elastic ;

— se aplică numai forțe verticale $q\,(x, y\,;\,t)$ asupra plăcii ;

— condițiile la limită pentru semispațiu sînt :

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad w_g - w_s = 0, \quad f_g + f_s = 0,$$

($w_g$ și $w_s$ sînt respectiv desplasările verticale ale frontierei semispațiului și ale plăcii, $f_g$ și $f_s$ sînt respectiv forțele distribuite aplicate reciproc asupra frontierei semispațiului și plăcii).

În aceste condiţii, ecuaţia (6) ia forma particulară

$$w_s^0(x, y ; t)+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{t_0}^{t}\frac{\partial w}{\partial H}(x-\xi, y-\eta ; t-\tau) f(\xi, \eta ; \tau)\, d\tau\, d\xi\, d\eta=0. \quad (41)$$

Aplicînd transformări integrale de tipul (23) în raport cu toate trei variabilele, $x \rightarrow p_1$, $y \rightarrow p_2$, $t \rightarrow p$, relaţia (41) conduce la

$$\begin{gathered}
\mathcal{W}_s^0(p_1, p_2 ; p)+\frac{1}{p_1 p_2 p}\mathcal{U}(p_1, p_2 ; p)\,\mathcal{F}(p_1, p_2 ; p)=0, \\
\frac{\partial w}{\partial H}(x, y ; t) \doteqdot \mathcal{U}(p_1, p_2 ; p)=\mathcal{S}(p_1, p_2 ; p)+\mathcal{G}(p_1, p_2 ; p), \qquad (42) \\
f(x, y ; t) \doteqdot \mathcal{F}(p_1, p_2 ; p) ; \quad w_s^0(x, y ; t) \doteqdot \mathcal{W}_s^0(p_1, p_2 ; p).
\end{gathered}$$

Imaginea $\mathcal{S}(p_1, p_2 ; p)$ se obţine din ecuaţia de mişcare a plăcii,

$$D \Delta^2 w+m \ddot{w}=q(x, y ; t) \quad (43)$$

a cărei transformată operaţională este

$$\begin{gathered}
[D(p_1^2+p_2^2)^2+m p^2]\, \mathcal{W}=Q, \\
w(x, y ; t) \doteqdot \mathcal{W}(p_1, p_2 ; p) ; \quad q(x, y ; t) \doteqdot Q(p_1, p_2 ; p).
\end{gathered} \quad (44)$$

Funcţia $\mathcal{S}(p_1, p_2 ; p)$ corespunde termenului liber

$$q(x, y ; t)=\delta(x)\, \delta(y)\, \delta(t) \doteqdot Q(p_1, p_2 ; p)=p_1 p_2 p \quad (45)$$

şi are expresia

$$\mathcal{S}(p_1, p_2 ; p)=\frac{p_1 p_2 p}{D(p_1^2+p_2^2)^2+m p^2}. \quad (46)$$

Funcţia $\mathcal{G}(p_1, p_2 ; p)$ este imaginea funcţiei [6]

$$\begin{gathered}
g(r, t)=\int_0^{\infty} dk\, J_0(kr) \frac{1}{2 \pi i} \int_{c-i \infty}^{c+i \infty} dp\, e^{pt} \frac{\sqrt{1+\frac{p^2}{k^2 c_p^2}} \cdot \frac{p^2}{k^2 c_s^2}}{2 \pi \mu\left[\left(2+\frac{p^2}{k^2 c_s^2}\right)^2-4 \sqrt{1+\frac{p^2}{k^2 c_p^2}} \sqrt{1+\frac{p^2}{k^2 c_s^2}}\right]}, \\
c_p=\sqrt{\frac{\lambda+2 \mu}{\rho}} ; \quad c_s=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \qquad (47)
\end{gathered}$$

şi are expresia [5]

$$\begin{gathered}
\mathcal{G}(p_1, p_2 ; p)=\frac{p_1 p_2 \sqrt{1-\frac{p^2}{c_p^2(p_1^2+p_2^2)}}\, c_s\left(\frac{p}{|i c_s \sqrt{p_1^2+p_2^2}|}\right)^3}{\mu\left\{\left[2-\frac{p^2}{c_s^2(p_1^2+p_2^2)}\right]^2-4 \sqrt{1-\frac{p^2}{c_p^2(p_1^2+p_2^2)}} \sqrt{1-\frac{p^2}{c_s^2(p_1^2+p_2^2)}}\right\}}, \\
\text{cu } \operatorname{Re} \sqrt{p_1^2+p_2^2}=0. \qquad (48)
\end{gathered}$$

Mişcarea plăcii va fi dată de expresia

$$w(x,\ y\ ;\ t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{t_0}^{t} v(x-\xi,\ y-\eta\ ;\ t-\tau)\, q(\xi,\ \eta\ ;\ \tau)\, d\tau\, d\xi\, d\eta, \qquad (49)$$

unde funcţia $v(x,y\ ;\ t)$ va fi dată de expresia (unde $\operatorname{Re} p_i = 0,\ \omega_i = \operatorname{Im} p_i$)

$$v(x,y\ ;t) = \frac{1}{(2\pi)^3 i}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{i(\omega_1 x + \omega_2 y) + pt}}{\omega_1\,\omega_2\, p}\,\frac{\mathcal{S}\mathcal{Q}}{\mathcal{S}+\mathcal{Q}}\, d\omega_1\, d\omega_2\, dp, \qquad (50)$$

iar funcţiile $\mathcal{S}$ şi $\mathcal{Q}$ sînt date respectiv, de (46) şi (48).

În cazul particular cînd forţele aplicate plăcii se reduc la o forţă concentrată periodică monocromatică,

$$q(x, y\ ;t) = F\,\delta(x)\,\delta(y)\,e^{i\omega t}, \qquad (51)$$

mişcarea plăcii va avea expresia

$$w(x,\ y\ ;\ t) = W(x,\ y\ ;\ \omega)\,e^{i\omega t},$$

$$W(x, y\ ;\ \omega) =$$

$$= \frac{F}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\omega_1 x+\omega_2 y)}\, d\omega_1\, d\omega_2}{D(\omega_1^2+\omega_2^2)^2 - m\omega^2 - \mu\,\dfrac{c_s^2(\omega_1^2+\omega_2^2)^{\frac{3}{2}}}{\omega^2}\left\{\dfrac{\left[2-\dfrac{\omega^2}{c_s^2(\omega_1^2+\omega_2^2)}\right]^2}{\sqrt{1-\dfrac{\omega^2}{c_p^2(\omega_1^2+\omega_2^2)}}} - 4\sqrt{1-\dfrac{\omega^2}{c_s^2(\omega_1^2+\omega_2^2)}}\right\}} =$$

$$= \frac{F}{4\pi^2}\int_0^{\infty} dk \int_0^{2\pi} d\nu\, \frac{e^{ikr\cos\nu}\,k}{Dk^4 - m\omega^2 - \mu\,\dfrac{c_s^2 k^3}{\omega^2}\left\{\dfrac{\left[2-\dfrac{\omega^2}{c_s^2 k^2}\right]^2}{\sqrt{1-\dfrac{\omega^2}{c_p^2 k^2}}} - 4\sqrt{1-\dfrac{\omega^2}{c_s^2 k^2}}\right\}} = \qquad (52)$$

$$= \frac{F}{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{J_0(kr)\,k\,dk}{Dk^4 - m\omega^2 - \mu\,\dfrac{c_s^2 k^3}{\omega^2}\left\{\dfrac{\left[2-\dfrac{\omega^2}{c_s^2 k^2}\right]^2}{\sqrt{1-\dfrac{\omega^2}{c_p^2 k^2}}} - 4\sqrt{1-\dfrac{\omega^2}{c_s^2 k^2}}\right\}},$$

rezultată din calculul originalului, în raport cu variabilele spaţiale, al funcţiei $\dfrac{1}{p}\,\dfrac{\mathcal{S}\mathcal{Q}}{\mathcal{S}+\mathcal{Q}}\Bigg|_{p=i\omega}$.

Expresia finală se putea obţine şi prin utilizarea, în locul transformărilor Laplace $x \to p_1$, $y \to p_2$, a transformării Hankel $r \to k$.

În cazul cînd se calculează limita expresiei (52) pentru $\omega \to 0$, se obţine deformata plăcii sub sarcina concentrată. După efectuarea calculelor, expresia deformatei statice se obţine sub forma

$$w(x, y) = \lim_{\omega \to 0} W(x, y; \omega) = \frac{F}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{J_0(kr)\, k dk}{Dk^4 + \frac{2\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} k} = \frac{F}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{J_0(kr)\, k dk}{Dk^4 + \frac{E}{2(1-\nu^2)} k} . \tag{53}$$

Dacă se consideră cazul limită al plăcii de rigiditate nulă, $D \to 0$, expresia (53) conduce la deformata statică a semispaţiului sub sarcină concentrată

$$w = \frac{F(1-\nu^2)}{\pi E} \int_0^{\infty} J_0(kr)\, dk = \frac{F(1-\nu^2)}{\pi E r} . \tag{54}$$

*Primită la redacţie la 24 martie 1960*

# ПЛАСТИНКИ, ОПЕРТЫЕ НА ТВЕРДУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ, ПОДВЕРЖЕННЫЕ ДИНАМИЧЕСКИМ НАГРУЗКАМ

## РЕЗЮМЕ

Предметом работы является описание метода исследования динамически нагруженных пластинок, составленных из твердого материала с линейным реологическим законом, опертых на полупространстве из того же материала.

Дается математическое описание явления, основывающееся на общем способе выражения динамических перемещений тел, при помощи кратного интегрального уравнения типа Вольтерра относительно времени и типа Фредгольма относительно текущей точки поверхности соприкосновения (предполагаемой заданной).

Далее обсуждается явление динамического соприкосновения. Выводятся уравнения опорного закрепления, позволяющие отдельно исследовать пластинку. Выявляется позиция различных упрощающих гипотез. Дается связь между задачей условий опорного закрепления сооружения при динамической нагрузке (выведенных в другой работе автора) и исследуемой контактной задачей. Перечисляются наиболее подходящие методы решения установленных уравнений. Описывается применение монохроматических колебаний для исследования явления. Обсуждается явление при случайных воздействиях.

В заключении приводится в интегральном виде решение для бесконечных упругих пластинок под динамическими нагрузками, опертых без трения на упругую полуплоскость.

# PLAQUES DYNAMIQUEMENT SOLLICITÉES, APPUYÉES SUR UN DEMI-ESPACE SOLIDE

## RÉSUMÉ

L'objet de ce travail este de proposer une méthode permettant d'étudier les plaques, dynamiquement sollicitées, formées d'un matériel solide régi par une loi rhéologique linéaire, et appuyées sur un demi-espace constitué par un matériel similaire.

La description mathématique du phénomène, fondée sur un mode général d'exprimer les déplacements dynamiques des corps, est faite à l'aide d'une équation intégrale multiple, du type Volterra, par rapport au temps, et du type Fredholm, par rapport au point courant de la surface de contact, donnée par le problème.

En continuant, l'auteur discute le phénomène du contact dynamique. Il en déduit les conditions d'appui permettant une étude séparée de la plaque et fait ressortir les diverses hypothèses simplificatrices. Il montre la relation existant entre le problème des conditions d'appui d'une construction dynamiquement sollicitée (fournies par un autre travail de l'auteur) et le problème de contact étudié. Après avoir énoncé les méthodes les plus propres pour résoudre les équations établies, il propose, pour l'étude du phénomène, l'utilisation des vibrations monochromatiques et discute le phénomène dans le cas des sollicitations aléatoires.

Pour finir, l'auteur fournit, sous une forme intégrale, la solution correspondant au cas d'une plaque élastique infinie, dynamiquement sollicitée, et appuyée sans frottement sur un demi-espace élastique.

## BIBLIOGRAFIE

1. В.В. ЛЕБЕДЕВ, *Случайные процессы в электрических и механических системах.* ГИФМЛ, Москва, 1958.
2. M. MIŞICU, *Asupra problemelor dinamice ale lui Boussinesq şi Hertz.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată *2* (1959).
3. H. SANDI, *A theoretical investigation of the interaction between ground and structure during earthquakes.* Proc. of the 2nd World Conference on Earthquake Engineering, Tokyo, 1960.
4. Y. SATO, R. YAMAGUCHI, *Vibration of a Building upon the Elastic Foundation.* Bull. ERI, *3* (1957).
5. B. VAN DER POL, H. BREMMER, *Операционное исчисление на основе двустороннего интеграла Лапласа.* (trad. din L. Engleză). ИИЛ, Москва, 1952.
6. * * * *Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн.* Сборник 1, ГНТИНГТЛ, Ленинград, 1957.

# STUDII

## UNGERE – FRECARE – UZURĂ

# STUDIUL UNEI METODE RADIOACTIVE PENTRU APRECIEREA CALITĂȚILOR LUBRIFIANTE A ULEIURILOR ADITIVATE, PRIN PRISMA UZURII SUPRAFEȚELOR

DE

D. PAVELESCU, I. ILIUC și S. BARBUL

Scopul acestei lucrări este de a găsi o metodă, cu izotopi radioactivi, pentru determinarea calităților de „antiuzură“ a cuplului de frecare și lubrifianților, prin intermediul uzurii. Pentru a realiza această metodă, trebuie să se studieze influența diferitelor cauze care conduc la erori în aprecierea vitezei de uzură.

Se cunoaște împrăștierea punctelor experimentale în măsurătorile de uzură, datorită complexității parametrilor ce condiționează acest fenomen, care conduce la reproductibilitatea nesatisfăcătoare a rezultatelor [4], [6], [7].

Aceste efecte ies și mai mult în evidență în cazul utilizării unei metode foarte sensibile ca spre exemplu o metodă cu izotopi radioactivi.

Studiind o astfel de metodă s-a urmărit reducerea fluctuațiilor rezultatelor și obținerea reproductibilității în limite cît mai strînse, prin îmbunătățirea metodei de măsură și separarea dependențelor funcționale (adică realizarea unor cupluri de frecare în care uzarea suprafețelor să poată permite practic izolarea efectului fiecărui parametru).

Amintim gruparea clasică a parametrilor principali care condiționează fenomenul de uzură :

*a*) materialele cuplului de frecare (compoziție, formă geometrică, prelucrare);

*b*) mediul în care se produce frecarea (compoziția lubrifiantului, prezența aditivilor, gaze, proprietățile lubrifiantului);

*c*) mărimea sarcinii și natura ei, viteza de alunecare.

În urma studiilor făcute, această grupare se dovedește în mare măsură insuficientă pentru a răspunde scopului propus.

În lucrarea [4], a fost realizată o machetă (model experimental) pentru a se putea controla parametrii funcționali din cele trei grupe de factori menționate mai sus. S-a urmărit influența sarcinii, lubrifiantului și a materialelor asupra uzurii, obținîndu-se rezultate comparabile cu cele obținute și de alți autori străini.

Au fost studiate, de asemenea, unele posibilități de obținere a unei sensibilități și precizii cît mai bune (contori G.M. în paralel și cu filtru, reducerea volumului de ulei etc.) precum și posibilitățile optime de utilizare a elementului radioactiv (știft-radioactiv, sabot-radioactiv).

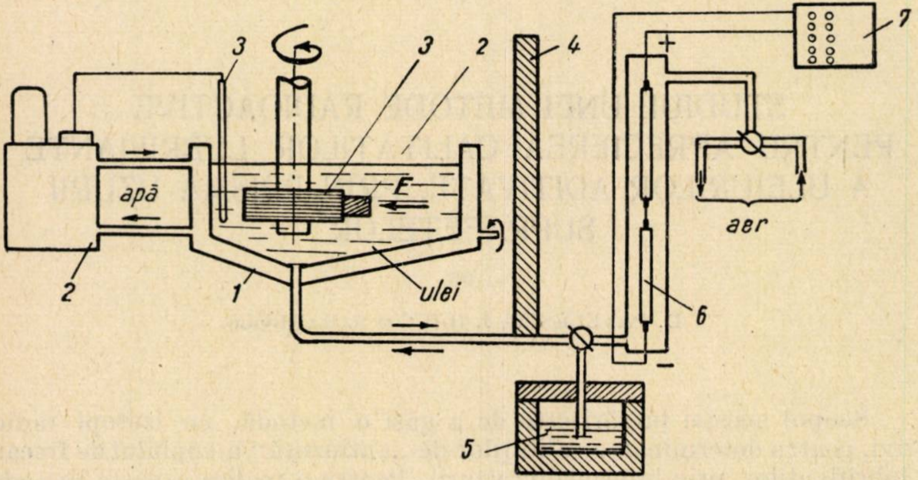


Fig. 1. — Schița instalației experimentale.

*1* — cameră de experiență cu pereți dubli pentru circulația apei, *2* — piesă sabot fixă, *3* — piesă mobilă, *4* — perete de plumb, *5* — recipient pentru ulei radioactiv, *6* — traductor format din 2 contoare GM în paralel, *7* — numărător.

Concluziile principale la care ne-au condus studiile efectuate cu această machetă au fost ;

— modelul experimental, astfel realizat, nu permite separarea influențelor diferiților parametri, în măsura necesară ; acest lucru datorită faptului, că procesul de uzură este direct determinat de *condițiile locale*. Prin aceasta, înțelegem materialul cuplului ax-sabot, starea lui în zona de uzură și imediata apropiere a acestei zone, condițiile micro-geometrice, rugozități, ondulații ; de asemenea starea de deformare locală ce rezultă din sarcina specifică locală.

S-a constatat că aceste condiții locale devin diferite de condițiile inițiale ; ele se modifică în timp.

O altă concluzie a fost aceea că pentru determinări cantitative, trebuie redusă cît mai mult influența depunerilor și de asemenea obținerea unei repartiții cît mai omogene a produselor uzurii în ulei.

Ținînd seama de observațiile de mai sus, s-a studiat și s-a realizat o a doua instalație experimentală (fig. 1) cu următoarele caracteristici :

— cuplul de frecare : suprafață plană activată pe ax neactivat ;

— volumul total de ulei : 400 cm$^3$ (față de 1 500 cm$^3$) ;

— volumul de ulei măsurat : 400 cm$^3$ ; (rezultă raportul 1 între volumul măsurat și volumul total, față de 1 : 5) ;

— sarcina variabilă pînă la 45 kgf/cm$^2$ ;

— viteza de rotație : 100—200 rot/min.

După cum se va vedea, metoda și instalația diferă de alte modele experimentale utilizate de diverși autori [3], [6], [7], tocmai în părțile pe care le socotim esențiale scopului lucrării.

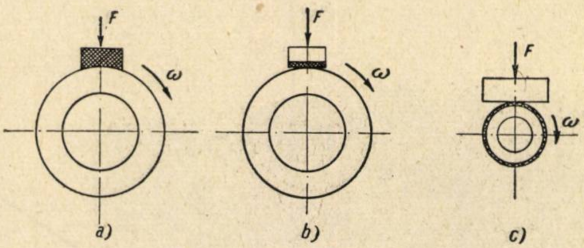


Fig. 2. — Cuplurile de frecare utilizate :
*a*) Contactul se realizează pe o suprafață cilindrică ; *b*) *c*) Contactul se realizează numai pe generatoarea cilindrului.

S-a urmărit realizarea unui contact cît mai intim între suprafețele în frecare, fără însă a se elimina uleiul ca factor de ungere.

Deoarece se cunoaște că portanța hidrodinamică depinde numai de forma suprafețelor, viteza relativă și de viscozitatea uleiului, și nu depinde de loc de ceilalți parametri (compoziția metalului și uleiului, proprietăți chimice etc.), s-a utilizat un cuplu de frecare cu contact numai pe generatoarea cilindrului în rotație (fig. 2*b*). Se realizează astfel un regim de frecare semiuscată, care are avantajul eliminării rolului viscozității stabilind totodată regimul care are cea mai mare importanță în studierea procesului de uzură.

Remarcăm faptul că existența regimului hidrodinamic, poate masca comportarea reală la uzură a diferitelor uleiuri și aliaje.

În același timp, asigurîndu-se suportului piesei-sabot activate posibilitatea de rotire într-un plan care conține și axul de rotație al bucșei neactivate, se realizează în mod automat o distribuție a efortului pe întreaga fîșie de contact, sarcina specifică se poate calcula acum cu mai multă siguranță și de asemenea cuplul în frecare se poate observa optic în condiții mai bune.

În sfîrșit, sistemul ales creează posibilitatea obținerii unor sarcini specifice mari, cu încărcări destul de mici pe brațul de pîrghie.

Un avantaj pe care l-au remarcat și alți autori, și anume poziția verticală a axului motor în camera experimentală, a permis reducerea sensibilă a volumului total de ulei [3], [6], [7].

În instalaţia ce a fost studiată s-a renunţat la o circulaţie continuă a uleiului, deoarece pe de o parte nu se intenţiona (şi nici nu era necesar) să se facă o măsurare continuă a activităţii uleiului, iar pe de altă parte puteau fi reduse erorile legate de depunerea şi pierderea particulelor de uzură radioactive în circuitul exterior camerei experimentale.

S-a preconizat un sistem prin care, pentru măsurare uleiul este absorbit din camera experimentală în corpul traductor. Absorbirea se face prin crearea de vid în conducte, cu ajutorul unei trompe de apă, iar împingerea uleiului înapoi în bazin, după măsurătoare, se face cu aer comprimat.

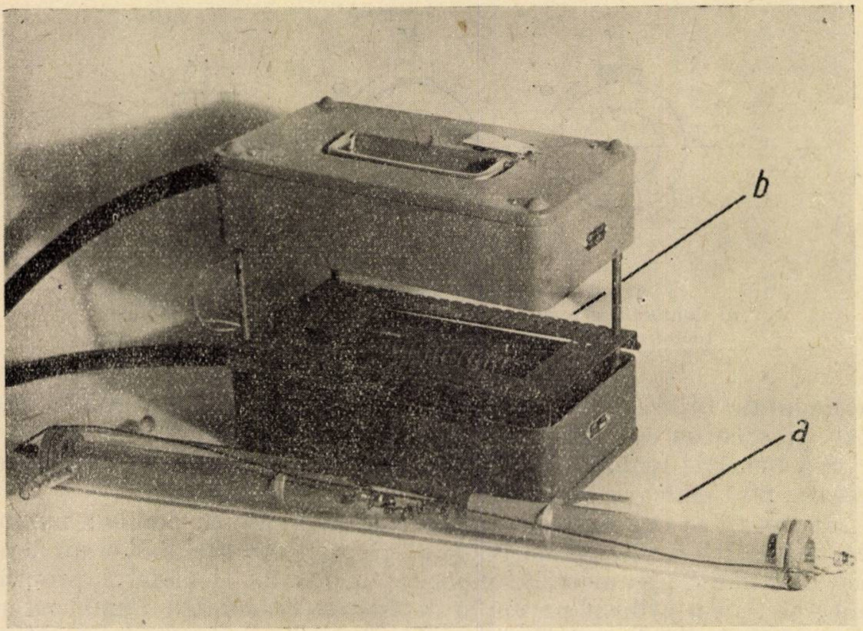


Fig. 3. — Traductori : *a*) Cu doi contori G—M scufundaţi ; *b*) Cu şase contori G—M exteriori.

Sistemul traductor realizat (fig. 3 *a*) este de tipul contor G.M. cufundat în ulei. În cazul de faţă s-au utilizat doi contori G.M. în paralel, plasaţi în axul recipientului de sticlă, astfel că volumul *activ* este concentric cu volumul de ulei măsurat, iar geometria de măsură este simplă şi perfect reproductibilă. La acest tip de traductor, coeficientul geometric poate atinge valoarea 0,4 ; prin construcţie s-a făcut posibil ca întreg volumul efectiv de măsură al traductorului să fie egal cu volumul uleiului din camera experimentală a machetei.

Dintre diferitele metode de activare ce se folosesc în cazul studierii fenomenului frecare uzură, s-a ales o metodă modernă şi anume cea a depunerilor electrolitice neactivate. Astfel, pe o piesă de cupru cu suprafață prelucrată plan, se depune pe cale electrolitică, un strat de argint sau zinc în grosime de 0,2—0,4 mm (adică tocmai stratul necesar urmăririi procesului de uzură).

După iradiere, curba de activare-dezintegrare pentru cupru (suportul stratului depus pe cale electrolitică) și argint (metalul studiat ce intervine în cuplul de frecare) arată că după timpul $t = t_1 + t_2$ ($t_1$ — timpul de activare ; $t_2$ — timpul de dezactivare), activitatea se află practic concentrată în stratul superficial de argint (fig. 4).

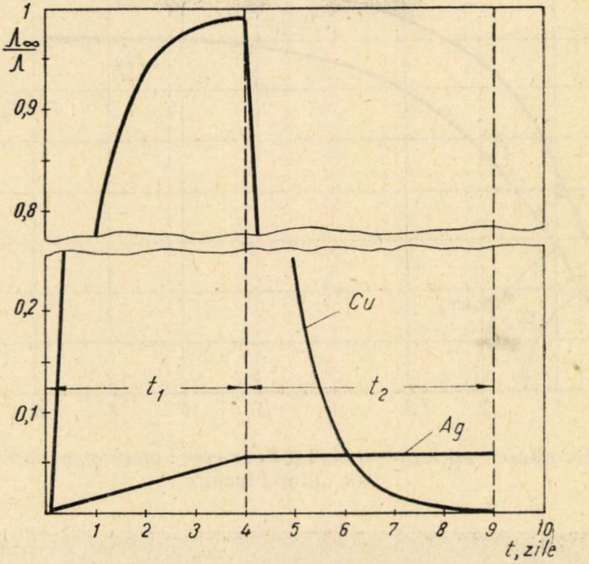


Fig. 4. — Curba activare — dezactivare pentru $Ag^{110}$ și $Cu^{64}$

Această constatare și metodă folosită, dă posibilitatea obținerii unei activități specifice (care determină sensibilitatea metodei) de zeci de ori mai mare, pentru aceeași activitate totală, față de procedeul activării integrale a piesei-sabot. Soluția aleasă mărește astfel sensibilitatea metodei fără a face dificilă protecția, pe care o simplifică.

În figura 5 sînt arătate rezultatele obținute cu dispozitivul de măsură prezentat mai sus. Din alura curbelor se constată că viteza de uzură scade în timp datorită realizării condițiilor geometrice pentru ungerea hidrodinamică. Cu alte cuvinte, regimul hidrodinamic capătă un rol din ce în ce mai mare, înlocuind contactul metal-metal (în prezența lubrifiantului) [5]. Chiar în regim permanent (porțiunea a III-a) există o uzură care s-ar datora regimului hidrodinamic imperfect. Tangentele la origină ale acestor curbe vor caracteriza ansamblul cuplului de frecare-lubrifiant.

În urma analizei rezultatelor obținute, față de scopul propus, s-a constatat că totuși soluția aleasă pentru cuplul de frecare necesită un număr mare de piese radioactive (pentru fiecare parametru fiind necesară altă suprafață) ceea ce constituie o piedică în extinderea cercetării şi a verificării rezultatelor. Pentru înlăturarea acestui inconvenient şi pentru înlăturarea efectului de portanţă hidrodinamică, care apărea prin uzura piesei sabot, s-a modificat cuplul de frecare în sensul următor ; piesa activă mobilă (sub forma unei bucşe activate montată pe axul motor) şi piesa plană fixă, neactivată. Piesa plană este confecţionată din oţel tratat, cu duritate mare. De această dată lăţimea piesei plane este mai mare decît înălţimea bucşei radioactive (fig. 2*c* şi 6*b*). Această soluţie asigură constanţa formei geometrice exterioare (macro-geometria pieselor) a cuplului studiat şi deci posibilitatea de realizare a unui număr

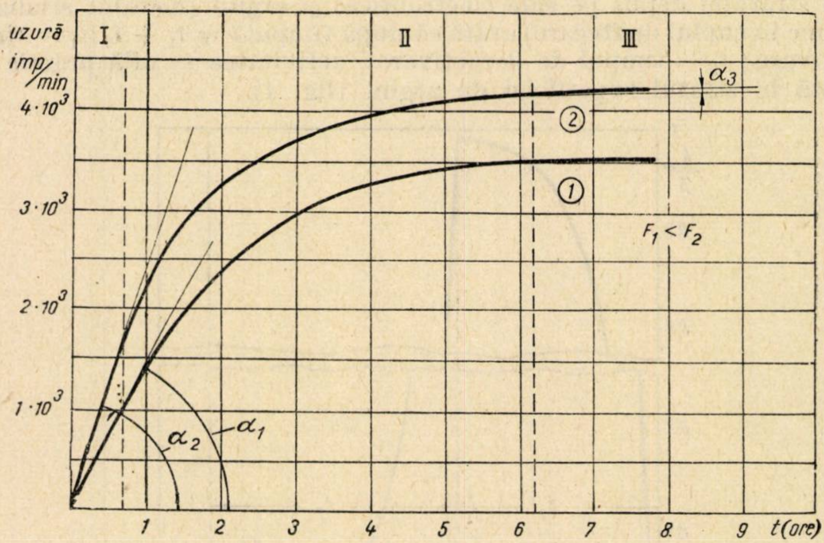


Fig. 5. — Rezultatele obţinute cu cuplul de frecare : piesă plană activă ($Ag^{110}$) pe ax de oţel inactiv.

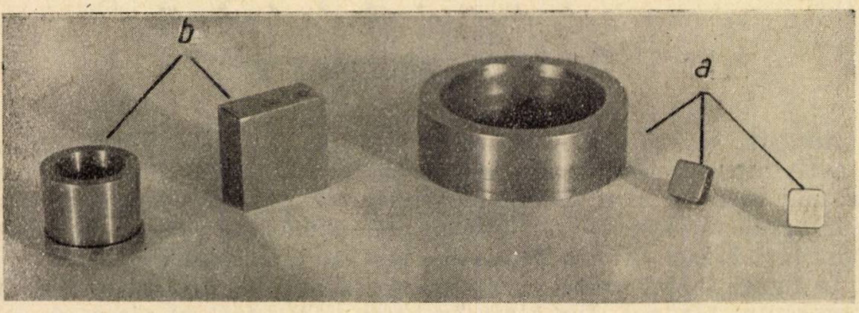


Fig. 6. — Cuplurile de frecare utilizate : *a*) Ax inactiv, sabot cupru activat numai la suprafaţa de lucru ($Ag^{110}$, $Zn^{65}$) ; *b*) Ax activ (bucşă aliaj Bz + $In^{114}$) sabot de oţel inactiv.

mare de experiențe cu aceeași piesă radioactivă (în fig. 6 sînt arătate piesele active și neactive ale cuplurilor de frecare din fig. 2).

Pe de altă parte, fiind observate variații accentuate ale activității uleiului, explicate numai prin existența unor depuneri în contor sau în bazin (de la o zi la alta), sau prin repartizarea neomogenă a particulelor radioactive în volmul de ulei măsurat, s-a studiat acest fenomen, urmărindu-se înlăturarea efectelor negative. Căutîndu-se o soluție pentru eliminarea fluctuațiilor provenite din depuneri sau din distribuția neomogenă a produselor radioactive de uzură (eventual depuneri pe conductele de material plastic) s-a ajuns la soluția măsurării integrale a uleiului chiar în camera experimentală. S-a realizat acest lucru cu ajutorul unui grup de contoare G.M. (6 bucăți) plasate ca în figura 3 *b*. Se poate arăta că pentru anumite valori ale elementelor geometrice *a*, $a^1$ și *b*, $b^1$ (fig. 7) neomogenitatea activității în volumul de ulei $V_u$ modifică rezultatul măsurătorii cu o valoare care poate fi stabilită dinainte. Eficacitatea acestui sistem se menține totuși ridicată față de sistemele anterioare prin faptul că s-a eliminat complet posibilitatea de pierdere (nemăsurare) a produselor uzurii pe circuitul dintre traductor și bazin și s-a redus aproape complet influența depunerilor și a neomogenității lor.

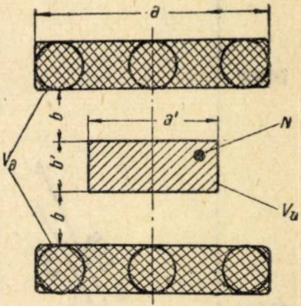


Fig. 7. — Secțiune transversală prin ansamblu traducător.

$V_a$ — volumul activ al traductorului; $V_u$—volumul uleiului radioactiv; *M*— neomogeneitatea activității specifice.

Este interesant de arătat că după studierea posibilităților de utilizare a diferiților trasori radioactivi ($Fe^{59}$, $Zn^{65}$, $Ag^{110}$ etc.) s-a ales ca element activ indiu radioactiv, pentru că prezintă avantajele trasorilor gama activi, avînd totodată o energie γ relativ redusă (0,2 MeV), o secțiune eficace mare și un timp de înjumătățire destul de mare (49 zile).

Introducerea indiului (element cu duritate mică care prezintă totodată și o mare capacitate de difuzie) s-a efectuat în momentul turnării barei de bronz sau alamă, din care s-a prelucrat apoi numai un inel ce a fost apoi iradiat la Institutul de fizică atomică, împreună cu o bucșe de cupru pe care este montat (fig. 6 *b*). Și în acest caz se constată că după cîteva zile, $In^{114}$ rămîne elementul activ predominant, din cauza secțiunii eficace mari și a timpului de înjumătățire corespunzător. Prin utilizarea indiului radioactiv ca element activ al măsurătorii, se reduc în mod corespunzător măsurile de protecție și deci doza de expunere.

Toate acestea au permis o serie de încercări ale unor uleiuri și aditivi pentru cuplul de metale bronz (cu indiu) pe oțel. Condițiile de lucru au fost următoarele:

— sarcina: 154 kgf/cm$^2$,

— turația bucșei radioactive: 250 rot/min,

— temperatura 42°C (în toate cazurile temperatura fiind menținută constantă prin termostatare).

S-au încercat două uleiuri de vîscozitate apropiată, din două clase diferite : ulei 309 și ulei 410 (fig. 8).

Rezultă că la uleiul 309 viteza de uzură a fost de aproximativ 4 000 imp./min.oră, și la uleiul 410 de aprox. 3 700 imp./min. oră. În condițiile de experimentare folosite diferența nu este semnificativă.

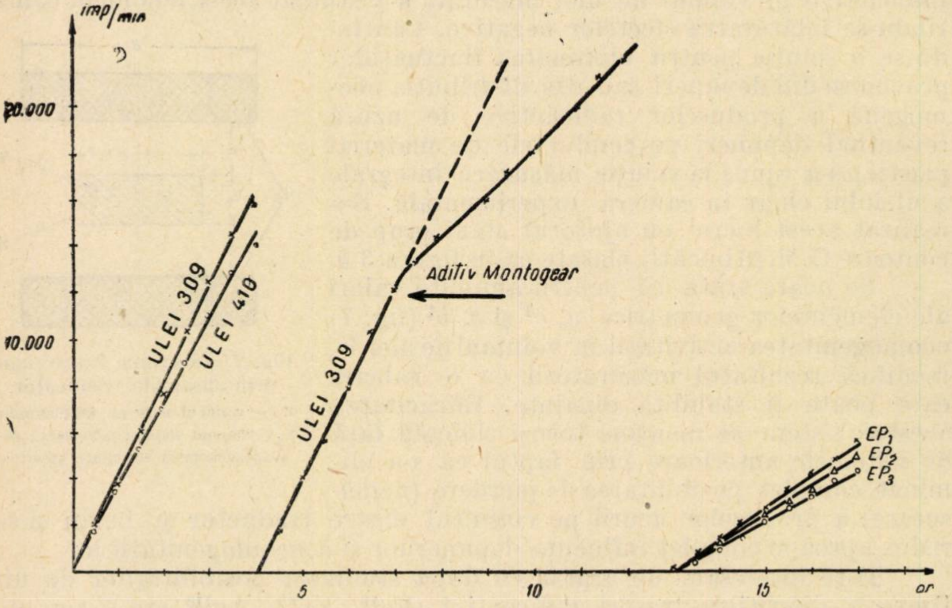


Fig. 8. — Curbele de uzură ale cuplului bronz (In) pe oțel, pentru uleiuri simple și aditive.

În aceleași condiții de lucru s-a studiat influența adaosului aditivului de extremă presiune Montogear B. în ulei 309.

Din diagramă se vede, că folosind ulei 309 rezultă viteza de uzură de 4 000 imp./min.oră. După trei ore s-a adăugat aditivul Montogear B. în concentrație de 4% (în volum). Imediat după introducerea aditivului, viteza de uzură scade, ca apoi să crească la valoarea constantă de 2 000 imp./min. oră. Rezultă clar că datorită adăugării aditivului, viteza de uzură a scăzut la jumătate (în condiții de extremă presiune, efectul aditivului este mult mai pronunțat).

O altă serie de experiențe s-au făcut pentru compararea uleiurilor de extremă presiune $EP_1$, $EP_2$, $EP_3$ în ulei brighstok. Uleiul $EP_3$ a dat uzura cea mai mică (1 000 imp./min.oră) în timp ce uleiul $EP_1$ a condus la 1 300 imp./min.oră iar $EP_2$ la aproximativ 1 200 imp./min.oră. Diferențele mici dintre rezultate s-ar putea datora, atît diferenței de viscozitate a uleiurilor aditivate cît și caracterului lor polifuncțional.

În concluzie, macheta și metodica folosită au permis eliminarea unor serii de cauze de erori, fapt care la rîndul său a condus la posibilitatea studierii fenomenului de uzură în condiții de reproductibilitate, chiar în situația unei activități specifice reduse.

Instalația a fost verificată în condiții constante timp de 50 ore conducînd la rezultate cu o abatere relativă maximă de ± 25%.

Această metodă poate fi aplicată în laboratoarele de cercetări, ea putînd conduce la rezultate reproductibile în limite admisibile, într-un timp relativ scurt (5—10 ore).

*Primită la redacție la 10 decembrie 1960*

# ИССЛЕДОВАНИЕ РАДИОАКТИВНОГО МЕТОДА ДЛЯ ОЦЕНКИ СМАЗОЧНЫХ СВОЙСТВ МАСЕЛ С ПРИСАДКАМИ ПО ИЗНОСУ ПОВЕРХНОСТЕЙ

## РЕЗЮМЕ

Целью настоящей работы является нахождение метода с радиоактивными изотопами, при помощи которого можно было определить и изучить по износу металлических поверхностей износостойкие качества трущейся пары и смазочных материалов (с присадками и без них).

В продолжении работы [4] и исходя из того, что в исследованиях по износу получаются, из-за сложности факторов, расхождения экспериментальных точек и невоспроизводимые результаты, авторы старались уменьшить флуктации результатов путем постепенного исключения факторов вводящих погрешности. Для этой цели была осуществлена простая экспериментальная установка.

Была устранена рециркуляция масла для того чтобы уменьшить погрешности и флуктации, происходящие от осаждений.

Также постепенно перешли от пары радиоактивная колодочная деталь — нерадиоактивная вращающаяся ось к паре радиоактивная подвижная деталь — нерадиоактивная колодка, именно для того чтобы уменьшить этим путем флуктации, происходящие от изменения трущейся поверхности.

В первом случае применялись поверхностные слои $Ag^{110}$ или $Zn^{65}$, полученные электролитическим осаждением до излучения; затем применяли бронзовое кольцо с $In^{114}$. Количества радиоактивного индия (диффузия в сплаве, малая $\gamma$ энергия — $E_{\gamma} = 0{,}186$ мэв, практически длинный период полураспада — 49 дней и пр.) облегчили длинный период полураспада — 49 дней и пр.) облегчили экспериментирование.

Принятый метод позволил устранить ряд источников погрешностей и, следовательно, дал возможность выявить в условиях воспроизводимости различные смазочные качества масел с присадками. Исследования продолжаются.

## ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Схема экспериментальной установки.

Рис. 2. — Применяемые трущиеся пары: *а* — соприкосновение осуществляется на цилиндрической поверхности; *в*, *с* — соприкосновение осуществляется только на образующей цилиндра.

Рис. 3. — Датчики: *а* — с двумя погруженными счетчиками Г—М; *б* — с шестью внешними счетчиками Г— М.

Рис. 4. — Кривая активации-дезактивации для $Ag^{110}$ и $Cu^{64}$.

Рис. 5. — Результаты, полученные с трущейся парой активная плоская деталь ($Ag^{110}$) — неактивная стальная ось.

Рис. 6. — Применяемые трущиеся пары: *а* — неактивная ось, медная колодка с активацией лишь рабочей поверхности ($Ag^{110}$, $Zn^{65}$); активная ось (втулка из сплава бронза + $In^{114}$), неактивная стальная колодка.

Рис. 7. — Поперечное сечение по узлу датчика: $V_a$ — рабочий объем датчика; $V_u$ — объем радиоактивного масла; $M$ — неоднородность удельной активности.

Рис. 8. — Кривые износа пары бронза (In) — сталь для простых масел и с присадками.

# STUDY ON A RADIOACTIVE METHOD FOR ESTIMATING THE LUBRICATING QUALITIES OF COMPOUND OILS BY MEANS OF FRICTION PARTS

## ABSTRACT

The purpose of this paper is to find a radioactive method for determining and investigating the anti-wear qualities of friction parts and of the lubricating oil (with or without additives) with the aid of radioactive isotopes.

Using the results obtained in a previous paper [4] and considering the fact that due to the complexity of the factors involved in wear investigations, scattering of the experimental points and irreproductible results are obtained, this paper aimed at reducing the fluctuations of the results by gradually eliminating the error-producing factors. For this purpose a simple experimental device was designed.

The re-circulation of the oil containing wear particles was eliminated, in order to reduce the errors and fluctuations resulting from deposits.

The investigation was also gradually extended from a radioactive fixed part and a non-activated rotating shaft to a radioactive moving part and a non-activated fixed part, in order to further reduce the fluctuations resulting from the variation of the friction surface.

In the first case, surface layers of $Ag^{110}$ or $Zn^{65}$, electrolitically placed before irradiation, were used; in the latter case a bronze annulus with $In^{114}$ was used. The qualities of the radioactive indium (reduced $\gamma$ energy — $E_\gamma = 0.186$ MeV — and a practically long half-life of 49 days) facilitated the experiments.

The method has permited the elimination of a series of error-producing causes and consequently has made possible to detect under reproductibility conditions (even after a few experimental points) various lubricating conditions of compound oils. At the present time, the investigations are in progress.

## EXPLANATION OF THE FIGURES

Fig. 1. — Scheme of the test apparatus.

Fig. 2. — Friction parts employed : *a*) The contact is made on cylindrical surface ; *b*), *c*), the contact is made only on the cylinder generatrix.

Fig. 3. — Counter system : *a*) with 2 submerged G.M. counters ; *b*) with 6 exterior G.M. counters.

Fig. 4. — The activation-desactivation curve for $Ag^{110}$ and $Cu^{64}$.

Fig. 5. — Results obtained with an activated flat plate ($Ag^{110}$) and a non-activated steel shaft.

Fig. 6. — Friction parts employed : *a*) non-activated shaft and a copper part with activated working surface ($Ag^{110}$, $Zn^{65}$) ; *b*) activated shaft (bush made of bronze and $In^{114}$ alloy) and non-activated steel part.

Fig. 7. — Cross-section of the counter system. $V_a$ — the effective zone of the system ; $V_u$ — radioactive oil zone ; $M$ — non-homogeneity of the specific activity.

Fig. 8. — Wear curves obtained for bronze(In) and the steel part for simple and compound oils.

## BIBLIOGRAFIE

1. Bowden F. P., Tabor D., *The friction and lubrication of Solids*, Oxford Univ. Press, 1954, 10—22 şi 58—63.
2. Cazaud R., *Le frottement et l'usure des métaux*. Ed. Dunod, Paris, 1955, 2—16.
3. Дьяченко П. Е., *Применение радиоактивных изотопов в технике*. Машгиз, Москва, 1958.
4. Pavelescu D., Iliuc I., Barbul S., Procopovici E., Năstase M., Constantinescu V., *Metodă pentru studiul uzurii lagărelor cu izotopi radioactivi*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **XI**, *6* (1960).
5. Tipei N., *Hidroaerodinamica lubrificației*, Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1957.
6. * * * *Развитие теории трения и изнашивания. Труды совещания по вопросам теории трения и изнашивания* (15—17 нояб. 1954). Изд. Акад. Наук СССР, Москва, 1957.
7. * * * *Машиностроение I. Приборостроение*. Труды всесоюзной научно-технической конференции по применению радиоактивных и стабильных изотопов и излучений в народном хозяйстве и рынке (4—12 апрель 1957). Изд. Акад. Наук, СССР, Москва, 1958.

The method has permitted the elimination of a series of error generating causes and consequently has made possible to detect under reproducibility conditions (even after a few experimental points) various interesting conditions of compound [illegible]. At the present time, the investigations are in progress.

## EXPLANATION OF THE FIGURES

Fig. 1. — [illegible] of the test apparatus.

Fig. 2. — [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] surface. Measurement is made only on the [illegible] generators.

Fig. 3. — [illegible] [illegible] with [illegible] [illegible] [illegible] with [illegible] [illegible] [illegible].

Fig. 4. — The [illegible] [illegible] [illegible] for [illegible] and [illegible].

Fig. 5. — [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] and [illegible] [illegible] [illegible].

Fig. 6. — [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible].

Fig. 7. — Observation of the [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] of the [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] of the [illegible] [illegible].

Fig. 8. — Wear [illegible] [illegible] for [illegible] and the [illegible] [illegible] for single and compound [illegible].

## BIBLIOGRAPHY

1. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] and [illegible] of [illegible] (Oxford Univ. Press, 19[illegible]) [illegible]
2. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] Paris, 19[illegible], [illegible]
3. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], 19[illegible]
4. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]
5. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], 19[illegible]
6. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], 19[illegible]

# STUDII

## UNGERE – FRECARE – UZURĂ

# CONTRIBUȚII ÎN PROBLEMA LEGĂTURII DINTRE RUGOZITATE, PROCEDEU DE PRELUCRARE, DIMENSIUNE, CLASA DE PRECIZIE ȘI FUNCȚIUNE ÎN CONSTRUCȚIA DE MAȘINI

DE

N. G. POPINCEANU[1] și M. D. GAFIȚEANU[1]

## 1. CONSIDERAȚII GENERALE

Problema calității suprafețelor prezintă o deosebită importanță în tehnică, deoarece influențează direct asupra comportării organelor de mașini în timpul funcționării.

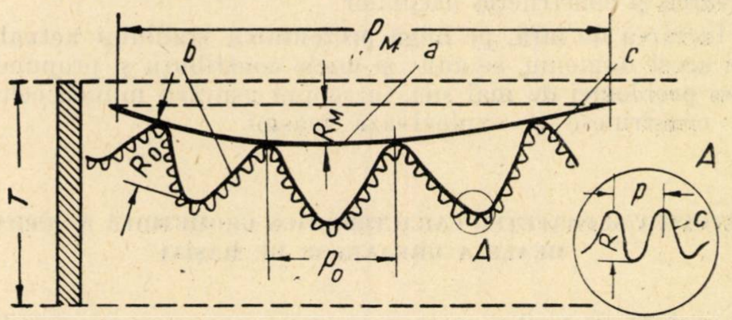


Fig. 1. — Abaterile suprafeței reale de la suprafața geometrică ideală.
$T$ — toleranța ; $a$ — abateri macrogeometrice. $p_M/R_M > 1\,000$.
$b$ — ondulații. $p_0/R_0 = 50\ldots1\,000$ ; $c$ — abateri microgeometrice. $p/R < 50$.

Noțiunea de calitate a suprafeței cuprinde două aspecte deosebite : un aspect fizic și altul geometric.

Din punct de vedere fizic, calitatea suprafeței se definește prin abaterile proprietăților fizice ale stratului superficial de metal de la proprietățile fizice ale metalului din interiorul piesei (caracteristici mecanice, tensiuni remanente, structură, rezistență la uzură, rezistență la coroziune etc.) [5].

---

[1] Laboratorul de organe de mașini — Institutul politehnic, Iași.

Din punct de vedere geometric, calitatea suprafeței este determinată de abaterile suprafeței reale de la suprafața ideală (fig. 1).

În cele ce urmează se va avea în vedere mai ales aspectul geometric al calității suprafețelor, iar întrebuințarea termenului de calitate a suprafeței se va referi tocmai la acest aspect geometric.

Cercetări numeroase au arătat că pentru îndeplinirea unui anumit scop funcțional, proiectarea și execuția organelor de mașini trebuie realizate astfel, încît să existe o corelație între abaterile de la suprafața geometrică ideală și abaterile dimensionale sau toleranțe.

În ultimul timp, cercurile de specialitate, sînt preocupate intens de problema legăturii dintre calitatea suprafeței, pe de o parte, și modul de prelucrare, dimensiunea piesei, clasa de precizie și funcțiune, pe de altă parte; la rezolvarea acestei probleme, pe lîngă considerațiile teoretice, contribuie în cea mai mare parte și datele cu caracter statistic, iar rezultatele se întrevăd a fi foarte utile în proiectarea și construcția mașinilor.

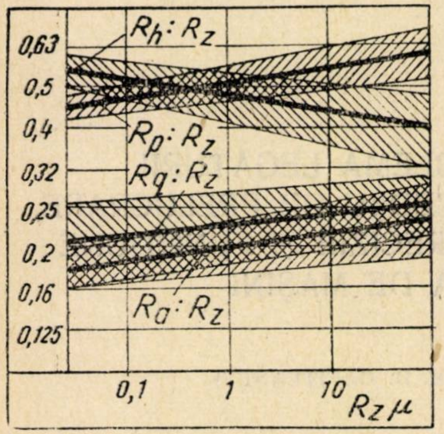


Fig. 2. — Corespondența dintre diversele criterii de evaluare a rugozității [28].

În lucrarea de față, pe lîngă prezentarea stadiului actual al cercetărilor în acest domeniu, se aduc și unele contribuții și propuneri pentru rezolvarea problemei de mai sus, în scopul ușurării muncii celor ce proiectează, construiesc și exploatează mașini.

## 2. CALITATEA SUPRAFEȚEI, CARACTERISTICĂ GEOMETRICĂ A SUPRAFEȚEI REALE A ORGANELOR DE MAȘINI

Ansamblul abaterilor microgeometrice sau neregularităților suprafeței reale, cu pas relativ mic, putînd fi măsurate ca abateri ale profilului efectiv față de o linie medie, în limitele unei lungimi de referință, definesc rugozitatea suprafeței respective [29], [37], [44] [1].

Cu toate eforturile depuse pînă în prezent de către Comitetul ISO TC/57, există și vor mai exista încă în diverse țări criterii diferite de evaluare și de reprezentare pe desene a rugozității suprafețelor [28], [29], [33], [34], [37], [40], [42], [44] [1].

---

[1] Definiție propusă de delegația romînă și aprobată la Conferința din 1956 a Comitetului ISO TC/57, al cărui secretariat este deținut de U.R.S.S.

Din figura 2 și anexa 1 se desprinde corespondența dintre diversele criterii de evaluare a rugozității suprafețelor.

## 3. RUGOZITATEA ȘI MODUL DE PRELUCRARE

Mărimea microneregularităților depinde de o serie de parametri ai procesului de prelucrare. Există și unele relații care dau cu caracter informativ, [5] mărimea asperităților în funcție de cîțiva din parametrii amintiți. În figura 8 se indică domeniile de mărime a asperităților ce se obțin prin diverse moduri de prelucrare [26], [28], [32], [40], [41], [43], [45].

## 4. RUGOZITATE, FUNCȚIUNE, DIMENSIUNE, CLASĂ DE PRECIZIE

### 4.1. RUGOZITATE ȘI FUNCȚIUNE

Din punct de vedere al importanței lor în funcționarea mașinilor suprafețele se pot clasifica în : suprafețe cu caracter auxiliar și suprafețe cu rol funcțional important.

4.1.1. *Suprafețe auxiliare.* În cazul suprafețelor auxiliare, mărimea optimă a asperităților este dictată de o serie de indicații cu caracter practic date în tabela 1 [9], [12], [40].

4.1.2. *Suprafețe de piese cu roluri funcționale importante.* Astfel de suprafețe pot fi pentru piese care formează ajustaje și pentru piese care nu formează ajustaje. În construcția de mașini, piesele care formează ajustaje ocupă locul cel mai important din punct de vedere funcțional și asupra lor se insistă în mod special în prezenta lucrare.

Influența rugozității suprafețelor asupra funcționării organelor de mașini, în general, poate fi privită din punctele de vedere expuse în tabela 1.

4.1.2.1. *Rugozitatea și rezistența la oboseală.* Indiferent dacă piesele formează sau nu ajustaje, este cunoscut faptul că prezența microneregularităților pe o suprafață duce la o micșorare a rezistenței la oboseală a piesei ; micșorarea este cu atît mai mare cu cît și asperitățile sînt mai mari [7] (fig. 3).

---

[1] $R_a$ — abaterea medie a neregularităților [22], [29], [44] ;
$R_z$ — înălțimea neregularităților [22], [29], [44] ;
$R_q$ — abaterea medie pătratică [22], [29], [40] ;
$R_h$ — înălțimea medie [22], [28]. ;
$R_p$ — distanța dintre linia medie și linia exterioară a profilului efectiv [22], [28] ;
$k_h$ — coeficient de umplere [22], [28] ;
$k_p$ — coeficient de golire [22], [28] ;
$t_a$ — partea portantă [22], [28] ;
$R_{\max}$ — înălțimea maximă [22], [29], [44].

*Tabela 1*

**Recomandări pentru rugozitatea suprafețelor auxiliare**

| Suprafețe | Destinația suprafețelor | $R_z$ în μ |
|---|---|---|
| Găuri | fără contactare în general, găuri de șuruburi etc. | ... 50 |
| | idem pentru piese de precizie | 6,3... 25 |
| Arbori | suprafețele fără contactare ale axelor și arborilor principali de mașini-unelte, mandrine etc. | 3,2... 6,3 |
| Frontale | idem pentru mandrine, flanșe | 3,2... 12,5 |
| | idem pentru roți dințate, cuple, bucșe | 6,3... 25 |
| De reazim | tălpi de batiuri | ... 50 |
| Destinate acoperirilor | — cu vopsele | ... 50 |
| | — galvanice | ... 4 |
| Cu scop estetic | lustruite, cromate, nichelate, roți de mînă, manete, cadrane etc. | 0,8... 3,2 |
| Destinate cercetărilor metalografice | | ... 0,25 |
| Destinate sudării sub cusătură | | 100...200 |

Dacă organul de mașină funcționează într-un mediu coroziv, rezistența la oboseală este și mai mult influențată de mărimea asperităților, datorită măririi suprafeței de contact dintre piesă și mediul coroziv.

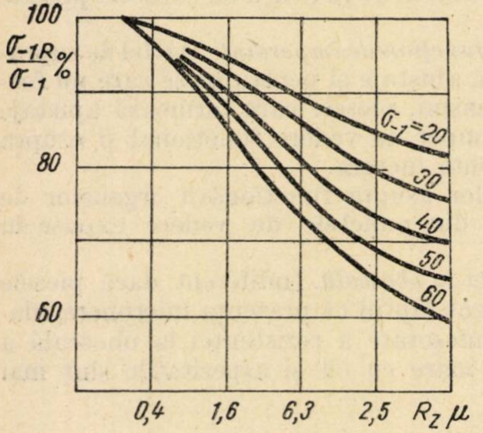


Fig. 3. — Influența mărimii rugozității asupra rezistenței la oboseală $\cdot \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1R}} = 1 + a\sigma_{-1}$.

$\sigma_{-1}$ — rezistența la oboseală în kgf/mm², a unei piese netede, lustruite, fără concentratori de eforturi, cu diametrul de 10 mm, supusă unui ciclu de solicitare alternant simetric, la o temperatură de 20°C; $\sigma_{-1R}$ — idem însă pentru o piesă cu rugozitatea $R_z$; $a$ — coeficient dependent de $R_z$.

4.122. *Rugozitatea și fenomenul de uzură.* Uzura — roaderea — suprafețelor în contact este influențată puternic de mărimea microneregularităților de pe suprafețele respective. La suprafețele care formează ajustaje, cercetările făcute [11], [28], [36] au arătat că uzura excesivă a asperităților prea mari în raport cu funcțiunea, duce la modificarea caracterului ajustajului, făcîndu-l de multe ori chiar inutilizabil. Analizînd influența roaderii asperităților asupra diferitelor ajustaje se constată următoarele :

*a*) la ajustajele cu joc pot apărea, în urma uzurii — roaderii — asperităților, jocuri prea mari care să deranjeze funcțiunea sau să modifice ajustajul inițial (fig. 4 și fig. 5) ;

*b*) la ajustajele cu strîngere, roaderea — aplatizarea — asperităților în timpul montajului poate micșora efectul strîngerii. În scopul limitării acestei micșorări la o valoare care să nu anuleze efectul de strîngere, în proiectare, se adaugă la strîngerea minimă calculată mărimea: 1, 2 ($R_{z1} + R_{z2}$), în care $R_{z1}$ și $R_{z2}$ sînt înălțimile asperităților de pe cele două suprafețe în contact. Se capătă astfel strîngerea minimă necesară de montaj, această majorare fiind valabilă în ipoteza că, în urma montajului, asperitățile se rod cu aproximativ 0,6 din înălțimea lor inițială.

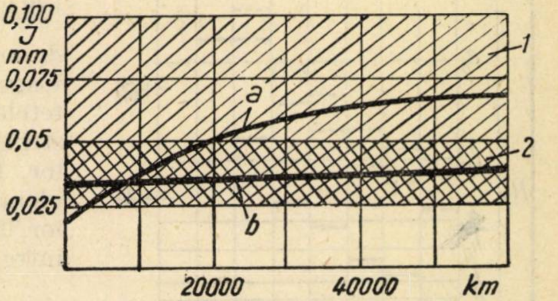


Fig. 4. — Dependența jocului *J* în lagărele unui arbore cotit în funcție de drumul parcurs în km, pentru diferite rugozități inițiale (automobil) [36].

*a*) $R_z$ = 8 microni; *b*) $R_z$ = 1 micron; *1.* Zona de uzură; *2.* Zona de lucru optimă.

În literatură, există date de proiectare care permit aprecierea mărimii optime a asperităților în cazul ajustajelor cu strîngere. Astfel, unele recomandări, pentru îmbinări presate, indică rugozități $R_z \simeq (0{,}08 \ldots 0{,}2)T$ ($T$ — toleranța piesei) [34]; S. A. Smirnov [30], în funcție de importanța îmbinării, propune pentru rugozitate valori tabelate, care reprezintă în medie 0,1... 0,3 din toleranță [— pentru asamblări care trebuie să transmită sarcini mari și cu șocuri, în medie (0,1 ... 0,15) $T$, iar pentru asamblări mai puțin importante (0,2 ... 0,3) $T$¹)]; în aceeași ordine de idei pot fi găsite numeroase exemple de alegere a rugozității (de ex.: ajustajul osie de vagon-butuc, $R_z \simeq 0{,}11\ T$ etc. [4]);

*c*) la ajustajele intermediare, influența asperităților asupra comportării în funcționare, se manifestă întocmai ca la ajustajele cu strîngere.

Recomandările lui S. A. Smirnov [30] prevăd și aici în funcție de importanța îmbinării, valori cuprinse în medie între (0,1... 0,3) $T$, cu indicația că pentru îmbinările pretențioase (roți dințate montate pe arbori în clasa a 2-a de precizie, rulmenți pe arbori etc.), să se adopte valori mai mici, $R_z = (0{,}1 \ldots 0{,}15)\ T$, decît pentru îmbinările fără pretenții, $R_z = (0{,}2 \ldots 0{,}3)T$. Pentru ajustajele rulmenților pe arbore și în carcasă, R. D. Beizelman [3], dă indicații, în baza cărora rugozitatea arborilor și carcaselor nu depășește 0,3 $T$ — pentru arbori: $R_z = (0{,}16 \ldots 0{,}27)\ T$; pentru carcase $R_z = (0{,}16 \ldots 0{,}29)\ T$. De asemenea, unele date de proiectare, [4] recomandă, în general: $R_z = (0{,}1 \ldots 0{,}25)\ T$.

---

¹) Valori verificate în industria constructoare de aparate.

La rulmenții radiali cu bile, executați în clasa de precizie curentă ($H$ conform STAS 4207—53) cu rugozități obișnuite pe căile de rulare și corpurile de rulare, s-a constatat că, întrucît micșorarea asperităților de pe corpurile de rulare datorită roaderii este neglijabilă, singurul factor care modifică jocul sau strîngerea internă a rulmentului este roaderea asperităților de pe căile de rulare [23].

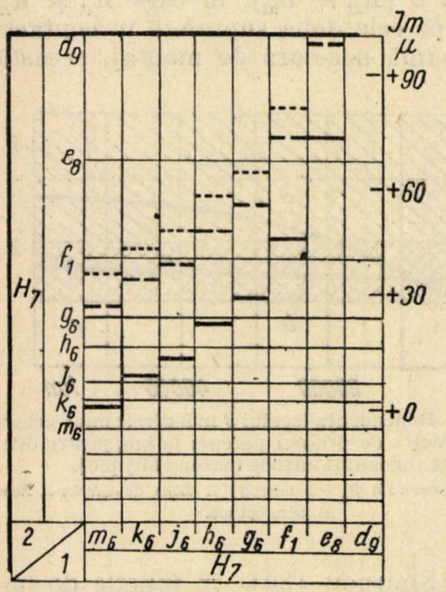


Fig. 5.—Modificarea jocului mediu în urma uzurii pentru cîteva ajustaje intermediare și cu joc (Ø 18...30 mm) [28].

$J_m$= jocul mediu în microni; — — jocul mediu obținut după trecerea timpului de uzură (roaderea completă a asperităților) în cazul unei strunjiri cu diamant sau a unei lepuiri; — — idem în cazul unei strunjiri fine cu oțel dur, respectiv alezare fină; — —idem în cazul unei strunjiri obișnuite.

*1* — ajustaj inițial; 2 — ajustaj final, după roaderea (uzura) completă a asperităților.

Exemplu: ajustajul H7/j6, cu piese strunjite obișnuit, după uzură devine H7/f7; H7/f7 devine H7/e8 etc.

4.123. *Rugozitatea și fenomenul de ungere a suprafețelor în alunecare.* Ungerea în condiții normale a suprafețelor care alunecă una pe alta este strîns legată de mărimea asperităților. Dacă asperitățile sînt prea mari, uleiul se va așeza în fundul golurilor, lăsînd vîrfurile libere să se atingă între ele.

Realizarea unor suprafețe mai puțin rugoase, are ca efect o funcționare mai bună, pelicula de ulei fiind continuă și aderînd la suprafață.

De altfel este cunoscut, că pentru a avea o frecare lichidă între două suprafețe în contact și în mișcare relativă una față de alta, este nevoie să fie satisfăcută condiția

$$h_{\min} \geqslant R_{z1} + R_{z2},$$

în care: $h_{\min}$ — grosimea minimă a peliculei de ulei, calculată pe baza ipotezelor teoriei hidrodinamice a ungerii; $R_{z1}$ și $R_{z2}$—înălțimea micro-neregularităților de pe cele două suprafețe în alunecare.

Micșorarea asperităților sub orice limită nu are același efect. Astfel la suprafețele supuse unor presiuni mari, micșorarea asperităților sub 0,1 ... 3 microni, poate duce la întreruperea peliculei de ulei, ivindu-se de multe ori gripajul și uzura excesivă [17] [1].

În condițiile impuse de teoria hidrodinamică a ungerii — în cazul lagărelor de alunecare — se știe că grosimea minimă a peliculei de ulei este dată de [17], [21]

$$h_{\min} = \delta\,(R - r), \text{ însă } h_{\min} \geqslant R_{z1} + R_{z2}.$$

---

[1] Suprafețele în alunecare una față de alta, care trebuie supuse rodajului înainte de funcționarea sub sarcină trebuie să aibă asperități care să asigure atît ungerea în bune condițiuni cît și rodarea economică. Există unele indicații de valori optime, corespunzătoare materialelor rodate și specificului funcționării. [11], [20].

Dacă se presupune $R_{z1} \approx R_{z2} \approx R_z$, atunci:

$$R_z \leqslant \delta/4 \cdot J_{\text{med}}.$$

Cum în mod obişnuit $\delta = 0{,}05 \ldots 0{,}25$, [17], [21] rezultă

$$R_z \leqslant (0{,}0125 \ldots 0{,}06) \cdot J_{\text{med}}.$$

sau:

$$R_z \leqslant (0{,}0125 \ldots 0{,}06)\left(A.D^{\alpha} + \frac{T_a + T_A}{2}\right). \tag{1}$$

În aceste relaţii: $\delta$ — grosimea minimă relativă a peliculei de ulei; $h_{\min}$ — grosimea minimă a peliculei de ulei; $R_{z1}$, $R_{z2}$ — înălţimile asperităţilor de pe cele două suprafeţe în alunecare; $R$ = raza alezajului; $r$ = raza arborelui; $J_{\text{med}}$ — jocul mediu în lagăr; $A$ — coeficient care depinde de felul ajustajului, determinînd poziţia cîmpurilor de toleranţă [2]; $T_a$ — toleranţa arborelui; $T_A$ — toleranţa alezajului; $\alpha$ — exponent [2].

Analizîndu-se ajustajele folosite în practică, pentru diverse cazuri funcţionale, se constată că raportul $R_z/T$ [1] are valori cuprinse între 0,017 ... 0,15, depinzînd de felul ajustajului: De exemplu: pentru ajustajul $H7/g6$, $R_z/T = 0{,}018 \ldots 0{,}086$, cu valoarea medie 0,04; pentru ajustajul $H7/d9$, $R_z/T = 0{,}0285 \ldots 0{,}136$, cu valoarea medie 0,063 etc. [2] [3].

4.124. *Recomandări pentru rugozitatea suprafeţelor cu rol funcţional special.* Ţinînd seama tot de punctele de vedere specificate mai sus şi de experienţa construcţiilor existente [2], [28], [40], [43], se pot recomanda pentru diverse cazuri funcţionale cu caracter special, mărimi de rugozitate date în tabela 2 [9], [40], [23].

4.125. *Rugozitatea şi toleranţa.* Deşi sînt strîns legate de funcţiune, rugozitatea şi toleranţa pot fi considerate ca elemente independente, deoarece este posibilă obţinerea, în cadrul unei aceleeaşi toleranţe, a unor asperităţi mai mici (un procedeu de aşchiere fără pretenţii asupra abaterilor de formă, urmat de o lustruire electrolitică) sau mai mari [26]. În realitate, între rugozitate şi toleranţă trebuie să existe un raport anumit care să corespundă atît funcţiunii cît şi modului de prelucrare respectiv.

În general, pentru piese care formează ajustaje mărimea asperităţilor trebuie să fie mai mică decît toleranţa ($R_z < T$), deoarece

— prin roaderea asperităţilor în urma uzurii se produce o modificare a ajustajului, acesta putînd deveni chiar necorespunzător scopului;

— se constătă că la operaţiile executate curent pe maşinile unelte rezultă asperităţi mai mici decît toleranţele prescrise la proiectare.

---

[1] Aici $T = \frac{T_a + T_A}{2}$.

[2] Raportul $R_z/T$ poate fi calculat cu ajutorul relaţiei (1) pentru toate ajustajele cu joc folosite în practică.

[3] Valori pentru $\alpha = 1/3$; aceste valori asigură o ungere în bune condiţii, deşi în realitate $\alpha = 1/3 \ldots 1$ şi valorile corespunzătoare pentru raportul $R_z/T$ pot fi mai mari.

*Tabela 2*

**Recomandări pentru alegerea rugozității optime a suprafețelor pentru diferite cazuri funcționale cu caracter special**

| Destinația | Exemple | $R_z$ în μ |
|---|---|---|
| Angrenaje | roată dințată cilindrică clasa 1 de prec. | ... 3,2 |
| | idem clasa a 2-a de prec. | 3,2 ...12,5 |
| | idem clasa a 3-a de prec | ...12,5 |
| | cremalieră | 3,2 ...12,5 |
| | roată dințată conică | 6,3 ...12,5 |
| | șurub melc | 1,6 ... 6,3 |
| | roată melcată | 6,3 ...12,5 |
| Ghidaje de alunecare | mașini unelte dimensiuni mari | ... 6,3 |
| | idem dimensiuni medii | 3,2 ... 6,3 |
| | idem dimensiuni mici | ... 3,2 |
| Ghidaje de rostogolire | mașini unelte dimensiuni mari | ... 6,3 |
| | mașini unelte dimensiuni medii | 3,2 ... 6,3 |
| | mașini unelte dimensiuni mici | ... 3,2 |
| Transmisii cu lanțuri | roți pentru lanțuri cu role | 6,3 ...12,5 |
| | roți pentru lanțuri dințate | 6,3 ...12,5 |
| Transmisii prin curele trapezoid | suprafața de lucru a roții de curea | 3,2...25 |
| Sprafețe de etanșare | suprafața arborelui în contact cu garn. cauciuc | 0,8 ... 3,2 |
| | idem în contact cu garnitură de pîslă | 1,6 ... 3,2 |
| | idem etanșare cu șanț de ulei | ...25 |
| | idem etanșare cu labirint | ...25 |
| | suprafața de lucru pentru sertare | 0,4 ... 1,6 |
| | plonjoare, tije și alezajele respective | 0,8 ... 1,6 |
| | suprafețe de lucru la robinete | ... 3,2 |
| Suprafețe de rostogolire la rulmenți | | 0,25... 3,2 |
| Filete | | 3,2 ...10 |

Pentru determinarea raportului optim dintre rugozitate și toleranță trebuie analizați totdeauna doi factori : îndeplinirea rolului funcțional și posibilitatea de execuție a piesei respective pe o cale cît mai economică. În toleranța unei piese trebuie să fie cuprinse atît abaterile de formă cît și microabaterile (fig. 1) [10] [1]); deci

$$T = \Delta F + \Delta R, \tag{2}$$

în care : $\Delta F$ — abaterile de formă macrogeometrice și ondulații [2]) ; $\Delta R$ — abaterile de la dimensiune, datorită prezenței asperităților.

Dacă raportul dintre rugozitate și toleranță crește peste valoarea sa optimă, prețul de cost va crește, deoarece partea abaterilor de formă din cîmpul de toleranță se va micșora și vor fi necesare procedee de prelucrare pe mașini unelte mai precise, cu dispozitive mai pretențioase. În același timp, creșterea asperităților poate duce și la o funcționare defectuoasă și de scurtă durată.

Micșorarea raportului dintre rugozitate și toleranță, deși asigură de multe ori o funcționare corectă și permite folosirea unor mașini unelte mai puțin precise în ceea ce privește abaterile de formă, totuși necesitînd procedee de finisare speciale, ridică de asemenea prețul de cost [10].

În concluzie, alegerea unei asperități optime pentru suprafața unei piese avînd un rol funcțional bine determinat, trebuie să asigure o valoare de compromis între cele două extreme de mai sus ; așa cum s-a demonstrat la paragrafele 4.122 și 4.123 se constată că și din punct de vedere funcțional trebuie ca $R_z < T$ ; ceva mai mult, se poate afirma că la stadiul actual în construcția de mașini din punct de vedere funcțional și mai ales la piese care formează ajustaje trebuie ca $R_z \leqslant 0{,}3\ T$.

## 4.2. RUGOZITATEA ȘI DIMENSIUNEA PIESELOR

Cercetările efectuate în acest domeniu, arată că există o dependență între rugozitatea optimă și dimensiunile pieselor prelucrate. Ca linie generală [8], [9], [10], [19], [21], [24], [25], [26], [30], [36], se recomandă o directă proporționalitate între rugozitate și unitatea de toleranță, care este dată în funcție de dimensiunea pieselor considerate. Cu alte cuvinte

$$R_z \sim i, \tag{3}$$

unde : $i$ — unitatea de toleranță [3])

---

[1]) Din cercetările făcute de A. B. Korona [10] rezultă : $R_z/T = 0{,}075$, pentru piese și $R_z/T = 0{,}150$ pentru distanța dintre o axă și o suprafață ; alte recomandări în tabela 3.

[2]) Un rol important îl au abaterile de formă și ondulațiile și la producerea zgomotului în funcționarea diverselor organe de mașini [16]. Unele recomandări pentru mărimea abaterilor de formă sînt indicate în [2], [27].

[3]) STAS : $i = 5\sqrt[3]{d}$ mm pentru : $d = 1 \ldots 500$ mm

OST : $i = 0{,}5\sqrt[3]{d}$ mm pentru : $d = 1 \ldots 500$ mm

ISA : $i = 0{,}45\sqrt[3]{d}$ mm $+ 0{,}001 \cdot d$ mm

La rulmenții radiali cu bile și cu role [23], s-a constatat că între rugozitatea căilor și corpurilor de rulare și dimensiunile respective există o dependență de forma

$$R_z = q\sqrt[3]{d} \text{ mm în } \mu.$$

în care : $q = 0{,}05 \ldots 0{,}1$ pentru corpuri de rulare și $q = 0{,}25$ pentru căi de rulare.

### 4.3. RUGOZITATEA ȘI CLASA DE PRECIZIE

În această direcție, în urma măsurătorilor efectuate în diferite ramuri ale construcției de mașini [8] și prin analizarea rugozității unor suprafețe din diferite clase de precizie dar cu același rol funcțional [12], s-au făcut unele propuneri care recomandă asperități optime mai mari pentru piese executate în clase de precizie mai mari decît pentru piese executate în clase de precizie mai mici dar cu aceeași dimensiune nominală și cu același rol funcțional. În general

$$R_z \sim a^n \tag{4}$$

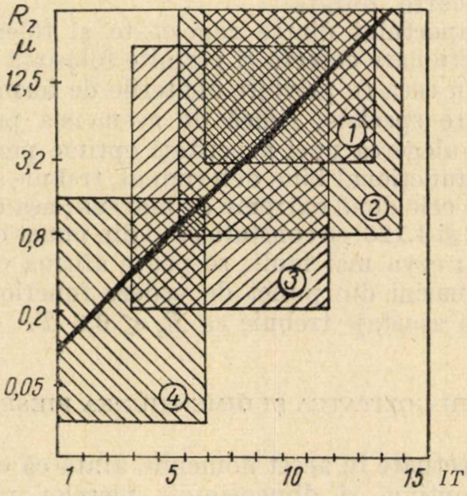


Fig. 6. — Dependența dintre rugozitate și clasele de precizie normale realizate prin diverse procedee de prelucrare.

*1.* Frezare ; *2.* rabotare, strunjire, tăiere ; *3.* rectificare ; *4.* lepuire, honuire, superfinisare.

Pentru piese care formează ajustaje :

| Calit. ISA | IT | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | | 10 | 11 | 12 | 13 | | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Clase de precizie STAS | arbori | | | | | 1 | 2 | 3 | — | 4 | — | 5 | 6 | — | 7 | — | 8 | 9 | 10 |
| | alezaje | | | | | | 1 | 2 | 3 | 4 | — | 5 | 6 | — | 7 | — | 8 | 9 | 10 |
| Clase de precizie GOST | arbori | | | | | 1 | 2 | 2a | — | 3 | — | 3a | 4 | — | 5 | — | 7 | 8 | 9 |
| | alezaje | | | | | | 1 | 2 | 2a | 3 | | 3a | 4 | | 5 | | 7 | 8 | 9 |

în care : $a$ — numărul de unități de toleranță corespunzător unei clase de precizie date ; $n$ — exponent.

Din examinarea figurii 6 și pe baza prelucrării statistice a datelor din [14], [27], [41], [18] se constată că prin diverse moduri de prelucrare se obțin rugozități care satisfac o relație de forma

$$R_z \sim a, \tag{5}$$

adică : $n = 1$.

Dreapta din figura 6 poate fi considerată ca reprezentînd dependența dintre rugozitate și clasele de precizie normale, cele mai economice, specifice fiecărui procedeu de prelucrare.

## 5. PROPUNERI ȘI CONCLUZII

Diversele cercetări în problema legăturii dintre rugozitate, funcțiune, dimensiune, clasă de precizie și mod de prelucrare recomandă relații specificate în tabela 3.

Din examinarea tabelei precum și a celor stabilite la capitolul 4 se constată că pentru determinarea rugozității optime se poate utiliza o relație de forma

$$R_z = K \cdot i^m \cdot a^n, \tag{6}$$

în care : $m$ și $n$ sînt exponenți determinați pe cale statistică iar $K$ este un coeficient funcțional, și că propunerile făcute pînă în prezent recomandă două căi

— fie cu $m = n = 1$ ; adică cu relația

$$R_z = K \cdot i \cdot a = K \cdot T, \tag{7}$$

— fie cu $m \neq 1$ și $n \neq 1$ [12] sau cu $m = 1$ și $n \neq 1$ [8], [26].

Relațiile corespunzătoare ultimei căi au rezultat fie din faptul că s-a căutat o coordonare a semnelor convenționale de calitate a suprafeței — triunghiurile — cu funcțiunea [12], [26], fie că valorile coeficientului funcțional $K$, determinate statistic, corespund unor anumite domenii constructive [8] (adnotarea E la tab. 3) și nu pentru cazuri sau grupe funcționale bine precizate.

Se recomandă utilizarea unei relații de forma (7) cu $m = n = 1$.

În sprijinul folosirii acestei relații stau, pe lîngă ușurința calculelor, cele afirmate la subcapitolele 4.1, 4.2 și 4.3 precum și o serie de relații specificate în tabela 3 [10], [19], [21], [24], [34].

Stabilirea valorilor exponenților din relația (7) $m = n = 1$ s-a făcut, după cum s-a arătat, în condițiile cele mai economice, naturale, cît privește procesul de prelucrare. Prelucrarea cea mai economică nu asigură însă totdeauna și o funcționare optimă. Cum limita economiei este la periclitarea funcțiunii, pentru acoperirea întregului domeniu funcțional, se introduce coeficientul funcțional *K*. Introducerea coeficientului funcțional *K* poate duce, în scopul unei funcționări bune, la mărimi de rugozități mai mari sau mai mici decît cele economice sau normale din punct de vedere al procesului de prelucrare. Coeficientul *K* reprezintă în aceste condiții cazuri sau grupe funcționale bine precizate.

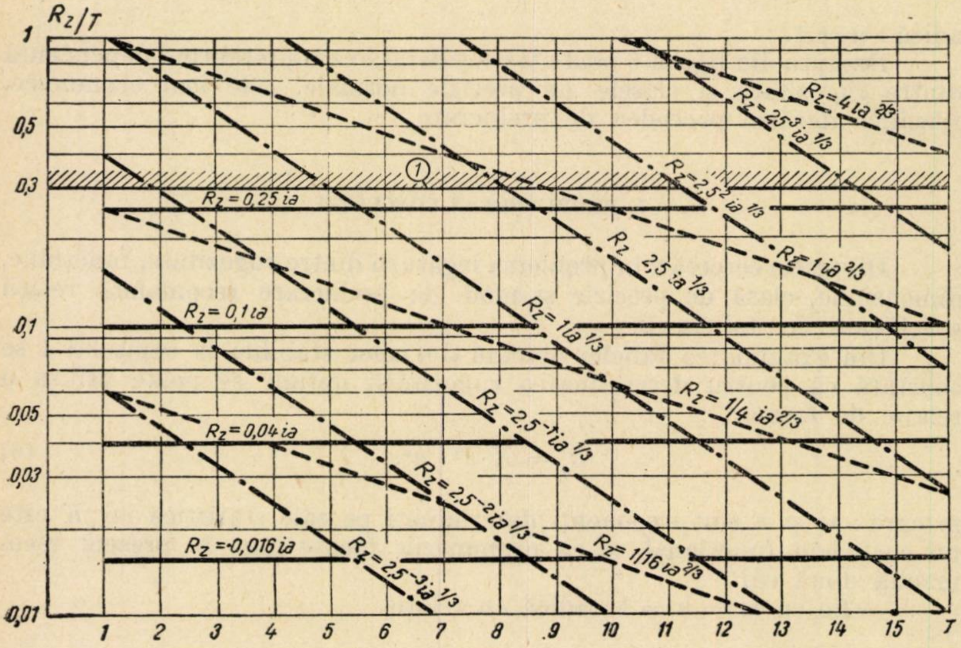


Fig. 7. — Comparație între diversele propuneri.

– – – – – – $R_z = K.i.a^{2/3}$ [26].

–.–.–.–. $R_z = K.i.a^{1/3}$ [8] cu valori pentru *K* din tabela 3 specificate pe curbe.

———— Propunere cu $R_z = K.i.a$; valori pt. *K* din tabela 5.

▨ limita superioară a raportului $R_z/T$.

Adoptarea unui mod de prelucrare corect, pentru realizarea unei anumite rugozități $R_z$ la o piesă cu dimensiune dată, într-o anumită clasă de precizie și pentru un anumit rol funcțional, cere celui ce proiectează sau construiește mașini o vastă experiență și folosirea unui bogat material documentar ca standarde, tabele etc.

Pentru a ușura această muncă, cu relația (7) $R_z = K.i.a$ s-a întocmit diagrama din figura 8 după modelul celei indicate în [26] cu considerații asupra costului din [31]. La întocmirea acestei diagrame s-a ținut seama de următoarele :

*Tabela 3*

**Relații propuse pentru a exprima dependența dintre rugozitate, funcțiune, dimensiune și clasă de precizie**[1]

| Propunerea | $K$ | $m$ | $n$ | $R_z = K.i^m.a^n$ |
|---|---|---|---|---|
| Becker [8] | 0,1785 | 1 | 1 | $R_z = 0{,}1785.i.a$ |
| Moll H. [19] | 0,125 ... 0,25 **A** | 1 | 1 | $R_z = (0{,}125...0{,}25)\,i.a$ |
| Korona A.B. [10] | 0,075 | 1 | 1 | $R_z = 0{,}075.\ i.a$ |
| Poliacov [21] | 0,1 ... 0,25 | 1 | 1 | $R_z = (0{,}1...0{,}25)\ i.a$ |
| NLN–D28.01. [34] | 0,125 **B** | 1 | 1 | $R_z = 0{,}125.i.a$ |
| SUA [34] | 0,03 ... 0,2 **C** | 1 | 1 | $R_z = (0{,}03...0{,}2)i.a$ |
| Kretschmer R. [12] | 1,16/16 ▽▽▽▽<br>1,16/4 ▽▽▽<br>1,16 ▽▽<br>4.1,16 ▽ **D** | 2/3 | 2/3 | $R_z = K.i^{2/3}\ a^{2/3}$ |
| Jost M **E** [8] | $1/2{,}5^3$<br>$1/2{,}5^2$<br>$1/2{,}5$<br>1<br>2,5<br>$2{,}5^2$<br>$2{,}5^3$ | 1 | 1/3 | $R_z = K.i.a^{1/3}$ |
| Rochusch **F** [26] | 1/16 ▽▽▽▽<br>1/4 ▽▽▽<br>1 ▽▽<br>4 ▽ **F** | 1 | 2/3 | $R_z = K.i.a^{2/3}$ |
| Pr. ISO Riedel [24] | 0,1 ▽▽▽▽<br>0,16 ▽▽▽<br>0,16...0,25 ▽▽ **G** | 1 | 1 | $R_z = K.i.a$ |

*A*. 0,125 pentru prelucrare fină și 0,25 pentru prelucrare grosolană.

*B*. Limitele de variație pot fi 0,025...0, 4.

*C*. Pentru îmbinări presate se poate merge către limita superioară 0,2, iar pentru lagăre de alunecare către limita inferioară. În [31] este recomandată o dependență între rugozitatea optimă și toleranța *naturală*, dependență care se poate exprima tot printr-o relație de forma $R_z = K.i.a$ — în care $K$ are o valoare medie de 0,08.

*D*. S-a căutat prin aceasta stabilirea unei legături între semnele convenționale de rugozitate și coeficientul $K$, semnele reprezentînd în acest caz o funcțiune și nu o mărime precisă de rugozitate ; această propunere nu este în concordanță nici cu semnificația semnelor convenționale din DIN 140. De altfel prin Conferința Comitetului ISO TC/57 din 1956 s-a renunțat la simbolizarea cu semne convenționale.

*E*. Coeficientul $K$ reprezintă un domeniu constructiv și pe bază de cercetări statistice s-a găsit pentru :

| | | |
|---|---|---|
| — aparatură electrică | — IT6...IT11— | $K \simeq 1{,}75$ |
| — mașini electrice | —IT5...IT14 — | $K \simeq 1$ |
| — ajustaje în industria auto | —IT5...IT11 — | $K \simeq 1{,}4^{-1}$ |
| — mașini de precizie | —IT4...IT13 — | $K \simeq 1{,}85^{-1}$ |
| — ajustaje în mecanică fină | —IT4...IT11 — | $K \simeq 5{,}00^{-1}$ |

*F*. Pe baza lucrărilor lui Jost și Kretschmer se propune din nou o legătură între semnele convenționale și coeficientul $K$ precum și o nouă relație.

*D, E, F*. Extrapolarea relațiilor și diagramelor recomandate duce și la valori pentru $R_z > T$.

*G*. Pentru diametre de 400...500 mm se consideră 0,63 din valorile indicate pentru $K$.

---

[1] În afară de aceste recomandări există și unele tabele care se rezumă tot la folosirea unei relații de tip $R_z = K.i^m.a^n$.

— că $R_z \leqslant 0{,}30 .\ T$ pentru toate calităţile ISA; faptul se justifică prin cele relatate în subcapitolele 4.1, 4.2 şi 4.3, printr-o serie

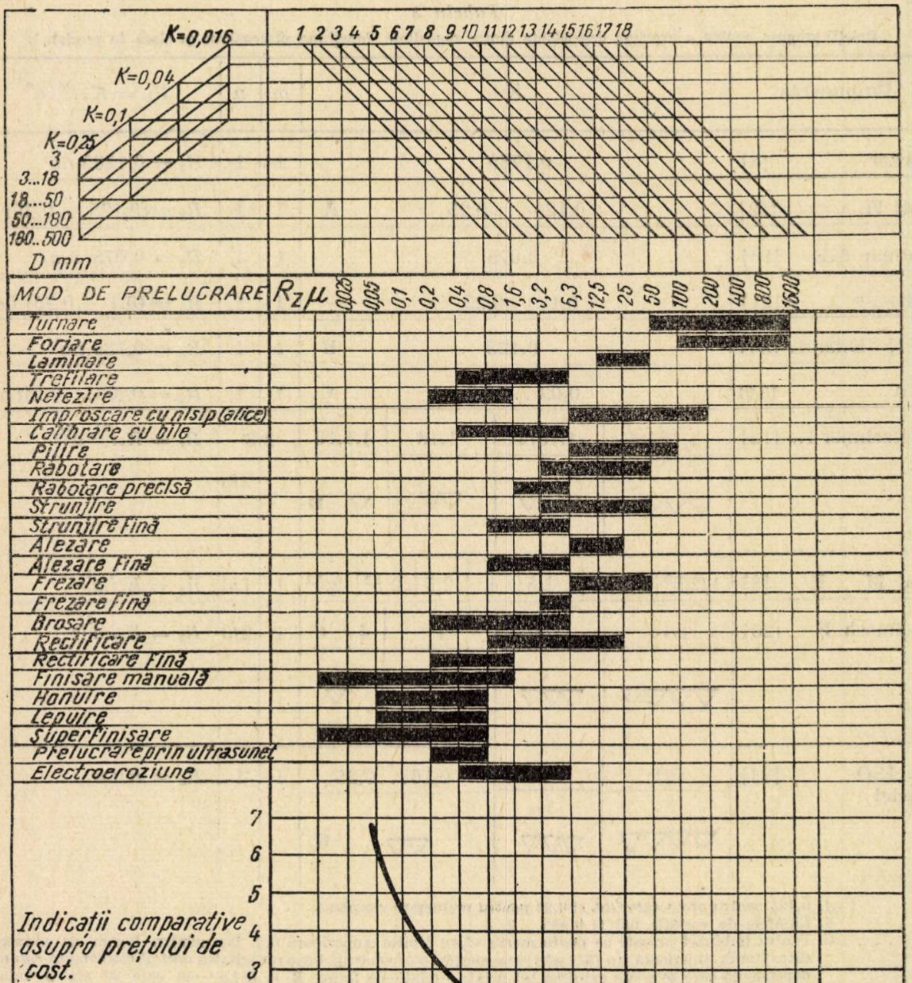


Fig. 8. — Alegerea modului de prelucrare în funcţie de dimensiune, funcţiune şi clasă de precizie. Corespondenţa ISA-GOST-STAS (fig. 6).
1 ... 16 sînt calităţi ISA iar 17 şi 18 sînt după proiect DIN [14].

de relaţii din tabela 3 şi chiar prin cercetările făcute de M. Jost şi W. Schmidt [8] care au arătat că pentru diverse domenii constructive $R_z \leqslant 0{,}30 . i . a$ sau $R_z \leqslant 0{,}30 .\ T$;

*Tabela 4*

**Încadrarea citorva cazuri funcţionale în cele patru grupe de funcţiuni la piese care formează ajustaje**

| Grupa | Exemple | $K$ |
|---|---|---|
| 1 | Ajustaje cu joc la care piesele se pot roti parţial.<br>Ajustaje cu strîngere şi intermediare care suportă sarcini mari şi medii, fără să se deformeze excesiv prin montări şi demontări succesive : ajustajele rulmenţilor cu arborii executaţi în clasa a 2-a de precizie STAS şi cu carcasele ; ajustajele roţilor dinţate cu arborii executaţi în clasele a 2-a şi a 3-a de precizie STAS [30]<br>Îmbinări canelate, suprafeţe pe care nu se realizează centrarea în cazul centrării după diametrul interior şi exterior. | 0,16...0,30<br>în medie 0,25 |
| 2 | Ajustaje cu joc la care stabilirea jocului are mare importanţă — viteze mari sau presiuni mici —, mobilitate mare : fusuri şi lagăre pentru transmisii, fusuri şi lagăre pentru arbori cu turaţii mari, fusuri şi lagăre pentru arbori în lagăre lungi.<br>Ajustaje cu strîngere deosebit de pretenţioase, suportînd sarcini mari cu şocuri, la care deformarea ajustajului nu este permisă.<br>Îmbinări canelate fixe, suprafeţele pe care se realizează centrarea. | 0,063...0,16<br>în medie 0,1 |
| 3 | Ajustaje cu joc pentru mişcări de rotaţie şi longitudinale : lagăre şi fusuri pentru arbori principali ai maşinilor unelte, fusuri şi lagăre pentru arbori pe mai mult de trei reazime, fusuri şi lagăre pentru transmisii, pompe centrifuge, fusuri şi lagăre în mecanismul bielă-manivelă, arbore cotit, fusuri şi lagăre pentru arborii de distribuţie.<br>Îmbinări canelate mobile, suprafeţe pe care se realizează centrarea. | 0,025...0,063<br>în medie 0,04 |
| 4 | Ajustaje foarte precise, maşini de înaltă precizie. | 0,01...0,025<br>în medie 0,016 |

— că pentru nivelul actual al tehnicii şi pentru o utilizare cu caracter general a diagramei din figura 8 s-au considerat suficiente patru grupe funcţionale (tab. 4) cu valori medii pentru $K$ luate din tabela 5.

În ipoteza că vor exista date mai multe, se va putea propune folosirea mai multor grupe funcţionale, determinate de următoarele valori pentru $K$ (7 grupe) 0,25 ; 0,16 ; 0,1 ; 0,063 ; 0,04 ; 0,025 ; 0,016.

Pentru a scoate în evidenţă compararea diverselor propuneri cu cea din prezenta lucrare, s-a întocmit figura 7, arătîndu-se şi delimitarea superioară cu $R_z \leqslant 0{,}30.\ T$[1]).

În concluzie, pentru legătura dintre rugozitate, funcţiune, dimensiune, clasă de precizie şi mod de prelucrare se recomandă utilizarea relaţiei simple $R_z = K.i.a = K.T$, cu valori pentru coeficientul funcţional $K$ din tabelele 4 şi 5, corespunzătoare anumitor cazuri sau grupe funcţionale bine precizate. Figura 8 concretizează legătura amintită dînd posibilitate de aplicare practică imediată în proiectarea și construcția mașinilor, prezentînd totodată și unele indicații comparative cu caracter economic.

---

[1]) Diagramele cu caracter general recomandate de M. Jost şi W. Schmidt [8] şi de F. Rochusch [26], cu valori pentru $K$ din tabela 3, pot duce chiar la valori pentru $R_z > T$, ceea ce din punct de vedere funcţional nu este de recomandat.

*Tabela 5*

**Valori pentru coeficientul funcțional** *K*

| Grupa | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| *K* | 0,25 | 0,1 | 0,04 | 0,016 |

*Primită la redacție la 29 iunie 1960*

# СВЯЗЬ МЕЖДУ ШЕРОХОВАТОСТЬЮ, СПОСОБОМ ОБРАБОТКИ, РАЗМЕРОМ, КЛАССОМ ТОЧНОСТИ И НАЗНАЧЕНИЕМ В МАШИНОСТРОЕНИИ.

## РЕЗЮМЕ

В настоящей работе указываются различные виды влияния шероховатости на работу деталей машин, а именно: на износ, на осуществление жидкостного трения в подшипниках, на прессовые, переходные и подвижные посадки.

Многочисленные примеры, взятые из машиностроения доказывают, что между шероховатостью и допусками существует соотношение вида $R_z = K \cdot T$, в котором $R_z$ — шероховатость, $T$ — допуск, а $K$-функциональный коэффициент.

Устанавливается, что значение функционального коэффициента $K$ для большинства функциональных случаев должно быть $K \leqslant 0{,}3$. На основании приводимой документации и различных рассматриваемых случаев даются таблицы и диаграммы, облегчающие труд проектировщиков и конструкторов машин.

## ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Отклонения реальной поверхности относительно идеальной геометрической поверхности.

Рис. 2. — Соответствие между различными критериями шероховатости поверхности.

Рис. 3. — Влияние величины шероховатости на выносливость.

Рис. 4. — Изменение зазора в подшипниках коленчатого вала, в зависимости от пройденного пути в км. для различных начальных шероховатостей.

Рис. 5. — Изменение среднего зазора как следствие износа для нескольких переходных и подвижных посадок.

Рис. 6. — Зависимости между шероховатостями и классами точности, полученными при помощи различных обработок.

Рис. 7. — Сравнение между различными предложениями.

Рис. 8. — Выбор способа обработки в зависимости от размера, назначения и класса точности.

Приложение I. Критерии по оценке шероховатости поверхностей и по представлению в чертеже.

## ZUM PROBLEM DES ZUSAMMENHANGES ZWISCHEN RAUHEIT, BEARBEITUNGSWEISE, DIMENSION, QUALITÄTSKLASSE UND FUNKTION IM MASCHINENBAU

### ZUSAMMENFASSUNG

Auf Grund der von den Verfassern und anderen Forschern erhaltenen Ergebnisse, wird das Verhältnis $R_z = K.i.a = K.T$ vorgeschlagen, da es von allen Gesichtspunkten aus das geeignetste ist.

Dabei wird die Entscheidung des ISO TC/57 aus dem Jahre 1956 berücksichtigt. Zugleich wird auch die praktische Anwendungsweise beim Entwerfen anhand des Bildes 8 und den Tabellen 4 und 5 gezeigt.

### ERKLÄRUNG DER BILDER

Bild 1. — Abmaße der realen Oberfläche von der idealen geometrischen Oberfläche.

Bild 2. — Abhängigkeit der verschiedenen Verhältniszahlen von der Rauhtiefe.

Bild 3. — Einfluß der Rauhtiefe auf die Ermüdungsfestigkeit.

Bild 4. — Abhängigkeit des Spieles *J* in den Lagern einer Kurbelwelle vom zurückgelegten Wege ($K_m$) für verschiedene Anfangsrauhtiefen.

Bild 5. — Veränderung des Mittelspieles infolge des Verschleißens für einige Übergangs- und Spielpassungen.

Bild 6. — Abhängigkeit zwischen Rauhtiefe und Qualitätsklassen, die durch verschiedene Fertigungsverfahren erhalten werden.

Bild 7. — Vergleich zwischen den verschiedenen Vorschlägen.

Bild 8. — Auswahl des Fertigungsverfahrens auf Grund der Dimension, Funktion und Qualitätsklasse.

*Anhang 1.* Kriterien für die Abschätzung der Rauhtiefe und Angaben der Zeichnungen in verschiedenen Ländern.

### BIBLIOGRAFIE

1. АЧЕРКАН Н. С. и сотр., *Детали Машин.* Машгиз, Москва, 1954.
2. APARIN G. A., GORODEŢKI I. E., *Toleranţe şi măsurători tehnice.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1956.
3. BEIZELMAN R. D., TÎPKIN B. V., *Rulmenţi.* Edit. tehnică, Buc., 1956, Trad. l. rusă.
4. ДАШКЕВИЧ Б. П. и сотр., *Атлас Деталей машин — передачи.* Техиздат., Киев, 1955.
5. DIACENKO P. E., IAKOBSON P. O., *Calitatea suprafeţelor la prelucrarea prin aşchiere.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1954.
6. * * * *Dubbels Taschenbuch für den Maschinenbau.* 2, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1956.
7. DUNIN-BARKOVSKI, *Cu privire la influenţa măsurătorilor tehnice a rugozităţii suprafeţelor asupra interschimbabilităţii în construcţia de maşini.* IDT, Bucureşti, 1958.

8. Jost M., Schmidt W., *Zusammenhänge der Oberflächengüte und den ISA-Toleranzen in der Praxis.* Werkstattstechnik u. Maschinenbau, **46**, 187 (1956).
9. Kartavov S. A., *Bazele proiectării raţionale a maşinilor.* IDT, Bucureşti, 1956.
10. Корона А. Б., *Взаимосвязь чистоты поверхности, точности и посадок.* Вест. Машиностроения, *9*, 34, 1953.
11. Kosenko P.A., *Asperitatea optimă a suprafeţelor în frecare — în calitatea suprafeţelor.* IDT, Bucureşti, 1955.
12. Kretschmer R., *Beitrag über Zuordnung der Oberflächenrauheit zu den Funktionen und Toleranzen.* Werkstattstechnik u. Maschinenbau, **46**, 450 (1956).
13. Kretschmer R., *Zur Kennzeichnung der Rauheit technischer Oberflächen.* Werkstattstechnik u. Maschinenbau, **48**, 832 (1958).
14. Krist Thomas, *Werkstatt Tabellen,* **1**, Fachbuchverlag Leipzig, 1954.
15. Kühnlenz K., *Oberflächenprüfung und Feinstbearbeitung von Rollbahnflächen in der Wälzlagerindustrie.* Maschinenbautechnik, **10**, 527 (1956).
16. Kühnlenz K., *Laufgeräuschprüfung an Wälzlagern.* Die Technik, **10**, 709 (1956).
17. Manea G. şi alţii, *Organe de maşini.* **II**, Ed. tehnică, Bucureşti, 1956.
18. Мягков В. Д., *Допуски и посадки.* Машгиз, Москва, 1957.
19. Moll H., *Begriff der Feinbearbeitung und Grundlage für den Vergleich der Verfahren.* Werkstattstechnik u. Maschinenbau, **43**, 90 (1953).
20. Nisnevici, A. L., *Influenţa neregularităţilor suprafeţei asupra uzurii pieselor motorului de tractor — în calitatea suprafeţelor.* IDT, Bucureşti, 1955.
21. Поляков В. С., *Детали Машин.* Машгиз, Москва, 1954.
22. Popinceanu N. G., Gafiţeanu M. D., *Correlation between roughness machining process, dimension, quality and function in engine parts construction.* Bul. Inst. polit. Iaşi, serie nouă, **V**, *1—2*, 339—360 (1959).
23. — *Influenţa calităţii suprafeţelor de rulare asupra jocului intern şi durabilităţii rulmenţilor.* Comunicare Ses. a 5-a. Inst. polit. Iaşi. feb., 1960.
24. Riedel M., *Zuordnung der Rauhtiefen zu Oberflächenarten und ISO-Qualitäten.* Werkstattstechnik u. Maschinenbau, **48**, 441 (1958).
25. Riedel M., *Zur Normung der Rauhtiefen von Technischen Oberflächen.* Werkstattstechnik u. Maschinenbau, **48**, 612 (1958).
26. Rochusch F., *ISA-Toleranzen, Oberflächengüte und Bearbeitungsverfahren.* Konstruktion, **10**, 418 (1957).
27. Săveanu L. şi alţii, *Organe de maşini — îndrumător pentru proiectanţi.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1957.
28. Schorsch H., *Gütebestimmung an technischen Oberflächen.* Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft MBH, Stuttgart, 1958.
29. Septilici R., Ghilezan A., *Standardizarea rugozităţii suprafeţelor.* Standardizarea, *4*, 190—195 (1957).
30. Smirnov S. A., *Relaţia dintre precizia şi calitatea suprafeţei,* în *Calitatea suprafeţelor.* I.D.T., Bucureşti, 1955.
31. * * * *Plant Engineering Handbook.* Mc. Grow Hill Book Co., New York, 1959.
32. Truşin I. K., *Prelucrarea metalelor prin electroabraziune.* Bul. Constr. de maşini, I.D.T., 1958, *2*, 31.
33. Vainştein V. E., *Standardizarea microgeometriei suprafeţelor,* în *Calitatea suprafeţelor.* I.D.T., Bucureşti, 1955.
34. Vries de W. M., *Neue Gedanken über Oberflächenrauheit, Toleranzen und Passungen,* Werkstattstechnik u. Maschinenbau, **46**, 448 (1956).
35. Weingraber H., *Zur Definition der Oberflächenrauheit.* Werkstattstechnik u. Maschinenbau, **46**, 251 (1956).
36. Wiemer A., Lehmann R., *Die Oberflächenprüfung im Maschinenbau.* Maschinenbautechnik, **11**, 599 (1957).
37. * * * *Proiect de Standard R.P.R. Rugozitatea suprafeţelor.* Standardizarea, **4**, 196—199 (1957).
38. * * * STAS 612—49, *Calitatea suprafeţelor, semne convenţionale.*
39. * * * *Справочник машиностроителя,* т. **4**. Машгиз, Москва, 1956.
40. * * * *Справочные таблицы по деталям машин.* Машгиз, Москва, 1957.
41. * * * *Справочник технолога машиностроителя.* Машгиз, Москва, 1956.
42. * * * *Betriebshütte.* **1**, 5 Aufl., Verlag v. Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1957.
43. * * * *L'usinage par ultrasons.* Rev. Gén. Méc., **102**, 59 (1958).
44. * * * STAS 5730—59.

# ANEXA 1

**Evaluarea rugozității și modul de reprezentare pe desene [28] [29] [33] [34] [37] [40] [42] [44]**

| R P R |  |  |  |
|---|---|---|---|
| STAS 5730-57** |  |  |  |
| $R_{a\,i}^{\;s}$ ; sau $R_{a\ldots i}$ | $R_{z\,i}^{\;s}$ ① <br> $R_z$ |  |  |
| $R_a$ μ | $R_z$ μ* | Simbol |  |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
|  | ③ |  |  |
| 200 | 400 | $R_a$ 200 | $R_z$ 400 |
| 100 | 200 | $R_a$ 100 | $R_z$ 200 |
| 50 | 100 | $R_a$ 50 | $R_z$ 100 |
| 25 |  | $R_a$ 25 |  |
| 12,5 | 50 | $R_a$ 12,5 | $R_z$ 50 |
| 6,3 | 25 | $R_a$ 6,3 | $R_z$ 25 |
| 3,2 | 12,5 | $R_a$ 3,2 | $R_z$ 12,5 |
| 1,6 | 6,3 | $R_a$ 1,6 | $R_z$ 6,3 |
| 0,8 | 3,2 | $R_a$ 0,8 | $R_z$ 3,2 |
| 0,4 | 1,6 | $R_a$ 0,4 | $R_z$ 1,6 |
| 0,2 | 0,8 | $R_a$ 0,2 | $R_z$ 0,8 |
| 0,1 | 0,4 | $R_a$ 0,1 | $R_z$ 0,4 |
| 0,05 | 0,2 | $R_a$ 0,05 | $R_z$ 0,2 |
| 0,025 | 0,1 | $R_a$ 0,025 | $R_z$ 0,1 |
| 0,012 | 0,05 | $R_a$ 0,012 | $R_z$ 0,05 |

| U R S S |  |  |  |
|---|---|---|---|
| GOST 2789-51 |  |  |  |
| ∇∇∇ Pr c ② |  |  |  |
| Clasă | $H_{cp}$ $\tilde{R}_z$ μ | $H_{ck}$ $\tilde{R}_q$ μ | Simbol |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 200 |  | ∇ 1 |
| 2 | 125 |  | ∇ 2 |
| 3 | 63 |  | ∇ 3 |
| 4 | 40 |  | ∇∇ 4 |
| 5 | 20 | 6,3 | ∇∇ 5 |
| 6 | 10 | 3,2 | ∇∇ 6 |
| 7 | 6,3 | 1,6 | ∇∇∇ 7 |
| 8 | 3,2 | 0,8 | ∇∇∇ 8 |
| 9 | 1,6 | 0,4 | ∇∇∇ 9 |
| 10 | 0,8 | 0,2 | ∇∇∇∇ 10 |
| 11 | 0,5 | 0,1 | ∇∇∇∇ 11 |
| 12 | 0,25 | 0,05 | ∇∇∇∇ 12 |
| 13 | 0,12 | 0,025 | ∇∇∇∇ 13 |
| 14 | 0,06 |  | ∇∇∇∇ 14 |

| R S Cehoslovacă |  |
|---|---|
| ČSN 014450 1954 |  |
| i - s ∇ |  |
| $H_{SK}$ $\tilde{R}_q$ μ | Simbol |
| 9 | 10 |
| 100 | √ |
| 50 | √ |
| 25 | √ |
| 12,5 | √ |
| 6,3 | √ |
| 3,2 | √ |
| 1,6 | √ |
| 0,8 | √ |
| 0,4 | √ |
| 0,2 | √ |
| 0,1 | √ |
| 0,05 | √ |
| 0,025 | √ |
| 0,012 | √ |

| Suedia |  | Germania |  |
|---|---|---|---|
| SMS 671-1947 |  | DIN 4763-1954 |  |
| ∇ i-s <br> ∇∇ |  | ∇∇∇ Pr i s |  |
| R $\tilde{R}_z$ μ | Simbol | R $\tilde{R}_z$ μ | Simbol |
| 11 | 12 | 13 | 14 |
|  |  | 2500 |  |
|  |  | 1600 |  |
|  |  | 1000 |  |
|  |  | 630 |  |
|  |  | 400 |  |
| 250 | ∇ | 250 |  |
| 160 |  | 160 |  |
| 100 |  | 100 |  |
| 63 | ∇ | 63 | ∇ |
| 40 |  | 40 |  |
| 25 | $\overline{\overline{\nabla}}$ | 25 |  |
| 16 | ∇∇ | 16 |  |
| 10 | $\overline{\nabla\nabla}$ | 10 | ∇∇ |
| 6,3 |  | 6,3 |  |
| 4 | ∇∇∇ | 4 |  |
| 2,5 |  | 2,5 | ∇∇∇ |
| 1,6 |  | 1,6 |  |
| 1 |  | 1 |  |
| 0,63 |  | 0,63 |  |
| 0,4 |  | 0,4 |  |
| 0,25 | $\overline{\nabla\nabla\nabla}$ | 0,25 |  |
| 0,16 |  | 0,16 | ∇∇∇∇ |
| 0,10 |  | 0,10 |  |
| 0,06 |  | 0,06 |  |
| 0,04 |  | 0,04 |  |

| Anglia |  | S.U.A |  |
|---|---|---|---|
| BS 1134-1950 |  | ASA-B 46.1 1955 |  |
| i s l ∇ Pr <br> l s √ l Pr |  | s i √ $P_0, R$ p, l |  |
| CLA $\tilde{R}_a$ microinch* | Simbol | AA $\tilde{R}_a$ microinch* | Simbol |
| 15 | 16 | 17 | 18 |
|  |  | 1600 | 1600<br>1000<br>√ |
| 1000 | $\frac{500}{1000}$ √ | 1000 | 1000<br>500<br>√ |
| 500 | $\frac{250}{500}$ √ | 500 | 500<br>250<br>√ |
| 250 | $\frac{125}{250}$ √ | 250 | 250<br>125<br>√ |
| 125 | $\frac{63}{125}$ √ | 125 | 125<br>63<br>√ |
| 63 | $\frac{32}{63}$ √ | 63 | 63<br>32<br>√ |
| 32 | $\frac{16}{32}$ √ | 32 | 32<br>16<br>√ |
| 16 | $\frac{8}{16}$ √ | 16 | 16<br>8<br>√ |
| 8 | $\frac{4}{8}$ √ | 8 | 8<br>4<br>√ |
| 4 | $\frac{2}{4}$ √ | 4 | 4<br>2<br>√ |
| 2 | $\frac{1}{2}$ √ | 2 | 2<br>1<br>√ |
| 1 | $\frac{-}{1}$ √ | 1 | 1<br>0.5<br>√ |
|  |  | 0,5 | 0.5<br>√ |

---

* 1 microinch ≃ 0,000025 mm ; 1μ = 1/1000 mm.

** — în concordanță cu hotărîrea Conferinței Comitetului ISO/TC/57 din 1956.

[1] — *i*, *s* — limita inferioară, respectiv superioară, a rugozității prescrise în μ.

[2] — *Pr*, *c* — modul de prelucrare, respectiv clasa, de calitate a suprafeței.

[3] — rugozitățile indicate pentru diferite clase de calitate cînd nu sînt date ambele limite reprezintă valorile maxime admisibile pentru clasa respectivă; valoarea minimă coincide cu valoarea maximă a clasei imediat superioare.

# STUDII

## UNGERE – FRECARE – UZURĂ

# CRITERII DE SIMILITUDINE ÎN FUNCȚIONAREA LAGĂRELOR LUBRIFICATE CU LICHIDE SAU GAZE

DE

V. N. CONSTANTINESCU

Pentru asigurarea funcționării lagărelor în bune condiții, este deseori necesar ca, în afara unui calcul cît mai judicios, să se experimenteze în prealabil lagărul în condiții cît mai apropiate de cele reale. De multe ori însă, este destul de greu ca lagărul să fie experimentat pe mașina în care va funcționa sau la scară naturală. În asemenea cazuri se recurge la cercetări experimentale pe modele, pentru care stabilirea unor criterii de similitudine cît mai complete este deosebit de utilă.

În cele ce urmează vom căuta să deducem criteriile de similitudine care există în funcționarea lagărelor din studiul ecuațiilor generale ale lubrificației, scrise sub formă adimensională.

### 1. ECUAȚIILE LUBRIFICAȚIEI SUB FORMĂ ADIMENSIONALĂ

Să notăm cu $u$, $v$, $w$ componentele vitezei fluidului în stratul de lubrifiant, iar cu $p$, $\rho$, $\mu$, $\varkappa$, $T$ presiunea, densitatea, viscozitatea, coeficientul de conductibilitate și respectiv temperatura absolută. Valorile adimensionale pentru acești parametri vor fi

$$\bar{u} = \frac{u}{V};\ \bar{v} = \frac{v}{V};\ \bar{w} = \frac{w}{V};\ \bar{p} = \frac{p}{p_0};\ \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0};\ \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0};\ \bar{\varkappa} = \frac{\varkappa}{\varkappa_0};\ \bar{T} = \frac{T}{T_0}, \qquad (1)$$

unde $V$, $p_0$, $\rho_0$, $\mu_0$, $\varkappa_0$, $T_0$ sînt valori de referință; astfel $V$ poate fi viteza relativă dintre suprafețe, $p_0$, $T_0$ — presiunea și temperatura mediului înconjurător, $\rho_0$ — densitatea la intrarea în lagăr (pentru lubrifianții compresibili — gazele), $\mu_0$ — viscozitatea la intrarea în lagăr ($\mu_1$) sau viscozitatea medie ($\mu = \mu_m$).

Considerînd sistemul de coordonate $x$, $y$, $z$ curent utilizat în problemele de lubrificaţie [1], care are axa $y$ dirijată după normala la suprafeţe, iar axa $x$ dirijată în sensul mişcării relative dintre suprafeţe, vom pune

$$\bar{x} = \frac{x}{l}; \bar{y} = \frac{y}{h}; \bar{z} = \frac{z}{b}, \tag{2}$$

în care $l$ este o lungime caracteristică pentru direcţia $x$ (lungimea zonei portante în cazul lagărelor axiale, raza $r_1$ a fusului pentru lagărele circulare), $b$ este lăţimea lagărului iar $h$ grosimea stratului de lubrifiant.

În general, grosimea stratului de lubrifiant poate fi o funcţie de $x$ şi $z$. În aproape toate cazurile însă, $h$ nu depinde de $z$, iar variaţia în funcţie de $x$ este liniară, trigonometrică sau exponenţială, putînd fi definită de un parametru $\epsilon$ (excentricitatea relativă pentru lagărele cu suprafeţe plane înclinate etc.) şi de jocul mediu dintre suprafeţe $c$.
În consecinţă,

$$h = c\bar{h}(\bar{x}), \tag{3}$$

iar două lagăre de acelaşi tip şi cu acelaşi $\varepsilon$ au funcţia $\bar{h}(\bar{x})$ identică.

În aceste ecuaţii de mişcare ale fluidelor vîscoase compresibile [1] se scriu

$$\left.\begin{aligned}
&\psi\,\mathcal{R}e_0^*\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} + \frac{1}{\bar{h}}\bar{v}^*\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} + \frac{1}{\lambda}\bar{w}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{z}}\right) = -\frac{1}{H}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}} + 2\,\psi^2\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left(\bar{\mu}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}\right) + \\
&\quad + \frac{1}{\bar{h}^2}\frac{\partial}{\partial\bar{y}}\left[\bar{\mu}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} + \bar{h}\,\psi^2\frac{\partial\bar{v}^*}{\partial\bar{x}}\right)\right] + \frac{\psi^2}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left[\bar{\mu}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{z}} + \frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}\right)\right] - \\
&\qquad - \frac{2}{3}\psi^2\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left[\bar{\mu}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} + \frac{1}{\bar{h}}\frac{\partial\bar{v}^*}{\partial\bar{y}} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{z}}\right)\right], \\
&\psi^2\mathcal{R}e_0^*\left(\frac{\partial\bar{v}^*}{\partial\bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial\bar{v}^*}{\partial\bar{x}} + \frac{1}{\bar{h}}\bar{v}^*\frac{\partial\bar{v}^*}{\partial\bar{y}} + \frac{1}{\lambda}\bar{w}\frac{\partial\bar{v}^*}{\partial\bar{z}}\right) = -\frac{1}{\psi H\bar{h}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{y}} + \\
&\quad + \psi^2\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left[\bar{\mu}\left(\frac{1}{\psi\bar{h}}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} + \psi\frac{\partial\bar{v}^*}{\partial\bar{x}}\right)\right] + 2\frac{\psi}{\bar{h}^2}\frac{\partial}{\partial\bar{y}}\left(\bar{\mu}\frac{\partial\bar{v}^*}{\partial\bar{y}}\right) + \frac{\psi^2}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left[\bar{\mu}\left(\frac{\psi}{\lambda}\frac{\partial\bar{v}^*}{\partial\bar{z}} + \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \frac{1}{\psi\bar{h}}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}}\right)\right] - \frac{2}{3}\frac{\psi}{\bar{h}}\frac{\partial}{\partial\bar{y}}\left[\bar{\mu}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} + \frac{1}{\bar{h}}\frac{\partial\bar{v}^*}{\partial\bar{y}} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{z}}\right)\right], \\
&\psi\,\mathcal{R}e_0^*\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}} + \frac{1}{\bar{h}}\bar{v}^*\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}} + \frac{1}{\lambda}\bar{w}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{z}}\right) = -\frac{1}{\lambda H}\frac{d\bar{p}}{\partial\bar{z}} + \psi^2\left[\bar{\mu}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{z}} + \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}\right)\right] + \frac{1}{h^2}\frac{\partial}{\partial\bar{y}}\left[\mu\left(\frac{\bar{h}\,\psi^2}{\lambda}\frac{\partial\bar{v}^*}{\partial\bar{z}} + \frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}}\right)\right] + 2\frac{\psi^2}{\lambda^2}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\bar{\mu}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{z}}\right) - \\
&\qquad - \frac{2}{3}\frac{\psi}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left[\bar{\mu}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} + \frac{1}{\bar{h}}\frac{\partial\bar{v}^*}{\partial\bar{y}} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{z}}\right)\right],
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

în care

$$\psi = \frac{c}{l}\ ; \bar{v}^{*} = \frac{\bar{v}}{\psi}\ ; \bar{t} = \frac{t}{t_0} = \frac{Vt}{l}\ ; \lambda = \frac{b}{l}, \tag{5}$$

$\mathcal{R}e_0^*$ este numărul Reynolds definit în funcție de jocul mediu $c$, viteza de referință $V$ și viscozitatea de referință $\mu_0$

$$\mathcal{R}e_0^* = \frac{\rho V c}{\mu_0}, \tag{6}$$

iar $H$ este un parametru adimensional, egal cu

$$H = \frac{\mu_0 V l}{p_0 c^2} = \frac{\mu_0 V}{p_0 l \psi^2}. \tag{7}$$

Sub această formă adimensională a ecuațiilor de mișcare, simplificările curente utilizate în studiul lubrificației apar ca evidente. Într-adevăr, $\bar{u}$, $\bar{v}^*$, $\bar{w}$ au ordinul de mărime egal cu unitatea, iar $\psi \sim 10^{-3}$. Neglijînd toți termenii care au drept factor $\psi$ sau $\psi^2$ rezultă ecuația de mișcare în stratul de lubrifiant [2].

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} &= \frac{H}{\bar{h}^2}\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left(\bar{\mu}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right),\\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} &= 0,\\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} &= \frac{H\lambda}{\bar{h}^2}\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left(\bar{\mu}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Din (4) se constată însă că pentru a neglija forțele de inerție (primii termeni ai ecuațiilor (8)) este necesar ca

$$\psi \mathcal{R}e_0^* \ll 1. \tag{9}$$

În cazul cînd inegalitatea de mai sus nu este îndeplinită, ecuațiile (8) trebuie completate

$$\left.\begin{aligned} \psi \mathcal{R}e_0^*\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\bar{h}}\bar{v}^*\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{\lambda}\bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}\right) &= -\frac{1}{H}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\bar{h}^2}\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left(\bar{\mu}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right),\\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} &= 0,\\ \psi \mathcal{R}e_0^*\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\bar{h}}\bar{v}^*\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{\lambda}\bar{w}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}\right) &= -\frac{1}{\lambda H}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{\bar{h}^2}\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left(\bar{\mu}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Se remarcă astfel că aceste ecuații sînt aceleași cu sistemul de ecuații de mișcare în stratul limită din mișcarea fluidelor peste diferite corpuri. De asemenea, este de relevat faptul că același sistem (10) se obține în cazul cînd în ecuațiile (14) se neglijează numai termenii care au drept factor $\psi^2$ în raport cu $\frac{1}{H}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}}, \frac{1}{H}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{y}}, \frac{1}{H}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{z}}$, păstrîndu-se cei care au drept factor $\psi$. Se constată deci că în ipoteza neglijării forțelor de inerție, ecuațiile de mișcare nu depind de numărul Reynolds al mișcării din stratul de lubrifiant.

Dacă numărul Reynolds $\mathcal{R}e_0^*$ are valori relativ mari, în locul ecuațiilor (8) trebuie considerate ecuațiile (10). De obicei însă, în aceste cazuri mișcarea nu mai este laminară, ci turbulentă. Într-adevăr, dacă $\psi \mathcal{R}e_0^* \sim 1$, atunci $\mathcal{R}e_0^* \cong \frac{1}{\psi}$ valoare sensibil egală cu numărul Reynolds critic de la care apare regimul turbulent de scurgere în stratul de lubrifiant [2]. Atunci introducîndu-se valorile medii, pentru viteze, presiuni etc., de exemplu

$$\bar{u} = \widetilde{\bar{u}} + \bar{u}'\,;\; \widetilde{\bar{u}} = \frac{1}{\bar{t}_1}\int_{-\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \bar{u}\, d\bar{t}\,;\; \widetilde{\bar{u}'} = 0, \tag{11}$$

în locul ecuațiilor (8) sau (10) se obține sistemul [3]

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\widetilde{\bar{p}}}{\partial\bar{x}} &= \frac{H}{\bar{h}^2}\left(\bar{\mu}\frac{\partial\widetilde{\bar{u}}}{\partial\bar{y}}\right) + \frac{H}{\bar{h}}\mathcal{R}e_0^*\frac{\partial}{\partial\bar{y}}\left(-\widetilde{\bar{u}'\bar{v}'}\right),\\
\frac{1}{\psi}\frac{\partial\widetilde{\bar{p}}}{\partial\bar{y}} &= H\mathcal{R}e_0^*\frac{\partial}{\partial\bar{y}}\left(-\widetilde{\bar{v}'^2}\right),\\
\frac{\partial\widetilde{\bar{p}}}{\partial\bar{z}} &= \frac{\lambda H}{\bar{h}^2}\frac{\partial}{\partial\bar{y}}\left(\bar{\mu}\frac{\partial\widetilde{\bar{w}}}{\partial\bar{y}}\right) + \frac{H}{\bar{h}}\mathcal{R}e_0^*\frac{\partial}{\partial\bar{y}}\left(-\widetilde{\bar{v}'\bar{w}'}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Ecuația de continuitate se scrie, pentru lubrificația cu lichide

$$\frac{\partial\widetilde{\bar{u}}}{\partial\bar{x}} + \frac{1}{h}\frac{\partial\widetilde{\bar{v}^*}}{\partial\bar{y}} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\widetilde{\bar{w}}}{\partial\bar{z}} = 0, \tag{13}$$

iar în cazul lubrificației cu gaze

$$\frac{\partial\widetilde{\bar{\rho}}}{\partial\bar{t}} + \frac{\partial(\widetilde{\bar{\rho}}\,\widetilde{\bar{u}})}{\partial\bar{x}} + \frac{1}{\bar{h}}\frac{\partial(\widetilde{\bar{\rho}}\,\widetilde{\bar{v}}^*)}{\partial\bar{y}} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial(\widetilde{\bar{\rho}}\widetilde{\bar{w}})}{\partial\bar{z}} = 0, \tag{14}$$

fiind valabile, în primă aproximație și pentru lubrificație în regim turbulent, dacă se introduc valorile medii $\widetilde{\bar{u}}$ etc.

Ecuația energiei, pentru cazul lubrificației cu lichide se scrie

$$\begin{aligned}
\frac{\rho c_v T_0}{p_0}\left[\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{x}} + \frac{\bar{v}^*}{\bar{h}}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{y}} + \frac{\bar{w}}{\lambda}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{z}}\right] &= \\
= H\frac{\bar{\mu}}{\bar{h}^2}\left[\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\right)^2 + \left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}}\right)^2\right] &+ \frac{G}{\bar{h}^2}\frac{\partial}{\partial\bar{y}}\left(\bar{\varkappa}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{y}}\right)
\end{aligned} \tag{15}$$

unde $c_v$ este căldura specifică a lubrifiantului, iar

$$G = \frac{\varkappa_0 T_0 l}{p_0 V c^2} = \frac{\varkappa_0 T_0}{p_0 V l \psi^2}. \tag{16}$$

În cazul lubrificației cu gaze [4], ținînd seama de ecuația de stare

$$\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} = \bar{T}; \frac{p_0}{\rho_0} = R\, T_0 \tag{17}$$

ecuația energiei ia forma

$$\frac{c_p}{R}\bar{\rho}\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \frac{\bar{v}^*}{\bar{h}}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} + \frac{\bar{w}}{\lambda}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}}\right) = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} + \frac{H}{\bar{h}^2}\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left(\bar{\mu}\,\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{\mu}\,\bar{w}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}}\right) +$$

$$+ \frac{G}{\bar{h}^2}\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left(\bar{\varkappa}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}}\right), \tag{18}$$

unde $c_p$ este căldura specifică a gazului la presiune constantă, în unități mecanice, pentru unitatea de masă.

Se constată că parametrii de mișcare ai fluidului depind de doi parametri adimensionali $H$ (7) și $G$ (16) precum și eventual de numărul Reynolds la numere Reynolds mari, cînd de obicei mișcarea este turbulentă. În plus, ecuațiile de mai sus mai depind de caracteristicile geometrice ale suprafețelor ($\lambda$, $\psi$, $\epsilon$) de natura lubrifiantului și de starea termică de referință $\left(c_v,\ \rho,\ T_0,\ p_0 \text{ respectiv } \frac{c_p}{R}\right)$.

Concluziile generale de mai sus pot servi ca punct de plecare, pentru stabilirea criteriilor de similitudine pentru diferite cazuri de lubrificație a lagărelor.

## 2. LUBRIFICAȚIA CU LICHIDE

Din prima și ultima ecuație (8) în condițiile obișnuite ale unui regim staționar de lubrificație, se deduce

$$\left.\begin{aligned} \bar{u} &= -\frac{\bar{h}^2}{2H}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}\bar{y}(1-\bar{y}) + 1 - \bar{y}, \\ \bar{w} &= -\frac{\bar{h}^2}{2\lambda H}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}}\bar{y}(1-\bar{y}), \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

iar, cu ajutorul ecuației de continuitate (13) se deduce ecuația diferențială a presiunilor [2] sub forma

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\frac{\bar{h}^3}{\bar{\mu}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}\right) + \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\bar{h}^3}{\bar{\mu}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}}\right) = 6\,H\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}. \tag{20}$$

Ecuația de mai sus este liniară. De aceea, dacă, pentru simplificarea tratării se elimină ecuația energiei, considerînd în schimb că viscozitatea este funcție de $\bar{h}$, după legea ($\mu_0 = \mu_1$) [5]

$$\bar{\mu} = \left(\frac{\bar{h}}{\bar{h}_1}\right)^q, \tag{21}$$

atunci, presiunea $(p - p_0)$ va fi proporțională cu $H$ și va depinde calitativ numai de $\epsilon$, $\lambda$ și $q$ [2]

$$\bar{p} - 1 = H f_p(\epsilon, \lambda, q), \tag{22}$$

sau

$$\frac{c^2(p - p_0)}{\mu_1 l V} = c_p(\epsilon, \lambda, q). \tag{23}$$

Din (9) rezultă că $\bar{u}$, $\bar{w}$ depind de aceiași parametri. În mod analog și caracteristicile globale ale lagărului depind de aceiași parametri.

Astfel rezultanta presiunilor sau o componentă a acesteia după o direcție oarecare, este dată de o relație de tipul

$$p = \iint (p - p_0)\, dx\, dz = l\, b p_0 \iint (\bar{p} - 1)\, d\bar{x}\, d\bar{z}, \tag{24}$$

sau ținînd seama de (23) se deduce

$$\frac{p\, \psi^2}{2\mu_1 V b} = \frac{p\, c^2}{4\mu_1 V \lambda r_1^{23}} = \zeta(\epsilon, \lambda, q), \tag{25}$$

unde $\zeta$ este coeficientul de portanță al lagărului (inversul numărului Sommerfeld).

Forța de frecare $F$ va fi egală cu

$$F = \iint \tau_{xy}\, dx\, dz = \iint \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right)_{y = 0, h} dx\, dz = \frac{\mu_1 V l b}{c} \iint \frac{\bar{u}}{\bar{h}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right)_{\bar{y} = 0, 1} d\bar{x}\, d\bar{z}, \tag{26}$$

sau

$$\frac{F\, \psi}{\mu_1 V b} = \frac{F\, c}{\mu_1 V \lambda l^2} = C_f(\epsilon, \lambda, q) \tag{27}$$

iar coeficientul de frecare

$$f = \frac{F}{P} = \frac{\psi}{2} \frac{C_f}{\zeta}, \tag{28}$$

astfel că

$$\frac{2}{\psi} f = f'(\epsilon, \lambda, q). \tag{29}$$

Analog, notînd cu $M$ momentul de frecare față de axa de rotație a uneia din suprafețe și cu $C_m$ coeficientul corespunzător

$$\frac{M\psi}{\mu_1 v l b} = \frac{M c}{\mu_1 v \lambda l^3} = C_m(\epsilon, \lambda, q). \tag{30}$$

În sfîrșit, debitul de lubrifiant este dat de o relație de tipul

$$Q_s = \int_0^l dx \int_0^h w\, dy = V c b \frac{1}{\lambda} \int_0^1 d\bar{x}\, \bar{h} \int_0^1 \bar{u}\, d\bar{y}, \tag{31}$$

sau

$$\frac{Q_s}{V c b} = C_{q_s}(\epsilon, \lambda, q). \tag{32}$$

În concluzie, toate elementele care caracterizează funcționarea unui lagăr depind calitativ de dimensiunile relative ale lagărului ($\lambda$), de natura variației grosimii stratului de lubrifiant ($\epsilon$) și de regimul termic ($q$). Aceste elemente trebuie să fie aceleași pentru ca două lagăre să aibă o funcționare similară. Concluziile de mai sus au fost deduse direct din studiul ecuațiilor de mișcare ; ele se pot deduce de altfel și din formulele de calcul ale diferitelor tipuri de lagăre.

De la început trebuie remarcat că o similitudine riguroasă a cîmpului de temperaturi este practic imposibil de realizat. Într-adevăr din studiul ecuației energiei (15) se constată că în acest scop $H$, $G$ și produsul $\frac{\rho c_v T_0}{p_0}$ trebuie să rămînă același. În plus, relațiile

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}(\bar{T})\,; \quad \bar{\varkappa} = \bar{\varkappa}(\bar{T}), \tag{33}$$

trebuie să fie identice pentru cele două lagăre considerate ceea ce nu poate fi realizat decît dacă lubrifiantul este același iar cîmpul de temperaturi rămîne același în valoare absolută. Dar chiar în această situație, condițiile $H = \text{const.}$ și $G = \text{const.}$ sînt contradictorii, după cum se poate ușor constata. În fond, dacă mai ținem seama că și condițiile la limită pentru temperaturi trebuie să se reproducă identic, se ajunge în cele din urmă la concluzia că similitudinea mecanică nu poate fi practic realizată concomitent cu cea termică decît în cazul cînd cele două lagăre sînt identice.

De aceea este necesar să se renunțe la o similitudine termică riguroasă și să se caute să se realizeze o cvasi-similitudine, prin intermediul parametrului $q$. Acest parametru este egal cu [5]

$$q = \frac{\ln \dfrac{\mu_1}{\mu_2}}{\ln \dfrac{h_1}{h_2}}, \tag{34}$$

în care $h_1$ și $h_2$ sînt valorile grosimii stratului de lubrifiant la începutul și sfîrșitul zonei portante (de obicei egale cu grosimea maximă, respectiv minimă a stratului de lubrifiant). Raportul $\frac{h_1}{h_2}$ este deci o funcție numai de $\epsilon$. De aceea, condiția $q = \text{const.}$ este realizată dacă

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \text{const.} \tag{35}$$

ceea ce permite aprecierea anticipată a temperaturii corespunzătoare $t_2$, în funcție de valorile $\mu_1$, $t_1$ admise inițial și de curba viscozității uleiului în funcție de temperatură. Realizarea acestei temperaturi $t_2$ este însă imposibil de reprodus deoarece în special condițiile de evacuare a căldurii prin piesele metalice, prin conductibilitate și convecție, nu pot fi controlate. De aceea, singura soluție practică în această privință este aceea a realizării temperaturii medii corespunzătoare

$$t_m = \frac{1}{2}(t_1 + t_2), \tag{36}$$

printr-o modificare adecvată a debitului de lubrifiant, schimbînd astfel cantitatea de căldură evacuată prin lubrifiant care poate fi modificată destul de ușor și precis.

Pentru lagărele alimentate sub presiune, la care majoritatea căldurii este evacuată prin debitul de lubrifiant, modificarea necesară a debitului poate fi determinată destul de precis prin calcul, dacă se neglijează căldura evacuată prin conductibilitate și convecție. Într-adevăr, în acest caz pentru lagărele circulare de exemplu [5]

$$\frac{C_{m1}}{C_{q_s}} = \frac{J\gamma c_v c^2}{2\pi \mu_1 V r_1}(t_2 - t_1), \tag{37}$$

unde $J$ este echivalentul mecanic al căldurii (dacă căldura specifică $c_v$ se ia în unități mecanice, așa cum s-a considerat în ecuația energiei (15), atunci se ia $J = 1$). Cunoscînd temperatura $t_2$ necesară, rezultă din (37) felul cum trebuie să se modifice coeficientul $C_{q_s}$. Pentru exemplul considerat al lagărelor circulare [5], debitul variază puțin cu presiunea de alimentare, în schimb el variază proporțional cu dimensiunile fantei sau orificiului de alimentare. Astfel notînd cu $\nu = \frac{b_i}{b}$ raportul dintre lățimea orificiului sau fantei și lățimea lagărului se poate pune

$$C_{q_s} = 2\nu\, C^*_{q_s}\,(\epsilon, \lambda, q), \tag{38}$$

astfel încît din relația (37)

$$\frac{C_{m1}}{C^*_{q_s}} = \frac{J\gamma c_v c^2 \nu}{\pi \mu_1 V r_1}(t_2 - t_1), \tag{39}$$

se poate deduce direct felul cum se modifică $\nu$.

## CRITERII DE SIMILITUDINE

Să considerăm cazul general a două lagăre de acelaşi tip, fie unul prototip sau altul model pentru care măsurile fundamentale geometrice şi funcţionale sînt schimbate în raportul $\alpha_i$

$$\left.\begin{array}{l} \text{prototip}: \; l; \quad c; \quad p_0; \quad V; \quad \omega; \quad \mu_1, \\ \text{model}: \; \alpha_l\, l; \quad \alpha_c\, c; \quad \alpha_p\, p_0; \quad \alpha_v V; \quad \alpha_\omega\, \omega; \quad \alpha_\mu\, \mu_1, \end{array}\right\} \tag{40}$$

În (40) nu s-a inclus şi lăţimea $b$ a lagărului, deoarece pentru ca alungirea $\lambda$ să fie aceeaşi, este necesar ca

$$\alpha_b = \alpha_l, \tag{41}$$

cu alte cuvinte cele două lagăre trebuie să fie asemenea din punct de vedere geometric. Apoi între $\alpha_\omega$ şi $\alpha_v$ există relaţia

$$\alpha_\omega = \frac{\alpha_v}{\alpha_l}. \tag{42}$$

Să considerăm că toţi coeficienţii $\alpha_i$ sînt aleşi arbitrar şi să determinăm modul cum trebuie să se modifice celelalte caracteristici, astfel încît funcţionarea celor două lagăre să fie similară. Pentru aceasta, după cum s-a arătat, este necesar ca parametrii $\epsilon$, $\lambda$ şi $q$ să aibă aceleaşi valori. În aceste condiţii, mărimile adimensionale

$$\mu\,(21), \quad C_p\,(23), \quad \zeta\,(25), \quad C_f\,(27), \quad \frac{f}{\psi}\,(29), \quad C_m\,(30), \quad C^*_{q_s}\,(38)$$

au valori identice pentru ambele lagăre. Valorile absolute care sînt caracterizate de aceşti coeficienţi adimensionali sînt însă modificate în rapoarte diferite, care rezultă din relaţiile de definiţie menţionate. Se deduce astfel imediat

$$\left.\begin{array}{lllll} \text{prototip}: \; h; & p - p_0; & P; & F; & f; \\ \text{model}: \; \alpha_c\, h; & \dfrac{\alpha_\mu\, \alpha_l\, \alpha_v}{\alpha_c^2}(p - p_0); & \dfrac{\alpha_\mu\, \alpha_v\, \alpha_l^3}{\alpha_c^2}\, p; & \dfrac{\alpha_\mu\, \alpha_v\, \alpha_l^2}{\alpha_c} F; & \dfrac{\alpha_c}{\alpha_l} f; \\ & M; & W; & Q_s & \\ & \dfrac{\alpha_\mu\, \alpha_v\, \alpha_l^3}{\alpha_c} M; & \dfrac{\alpha_\mu\, \alpha_v^2\, \alpha_l^2}{\alpha_c} W; & \alpha_\nu\, \alpha_c\, \alpha_l\, \alpha_o\, Q_s & \end{array}\right\} \tag{43}$$

unde cu $W$ s-a notat puterea consumată prin frecare ($W = FV = M\omega$).

Coeficientul $\alpha^\nu$ nu este arbitrar ci rezultă din condiţia ca parametrul $q$ să rămînă acelaşi. Notînd astfel cu

$$\alpha_t = \frac{t_2' - t_1'}{t_2 - t_1} \tag{44}$$

unde $t_1'$, $t_2'$ sînt valorile corespunzătoare modelului, iar $t_1$, $t_2$ prototipului, coeficientul $\alpha_t$ rezultă determinat, cunoscînd $t_1'$ (corespunzînd modificării viscozităţii $\mu_1$ de la intrare în raportul $\alpha_\mu$) şi $t'_2$ care este temperatura care corespunde unei viscozităţi a uleiului $\mu'_2 = \alpha_\mu \mu_2$. Dacă şi tipul de lubrifiant este modificat, căldura specifică $c_v$ şi greutatea specifică $\gamma$ sînt modificate în rapoartele $\alpha_{cv}$ şi $\alpha_\gamma$. Atunci din relaţia (39) se deduce

$$\frac{\alpha_\gamma \alpha_{cv} \alpha_c^2 \alpha_\nu \alpha_t}{\alpha_\mu \alpha_v \alpha_l} = 1, \tag{45}$$

sau

$$\alpha_\nu = \frac{\alpha_\mu \alpha_v \alpha_l}{\alpha_\gamma \alpha_{cv} \alpha_c^2 \alpha_t}. \tag{46}$$

Practic valoarea $\alpha_\nu$ poate fi determinată experimental în aşa fel încît să se corecteze aproximaţiile introduse în (46) prin neglijarea căldurii evacuate prin conductibilitate. Astfel relaţia (35) şi temperatura $t'_1$ ($\mu'_1$) alese pentru model permit după cum am văzut determinarea temperaturii $t'_2$ şi a temperaturii medii $t'_m$. Modificînd experimental condiţiile de alimentare cu lubrifiant ($\nu$, presiunea de alimentare etc., avînd grijă ca temperatura de intrare să se menţină tot timpul constantă), temperatura medie a lagărului se modifică de asemenea. În acest mod prin mai multe încercări se pot deduce condiţiile corecte de alimentare cu lubrifiant care produc temperatura $t'_m$ dorită. În locul temperaturii $t'_m$ se poate măsura temperatura uleiului $t'_e$ la ieşirea din lagăre, pe la capetele acestuia, care este sensibil egală cu temperatura medie din lagăr [5].

Este de remarcat faptul că dacă uleiul este altul, sau temperatura la intrare $t_1$ este modificată, se introduce o aproximaţie în plus, deoarece atunci curba $\bar{\mu} = \bar{\mu}(\bar{T})$ nu mai este aceeaşi pentru cele două lagăre. De aceea se obţin rezultate mai corecte, dacă se utilizează în ambele cazuri acelaşi ulei şi se menţine temperatura $t_1$ aceeaşi. În acest caz $\alpha_\mu = 1$, şi de asemenea $\alpha_\gamma = 1$, $\alpha_{cv} = 1$ şi $\alpha_t = 1$, iar relaţia (46) se scrie

$$\alpha_\nu = \frac{\alpha_v \alpha_l}{\alpha_c^2}. \tag{47}$$

În alegerea parametrilor $\alpha_i$ trebuie să se aibă în vedere posibilitatea îndeplinirii relaţiei (46) sau (47). De exemplu, dacă $\alpha_v = \frac{1}{2}$, $\alpha_l = \frac{1}{2}$ şi $\alpha_c = 2$, atunci (47) $\alpha_\nu = \frac{1}{16}$ adică lăţimea fantei de alimentare trebuie să scadă de 16 ori, lucru greu de realizat. În schimb, $\alpha_\nu = 1$ deci condiţiile de alimentare sînt de asemenea similare, dacă $\frac{\alpha_v \alpha_l}{\alpha_c^2} = 1$, de exemplu dacă turaţia este aceeaşi ($\alpha_\omega = 1$) şi jocul relativ se menţine neschimbat ($\alpha_\psi = 1$, $\alpha_l = \alpha_c$).

În acest mod se pot stabili formule care dau legătura între caracteristicile de funcţionare a două lagăre, utile în cazul experimentărilor pe modele.

Să considerăm astfel două lagăre axiale, modelul avînd dimensiuni de două ori mai reduse decît lagărul real $\left(\alpha_l = \frac{1}{2}\right)$, iar jocul mediu relativ păstrîndu-se acelaşi ($\alpha_l = \alpha_c$). Dacă şi turaţia se menţine aceeaşi ($\alpha_\omega = 1$), ca şi uleiul ($\alpha_\mu = 1$) şi regimul termic ($\alpha_t = 1$), atunci din (43) rezultă că este necesar ca

$$\left.\begin{array}{ll} \text{prototip}: & p - p_0; \quad P; \quad F; f; \quad Q_s, \\ \text{model}: & p - p_0; \frac{1}{4} P; \frac{1}{4} F; f; \frac{1}{8} Q_s. \end{array}\right\}$$

Fie apoi de exemplu cazul a două lagăre circulare; modelul are dimensiuni de 3 ori mai reduse decît lagărul real $\left(\alpha_l = \frac{1}{3}\right)$. Jocul pentru lagărul prototip este $\psi = 1\,^0/_{00}$ iar pentru model $\psi = 2\,^0/_{00}$ $\left((\alpha_c = \alpha_\psi\, \alpha_l = \frac{2}{3}\right)$. Turaţia în cazul modelului este redusă la jumătate $\left(\alpha_\omega = \frac{1}{2}, \alpha_v = \alpha_\omega\, \alpha_l = \frac{1}{6}\right)$. Se ia în ambele cazuri acelaşi ulei, acelaşi sistem de alimentare şi aceeaşi temperatură la intrare ($\alpha_\mu = 1, \alpha_\gamma = \alpha_{c_0} = \alpha_t = 1$). În aceste condiţii

$$\left.\begin{array}{ll} \text{prototip}: & p - p_0; \quad P; \quad f; \quad M; \quad \nu; \quad Q \\ \text{model}: & \frac{1}{8}(p - p_0); \frac{1}{12} P; 2f; \frac{1}{108} M; \frac{1}{8} \nu; \frac{1}{216} Q. \end{array}\right\} \tag{48}$$

Este apoi necesar ca să se realizeze o similitudine şi în privinţa altor parametri care nu au fost luaţi în considerare. Astfel materialul din care este confecţionat lagărul trebuie să fie acelaşi. Este importantă de asemenea realizarea unei similitudini a microgeometriei suprafeţelor. Notînd cu $\delta$ înălţimea medie a asperităţilor, va trebui ca

$$\frac{\delta}{c} = \text{const.} \tag{49}$$

pentru cele două lagăre. Valorile $\delta$ depind de modul de prelucrare a suprafeţelor şi de condiţiile de rodaj, care de cele mai multe ori sînt aceleaşi atît în cazul prototipului, cît şi al modelului. În schimb, dacă $c$ scade, $\delta$ ar trebui să scadă în aceeaşi măsură, ceea ce este greu de realizat practic. De aceea, este bine ca în cazul modelului să se ia jocuri relative $\psi$ mai mari decît în cazul lagărului real, astfel încît jocul absolut $\alpha_c$ să păstreze aceeaşi valoare sau să varieze în măsura posibilităţilor tehnice de realizare a condiţiei (49).

## CAZUL SARCINII ŞI VITEZEI VARIABILE

Dacă sarcina suportată de lagăr şi vitezele sînt variabile, parametrii de funcţionare variază în timp. De exemplu, pentru lagărele circulare, unghiul $\theta^\star$ dintre direcția sarcinii și linia centrelor este dat de ecuația diferențială [2]

$$\dot{\theta}^* = \frac{d\theta^\star}{dt} = \Omega^\star \mp \frac{c^2}{8\mu_1 \lambda r_1^4} \frac{|P_1|}{\zeta}, \tag{50}$$

unde sensul $\mp$ corespunde la $\Omega^* \gtrless 0$, $P_1$ este sarcina fusului iar

$$\Omega^* = \frac{1}{2}(\Omega_1 + \Omega_2) + \dot{\gamma}, \tag{51}$$

în care $\Omega_1$ și $\Omega_2$ sînt vitezele de rotație ale fusului și cuzinetului iar $\gamma$ unghiul făcut de direcția sarcinii cu o direcție oarecare fixă.

Deoarece variația în timp a unghiului $\theta^\star$ trebuie să rămînă aceeași este necesar ca în orice moment expresia

$$\Omega^\star \mp \frac{c^2}{8\mu_1 \lambda r_1^4} \frac{|P_1|}{\zeta}, \tag{52}$$

să aibă aceeași valoare, pentru ambele lagăre. Notînd cu $\alpha_{\Omega^\star}(t)$ și $\alpha_P(t)$ raportul în care se modifică $\Omega^\star$ și $P_1$, rezultă atunci

$$\alpha_P(t) = \mp \frac{8\mu_1 \lambda r_1^4}{c^2} \frac{\zeta}{|P_1|} \frac{\alpha_\mu \alpha_l^4}{\alpha_c^2} \left\{ [1 - \alpha_{\Omega^*}(t)]\, \Omega^* \mp \frac{c^2}{8\mu_1 \lambda r_1^4} \frac{|P_1|}{\zeta} \right\}. \tag{53}$$

În același timp este necesar ca, pentru o viteză medie $\Omega^\star = \Omega_{c0}$ și o încărcare medie $P_{1m} = P_{c0}$, unghiul $\theta_0^\star$ corespunzător să fie același. Notînd cu $\alpha_{\Omega_0^*}$ și $\alpha_{P0}$ valorile medii ale lui $\alpha_{\Omega^*}$ și $\alpha_P$, din (43) se deduce

$$\alpha_{P0} = \frac{\alpha_\mu \alpha_{\Omega_0^*} \alpha_l^4}{\alpha_c^2}. \tag{54}$$

În consecință $\alpha_{\Omega^\star}(t)$ nu poate avea o variație arbitrară ci numai astfel ca $\alpha_{P0}$ care rezultă din media valorilor $\alpha_p$ (53) să aibă valoarea dată de formula (54).

Cea mai simplă soluție este aceea a reproducerii pe model a mișcării reale, deci $\alpha_{\Omega^*} = 1$. În acest caz din (53) rezultă

$$\alpha_P = \frac{\alpha_\mu \alpha^4}{\alpha_c^2} = \text{constant}, \tag{55}$$

care verifică în același timp și relația (54). Condițiile de mai sus impun ca $\dot{\gamma}(t)$ să fie aceeași în ambele cazuri dacă vitezele de rotație $\Omega_1$ și $\Omega_2$ (51) rămîn aceleași.

Este de notat că sarcina reală $P_1$ aplicată asupra fusului în dreptul lagărului, este în general diferită de sarcina exterioară $P_1'$ aplicată fusului, deoarece $P_1$ este compusă din forța $P_1'$ menționată și forțele de inerție ale maselor în mișcare, care nu se reproduc identic în cazul modelului. De aceea, schema de variație a sarcinii $P_1'$ trebuie determinată ținînd seama de (55) și scăzînd apoi din sarcina totală $P_1$ forțele de inerție.

Restul relațiilor de transformare (43) — (47) rămîn aceleași, și sînt valabile pentru valorile medii ale mărimilor respective pentru un ciclu.

Rezultă deci că este posibilă experimentarea pe modele a lagărelor cu sarcini și viteze variabile. Pentru aceasta este necesar să se reproducă identic cinematica mișcării lagărului (vitezele unghiulare) și să se prevadă o instalație care să poată simula variația sarcinii $P_1$ în mărime și direcție, sarcină dedusă în modul arătat.

În particular, pentru cazul încărcării centrifugale, sarcina pe model se transformă direct în raportul $\alpha_P$ (55), restul concluziilor rămînînd aceleași.

### LAGĂRE FUNCȚIONÎND ÎN REGIM TURBULENT

În acest caz parametrii funcționali depind de numărul Reynolds al mișcării în stratul de lubrifiant [2]. De aceea pe lîngă condițiile examinate anterior, este necesar ca numărul Reynolds să fie același, condiție care îngrădește într-o oarecare măsură alegerea parametrilor $\alpha_i$ (40).

Astfel pe lîngă condițiile anterioare, deduse pentru regimul laminar, într-o primă aproximație, este suficient ca numărul Reynolds

$$\mathcal{R}e_1^* = \frac{\rho V c}{\mu_1} \tag{56}$$

să rămînă același, adică, dacă densitatea lubrifiantului nu se modifică

$$\frac{\alpha_v \alpha_c}{\alpha_\mu} = 1, \tag{57}$$

condiții care asigură și conservarea numărului Reynolds (6) care intervine în ecuațiile (12) și care în fond este același cu (56). Astfel dacă $\alpha_l = \frac{1}{2}$ și $\alpha_\omega = 1$ trebuie ca (57) $\alpha_c = \frac{1}{2}$ $(\alpha_\psi = 1)$ iar dacă $\alpha_\omega = \frac{1}{2}$ atunci $\alpha_c = \frac{1}{4}$, $\alpha_\psi = \frac{1}{2}\cdot$ În primul caz $(\alpha_\psi = 1,\ \alpha_\omega = 1)$ rezultă

$$\left.\begin{aligned} &\text{prototip}: \omega;\, p - p_0;\quad P;\quad F;\, f;\quad M;\quad W \qquad (58)\\ &\text{model}: \quad \omega;\, p - p_0;\, \frac{1}{4}P;\, \frac{1}{4}F;\, f;\, \frac{1}{8}M;\, \frac{1}{8}W. \qquad (59)\end{aligned}\right\}$$

În cazul lagărelor lubrificate cu apa sau alte lichide pentru care viscozitatea variază mai puțin cu temperatura, se poate renunța la similitudinea termică, luînd $q = 0$. În această situație, mai există teoretic posibilitatea ca prin modificarea temperaturii medii de funcționare, sau prin modificarea lubrifiantului să se modifice $\alpha_\mu$ astfel încît $\alpha_\omega$ să nu crească mult.

## 3. LUBRIFICAŢIA CU GAZE

Ca şi pentru lubrificaţia cu lichide, din examinarea ecuaţiilor (8) sau (10), (14) şi (17)—(18) se constată că mişcarea în stratul de lubrifiant depinde de caracteristicile geometrice ale lagărului, de natura gazului $\left(\frac{c_p}{R}\right)$ şi de parametrii adimensionali $H$ (7) şi $G$ (16). Şi de data aceasta se poate constata faptul că similitudinea termică este greu de realizat, o dată cu cea mecanică.

În cazul lagărelor lubrificate cu gaze problema este mult simplificată dacă în locul ecuaţiei energiei (18) şi ecuaţiei de stare (17) se consideră o legătură politropică între presiunea şi densitatea gazului care se scrie adimensional sub forma

$$\bar{p} = \bar{\rho}^n \; ; \frac{p_0}{\rho_0^n} = \text{const.} \tag{60}$$

Exponentul politropic $n$ are valori cuprinse între $1 \leqslant n \leqslant \frac{c_p}{c_v}$; practic $n$ este foarte apropiat de unitate, iar evoluţia gazului lubrifiant este apropiată de o izotermă.

În acelaşi timp, la gaze, viscozitatea variază destul de puţin cu temperatura iar creşterile de temperatură în lagăre sînt reduse. De aceea se poate considera

$$\mu = \mu_m = \text{const.} \tag{61}$$

În aceste condiţii ecuaţiile de mişcare au forma (8) cu $\bar{\mu} = 1$, iar vitezele $\bar{u}$, $\bar{w}$ sînt date de relaţiile (19). În schimb, ecuaţia presiunilor [2] se scrie

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}^{\frac{1}{n}+1}}{\partial \bar{x}}\right) + \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}^{\frac{1}{n}+1}}{\partial \bar{z}}\right) = 6\left(\frac{1}{n} + 1\right) H \, \frac{\partial(\bar{p}^{\frac{1}{n}} \bar{h})}{\partial \bar{x}}. \tag{62}$$

Se constată că spre deosebire de lubrificaţia cu lichide (20) ecuaţia presiunilor în cazul lubrificaţiei cu gaze este neliniară; din această cauză, presiunile vor depinde calitativ de parametrul $H$ cît şi de $n$

$$\bar{p} = \bar{p}\,(\epsilon, \lambda, n, H), \tag{63}$$

în timp ce pentru lubrifianţii incompresibili (22) diferenţa de presiuni $p - p_0$ sau $\bar{p} - 1$ era proporţională cu $H$ şi depindea calitativ numai de $\epsilon$, $\lambda$, $q$. La gaze $q = 0$ (61) iar regimul termic intervine într-o măsură redusă, numai prin intermediul exponentului $n$ şi prin valorile $\rho_0$ care modifică debitele de lubrifiant.

Relaţii analoge cu (63) se scriu şi pentru viteze

$$\bar{u} = \bar{u}\,(\epsilon, \lambda, n, H)\,; \bar{w} = \bar{w}\,(\epsilon, \lambda, n, H) \tag{64}$$

şi densităţi

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}\;(\epsilon, \lambda, n, H). \tag{65}$$

Pentru sarcina suportată de lagăr, din (24) se deduce

$$\frac{P}{p_0 \, lb} = \frac{P}{p_0 \, \lambda l^2} = \zeta' \, (\epsilon, \lambda, n, H), \tag{66}$$

iar pentru coeficientul $C_f$ (26) (27)

$$\frac{Fc}{\mu \, V l^2 \lambda} = C_f \, (\epsilon, \lambda, n, H) \text{ sau } \frac{F}{p_0 r' \psi} = H \, C_f = C_f' (\epsilon, \lambda, n, H). \tag{67}$$

Coeficientul de frecare $f$ se scrie

$$f = \frac{F}{P} = \psi \, H \frac{C_f}{\zeta'} = \psi \frac{C_f'}{\zeta'} \tag{68}$$

astfel că

$$\psi f = f' (\epsilon, \lambda, n, H). \tag{69}$$

Coeficientul de moment rezultă de asemenea

$$\frac{Mc}{\mu V \lambda l^3} = C_m \, (\epsilon \, \lambda, n, H) \text{ sau } \frac{M}{\psi p_0 \, \lambda l^{\,3}} = M C_m = C_m' \, (\epsilon, \lambda, n, H). \tag{70}$$

În sfîrșit, debitul masic de lubrifiant este

$$\frac{M_{qs}}{\rho_0 c V b} = C_{qms} (\epsilon, \lambda, n, H). \tag{71}$$

În concluzie, toți parametrii funcționali depind calitativ de $\epsilon, \lambda, n, H$. După cum s-a mai spus, exponentul $n$ are o influență mai redusă, putînd lua aproape întotdeauna $n = 1$. În același timp se constată că densitatea $\rho_0$ nu influențează în primă aproximație mărimea și alura vitezelor și presiunilor și a parametrilor derivate din acestea, deoarece constanta din relația (60) nu apare în ecuațiile (62)—(70). De exemplu, două lagăre identice, lucrînd în aceleași condiții dar cu lubrifianți de densități diferite, vor prezenta distribuții de viteze și presiuni identice, dacă temperaturile de lucru ale lor sînt modificate astfel încît presiunea de referință $p_0$ să aibă aceeași valoare în ambele cazuri.

## CRITERII DE SIMILITUDINE

Procedînd analog cu cazul lagărelor lubrificate cu lichide fie două lagăre geometric asemenea, pentru care

$$\left.\begin{array}{ll} \text{prototip}: & l; \quad c; \quad p_0; \quad \rho_0; \quad V; \quad \mu, \\ \text{model} \quad : & \alpha_c l; \ \alpha_l c; \ \alpha_p \, p_0; \ \alpha_\rho \rho_0; \ \alpha_v V; \ \alpha_\mu \mu. \end{array}\right\} \tag{72}$$

Condiția $H$ = constant pentru ambele lagăre (7) conduce la următoarea legătură între coeficienții $\alpha_i$ :

$$\frac{\alpha_\mu\,\alpha_l\,\alpha_v}{\alpha_p\,\alpha_c^2} = 1. \tag{73}$$

În consecință, pot fi aleși arbitrar numai 5 din cei 6 coeficienți (72) ultimul rezultînd din (73).

Apoi din relațiile (63)÷(71) se deduce

$$\left.\begin{array}{ll} \text{prototip}: & u;\quad w;\quad p;\quad \rho;\quad h, \\ \text{model}: & \alpha_v\, u;\ \alpha_v\, w;\ \alpha_p\, p;\ \alpha_e\,\rho;\ \alpha_e\, h, \end{array}\right\} \tag{74}$$

și

$$\left.\begin{array}{ll} \text{prototip}: & P;\qquad F;\quad f;\qquad M;\qquad W;\qquad \mathcal{M}_{qz} \\ \text{model}: & \alpha_p\,\alpha_l^2\, P;\ \alpha_p\cdot\alpha_l\alpha_c\ \ F;\frac{\alpha_c}{\alpha_l} f;\ \alpha_p\,\alpha_l^2\ \alpha_c M;\ \alpha_p\ \alpha_l\ \alpha_c\ \alpha_v^2\ W;\alpha_\rho\alpha_l\alpha_v\alpha_c\mathcal{M}_{q_z} \end{array}\right\} \tag{75}$$

Să considerăm de exemplu cazul simplu al unui lagăr circular care trebuie să funcționeze la o anumită turație $\omega$ și că dorim să-l experimentăm mai întîi la o turație mai redusă, fie $\omega' = \frac{1}{4}\,\omega\left(\alpha_\omega = \frac{1}{4}\right)$. Din (73) se constată că dacă păstrăm aceleași dimensiuni ale lagărului ($\alpha_l = 1$), același lubrifiant ($\alpha_\mu = 1$) și aceeași presiune ($\alpha_p = 1$), rezultă $\alpha_c = \frac{1}{2}$. În consecință, este suficient să reducem jocul la jumătate, iar

$$\left.\begin{array}{ll} \text{prototip}: & P;\quad F;\quad M;\quad W, \\ \text{model}: & P;\ \frac{1}{2}\,F;\ \frac{1}{2}\,M;\ \frac{1}{32}\,W. \end{array}\right\} \tag{76}$$

Se constată că puterea consumată prin frecare scade apreciabil.

Dacă două lagăre au dimensiunile în raportul $\alpha_l$, jocul modificat în aceeași proporție ($\alpha_c = \alpha_l$) și cu aceeași turație ($\alpha_\omega = 1$, $\alpha_v = \alpha_l$), au o funcționare similară, dacă $\mu$ și $p_0$ păstrează aceleași valori ($\alpha_\mu = \alpha_p = 1$), iar sarcina $P$ și forțele de frecare $F$ se modifică în raportul $\alpha_l^2$, momentele de frecare în raportul $\alpha_l^3$ iar puterea consumată în raportul $\alpha_l^4$ (de exemplu dacă dimensiunile sînt reduse la jumătate, puterea scade de 16 ori). O atenție deosebită trebuie însă acordată unor efecte secundare (dezechilibrări, vibrații) care pot modifica condițiile dinamice de funcționare și prin aceasta altera rezultatele. În sfîrșit, în exemplul de mai sus debitul de lubrifiant se modifică în raportul $\alpha_\rho\,\alpha_l^3$, dacă $\alpha_\rho \neq 1$, respectiv dacă temperatura de funcționare nu rămîne aceeași.

În privința similitudinii termice, după cum s-a mai arătat nu poate fi realizată decît rareori. Într-adevăr din (18) rezultă că în acest scop

$\frac{c_p}{R}$ respectiv gazul lubrifiant trebuie să rămînă acelaşi, iar parametrul $G$ (16) să rămînă de asemenea constant, adică

$$\frac{\alpha_\varkappa \alpha_T \alpha_l}{\alpha_p \alpha_v \alpha_c^2} = 1 \,;\; \alpha_T = \frac{T_0'}{T_0}. \tag{77}$$

De pildă, în exemplul precedent al celor două lagăre cu $\alpha_l = \frac{1}{2}$, rezultă $\alpha_T = \alpha_l^2 = \frac{1}{4}$, imposibil de realizat deoarece $T_0'$ ar trebui să scadă extrem de mult (cca. 100°K respectiv $-$ 170°C !). Condiţia (77) nu poate fi realizată decît dacă rezultă $\alpha_T = 1$ sau o valoare foarte apropiată de unitate (în afară doar de cazul lagărelor funcţionînd la temperaturi foarte mari, de 500$-$1 000°C).
Pentru $\alpha_T = 1$, din (77) rezultă

$$\frac{\alpha_\varkappa \alpha_l}{\alpha_p \alpha_v \alpha_c^2} = 1, \tag{78}$$

sau, ţinînd seama de (73)

$$\frac{\alpha_\mu \alpha_v^2}{\alpha_\varkappa} = 1, \tag{79}$$

condiţie care rareori poate fi îndeplinită prin schimbarea lubrifiantului. Mai simplu se poate lua $\alpha_\mu = 1$ şi $\alpha_v = 1$. Din (73) cu $\alpha_p = 1$ aşa cum este cazul curent, rezultă atunci

$$\alpha_c = \sqrt{\alpha_l}. \tag{80}$$

Dacă dorim să realizăm şi similitudinea termică, rezultă că acest lucru este posibil luînd $\alpha_v = 1$ şi $\alpha_c = \sqrt{\alpha_l}$ De exemplu, dacă $\alpha_l = \frac{1}{2}$ rezultă $\alpha_\omega = 2$, $\alpha_T = 1$, $\alpha_\rho = 1$, $\alpha_p = 1$ şi

$$\left.\begin{aligned} &\text{prototip}: P\,;\quad F\,;\quad f\,;\quad M\,;\quad W\,;\quad \mathcal{M}_{qz}\,,\\ &\text{model}: \alpha_l^2 P\,;\, \alpha_l^{\frac{3}{2}} F\,;\, \alpha_l^{-\frac{1}{2}} f\,;\, \alpha_l^{\frac{5}{2}} M\,;\, \alpha_l^{\frac{3}{2}} W\,;\, \alpha_l^{\frac{3}{2}} \mathcal{M}_{qz}\,. \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

### LAGĂRE CU AER FUNCŢIONÎND ÎN REGIM TURBULENT

În acest caz pe lîngă condiţiile precedente, numărul Reynolds (56) trebuie să rămînă acelaşi

$$\frac{\alpha_\rho \alpha_v \alpha_c}{\alpha_\mu} = 1, \tag{82}$$

ceea ce îngreunează considerabil realizarea condițiilor de similitudine, întocmai ca și pentru cazul lubrificației cu lichide. Dificultatea cea mai mare constă în faptul că dacă $\alpha_l < 1$, condițiile (73) (82) conduc la $\alpha_\omega > 1$. În plus, $\alpha_\rho$ este greu de determinat.

În mod aproximativ, renunțînd la similitudinea termică (80), relațiile (73) (82) pot fi satisfăcute deși destul de greu dacă se poate modifica experimental densitatea lubrifiantului într-un anumit raport. De exemplu, cu $\alpha_c = \frac{1}{2}$ și $\alpha_\omega = 1$, $\alpha_\mu = 1$, este necesar ca $\alpha_c = \alpha_l^3 = \frac{1}{8}$, $\alpha_p = \alpha_\rho = \frac{1}{\alpha_l^4}$, adică punînd lagărul într-o cameră etanșă în care presiunea $p_0$ și densitatea $\rho_0$ sînt modificate în raportul $\frac{1}{\alpha_l^4} = 16$. Dificultatea cea mai mare constă însă în faptul că jocul relativ $\psi$ scade de 4 ori iar jocul absolut de 8 ori.

În schimb, dacă $\alpha_\rho = \alpha_p = \alpha_\mu = 1$, condițiile (73) (82) pot fi făcute dacă $\alpha_c = \alpha_l^{\frac{1}{3}}$ și $\alpha_l = \alpha_l^{-\frac{1}{3}}$, relații destul de simplu de realizat : cu $\alpha_l = \frac{1}{2}$ rezultă $\alpha_c = 0{,}795$, $\alpha_v = 1{,}26$, $\alpha_\omega = 2{,}52$. În schimb, experimental trebuie să se asigure o răcire artificială a cuzinetului astfel încît $\alpha_\rho = 1$.

*Primită la redacție la 6 octombrie 1960*

## КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ ДЛЯ РАБОТЫ ПОДШИПНИКОВ ПРИ ЖИДКОСТНОЙ ИЛИ ГАЗОВОЙ СМАЗКЕ

### РЕЗЮМЕ

Исходя из общих уравнений движения в безразмерном виде, выводятся основные параметры, от которых зависит работа подшипников. На основании этих результатов определяются критерии подобия как для случая подшипников с жидкостной смазкой при ламинарном или турбулентном режиме, так и для подшипников с газовой смазкой.

## SIMILARITY CONDITIONS FOR THE LIQUID OR GAS BEARINGS

### ABSTRACT

Proceeding from the general equations of motion under dimensionless form, this paper deduces the main parameters on which the operation of bearings depends. On the basis of these results, similarity criteria are determined both for liquid bearing with laminar or turbulent lubrication, and for gas bearings.

## BIBLIOGRAFIE

1. Л. Дж. Лойцианский, *Механика жидкости и газа.* Москва, 1952.
2. N. Tipei, *Hidro-aerodinamica lubrificației.* Ed. Acad. R.P.R., București, 1957.
3. V. N. Constantinescu, *Asupra problemei tridimensionale a lubrificației în regim turbulent,* Studii și cercetări de mecanică aplicată, 4 (1959).
4. V. N. Constantinescu, *Sur une classe de mouvements des fluides visqueux compressibles en couches minces.* Actes du IX-ème Congrès International de Mécanique Appliquée, **III**, Bruxelles, 1956.
5. N. Tipei, V. N. Constantinescu, Al. Nica, *Calculul lagărelor de alunecare.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, 6 (1960).

# STUDII

## DINAMICA GAZELOR

# STUDIU CRITIC AL GENERATOARELOR DE GAZE MOTOCOMPRESOARE PENTRU ANTRENAREA PNEUMATICĂ A ROTORULUI DE ELICOPTER

DE

ŞT. ANDREI

În aplicaţiile în care consideraţiile masice pot fi lăsate pe plan secundar, cît şi în anumite aplicaţii speciale motocompresorul poate încă prezenta interes faţă de turbocompresor [3], [4], prin superioritatea sa în ce priveşte randamentul şi posibilitatea supraalimentării atît la sol cît şi în altitudine, mai ales că, în cazul în speţă, fluxul de aer necesar supraalimentării nu necesită un echipament suplimentar.

În prezenta lucrare se va face studiul analitic şi grafic al variaţiei parametrilor caracteristici principali ai generatoarelor de gaze motocompresoare în funcţie de debitul fluxului de gaze al generatorului şi parametrii constructivi funcţionali ai motorului şi compresorului, în diferite combinaţii compatibile cu funcţionarea pe elicopter 1), în ce priveşte răcirea şi condiţiile la admisie şi evacuare, arătate într-o lucrare anterioară [1]. Se vor folosi notaţiile, schemele şi rezultatele din lucrarea sus-menţionată.

1. Expresiile generale folosite pentru parametrii caracteristici principali ai generatorului de gaze, sînt

$$\overline{P}_{ad_3} = \overline{Q}_3 \cdot \left(R \frac{k}{k-1}\right)_3 \cdot T_3^{\star} \left(1 - \delta_3^{\star \frac{k-1}{k}}\right) = \frac{H_c}{A} \cdot \eta_m \cdot \eta_c \cdot \varphi = \frac{H_c}{A} - (\overline{\mathcal{P}}_m + \overline{\mathcal{P}}_{cc}) \quad (1)$$

în care

$\overline{P}_{ad_3} = \dfrac{P_{ad_3}}{q}$ este puterea adiabatică a gazului la ieşirea din generatorul de gaze, pe unitatea de greutate de combustibil consumat în motor, din care deci se pot deduce

---

[1] Valabil şi pentru alte aparate ce fac apel la un flux de gaze energetice în condiţii asimilabile.

$$P_{ad_3} = \overline{P}_{ad_3} \cdot q, \qquad \eta_{ad_3} = \frac{A}{H_c} \cdot \overline{P}_{ad_3}. \tag{2}$$

$\overline{Q}_3 = \frac{Q_3}{q}$ este debitul gravimetric al gazului pe unitate de greutate de combustibil consumat în motor, putînd lua valorile $\overline{Q}_c$, $\overline{Q}_c - \overline{Q}_{a_m}$, $\overline{Q}_c + \overline{Q}_{a_m} + 1$, după combinaţiile utilizate, în care

$$\overline{Q}_c = \frac{Q_c}{q} = \frac{\overline{G}_{răc_{min}}}{K} = \frac{\overline{P}_m \cdot \eta_c}{H_{c_{ad}}} = \frac{\frac{H_c}{A} \cdot \eta_m \cdot \eta_c}{H_{c_{ad}}} \tag{3}$$

cu

$$\overline{Q}_{a_m} = \frac{Q_{a_m}}{q} = \alpha \cdot a_0 \cdot \psi \tag{4}$$

$\overline{G}_{răc_{min}} = \frac{G_{răc_{min}}}{q}$ este debitul de aer unitar necesar răcirii motorului, fiind o funcţie de caracteristicile motorului şi ale aerului de răcire la intrare [1]; $K \leqslant 1$ definit de relaţia $K \cdot \overline{Q}_c = \overline{G}_{răc_{min}}$.

$\overline{P}_m = \frac{H_c}{A} \cdot \eta_m$, puterea efectivă (mecanică) la arbore a motorului, respectiv randamentul efectiv al motorului.

Se vede că pentru un motocompresor definit ca pierderi interne există o familie de generatoare de gaze caracterizate prin

$$\overline{Q}_c \cdot H_{c_{ad}} = Ct \quad \text{cu} \quad \overline{Q}_c \geqslant \overline{G}_{răc_{min}}$$
$$H_{c_{ad}} = \frac{C_{p_{aer}}}{A} \cdot \eta_{c_{ad}} \cdot \Delta T^{\star}_{c_{real}} = \frac{H_c}{A} \cdot \frac{\eta_m \cdot \eta_c}{\overline{Q}_c}. \tag{5}$$

$T^{\star}_3 \geqslant T^{\star}_{c_2}$ în funcţie de recuperările energetice (aerul de răcire, gaze de evacuare) ce au loc în combinaţiile considerate

$$T^{\star}_{c_2} = T^{\star}_{c_1} + \Delta T^{\star}_{c_{real}} \quad \text{cu} \quad T^{\star}_{c_1} \geqslant T_0, \quad \Delta T^{\star}_{c_{real}} = \frac{H_c}{c_p} \cdot \frac{\eta_m \cdot \eta_{c_m}}{\overline{Q}_c}$$

$$\delta^{\star}_3 = \frac{p_0}{p^{\star}_3} = \frac{1}{\overline{p}^{\star}_3} \quad \text{cu} \quad p^{\star}_3 \leqslant p^{\star}_{c_2}, \quad \left(\frac{p_0}{p^{\star}_3}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{Td}{T^{\star}_3} \tag{6}$$

$$\frac{p^*_{c_2}}{p^*_{c_1}} = \frac{\overline{p}^*_{c_2}}{\overline{p}^*_{c_1}} = \pi^*_c = \left(1 + \frac{H_{c_{ad}}}{\frac{C_{p_{aer}}}{A} \cdot T^*_{c_1}}\right)^{\frac{k}{k-1}_{aer}} = \left(1 + \eta_{c_{ad}} \frac{\Delta T_{c_{real}}}{T^*_{c_1}}\right)^{\frac{k}{k-1}_{aer}} \tag{7}$$

$$\eta_m = 1 - \overline{\mathcal{P}}_m \frac{A}{H_c}, \quad \overline{\mathcal{P}}_m = \frac{H_c}{A}(1 - \eta_m) \tag{8}$$

randamentul termic, respectiv pierderile în circuitul motor, ținînd seama de totalitatea pierderilor interne în motor din bilanțul său energetic

$$\eta_c = \frac{\overline{Q}_c H_{c_{ad}}}{\overline{P}_c} = \frac{\overline{Q}_c H_{c_{ad}}}{\overline{P}_m} = \frac{\overline{Q}_c \cdot H_{c_{ad}}}{\frac{H_c}{A} \cdot \eta_m} = 1 - \frac{\mathcal{P}_c \cdot \frac{A}{H_c}}{1 - \overline{\mathcal{P}}_m \cdot \frac{A}{H_c}} = \eta_{c_{ad}} \cdot \eta_{c_m} \tag{9}$$

cu $\overline{\mathcal{P}}_c = \frac{H_c}{A}(1 - \eta_c)$, suma pierderilor de orice natură din compresor. Eficacitatea circuitului compresor (total)

$$\eta_{cc} = \eta_c \cdot \varphi = \frac{P_{ad_3}}{P_m} = \frac{\overline{P}_{ad_3}}{\overline{P}_m} = \frac{\eta_{ad_3}}{\eta_m} = \frac{\overline{P}_{ad_3}}{\frac{H_c}{A} \eta_m}. \tag{10}$$

Se poate deduce ușor

$$\varphi = \frac{\overline{Q}_3}{\overline{Q}_c} \cdot \frac{C_{p_3}}{C_{p_c}} \cdot \frac{\Delta T^*_{3_d}}{\Delta T^*_{c_{ideal}}}, \tag{11}$$

sau

$$\varphi = \frac{\overline{Q}_3 \cdot \frac{C_{p_3}}{A} \cdot T^*_3 \left[1 - \left(\frac{p_0}{p^*_3}\right)^{\frac{k-1}{k}_3}\right]}{\overline{Q}_c \frac{C_{p_c}}{A} \cdot T^*_{c_{2_{id}}} \left[1 - \left(\frac{p_0}{p^*_{c_2}}\right)^{\frac{k-1}{k}_c}\right]},$$

coeficient adimensional ținînd seama de suma pierderilor de orice natură (hidrodinamice etc.) din circuitul exterior al compresorului (circuitul de răcire al motorului și circuitele conductelor de legătură dintre acesta și aspirația sau refularea compresorului inclusiv conductele proprii de aspirație și refulare), cît și de totalitatea recuperărilor de căldură pe același circuit exterior.

2. În combinația de bază notată cu „0—0" [1] (condițiile la admisia și evacuarea motorului cele ale mediului înconjurător, care în cele ce urmează se va considera combinația de referință) și în situația că nu se cheltuiește direct nici o energie pentru răcirea motorului („RL", răcire

liberă de ex. în zborul de translaţie, dacă viteza de înaintare este suficientă), parametrii caracteristici ai generatorului de gaze sînt cei corespunzători celor două circuite (motor şi compresor) considerate independent.

*2.1.* Din expresiile parametrilor caracteristici în acest caz, se vede, că pentru un motor dat (grupul interdependent $\eta_m\,[c]$, $\alpha$, $\psi$ definite) şi o familie de compresoare (ventilatoare, suflante) definite de variaţia lui $K$ în ipoteză că $\eta_c$ practic nu variază (ceea ce totdeauna se poate asigura printr-o proiectare corespunzătoare în limitele practice de variaţie ale lui $K$)

$$\overline{P}_{ad_3} = \frac{H_c}{A} \cdot \eta_m \cdot \eta_c\, \frac{T_0 + KC_1}{T_0 + KC_1\eta_{c_{ad}}} \qquad [m] \tag{12}$$

$$T_3^* = T_{c_2}^* = T_0 + \Delta T_{c_{real}}^* = T_0 + KC_1 \qquad [°K] \tag{13}$$

$$\Delta T_{c_{real}}^* = K \cdot \frac{H_c}{C_{p_{aer}}} \cdot \frac{\eta_m \cdot \eta_{c_m}}{\overline{G}_{răc_{min}}} \quad \text{şi} \quad \overline{G}_{răc_{min}} = f(\alpha, \psi) = \text{const.} \tag{14}$$

considerat pentru cazul $RF_a$ (răcire pe aspiraţie) care dă valoarea minimă

$$p_3^* = p_{c_2}^* = p_0\,[1 + KC_2]^{\frac{k}{k-1}_{aer}} \qquad \left[\frac{\text{kg}}{m^2}\right] \tag{15}$$

în care $C_1$, $C_2$ sînt constante definite din relaţiile de mai sus,

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{H_c}{C_{p_{aer}}} \cdot \frac{\eta_m \cdot \eta_{c_m}}{G_{răc_{min}}} \qquad (C_1 = \Delta T_{c_{real}}^* \text{ ptr. } K = 1) \\ C_2 &= \frac{H_c}{C_{p_{aer}}} \cdot \frac{\eta_m \cdot \eta_c}{T_0 \cdot G_{răc_{min}}} = \frac{C_1}{T_0}\,\eta_{c_{ad}}. \end{aligned} \tag{16}$$

Deci familia de generatoare de gaze rezultată din variaţia lui $K$ se caracterizează prin cvasi-constanţa nivelului puterii adiabatice $\Bigg(\varphi = \dfrac{T_0 + KC_1}{T_0 + KC_1\eta_{c_{ad}}}$ care are valoarea maximă la $K = 1$ tinzînd asimptotic către 1 cînd $K$ tinde spre zero, deci $\overline{P}_{ad_3}$ către $\overline{P}_{c_{ad}} = \dfrac{H_c}{A} \cdot \eta_m \cdot \eta_c$, variază practic în limite restrînse care nu depăşesc ca valori uzuale $4\%\Bigg)$ şi o scădere liniară a temperaturii gazului cu $K$.

În graficul din figura 1 şi pentru fixarea ideilor s-au trasat aceste valori $\Bigg(\text{inclusiv } \overline{Q}_c = \dfrac{\overline{G}_{răc_{min}}}{K}\Bigg)$ în funcţie de $K$ pentru diferite valori uzuale ale parametrilor caracteristici pentru motor ($\eta_m\,[c]$, $\alpha$, $\varphi$) şi compresor ($\eta_c$), de unde se poate vedea şi variaţia numerică cu aceşti din urmă parametri.

De exemplu, pentru $\eta_m = 0{,}300$, $\alpha = 1$, $\psi = 1$, $\eta_c = 0{,}75$, $\overline{P}_{ad_3} = 1{,}0125 \times 10^6$ $[m]$, $\eta_{ad_{min}} = 0{,}225$, $\overline{G}_{răc_{max}} = \overline{Q}_{c_{min}} = 100$, $T^*_{3_{max}} = 416{,}2$ $[°K]$, $p^*_{3_{max}} = 29\,400$ $[\mathrm{kg/m^2}]$, de unde se vede că se poate obține ușor combinația de debit și presiune solicitată pentru o transformare optimă în rotorul elicopterului [2].

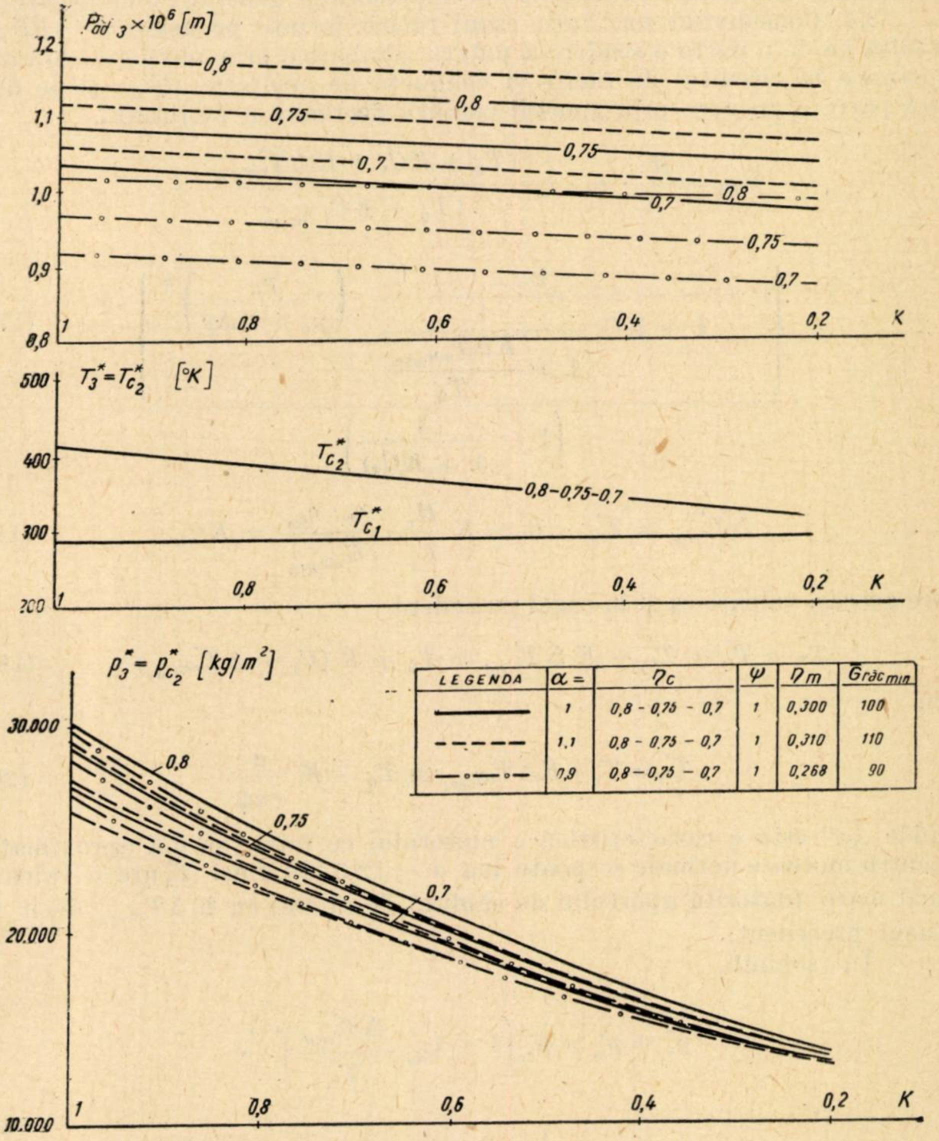


Fig. 1

*2.2.* În cazul răcirii forțate (funcționare la viteză de translație nulă sau mică în funcționarea la punct fix, zbor vertical sau oblic) s-a văzut [1] că s-a luat în considerare utilizarea aspirației sau refulării compresorului (nefiind oportună utilizarea unui ventilator propriu al motorului de îndată ce se dispun de fluxul de aer al compresorului generatorului de gaze).

*2.3.* Considerînd mai întîi cazul răcirii forțate pe aspirație ($RF_a$) rezultă pe de o parte o scădere a puterii adiabatice prin pierderile hidrodinamice în circuitul de răcire și conducta de aspirație ($\mathcal{P}_{ec}$) și pe de altă parte o creștere prin aportul căldurii de răcire a motorului,

$$\overline{P}_{ad_3} = \frac{H_c}{A} \cdot \eta_m \cdot \eta_c \frac{(T_0 + KC_1 + K\,\Delta T^{\star}_{răc_{max}})}{(T_0 + KC_1\,\eta_{c_{ad}})} \cdot$$

$$\cdot \frac{\left\{1 - \dfrac{1}{1 + KC_2 \dfrac{1}{1 + \dfrac{K\Delta T_{răc_{min}}}{T_0}}} \cdot \left(\dfrac{p_0}{p_0 - \Sigma\,\Delta p}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right\}}{\left(1 - \dfrac{1}{1 + KC_2)}\right)} \quad . \tag{17}$$

$$\Delta T^{\star}_{c_{real}} = T^{\star}_{c_2} - T^{\star}_{c_1} = K\,\frac{H_c}{C_p} \cdot \frac{\eta_m \cdot \eta_{c_m}}{\overline{G}_{răc_{min}}} = KC_1 \tag{18}$$

are aceeași valoare ca și în cazul precedent

$$T^{\star}_3 = T^{\star}_{c_2} = T^{\star}_{c_1} + K\,\Delta T^{\star}_{c_{real}} = T_0 + K\,(C_1 + \Delta T^{\star}_{răc_{max}}) \tag{19}$$

cu

$$T^{\star}_{c_1} = T_0 + K\Delta T^{\star}_{răc_{max}} \cong T_0 + K\,\frac{a}{c\alpha\psi} \tag{20}$$

unde „$a$" este o caracteristică a motorului ce într-o primă aproximație pentru motoare normale se poate lua $a = 12{,}5$ [1]. Deci $T^{\star}_3$ are o valoare mai mare (datorită aportului de căldură de răcire) cu $K\,\Delta T^{\star}_{răc_{max}}$ decît în cazul precedent.

În schimb,

$$p^{\star}_3 = p^{\star}_{c_2} = p^{\star}_{c_1}\left(1 + \eta_{c_{ad}}\,\frac{\Delta T^{\star}_{c_{real}}}{T^{\star}_{c_1}}\right)^{\frac{k}{k-1}},$$

$$p^{\star}_3 = (p_0 - \Sigma\,\Delta p^{\star})\left[1 + KC_2\,\frac{1}{1 + \dfrac{K\Delta T^{\star}_{răc_{max}}}{T_0}}\right]^{\frac{k}{k-1}}. \tag{21}$$

Deci $p^*_3$ are o valoare mai mică decît în cazul precedent, accentuat și de creșterea de temperatură la aspirația compresorului față de situația că ar fi existat numai pierderi hidraulice la aspirație.

Puterile adiabatice (căderile ideale de entalpie) în cele două cazuri se găsesc în raportul

$$\frac{\varphi_{RF_a}}{\varphi_{RL}} = \overline{\varphi} = \left(1 + \frac{K\overline{\Delta T}^*_{răc_{max}}}{1 + \frac{KC_1}{T_0}}\right) \cdot$$

$$\cdot \frac{\left[1 - \frac{1}{1 + KC_2 \frac{1}{1 + K\overline{\Delta T}^*_{răc_{max}}}} \cdot \left(\frac{1}{1 - \Sigma\overline{\Delta p}}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}{1 - \frac{1}{1 + KC_2}}. \tag{22}$$

Notînd

$$\frac{K \cdot \Delta T^*_{răc_{max}}}{T_0} = K\overline{\Delta T}_{răc_{max}}$$

și

$$\frac{\Sigma\Delta p}{p_0} = \Sigma\overline{\Delta p}.$$

Se poate vedea ușor că această funcție este totdeauna subunitară (se poate vedea și din diagrama IS) și are valoarea maximă pentru $\Sigma\Delta p = 0$ cînd expresia devine

$$\overline{\varphi}_{\Sigma\Delta p=0} = \frac{1 + \frac{\overline{\Delta T}^*_{răc_{max}}}{\frac{1}{K} + \frac{C_1}{T_0}}}{1 + \frac{\overline{\Delta T}^*_{răc_{max}}}{\frac{1}{K} + \frac{C_1}{T_0} \cdot \frac{\eta_c}{\eta_{c_m}}}} \tag{23}$$

care la rîndul ei este maximă și egală cu 1 la $K = 0$.

*2.4.* În cazul răcirii forțate pe refulare ($RF_r$), considerațiile de mai sus rămîn principial valabile doar că valorile relative ale constantelor se modifică, aportul de căldură recuperată avînd loc de data aceasta pe circuitul cald de refulare al compresorului, motiv pentru care și $\overline{G}_{răc_{min}}$ are valori relativ mai ridicate (deci $C_1$ respectiv $C_2$ relativ mai mari) şi în plus de data aceasta $\overline{G}_{răc_{min}} = f(\alpha, \psi, \Delta T^{*}_{c_{real}})$ deci variază şi cu $\Delta T^{*}_{c_{real}}$ [1] deci cu $K$.

În consecinţă parametrii de mai sus au o variaţie mai complexă cu $K$, şi la fiecare valoare a acestuia $\overline{G}_{răc_{min}}$ şi $\Delta T^{*}_{c_{real}}$ care sînt funcţie unul de altul, trebuie să rezolve simultan ecuaţiile lor respective de definiţie $\left[\Delta T^{*}_{c_{real}} = K \frac{H_c}{c_p} \cdot \frac{\eta_m \eta_{c_m}}{\overline{G}_{răc_{min}}} \text{ şi } \overline{G}_{răc_{min}} = f(\alpha, \psi, \Delta T^{*}_{c_{real}})\right]$.

În acest scop se poate trasa grafic variaţia lui $\overline{Q}_c$ cu $\Delta T^{*}_{c_{real}}$ pe de o parte şi a lui $\overline{G}_{răc_{min}}$ pe de altă parte. La punctul de intersecţie al celor două curbe se află $\overline{Q}_{c_{min}} = \overline{G}_{răc_{min}}$ minimorum şi $\Delta T^{*}_{c_{real}}$ max. corespunzător, definind zona de funcţionare pentru toate valorile în care $\overline{Q}_c \geqslant \overline{G}_{răc_{min\,min}}$ şi $\Delta T^{*}_{c_{real}} \leqslant \Delta T^{*}_{c_{real}}$ max.

Din aceleaşi curbe se deduce variaţia lui $K$ cu $\Delta T^{*}_{c_{real}}$ deci se pot obţine toate valorile necesare deducerii parametrilor consideraţi ai generatorului de gaze.

$$T^{*}_{3} = Ta^{*}_{3} \cong (1 - K)\, T^{*}_{c_2} + K T^{*}_{c_3'} \tag{24}$$

din ecuaţia amestecurilor), cu

$$T^{*}_{c_2} = T_0 + \Delta T^{*}_{c_{real}},$$

$$T^{*}_{c_3'} = T^{*}_{c_2} + \Delta T^{*}_{răc_{max}} \text{ cu } \Delta T^{*}_{răc_{max}} = f(\iota, \alpha, \varphi, \Delta T^{*}_{c_{real}}),$$

deci

$$\begin{aligned} T^{*}_{3} &= T^{*}_{a_3} = T_0 + \Delta T^{*}_{c_{real}} + K \Delta T^{*}_{răc_{max}}, \\ p^{*}_{3} &= p^{*}_{a_3} = p^{*}_{c_2} - \Sigma \Delta p. \end{aligned} \tag{25}$$

Se poate arăta uşor că la acelaşi $K$, $T^{*}_{3}$ şi $p^{*}_{3}$ au valorile cele mai mici prin comparaţie cu cazurile precedente.

Expresia lui $\varphi$ este

$$\varphi_{RF_r} = \frac{(T_0 + K C'_1 + K \Delta T'^{*}_{răc_{max}})}{(T_0 + K C'_1 \eta_{c_{ad}})} \cdot \frac{\left\{1 - \dfrac{1}{\left[(1 + K C'_2)^{\frac{k}{k-1}} - \dfrac{\Sigma \Delta p}{p_0}\right]^{\frac{k-1}{k}}}\right\}}{\left(1 - \dfrac{1}{1 + K C'_2)}\right)}, \tag{26}$$

cu

$$C_1' = \frac{H_c}{Cp} \cdot \frac{\eta_m \cdot \eta_{c_m}}{\bar{G}'_{răc_{min}}} = C_1 \frac{\bar{G}_{răc_{min}}}{\bar{G}'_{răc_{min}}}.$$

Puterea adiabatică, față de cazul $RL$ (la același $K$) se află în raportul

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi_{RF_r}}{\varphi_{RL}} =$$

$$= \frac{(T_0 + KC_1' + K\,\Delta T^{\prime *}_{răc_{max}})\,(T_0 + KC_1\,\eta_{c_{ad}}) \cdot \left\{1 - \frac{1}{\left[(1+KC_2')^{\frac{k}{k-1}} - \frac{\Sigma\Delta p}{p_0}\right]^{\frac{k-1}{k}}}\right\}}{(T_0 + KC_1)\,(T_0 + KC_1'\,\eta_{c_{ad}})\left(1 - \frac{1}{1+KC_2'}\right)} \tag{27}$$

a cărei valoare este maximă la $\Sigma\,\Delta p = 0$

$$\bar{\varphi}_{\Sigma\Delta p = 0} = \frac{\left(T_0 + KC_1 \frac{\bar{G}_{răc_{min}}}{\bar{G}'_{răc_{min}}}\right)(T_0 + KC_1\,\eta_{c_{ad}})}{\left(T_0 + KC_1 \frac{\bar{G}_{răc_{min}}}{\bar{G}'_{răc_{min}}}\right)(T_0 + KC_1)} \tag{28}$$

și tinde spre 1 cu valori ușor supraunitare la $K = 0$.

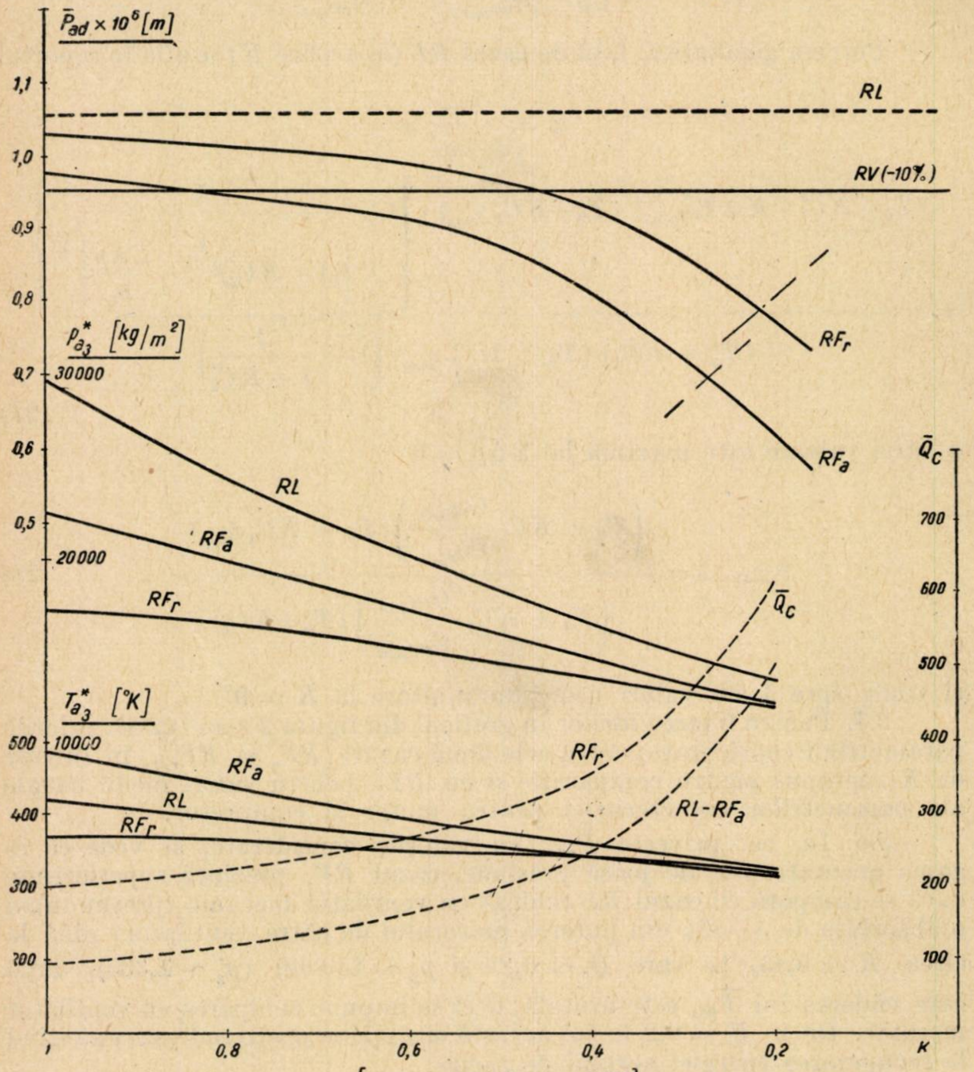
2.5. Pentru fixarea ideilor în graficul din figura 2 s-au trasat valorile parametrilor considerați pentru cele două cazuri ($RF_a$ și $RF_r$), în funcție de $K$(suprapus pentru comparație și cu $RL$), pentru valori medii uzuale ale parametrilor caracteristici pentru motor și compresor.

2.6. În ce privește $\bar{P}_{ad}$, cu valorile considerate, se vede că în gama generatorului de joasă presiune, cazul $RF_r$ prezintă superioritate dacă se compară cu cazul $RL$ echipat cu ventilator mecanic (presupunînd o absorbție de 5–8% din puterea motorului de către ventilator) pînă la circa $K = 0{,}43$, la care $\bar{Q}_c \sim 3{,}25$ și $p_3^* \sim 13\,800$) ($\bar{p}_3^* \sim 1{,}335$), după care căderea lui $\bar{P}_{ad_3}$ este brutală, deci se impune echiparea cu ventilator mecanic. De la $K = 0{,}2$ în jos această situație se poate redresa renunțînd la recuperarea energiei aerului de răcire.

Cazul $RF_r$ nu este utilizabil sub $\bar{Q}_c = 200$.

Între $\bar{Q}_c = 100-135$ prezintă avantaj răcirea pe aspirație. Între $Q_c = 135-200$ este de apreciat posibilitatea utilizării răcirii pe aspirație prin prisma bilanțului energetic generator-rotor [2] avînd în vedere că $RF_a$ se prezintă cu gaze de presiune sensibil inferioară cazului $RL$, că pierderea de putere adiabatică este de maximum 7% față de acesta și de complicația mecanică și greutatea suplimentară a ventilatorului.

3. Combinaţia notată cu 0—2 (condiţii la admisie ale mediului înconjurător, iar la evacuarea cele de la refularea compresorului $p_2$, $T_c$), ca urmare a amestecării aerului comprimat de compresor cu gazele de evacuare se caracterizează faţă de combinaţia de referinţă prin următoarele :



$[\alpha = 1 \ . \ \eta_c = 0,75 \ ; \ \eta_m = 0,300]$

Fig. 2

— pe de o parte o scădere a puterii motorului (deci a lui $\eta_m [c]$) datorită contrapresiunii la eşapament, ceea ce reduce în consecinţă puterea adiabatică a aerului refulat de compresor,

— pe de altă parte o creştere a acestei puteri prin aportul adus de puterea adiabatică a gazelor de evacuare.

Combinaţia prezintă interes în măsura în care ultima influenţă este predominantă la egalitate de debit de fluid refulat de motocompresor.

*3.1.* În cazul răcirii libere ($RL$) şi pe baza condiţiilor anterioare, rezultă că

$$\overline{P}_{ad_3} = (\overline{Q}_c + \overline{Q}_m) \cdot \frac{Cp_{a_3}}{A} \cdot T^{\star}_{a_3} \cdot \left(1 - \delta_{c_2}^{\star\,\left(\frac{k-1}{k}\right)_{a_3}}\right) = \tag{29}$$

$$= (\overline{Q}_c + \overline{Q}_m) \frac{Cp_{a_3}}{A} \cdot (T^{\star}_{a_3} - T_d) = \frac{H_c}{A} \cdot \eta_m \cdot \eta_c \cdot \varphi_{-2},$$

$$\varphi_{0-2} = \left(1 + \frac{1}{\overline{\overline{Q}}_c}\right) \cdot \frac{Cp_{a_3}\left[\dfrac{\overline{\overline{Q}}_c\,(T_0 + KC_1A_1)\,\overline{C}p_{aer} + T^{\star}_{m_e}}{(\overline{\overline{Q}}_c + 1)\,\overline{C}p_{a_3}}\right]\left[1 - \dfrac{1}{1 + KC_2A_1}\right]}{Cp_{aer}(T_0 + KC_1\,\eta_{c_{ad}})\left(1 - \dfrac{1}{1 + KC_2}\right)}, \tag{30}$$

în care

$$A_1 = 1 - b\,(\overline{p}^{\star}_{c_2} - 1) = 1 - b\,(\delta'^{\star}_{c_2} - 1) \qquad [1]$$

este o funcţie liniară descrescătoare cu $\overline{p}^{\star}_{c_2}$ cu $A_1 \leqslant 1$

$$\delta'^{\star}_{c_2} = \frac{1}{p^{\star}_{c_2}}$$

$T^{\star}_{m_c}$ este o funcţie de $Hg_{ci}$, $\alpha$, $\varphi$, $T_a$ ($= T_0$ în cazul considerat), descrescînd încet cu $\overline{p}^{\star}_{c_2}$ (deoarece $Hg^{-}_{c_i}$ descreşte încet cvasi-liniar cu creşterea lui $A_1 \cdot \eta_m$ deci cu descreşterea lui $\overline{p}^{\star}_{c_2}$ [1].

$T^{\star}_{a_3}$ rezultă din ecuaţia calorimetrică a amestecurilor şi este dată finalmente de relaţia

$$T^{\star}_{a_3} = \frac{\overline{\overline{Q}}_{c_2} \cdot T^{\star}_{c_2}\,\overline{C}p_{c_2} + T^{\star}_{m_e}}{(\overline{\overline{Q}}_{c_2} + 1)\,\overline{C}p_{a_3}} \quad \text{cu} \quad \overline{C}p = \frac{Cp}{Cp_{m_e}}, \tag{31}$$

$$\overline{\overline{Q}}_{c_2} = \overline{\overline{Q}}_c = \frac{Q_c}{\overline{Q}_m} = \frac{\overline{G}_{răc_{min}}}{K \cdot Q_m} = \frac{\overline{G}_{răc_{min}}}{K(1 + \alpha\,a_0\,Q)},$$

cu $\overline{G}_{răc_{min}} = f(\alpha, \psi)$
şi este evident mult superior lui $T^{\star}_{c_2} = T_0 + \Delta T^{\star}_{c_{real}}$ cu

$$\Delta T^{\star}_{c_{real}} = K\,\frac{H_c}{Cp_{aer}} \cdot \frac{A_1 \cdot \eta_m \cdot \eta_{c_m}}{\overline{G}_{răc_{min}}} = KC''_1,$$

deci şi lui $T^{\star}_{c_2}$ din combinaţia de referinţă, scăderea lui $\Delta T^{\star}_{c_{real}}$ fiind relativ redusă.

$p^{\star}_{a_3} = p^{\star}_{c_2}$ scade ca o consecinţă a scăderii lui $\Delta T^{\star}_{c_{real}}$.

Prin comparaţie cu combinaţia de referinţă $(0-0)RL$, raportul coeficienţilor $\varphi$ este

$$\overline{\varphi} = \left(\frac{\varphi_{0-2}}{\varphi_{0-0}}\right)_{RL} = \varphi_{0-2} \cdot \frac{T_0 + KC_1\,\eta_{c_{ad}}}{T_0 + KC_1}. \tag{32}$$

Pentru simplificarea discuţiilor să presupunem $Cp_a = Cp_{aer} = Cp_{m_e}$. Rezultă uşor simplificînd expresia lui $\varphi_{0-2}$,

$$\overline{\varphi} = \frac{\left(T_0 + KC_1 A_1 + \frac{T^{\star}_{m_e}}{\overline{Q}_c}\right)\left(1 - \frac{1}{1 + KC_2 A_1}\right)}{(T_0 + KC_1)\left(1 - \frac{1}{1 + KC_2}\right)}. \tag{33}$$

Această funcţie $\varphi$ este în general supraunitară (şi cu atît mai mult considerînd $Cp$ reali) acţiunea lui $\frac{T^{\star}_{m_e}}{\overline{Q}_c}$ fiind preponderentă faţă de aceea a lui $A_1$ după cum a rezultat şi din consideraţiile anterioare.

Deoarece $\overline{P}_m\,[\eta_m\,(C)]$ este o funcţie de $A_1$ deci de $\overline{p}^{\star}_{c_2}\left(\frac{1}{\delta^{\star}_{c_2}}\right)$ care la rîndul ei este o funcţie de prima, rezolvarea relaţiilor de mai sus se face prin aproximaţii succesive sau grafic.

Pentru fixarea ideilor în graficele din figura 3 s-au trasat variaţiile parametrilor caracteristici principali consideraţi mai sus pentru aceleaşi valori medii uzuale ale parametrilor caracteristici ai motocompresorilor folosiţi în combinaţia 0—0 pentru comparaţie.

Se vede că $\overline{P}_{ad}$ păstrează o valoare cvasi-constantă şi este cu circa 16,5% mai mare decît în combinaţia corespunzătoare 0—0.

*3.2.* În cazul răcirii forţate pe aspiraţie ($RF_a$) raţionamentul făcut în combinaţia precedentă (0—0) rămîne valabil cu observaţia că aportul căldurii de răcire este relativ redus faţă de aportul gazelor de evacuare, accentuat şi de scăderea relativă a lui $C_1$ ($C_2$), pe cînd efectul pierderilor hidrodinamice în circuitul de răcire şi conducta de aspiraţie este amplificat din aceleaşi motive.

Este de aşteptat deci ca acest din urmă efect să fie preponderent, rezultînd deci o scădere mai accentuată a lui $\overline{P}_{ad_3}$ decît în combinaţia 0—0, lucru ce se confirmă în exemplul trasat în graficele 0—2.

*3.3.* În cazul răcirii forţate pe refulare, aceste fenomene se reproduc cu acelaşi sens şi importanţă a amplificării relative din cauza aportului pe circuitul cald de refulare al compresorului.

*3.4.* Din graficele 0—2 trasate pentru această combinaţie în cele trei cazuri, pentru fixarea ideilor, rezultă într-adevăr o reducere a lui $\overline{P}_{ad}$

în cazul $RF_r$ pînă la valorile atinse în combinația 0—0, deci anulînd efectul amestecului cu gazele de evacuare și o îmbunătățire relativă în cazul $RF_a$ totuși sub nivelul atins în cazul $RL$ pentru această combinație, ceea ce pune în discuție utilizarea ventilatorului mecanic.

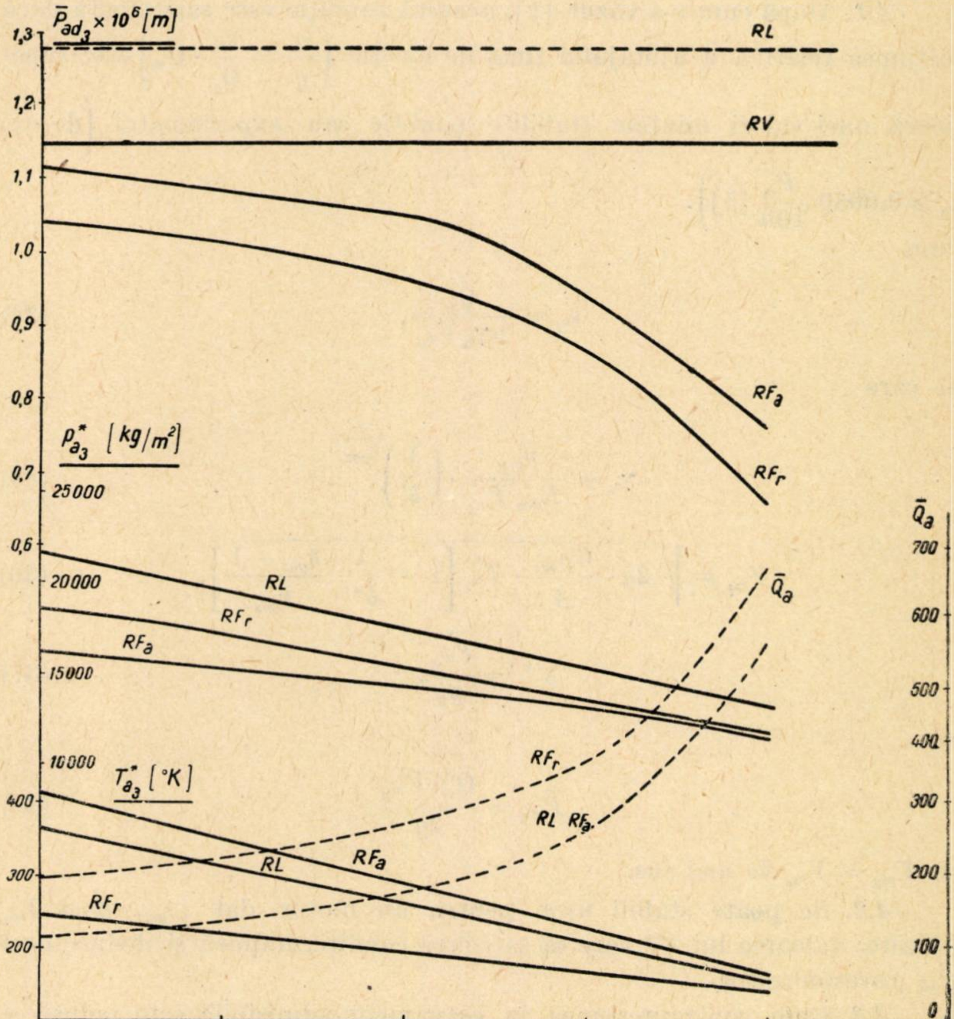


Fig. 3

*4.* În combinația notată cu 0—5 (0) toți parametrii considerați păstrează, aceeași valoare ca în considerația de referință (0—0) cu excepția lui $\overline{P}_{ad_3}$ care se majorează cu $\overline{P}_{ad_e}$ dacă contrapresiunea la eşapament este suficient de mică pentru a nu scădea în mod sensibil puterea motorului.

*4.1.* După cum s-a văzut [1], această condiţie este satisfăcută dacă secţiunea relativă a ajutajului final de ejecţie $\left(\frac{s_{e_5}}{q} = \frac{s_{e_5}}{Q_m} \cdot \overline{Q}_m\right)$ este superioară unei valori minime stabilite teoretic sau experimental $\left(\text{de ex.}\right.$ $\left. s_{e_5} \geqslant 0{,}0030 \, \frac{\overline{P}_m}{100} \, [5]\right)$.

Cum

$$\bar{s}_{e_5} = \frac{\overline{Q}_m}{\mu \gamma_{e_5} V_{e_{5_t}}}, \tag{34}$$

în care

$$\gamma_{e_5} = \frac{p_{m_E}}{R_{gaz} T_{m_e}} \cdot \left(\frac{1}{\delta'}\right)^{\frac{1}{k_{gaz}}}, \tag{35}$$

$$V_{e_{5_t}} = \sqrt{2g \cdot \frac{Cp_{gaz}}{A} \cdot T^{\star}_{m_e} \left[1 - \frac{1}{\delta^{\star\prime}} \; \frac{k_{gaz} - 1}{k_{gaz}}\right]}, \tag{36}$$

$$\delta'^{\star} = \frac{p^{\star}_{m_E}}{p_0}, \tag{37}$$

iar

$$\overline{P}_{ad_e} = \frac{\overline{Q}_m \cdot V^2_{m_d}}{2g} \tag{38}$$

cu $V_{m_d} = V_{e_{5_t}}$ de mai sus.

*4.2.* Se poate stabili uşor pentru un motor dat ($\eta_m$, deci $T^{\star}_{m_e}$ definite) valoarea lui $\delta'^{\star}$ care să satisfacă condiţia impusă şi deduce deci $\overline{P}_{ad_e}$ corespunzător.

*4.3.* Cum contrapresiunea la eşapament admisibilă este redusă şi $\overline{P}_{ad_e}$ este redus şi în orice caz reprezintă o cotă foarte redusă de energie disponibilă a gazelor de evacuare, deci din $\overline{P}_m$ respectiv $\overline{P}_{ad_3}$.

*4.4.* Pentru a ilustra acest lucru s-au trasat în graficul din figura 4 variaţiile lui $\bar{s}_{e_5}$ şi $\overline{P}_{ad_e}$ cu $\delta'^{\star}$ pentru aceleaşi caracteristici medii uzuale ale motoarelor ca şi anterior, de unde se vede că $\bar{s}_{e_5}$ trebuie să nu depăşească cifra de 0,5, $\delta'^{\star}$ nu trebuie să depăşească 1,020 ceea ce conduce la valori destul de insignifiante ale lui $\overline{P}_{ad_e}$ majorînd pe $\overline{P}_{ad}$ cu max. 1—2% ceea ce nu justifică complicaţia constructivă.

*4.5.* Avînd în vedere că $\overline{P}_{ad_e}$ crește rapid cu $\delta'^*$, s-a analizat măsura în care această creștere poate compensa scăderea lui $\overline{P}_{ad_3}$, cu contrapresiunea la eșapament.

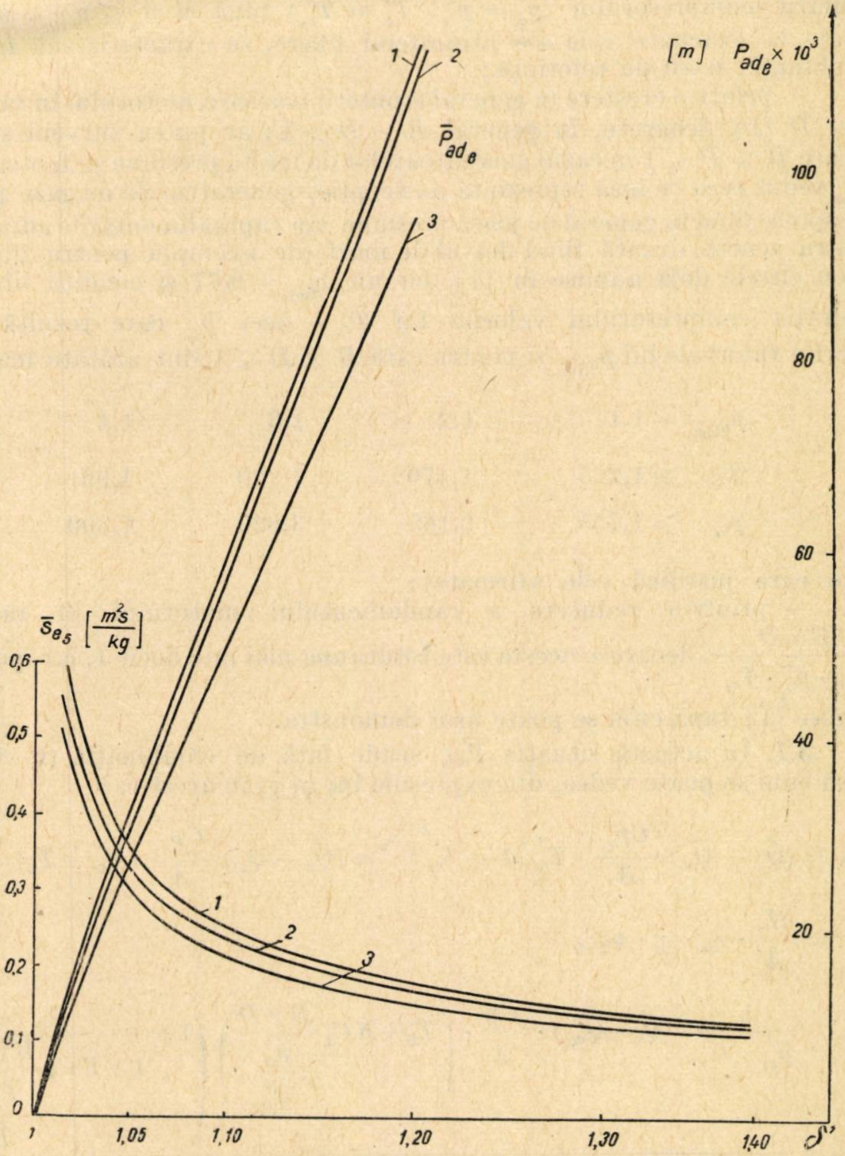


Fig. 4

*4.6.* Din curbele trasate în această combinație pe graficul 0—2 se vede că nu se pot obține performanțe ameliorate față de combinația 0—2 şi ţinînd seama şi de faptul că energia gazelor de evacuare se transformă mediocru în energie propulsivă [2] se poate trage concluzia că această combinaţie în general nu prezintă interes.

5. Combinaţia notată cu 2—0, adică condiţii la admisie cele ale refulării compresorului ($p_a^* = p_{c_2}^*$, $T_a^* = T_{c_2}^*$) pînă la $p_{c_2}^* \leqslant p_{a_{lim}}$, iar condiţiile la evacuare cele ale atmosferei libere, se caracterizează faţă de combinaţia 0—0 de referinţă;

— printr-o creştere în general a puterii masice a motorului în raportul $B \times D$ [1], deoarece, în general $B \times D > 1$; ar putea surveni situaţii în care $B \times D \leqslant 1$ în cazul generatoarelor de înaltă presiune şi motoare cu $p_{a_{lim}}$ redus ceea ce însă reprezintă o excepţie, generatoarele de gaze pentru elicoptere fiind în general de joasă presiune iar supraalimentările admisibile pentru scurtă durată fiind destul de mari (de exemplu pentru ilustrare şi cu cifrele deja admise în [1], cu un $\eta_{c_{ad}} = 0{,}77$ şi condiţii libere la aspiraţia compresorului valorile lui $\overline{T}_{c_2}$ — deci $\overline{p}_{c_2}$ care rezultă — la diferite valori ale lui $p_{a_{lim}}$ şi pentru care $B \times D \leqslant 1$ sînt arătate mai jos :

| $p_{a_{lim}}$ | $= 1{,}1$ | 1,2 | 1,3 | 1,4 |
|---|---|---|---|---|
| $\overline{T}_{c_2}$ | $\geqslant 1{,}225$ | 1,470 | 1,720 | 1,991 |
| $\overline{p}_{c_2}$ | $\geqslant 1{,}755$ | 2,165 | 3,020 | 7,300 |

cifre care justifică cele afirmate);

— printr-o reducere a randamentului motorului în raportul $\dfrac{B \times D}{\overline{\gamma}_{a_l} \cdot \overline{p}_{a_l}^* \cdot \overline{T}_{c_2}^*}$, deoarece acesta este totdeauna mai mic decît 1, iar ipotezele admise [1] după cum se poate uşor demonstra.

*5.1.* În această situaţie $\overline{P}_{ad_3}$ scade faţă de combinaţia (0—0) *RL* după cum se poate vedea, din expresiile lui φ[$\overline{\varphi}$] în acest caz

$$\overline{P}_{ad_3} = (\overline{Q}_c - \overline{Q}_m)\,\frac{Cp_{c_2}}{A} \cdot T_{c_2}^* \left(1 - \delta_{c_2}^{*\,\frac{k-1}{k}c_2}\right) = (\overline{Q}_c - \overline{Q}_m)\,\frac{Cp_{c_2}}{A}\,(T_{c_2}^* - T_0) = \tag{39}$$
$$= \frac{H_c}{A} \cdot \eta_m \cdot \eta_c \cdot \varphi_{2-0}$$

$$\varphi_{2-0} = \frac{\dfrac{1}{\overline{p}_{a_l}^* \cdot \overline{T}_{c_2}^*} \cdot (\overline{Q}_c - \overline{Q}_{a_m}) \cdot \dfrac{Cp}{A} \cdot \left(T_0 + KC_1 \dfrac{\dfrac{B \times D}{\overline{p}_{a_l}^*}}{\overline{T}_{c_2}^*}\right)\left(1 - \dfrac{1}{1 + KC_2 \dfrac{\dfrac{B \times D}{\overline{p}_{a_l}^*}}{\overline{T}_{c_2}}}\right)}{\overline{Q}_c\,\dfrac{Cp}{A}\,(T_0 + KC_1\,\eta_{c_{ad}})\left(1 - \dfrac{1}{1 + KC_2}\right)}, \tag{40}$$

cu

$$\overline{Q}_c = \frac{\overline{G}_{răc_{min}}}{K} = \frac{100\,\alpha\psi}{K},$$

$$\overline{Q}_{a_m} = \alpha\psi\, a_0,$$

$$\overline{\varphi} = \left(\frac{\varphi_{2-0}}{\varphi_{0-0}}\right)_{RL} = \frac{\left(1 - \dfrac{\overline{Q}_{a_m}}{\overline{Q}_c}\right)\left(T_0 + KC_1 \dfrac{\dfrac{B\times D}{\overline{p}^{\star}_{a_l}}}{\overline{T}^{\star}_{c_2}}\right)\left(1 - \dfrac{1}{1 + KC_2 \dfrac{\dfrac{B\times D}{\overline{p}^{\star}_{a_l}}}{\overline{T}^{\star}_{c_2}}}\right)}{\overline{p}^{\star}_{a_l}\cdot \overline{T}^{\star}_{c_2}\,(T_0 + KC_1)\left(1 - \dfrac{1}{1 + KC_2}\right)}, \quad (41)$$

cu valori uzual admise pentru parametri ce intră în joc deci cu atît mai mult față de combinația $0-2$ care după cum am văzut are $\overline{P}_{ad}$ în general mai mare ca în combinația $0-0$.

*5.2.* În consecință din punct de vedere al transformării energetice această combinație nu ar prezenta interes și acesta nu ar putea să existe decît în măsura în care se poate obține o sporire a puterii masice pentru utilizări de scurtă durată la regimurile de zbor la care se cere un excedent de putere (decolare, urcare, punct fix).

*5.3.* Cum $q$ față de combinațiile considerate precedent crește în raportul $\overline{\gamma}_{a_l}\cdot\overline{p}^{\star}_{a_l}\cdot\overline{T}^{\star}_{c_2} = \overline{p}^{\star 2}_{a_l}$, va exista o creștere a lui $P_{ad} = q\cdot\overline{P}_{ad}$ atît timp cît creșterea lui $q$ compensează scăderea lui $\overline{P}_{ad}$.

*5.4.* Atît din expresiile de mai sus cît și din expresia directă a lui $P_{ad_{2-0}}$ în funcție de $P_{ad_{0-0}}$.

$$P_{ad} = \varphi\cdot P_{c_{ad}} = Q_c\cdot H_{c_{ad}}\cdot \frac{1 + \dfrac{KC_1}{T_0}}{1 + \dfrac{KC_1}{T_0}\,\eta_{c_{ad}}} = P_m\cdot\eta_c\cdot\frac{1 + \dfrac{KC_1}{T_0}}{1 + \dfrac{KC_1}{T_0}\,\eta_{c_{ad}}}, \quad (42)$$

$$P_{ad_{2-0}} = P_m\cdot\eta_c\,(B\times D)\cdot\frac{1 + \dfrac{KC_1}{T_0}\cdot\dfrac{B\times D}{\overline{p}^{\star}_{a_l}/\overline{T}^{\star}_{c_2}}}{1 + \dfrac{KC_1}{T_0}\cdot\dfrac{B\times D}{\overline{p}^{\star}_{a_l}/\overline{T}^{\star}_{c_2}}\cdot\eta_{c_{ad}}}\cdot\left(1 - \frac{a_0}{100}\right), \quad (43)$$

$$P_{ad_{2-0}} = P_{ad_{0-0}}\cdot(B\times D)\left(1 - \frac{a_0}{100}\right)\frac{1 + \dfrac{KC_1}{T_0}\cdot\dfrac{B\times D}{\overline{p}^{\star}_{a_l}/\overline{T}^{\star}_{c_2}}}{1 + \dfrac{KC_1}{T_0}}\cdot$$

$$\cdot\frac{1 + \dfrac{KC_1}{T_0}\cdot\eta_{c_{ad}}}{1 + \dfrac{KC_1}{T_0}\cdot\dfrac{B\times D}{\overline{p}^{\star}_{a_l}/\overline{T}^{\star}_{c_2}}\cdot\eta_{c_{ad}}}, \quad (44)$$

se vede că această condiție este totdeauna satisfăcută la presiuni joase la care $\overline{p}^{*}_{c_2} \leqslant \overline{p}^{*}_{a_l}$ deci $\overline{p}^{*}_{a} = \overline{p}^{*}_{c_2}$, diferența atenuîndu-se la presiunile mai mari unde $\overline{p}^{*}_{c_2} \geqslant \overline{p}^{*}_{a_l}$ deci $\overline{p}^{*}_{a} = \overline{p}^{*}_{a_l} = Ct$ din cauza efectului negativ al creșterii lui $\overline{T}^{*}_{c_2}$ pînă la o valoare a lui $\overline{T}^{*}_{c_2}$, funcție de datele problemei la care $P_{ad_{2-0}} = P_{ad_{0-0}}$ după care supraalimentarea numai are sens.

*5.5.* Față de combinația 0—2 acest domeniu se restrînge spre presiunile joase, rămînînd încă totuși la presiuni joase un domeniu de superioritate din punct de vedere al puterii masice pentru combinația 2—0.

*5.6.* Se vede că există posibilitatea prin supraalimentare, chiar și în cazul răcirii forțate (singura utilizabilă la regimurile de zbor considerate), ca pentru anumite domenii de presiuni, funcție de datele problemei, să se amelioreze puterile masice cel puțin pînă la nivelul atins în combinația (0—2)*RL* cu ventilator mecanic cu prețul unui exces de consum, dar cu o complicație mecanică în minus, supraalimentarea în cazul în speță nenecesitînd instalații suplimentare ci numai o adaptare a motorului pentru funcționarea limitată în suprasarcină.

*5.7.* Pentru combinația notată cu 2—5 (0) sînt valabile considerațiile expuse anterior la 0—5 (0).

6. Combinația notată cu 2—2 care este o suprapunere a celor două combinații anterioare 0—2 și 2—0 (admisia și evacuarea în condițiile refulării compresorului cu rezerva că presiunea de admisia nu va putea depăși $p_{a_l}$), va prezenta caracteristici, deci performanțe, intermediare, ca urmare a faptului că (față de combinația de referință)

— puterea masică a motorului crește, în general, (în raportul $B \times C$ [1], care este în general mai mare ca 1) dar nu în aceeași măsură, la condiții egale, ca în combinația 2—0 (deci și domeniile definite de $\overline{p}^{*}_{c_2}$ și $\overline{T}^{*}_{c_2}$ în care $B \times C > 1$, sînt mai restrînse);

— randamentul motorului descrește $\left(\text{în raportul } \dfrac{B \times C}{\overline{\gamma}_{a_l} \cdot \overline{p}^{*}_{a_l} \overline{T}^{*}_{c_2}} < 1 \text{ [1]}\right)$ mai accentuat, la condiții egale, decît în combinațiile anterioare 2—0 și 0—2, randamentul adiabatic al generatorului de gaze ameliorîndu-se însă prin aportul adus de entalpia gazelor de evacuare, față de combinația 2—0 însă nu în aceeași măsură în care se întîmplă acest lucru în combinația 0—2.

— cum consumul de combustibil $q$ crește în raportul $\overline{\gamma}_{a_l} \cdot \overline{p}^{*}_{a_l} \cdot \overline{T}^{*}_{c_2}$ (în aceeași măsură, la condiții egale, ca în combinația 2—0), puterea adiabatică a generatorului de gaze, va fi superioară în general aceleia realizată în condițiile anterioare.

*6.1.* În utilizarea de vîrf este deci de reținut această combinație, ca o completare a combinației 0—2 de maximum de economicitate pentru utilizări de durată.

7. Combinațiile notate cu 2(0) folosesc supraalimentarea limitată la strictul necesar menținerii puterii de la sol a motorului și constituie cazuri particulare ale combinațiilor 2—0, 2—2 și 2—5 (0) în vederea utilizării în altitudine pentru ameliorarea performanțelor în urcare ale elicopterului (viteza ascensională și plafon).

8. Din cele de mai sus rezultă marea supleță de adaptare a generatorului de gaze motocompresor condițiilor impuse de antrenarea pneumatică a rotoarelor de elicopter şi aceasta cu un minimum de echipamente suplimentare, compresorul generatorului de gaze putînd suplini atît nevoile de răcire cît şi de supraalimentare. Alegerea soluției optime este de analizat în funcție de caracteristicile rotorului elicopterului şi performanțele sale de zbor impuse [4].

*Primită la redacție la 12 mai 1960*

## КРИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОТОКОМПРЕССОРНЫХ ГАЗОВЫХ ГЕНЕРАТОРОВ ДЛЯ ПНЕВМАТИЧЕСКОГО ПРИВОДА НЕСУЩЕГО ВИНТА ВЕРТОЛЕТА

### РЕЗЮМЕ

Исходя из соотношений и номограмм, установленных в одной из предыдущих работ (номограммы для мотокомпрессорных газовых генераторов, применяемых для пневматического привода несущих винтов), проводится аналитическое и графическое исследование изменения основных характеристических параметров мотокомпрессорных газовых генераторов (безразмерная адиабатическая мощность, соответственно адиабатический к.п.д., температура и давление у выхода) в зависимости, с одной стороны, от безразмерного расхода генератора и, с другой стороны, от функциональных характеристических параметров двигателя и компрессора в различных комбинациях, совместимых с работой на вертолете, с точки зрения охлаждения и условий при впуске и выпуске.

Результаты отнесены к основной комбинации (отсчета), причем выявляются качественно и количественно преимущества, которые имеют другие комбинации ввиду улучшения качества работы мотокомпрессорных газовых генераторов и, следовательно, качества работы в целом вертолета с пневматическим приводом.

## CRITICAL STUDY ON GAS GENERATORS WITH RECIPROCATING ENGINE DRIVEN COMPRESSORS FOR PRESSURE JET HELICOPTER ROTOR PROPULSION

### ABSTRACT

Proceeding from the relations and nomographs established in a previous paper (nomographs for calculating gas generators of reciprocating engine compressors used for pressure jet helicopter rotor propulsion),

this paper presents a graphical and analytical study on the variation of the main characteristic parameters of gas generators (the non-dimensional adiabatic power and the adiabatic efficiency respectively and exhaust pressure and temperature) function both of the non-dimensional gas flow of the generator and of the characteristic operating parameters of the engine and compressor for various combinations compatible with their operation on a helicopter as regards the cooling and the admission and exhaust conditions.

The results refer to the basic combination and emphasize qualitatively and quantitatively the advantages which could be obtained with other combinations in view of improving the gas generator performances and consequently the performances of the pneumatically driven helicopter.

## BIBLIOGRAFIE

1. ŞT. ANDREI, *Nomograme pentru calculul generatoarelor de gaze motocompresoare utilizate la antrenarea pneumatică a rotoarelor de elicopter*, Studii şi cercetări de mecanică aplicată, *4* (1957).
2. — *Antrenarea pneumatică a rotoarelor de elicopter în zborul la punct fix*, Studii şi cercetări de mecanică aplicată, *2* (1959).
3. B. H. ЮРЬЕВ, *Аэродинамический расчет вертолетов*. Оборонгиз, Москва, 1956.
4. ŞT. ANDREI şi GH. RADO, *Asupra alegerii parametrilor optimi de funcţionare a rotoarelor de elicopter acţionate pneumatic* (în curs de publicare).

# STUDII

## DINAMICA GAZELOR

# SCURGEREA SUBSONICĂ ÎN DIFUZOARE CONICE [1]

DE

V. KMONICEK [2]

Cunoașterea legilor, după care se conduce scurgerea subsonică în difuzoare conice, este importantă pe de o parte pentru că aceste difuzoare reprezintă un element aerodinamic însemnat, iar pe de alta, pentru că aceste legi pot fi aplicate ca îndreptar metodic și calitativ la determinarea altor numeroase cazuri de scurgere frînată.

Lucrarea de față prezintă o metodă de calcul care dă posibilitatea de a se stabili, cum se dezvoltă în difuzorul conic turbulența și repartiția atît a vitezei, cît și a presiunii statice într-o secțiune a curentului, adică într-o secțiune plană normală pe axă ; mai departe este dată posibilitatea de a se determina pierderea energetică a difuzorului pentru diferite forme geometrice și pentru diferite condiții de intrare. Această metodă este semiempirică, deoarece pleacă de la rezultate experimentale, cuprinzînd însă totodată, după posibilități, și caracterul fizic al fenomenului cercetat [3]).

Parametrii geometrici ai difuzorului conic sînt raza secțiunii de intrare $r_a$ (fig. 1), unghiul de deschidere $\delta$ și raportul razelor inițială și finală $\rho_e = \frac{r_e}{r_a}$. Poziția unei secțiuni oarecare a scurgerii care se află la distanța $x$ de intrare, va fi dată de mărimea

$$\rho = \frac{r}{r_a} = 1 + \frac{x}{r_a} \operatorname{tg} \delta.$$

---

[1]) Lucrare prezentată la Sesiunea științifică Jubiliară a Institutului de mecanică aplicată „Traian Vuia" al Academiei R.P.R., București, 4—7 iulie 1960.

[2]) Ustav pro vyzkum stroju, CSAV, Praga.

[3]) Deducerea metodei menționate împreună cu documentația folosită se găsește în lucrările autorului : *Teoretické a experimental ni objasneni jevu pri podzvukovem proudeni v kanalech kruhoveho prurezu.* (Zprava Ustavu pro vyzkum stroju CSAV, nr. 66/1958) și *Unterschallströmung in Kegeldiffusoren* (Acta Technica, nr. 5/1959).

Proprietățile profilului de viteze, adică repartiția vitezelor într-o secțiune a scurgerii, le vom exprima cu ajutorul mărimilor $\Phi$, $\beta$, $\nu$, definite prin următoarele relații (fig. 1):

$$\Phi = e\frac{2g}{C_m^2}; \quad \beta = \frac{C_m}{C_{max}}; \quad \nu = \frac{C_{0,95}}{C_m}. \qquad (1)$$

Aici am însemnat prin $e$ energia cinetică a scurgerii într-o secțiune, raportată la 1 kg al materiei care se scurge, prin $g$ accelerația gravității și prin $C_m$ viteza medie de scurgere corespunzătoare debitului. Mărimea $\Phi$ definește efectul energetic al repartiței nesimetrice de viteze, mărimea $\beta$ caracterul *plin* al profilului de viteze, iar mărimea $\nu$ gradientul de viteză în apropierea peretelui. Intensitatea turbulenței într-o secțiune a scurgerii va fi caracterizată prin valoarea ei medie conform debitului $T_m$. Scurgerea turbulentă dezvoltată într-o conductă cilindrică, de exemplu, este caracterizată prin valorile

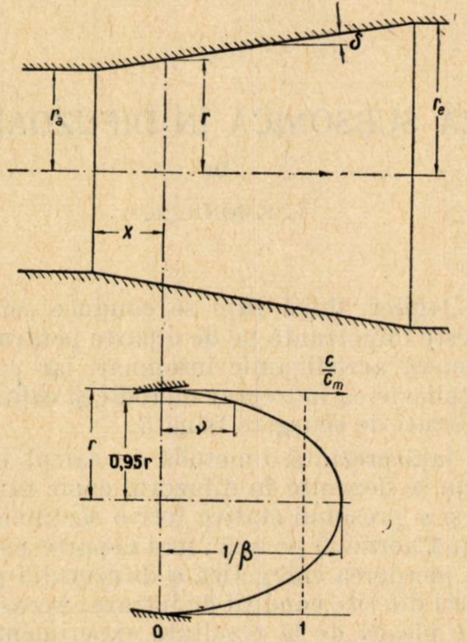


Fig. 1. — Schema unui difuzor conic și a unui profil adimensional de viteze.

$$\Phi = 1{,}09, \quad \beta = 0{,}83, \quad \nu = 0{,}85, \quad T_m = 3{,}5\% .$$

Dacă neglijăm rotația scurgerii la intrare, atunci condițiile de intrare în difuzor, în domeniul subsonic, vor fi determinate, în esență, prin forma profilului de viteze adică prin mărimile $\Phi_a$, $\beta_a$, $\nu_a$ de asemenea, prin intensitatea medie a turbulenței $T_{m_a}$ precum și prin numărul Reynolds

$\mathcal{R}e_a$, raportat la diametrul secțiunii de intrare și la viteza medie $C_{m_a}$ care domnește aici.

Pierderea totală de energie între secțiunea de intrare și o secțiune oarecare a scurgerii în difuzor este dată de relația

$$\zeta = 1 - \frac{\Delta p}{\gamma} \cdot \frac{2g}{\Phi_a C_{m_a}^2}; \tag{2}$$

aici $\Delta p$ reprezintă diferența presiunilor statice între secțiunile considerate; greutatea specifică $\gamma$ a materiei care se scurge o presupunem constantă pentru întregul difuzor.

Experiențele care formează punctul de plecare al lucrării de față au fost efectuate la un număr Mach la intrare de $\sim 0{,}15$ într-un difuzor cu parametrii geometrici $r_a = 26{,}5$ și 100 mm, $\delta = 2° \div 14°$, $\rho_e = 2$ și 4. Condițiile de intrare au fost variate în limitele $\mathcal{R}e_a = 160\,000 - 500\,000$, $\beta_a = 0{,}67 - 0{,}96$, $T_{m_a} = 1{,}1 - 15{,}5\%$.

Din rezultatele experimentale și considerațiile teoretice rezultă următoarele concluzii: presiunea statică $p$ este repartizată într-o secțiune oarecare a scurgerii prin difuzor după următoarea expresie, dedusă teoretic:

$$p = \bar{p} + 2\left(1 - \zeta + \frac{\Phi}{\Phi_a}\frac{1}{\rho^4}\right)\frac{\Phi}{\rho^4}\frac{\mathrm{tg}^2\delta}{\cos^4\delta}\frac{C_{m_a}^2}{2g}\gamma\left[1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2\right], \tag{3}$$

unde $\bar{p}$ reprezintă presiunea statică la perete. Această ecuație exprima faptul că suprafețele echipotențiale din difuzor, chiar și în cazul scurgerii unui mediu vîscos, sînt sfere cu centrul în vîrful conului.

Intensitatea medie a turbulenței variază în difuzor după relația empirică

$$T_m = 3{,}5\ \rho^2\left[1 + \left(\frac{T_{m_a}}{3{,}5} - 1\right)\exp\left(-0{,}1\frac{\rho - 1}{\mathrm{tg}\ \delta}\right)\right]\%, \tag{4}$$

care rămîne valabilă și pentru o conductă cilindrică (cazul limită al difuzorului pentru $\delta = 0$; $\rho = 1$). Acesta exprimă faptul că, în cazul unei viteze de scurgere constante într-un canal de secțiune circulară, intensitatea medie a turbulenței, independent de condițiile de intrare, tinde către valoarea limită 3,5 % o dată cu creșterea distanței față de intrare.

Mărimile $\Phi$, $\beta$, $\nu$ care caracterizează profilul de viteză, sînt corelate într-un mod vizibil în figurile 2 și 3. Dezvoltarea profilului de viteză în difuzor poate fi descrisă, de aceea, prin variația uneia singure dintre mărimile menționate. Profilul de viteză este axialsimetric în difuzor, cînd $\beta > 0{,}4$. O scurgere cu întoarcere la pereți are loc la $\nu \leqslant 0$. Pe baza valorilor date $\Phi$, $\beta$, $\nu$ se poate construi profilul de viteză cu o acuratețå suficientă.

Valoarea mărimii $\Phi$ este dată la scurgerea printr-un difuzor de relația semiempirică

$$\Phi = \Phi' - (\Phi' - 1) \exp\left(-\frac{2\,000}{\rho^4\,\Omega}\right), \tag{5}$$

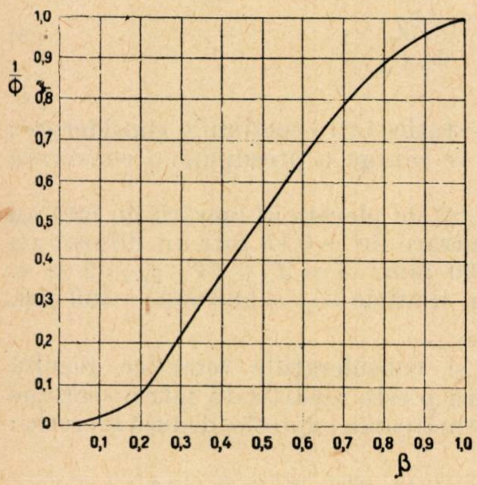


Fig. 2. — Dependența mărimilor caracteristice $\Phi$ și $\beta$.

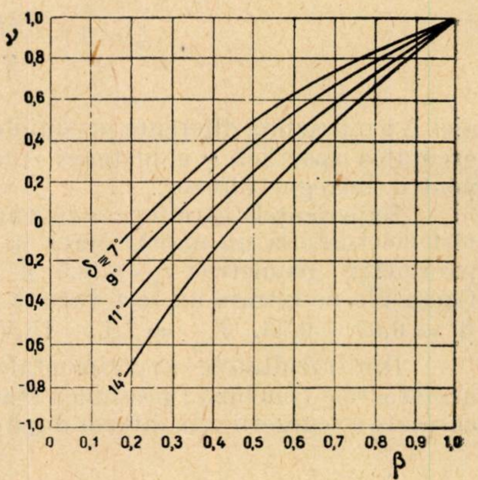


Fig. 3. — Dependența mărimilor caracteristice $\nu$ și $\beta$.

unde valoarea $\Omega$ care caracterizează energia mișcării turbulente este dată de următoarea ecuație :

$$\Omega = \frac{1}{\operatorname{tg}\,\delta}\left[\frac{1}{2}(\rho^2 - 1) + \left(\frac{T_{m_a}}{3{,}5} - 1\right) I_1 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{T_{m_a}}{3{,}5} - 1\right)^2 I_2 + \left(\frac{T_{m_a}}{3{,}5} - 1\right)^3 I_3\right]. \tag{6}$$

Factorii $I_1$ pînă la $I_3$ au fost tabelați pentru ușurarea calculului. Relația (5) exprimă faptul că mișcările turbulente la scurgerea printr-un difuzor arată tendința de a egaliza profilul de viteză.

Valorile $\Phi'$, care ar rezulta în difuzor, dacă nu ar fi turbulență, depind de condițiile de intrare și de următoarea mărime

$$\beta_k = 0{,}703 + 0{,}0255 \log \mathcal{R}_{e_a}. \tag{7}$$

Cu o exactitate suficientă o determinăm în modul următor :

Dacă $\beta_a \leqslant \beta_k$ atunci apare în partea de început a difuzorului un fenomen de intrare, prin care stratul limită umple încetul cu încetul întreaga secțiune transversală. Stratul limită, în cele mai multe cazuri, este deja turbulent la intrarea în difuzor și valoarea $\rho_k$, la care se termină fenomenul de intrare, rezultă atunci din determinarea evoluției ei, în forma

$$\rho_k = 1 + \left\{ \sqrt{\left( \frac{0{,}033}{\operatorname{tg} \delta^{4/5} \mathcal{R}e_a^{1/5}} \right)^2 + \left( \beta_a - \beta_k \frac{1 + \cos \delta}{2 \cos^2 \delta} \right) \left[ 4{,}57 - 1{,}92 \left( \beta_a + \beta_k \frac{1 + \cos \delta}{2 \cos^2 \delta} \right) \right]} - \frac{0{,}033}{\operatorname{tg} \delta^{4/5} \mathcal{R}e_a^{1/5}} \right\}^{4/3}. \qquad (8)$$

Ecuația (8) exprimă faptul că fenomenul de intrare în difuzor este terminat în acea secțiune în care profilul de viteză are proprietățile unui profil de viteză dintr-o scurgere turbulentă complet dezvoltată într-un tub cilindric. De asemenea, au fost deduse relații pentru cazul în care stratul limită la intrarea în difuzor este laminar. Soluțiile date aici rămîn valabile și pentru un tub cilindric.

Pentru $\rho \leqslant \rho_k$ determinăm mărimea valorii $\Phi'$ din figura 2 în legătură cu valoarea $\beta = \beta'$; mărimea $\beta'$ rezultă pentru stratul limită turbulent din relația (9)

$$\beta' = \frac{2 \cos^2 \delta}{1 + \cos \delta} \left[ 1{,}19 - \sqrt{1{,}415 - 2{,}38\, \beta_a + \beta_a^2 + 0{,}521\, (\rho - 1)^{3/2} + \frac{0{,}033\, (\rho - 1)^{3/4}}{\operatorname{tg} \delta^{4/5} \mathcal{R}e_a^{1/5}}} \right]. \qquad (9)$$

Pentru $\rho > \rho_k$ determinăm mărimea lui $\Phi'$ din diagrama construită experimental din figura 4; pentru valoarea $\rho^\star$ punem aici $\rho^\star = \frac{\rho}{\rho_k}$. Dacă $\beta_a > \beta_k$, stratul limită umple deja de la intrare întreaga secțiune transversală a difuzorului. Determinăm valorile $\Phi'$ din figura 4, punînd pentru $\rho^\star$ relația $\rho^\star = \rho \cdot \rho_n$. Mărimea $\rho_n$ rezultă din aceeași figură ca abscisă corespunzătoare ordonatei $\Phi' = \Phi_a$.

Pierderea totală de energie într-o secțiune de scurgere a difuzorului este dată de următoarea ecuație semiempirică :

$$\zeta = \zeta_v + \zeta_t + \Delta \zeta_k + \zeta_p = \frac{\Phi}{\Phi_a} \frac{1}{\rho^4} + \frac{0{,}0421}{\Phi_a \operatorname{tg} \delta \, \mathcal{R}e_a^{1/4}} \left( 1 - \frac{1}{\rho^{3{,}75}} \right) + \frac{5{,}10^{-4}}{\Phi_a \operatorname{tg} \delta} \left[ \left( \frac{T_{ma}}{3{,}5} - 1 \right) I_1 + \left( \frac{T_{ma}}{3{,}5} - 1 \right)^2 I_2 + \left( \frac{T_{ma}}{3{,}5} - 1 \right)^3 I_3 \right] + \zeta_p . \qquad (10)$$

Aici $\zeta_v$ reprezintă pierderea la ieșire, $\zeta_t$ pierderea de frecare, $\Delta \zeta_k$ pierderea prin amestecul turbulent și $\zeta_p$ pierderea de curent. Pierderea $\zeta_t$ rezultă din relațiile pentru tensiunea de frecare la perete la o scurgere complet dezvoltată, pierderea $\Delta \zeta_k$ cuprinde numai acea parte a energiei disipate a mișcării turbulente, care nu este inclusă în pierderea de frecare ; factorii $I_1$ pînă la $I_3$ sînt determinați de ecuația (6). Pierderea $\zeta_p$ care reprezintă influența pulsațiilor macroscopice și a scurgerii de întoarcere în difuzor, rezultă din diagrama determinată experimental din figura 5. Ea depinde mai ales de $\nu_{min}$, adică de valoarea minimă a numărului $\nu$, care apare în difuzor. Acesta exprimă faptul că perturbațiile curentului o dată apărute, influențează întregul spațiu al difuzorului. Pentru determinarea pierderii $\zeta_v$ și $\zeta_p$ este necesar să se urmărească dezvoltarea profilului de viteze în difuzor; relația (10) indică felul în care această dezvoltare depinde mecanismul formării pierderilor.

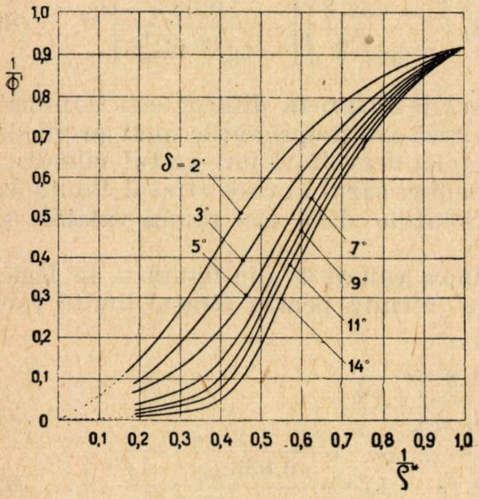


Fig. 4. — Coeficientul energetic fără influența turbulenței.

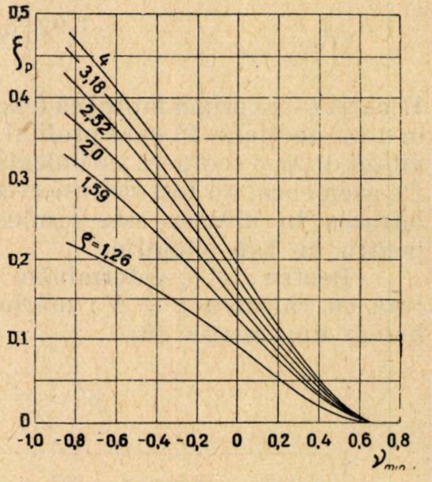


Fig. 5. — Valorile pierderilor relative în difuzor.

Printr-o analiză a rezultatelor proprii și obținute din documentație, s-a stabilit că metoda de calcul descrisă este valabilă într-un domeniu larg al parametrilor geometrici ai difuzoarelor și al condițiilor lor aerodinamice de intrare, cu excepția rotației și că exactitatea ei este suficientă pentru aplicații în tehnică.

## ДОЗВУКОВОЕ ТЕЧЕНИЕ В КОНИЧЕСКИХ ДИФФУЗОРАХ

### РЕЗЮМЕ

Представляется метод, позволяющий проследить интенсивность турбулентности и развитие профилей скоростей в конических диффузорах, а также определить полные потери энергии. Метод основывается на результатах, полученных путем измерений и на теоретическом анализе последних и справедлив для широкой области геометрических параметров и условий входа в диффузор, с достаточной точностью для технических применений.

## ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Схема конического диффузора и безразмерного профиля скоростей.
Рис. 2. — Зависимость характеристических величин Ф и β.
Рис. 3. — Зависимость характеристических величин ν и β.
Рис. 4. — Энергетический коэффициент без влияния турбулентности.
Рис. 5. — Значения относительных потерь в диффузоре.

# UNTERSCHALLSTRÖMUNG IN KEGELDIFFUSOREN

## ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit berichtet über eine Methode, welche es ermöglicht, die Intensität der Turbulenz und die Entwicklung der Geschwindigkeitsprofile in Kegeldiffusoren zu verfolgen und auch die gesamten Energieverluste zu bestimmen. Die Methode ergibt sich aus den Meßresultaten und aus deren theoretischer Analyse und gilt für einen weiten Bereich der geometrischen Parameter und der Eintrittsbedingungen des Diffusors mit einer für technische Anwendungen hinreichenden Genauigkeit.

## ERKLÄRUNG DER BILDER

Bild. 1. — Schema eines Kegeldiffusors und eines dimensionslosen Geschwindigkeitsprofils.
Bild. 2. — Abhängigkeit der charakteristischen Zahlen Φ und β.
Bild. 3. — Abhängigkeit der charakteristichen Zahlen ν und β.
Bild. 4. — Energetischer Koeffizient ohne Einfluß der Turbulenz.
Bild. 5. — Größe der relativen Strömungsverluste im Diffusor.

## BIBLIOGRAFIE

1. ANDERS K., *Versuche über Umsetzung von Wassergeschwindigkeit in Druck.* Forschungsarbeiten VDI, *76* (1909).
2. BOND W. N., *Viscous Flow through wide Angle Cones.* Phil. Mag. **6**, *50* (1925).
3. BURI A., *Eine Berechnungsgrundlage für turbulente Grenzschicht bei beschleunigter und verzögerter Strömung.* Disertion ETH, Zürich, 1931.
4. DEAN W. R., *Note on the divergent Flow of Fluids.* Phil. Mag., 18 (1934).
5. DEMONTIS M. J., *Sur l'écoulement de l'air dans un diffuseur.* Journées Scientifiques et Techniques de Mécanique des Fluides, *2,* (1935).
6. DÖNCH F., *Divergente und konvergente turbulente Strömungen mit kleinen Öffnungswinkeln.* Forschungsarbeiten VDI, 292 (1926).
7. GOURZHIENKO G. A., *The Turbulent Flow in Diffusers of small Divergence Angle.* Report of the CAGI, 462 (1939).
8. ГРИШАНИН К. В., *Установившееся турбулентное движение жидкости в коническом диффузоре с малым углом раскрытия.* Труды Инсводтранспорт, 22 (1955).
9. GRUSCHWITZ E., *Die turbulente Reibungs-Schicht in ebener Strömung mit Druckabfall und Druckanstieg.* Ingenieur-Archiv. *2* (1931).

10. HOCHSCHILD H., *Versuche über Strömungsvorgänge in erweiterten und verengten Kanälen.* Forschungsarbeiten VDI, 114 (1910).
11. KEHL A., *Untersuchungen über konvergente und divergente turbulente Reibungsschichten.* Ingenieur-Archiv, *12* (1943).
12. KMONICEK V., *Unterschallströmung in Kegeldiffusoren.* Acta technica, *5* (1959).
13. KÖRNER R., *Versuche über Strömungen in stark erweiterten Kanälen.* Forschungsarbeiten VDI, 222 (1920).
14. LIEPE F., *Experimentelle Untersuchungen über den Einfluss des Dralles auf die Strömung in schlanken Kegeldiffusoren.* Diplomarbeit, Technische Hochschule, Dresden 1956.
15. NAUMANN K., *Wirkungsgrad von Diffusoren bei hohen Unterschallgeschwindigkeiten.* ZWB, 1705 (1944).
16. NIKURADSE J., *Untersuchungen über die Strömung des Wassers in konvergenten und divergenten Kanälen.* Forschungsarbeiten VDI, 289 (1926).
17. PATTERSON G. N., *Modern Diffuser Design.* Aircraft Engineering, *9* (1938).
18. PETERS H., *Energieumsetzung in Querschnittserweiterungen bei verschiedenen Zulaufbedingungen.* Ingenieur Archiv, *2* (1931).
19. POLZIN J., *Strömungsuntersuchungen an einem ebenen Diffusor.* Ingenieur-Archiv, *11* (1940).
20. RIFFART A., *Über Versusche mit Verdichtungsdüsen (Diffusoren).* Forschungsarbeiten VDI, 257 (1928).
21. RIPPL E., *Experimentelle Untersuchungen über Wirkungsgrade und Abreissverhalten von schlanken Kegeldiffusoren.* Maschinenbautechnik, *5* (1956).
22. ROSENBROCK G., *Instabilität der Gleitschicht im schwach divergenten Kanal.* ZAMM, *17* (1937).
23. SCHULTZ W., GRUNOW F., *Zur Berechnung der turbulenten Ablösung.* ZAMM, *18* (1938).
24. СОЛОДКИН Е. Е., ДЖИНЕВСКИЙ А. С., *Турбулентное течение вязкой жидкости в начальных участках осесимметричных и плоских каналов.* Труды КАГИ, 701, Оборонгиз, Москва, 1957.
25. SQUIRE B. H., *Experiments on Conical Diffusers.* Reports and Memoranda, 2751 (1950).
26. SÝKORA K., *Energetické ztráty v difusorech.* Dissertation T.H., Prag. , 1948.
27. TRUCKENBRODT E., *Ein Quadraturverfahren zur Berechnung laminarer und turbulenter Reibungsschicht bei ebener und rotations-symmetrischer Strömung.* Ingenieur-Archiv, *29* (1952).
28. WEDERNIKOFF A. N., *Movement of air in a flat divergent channel.* Trans. of the CAGI, *21* (1926).
29. WEDERNIKOFF A. N., *Air flow in a slightly divergent channel.* ZAMM, *7* (1937).

# STUDII

## DINAMICA GAZELOR

# CURGEREA TRANZITORIE A GAZELOR ÎN CONDUCTE MAGISTRALE

DE

H. PASCAL

Pentru soluționarea multor probleme care se pun în transportul gazelor în condiții optime, prin conducte magistrale, apare necesitatea studierii regimurilor tranzitorii de curgere, de exemplu : determinarea timpului de restabilire a presiunii dinamice în punctul terminus al conductei, după închiderea ventilului, prezintă o importanță practică deosebită în problemele de automatizare ale transportului fluidelor.

Pe de altă parte, studierea regimurilor tranzitorii permite elaborarea unor metode practice și comode pentru determinarea caracteristicilor hidrodinamice, prin calcule relativ simple, ale conductei și proprietăților fizice ale fluidelor transportate. Astfel, vom menționa determinarea valorii reale a coeficientului de frecare, care în curgerea turbulentă depinde, în afară de cifra Reynolds, de rugozitatea efectivă a conductei. În practică, această determinare este foarte dificilă, întrucît rugozitatea conductelor se modifică în timp, datorită acțiunii de coroziune și abraziune a fluidelor transportate.

În afară de cele expuse mai sus, pentru stabilirea parametrilor hidrodinamici, care asigură transportul fluidelor în condiții optime, din punct de vedere energetic, în calculele hidrodinamice se introduc valorile proprietăților fizice determinate pe baza analizelor probelor extrem de mici, efectuate în laborator. Din acest motiv, proprietățile fizice astfel obținute, nu reflectă, bineînțeles, în cazul cînd se transportă amestecuri de gaze a căror proprietăți pot varia într-o gamă foarte largă, valorile reale. Cu ajutorul metodelor bazate pe prelucrarea matematică a datelor rezultate din măsurătorile înregistrate în conducte, la curgerea tranzitorie, permit să stabilim valorile reale medii ale acestor proprietăți care se referă la toată lungimea, respectiv la întregul volum al conductei.

În lucrarea de față vom examina problema creșterii presiunii dinamice într-o conductă magistrală de gaze, după oprirea afluxului în punctul terminus al acesteia.

Dacă ne referim la cazul curgerii turbulente și admitem pentru viteză o valoare medie pe secțiune, atunci curgerea nestaționară, făcînd abstracție de termenul inerțial $v\dfrac{\partial v}{\partial x}$, care are o valoare în general neglijabilă, este descrisă de sistemul de ecuații

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\lambda v^2}{2d}\right); \; -\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial (\rho v)}{\partial x}, \tag{1}$$

unde : $p$ — presiunea, $v$ — viteza medie pe secțiune, $d$ — diametrul conductei și $\lambda$ — coeficientul de frecare hidraulic.

După cum s-a arătat în lucrarea [1], pentru conducte magistrale, unde lungimile acestora sînt de ordinul sutelor de km, influența termenului $\dfrac{\partial v}{\partial t}$, asupra curgerii, este de asemenea practic neînsemnată.

Integrarea sistemului (1), datorită neliniarității ecuațiilor, este imposibil de efectuat prin metodele cunoscute. Din această cauză, pentru obținerea unor rezultate aplicabile, apare necesar să recurgem la o soluționare aproximativă a problemei. În acest scop, pentru liniarizarea sistemului (1), vom adopta, deocamdată, procedeul utilizat în lucrarea [2], care constă în presupunerea că într-un interval de variație al presiunii, convenabil ales, ecuația de stare a gazelor reale poate fi înlocuită printr-o funcție exponențială, iar termenul pătratic, datorită frecării, se consideră printr-o valoare medie ponderată, sub forma $\left(\dfrac{\lambda \rho v}{2d}\right)_{\text{med}} v$.

Pentru căderi mici de presiune aproximațiile utilizate nu introduc erori mari.

Într-adevăr, dacă notăm cu $p_k$ valoarea presiunii în punctul inițial al conductei, ecuația de stare va fi

$$\rho = b\,[p_k - (p_k - p)] = b p_k \left(1 - \frac{p_k - p}{p_k}\right),$$

iar pentru situația cînd în punctul final presiunea nu diferă mult de cea din punctul inițial se remarcă că putem scrie, cu aproximație satisfăcătoare,

$$\rho = b p_k e^{-\frac{p_k - p}{p_k}}. \tag{2'}$$

Exprimînd ecuația de stare printr-o funcție exponențială, sub forma propusă în lucrarea [2], lărgim domeniul de aplicabilitate a relației (2′) în intervale mai largi de variație a presiunii.

În cazul căderilor mari de presiune, cum sînt cele întîlnite frecvent la curgerea gazelor în conducte cu diametre mici și la debite mari, erorile pot fi substanțial ameliorate, aplicînd ecuațiile de curgere, care vor fi redate mai jos, pe tronsoane și folosind condițiile continuității presiunii și debitului la trecerea de la o lungime la alta.

În conformitate cu rezultatele obținute în lucrarea [2], putem scrie, pentru condițiile arătate mai sus, următoarele ecuații :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = k^{-1} \frac{\partial H}{\partial t}; \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = k^{-1} \frac{\partial Q}{\partial t}, \tag{2}$$

unde constanta $k$ are valoarea $k = \frac{\pi^2 d^3 g}{2\lambda\, \alpha\, Q_{\text{med}}}$, $Q_{\text{med}}$ fiind debitul gravimetric mediu, iar funcția $H(p) = \int_{p_0}^{p} \rho dp$, definită în intervalul $p_0 < p < p_k$, se exprimă, în ipoteza evoluției izotermice, prin relația [3]

$$H(p) = \frac{\beta}{\alpha} \cdot (e^{\alpha p} - e^{\alpha p_0}), \tag{3}$$

$\beta$ și $\alpha$ avînd valorile

$$\alpha = \frac{\log \frac{p_k}{p_0}}{p_k - p_0}; \quad \beta = \frac{(p_k + p_0) \log \frac{p_k}{p_0}}{2g RTz(e^{\alpha p_k} - e^{\alpha p_0})}, \tag{4}$$

$p_k$ și $p_0$ fiind limitele de variație ale presiunii, respectiv valorile din punctul inițial și terminus al conductei și $T$ — temperatura medie.

Dacă considerăm cazul curgerii laminare, atunci evident coeficientul $k$ va avea o valoare independentă de debit și egală cu $k = \frac{d^2}{32\,\mu\alpha}$, $\mu$ fiind viscozitatea gazului. De asemenea, pentru curgerea turbulentă, în domeniul valabilității legii pătratice, coeficientul $k$ este dependent numai de rugozitate și independent de cifra Reynolds.

În cele ce urmează vom examina situația unei conducte, magistrale alimentată dintr-un zăcămînt de gaze, cînd în punctul inițial presiunea, după oprirea afluxului din punctul terminus, presupunînd închiderea instantanee a ventilului, rămîne constantă. În ceea ce privește condiția inițială, admitem că curgerea pînă în momentul închiderii era staționară.

În felul acesta, am presupus că în punctul inițial gazele curg la un debit maxim, corespunzător diferenței de presiune dintre acest punct și cel terminal al conductei, a cărei valoare este egală cu debitul din punctul terminus al conductei în momentul închiderii și tinde către zero după ce presiunea din acest punct devine egală cu cea din punctul inițial. Situația menționată mai sus, reprezintă, bineînțeles, un caz limită, întrucît în realitate, condițiile existente în punctul inițial pot varia de la cazul presiunii constante, pînă la cazul cînd prin acest punct debitul este nul ; situația unei conducte închisă la un capăt, după alimentare, și deschisă sau închisă brusc la celălalt capăt.

Ținînd seama de aceste considerații, problema se reduce acum la soluționarea unei ecuații parabolice cu următoarele condiții la limită și inițiale

$$t > 0 \quad \begin{array}{ll} x = 0 & \dfrac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ x = l & H(l,t) = H_k \end{array} \qquad \begin{array}{l} t = 0 \\ H(0,x) = \dfrac{H_k - H_0}{l}\, x + H_0 \end{array} \tag{5}$$

Cu observația că pentru $t$ infinit trebuie ca presiunea să fie finită și introducînd mărimile adimensionale

$$\overline{H} = \frac{H - H_0}{H_k - H_0}\,; \quad \bar{x} = \frac{x}{l}\,; \quad \bar{t} = \frac{kt}{l^2}\,,$$

putem scrie soluția ecuației (2), ca o combinație de soluții particulare cunoscute, sub forma

$$\overline{H}(\bar{x}, \bar{t}) = a_0 + a_1 \bar{x} + \sum_{n=0}^{n=\infty} (a_n \cos n\,\alpha\,\bar{x} + b_n \sin n\,\alpha\,\bar{x})\, e^{-n^2\alpha^2\bar{t}}\,, \tag{6}$$

unde valorile coeficienților se deduc din condițiile (5), care în mărimi adimensionale devin

$$\bar{t} = 0\,;\; \overline{H} = \bar{x}\,;\; \bar{t} > 0 \begin{cases} \bar{x} = 0 & \dfrac{\partial \overline{H}}{\partial \bar{x}} = 0, \\ \bar{x} = 1 & \overline{H} = 1. \end{cases} \tag{7}$$

După cîteva calcule simple vom obține

$$1 = a_0 + \sum_0^\infty a_n \cos n\,\alpha\, e^{-n^2\alpha^2\bar{t}}\,; \quad \bar{x} = a_0 + \sum_0^\infty a_n \cos n\,\alpha\,\bar{x}, \tag{8}$$

Prima ecuație se verifică pentru $\cos n\,\alpha = 0$, sau $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, $n$ fiind impar și $a_0 = 1$, iar a doua devine

$$\bar{x} - 1 = \sum_0^\infty a_n \cos n\,\alpha\,\bar{x}. \tag{9}$$

Așadar, ecuația finală va fi

$$\overline{H}(\bar{x}, \bar{t}) = 1 + \sum_{a=0}^{a=\infty} a_n \cos n\,\alpha\,\bar{x}\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{4}\bar{t}}\,, \tag{10}$$

unde valoarea coeficientului $a_n$ se determină dezvoltînd în serie Fourier funcția $f(\bar{x}) = \bar{x} - 1$. Pentru aceasta să remarcăm mai întîi, introducînd variabila $y = \frac{\pi}{2}\bar{x}$, cînd $\bar{x}$ variază de la 0 la 1, funcția $f(y)$ variază de la $-1$ la 0 și deci funcția $f(y)$ nu este definită în intervalul de la $\frac{\pi}{2}$ la $\pi$. Prin urmare, trebuie să efectuăm completarea dezvoltării pentru intervalul $\frac{\pi}{2}$ la $\pi$. Dacă prelungim funcția $f(y)$ în acest interval printr-o formă liniară nedefinită, $f(y) = Ay + B$, atunci după cîteva transformări simple rezultă $a_n = \frac{4}{\pi^2 n^2}(\cos n\pi - 1)$. Întrucît pentru $n = 2m$ avem $a_n = 0$, va trebui să luăm, pentru a obține o valoare diferită de zero, $n = 2m + 1$. Deci $a_{2m+1}$ va fi

$$a_{2m+1} = \frac{8}{\pi^2(2m+1)^2}.$$

Putem scrie, ținînd seama de relația (3),

$$\frac{e^{\alpha p} - e^{\alpha p_0}}{e^{\alpha p_k} - e^{\alpha p_0}} = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{2}(2m+1)\frac{x}{l}}{2m+1)^2}\, e^{-\frac{(2m+1)^2}{4l^2}\pi^2 kt}, \tag{11}$$

sau dacă exprimăm diferența de presiune $(p_k - p_0)$ în funcție de valoarea debitului gravimetric, înainte de închidere, presupunînd $Q = Q_{med}$, avem

$$Q = \frac{g^2 d^5 \pi^2}{8\lambda} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{g^2 d^5 \pi^2}{8\lambda\alpha l}\beta\left(e^{\alpha p_k} - e^{\alpha p_0}\right), \tag{12}$$

iar pentru creșterea presiunii în punctul terminus, unde s-a considerat originea axei, rezultă următoarea ecuație

$$e^{\alpha p_k} - e^{\alpha p} = \frac{64\, Q^2 \lambda\, \alpha\, l}{\pi^2 d^5 g^2 \beta}\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{e^{-(2m+1)^2\frac{\pi^2 kt}{4l^2}}}{(2m+1)^2}. \tag{13}$$

Este ușor de observat, dacă ținem seama de relația

$$\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{2}(2m+1)\frac{x}{l}}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\left(1 - \frac{x}{l}\right),$$

cînd $t = 0$, condiția inițială este satisfăcută de ecuația (11).

Deoarece pentru calculele numerice, în majoritatea situațiilor, este suficient să considerăm, cu o bună aproximație, numai primul termen, atunci se observă ușor că ecuația (12) reprezintă într-o diagramă semilogaritmică o dreaptă, avînd panta $i = \frac{\pi^2}{4}\frac{k}{l^2}$ și intersecția cu axa log $(e^{\alpha p_k} - e^{\alpha p})$,

$$A = \log \frac{64\, Q^2\, \lambda l\, \alpha}{\pi^4\, d^5\, g^2\, \beta}\,.$$

Prin urmare, înregistrînd grafic, cu un manometru diferențial sensibil, variația presiunii în timp, în punctul terminus, după închiderea ventilului, vom putea determina, cu ajutorul relațiilor de mai sus, valorile reale ale coeficienților λ și α sau β.

Trebuie să menționăm, în mod special, că utilizarea metodei propuse poate permite punerea în evidență a existenței unei zone de rugozitate diferită pe ultima porțiune a conductei, comparativ cu restul acesteia, în ipoteza valabilității regimului pătratic de curgere, întrucît coeficientul de frecare obținut se referă la toată lungimea conductei, fără a include și această zonă. Acest lucru trebuie să fie atribuit faptului că eliminarea influenței zonei menționate asupra creșterii presiunii în timp, care se manifestă printr-o abatere de la variația liniară, într-o diagramă semilogaritmică, se realizează printr-o prelucrare a datelor rezultate din măsurători, utilizînd porțiunea rectilinie a curbei, care se restabilește după un anumit interval de timp, de la oprirea afluxului.

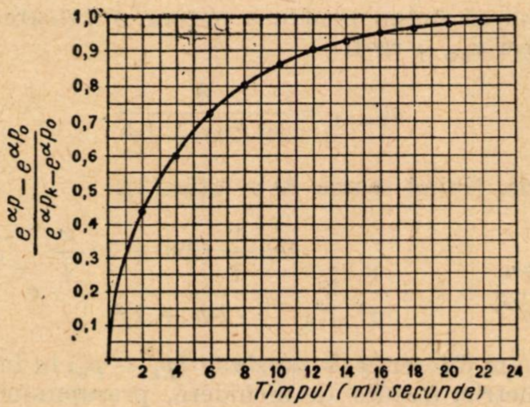


Fig. 1

După cum se știe, valoarea coeficientului de frecare hidrodinamic stabilit prin utilizarea ecuației de curgere staționară reprezintă valoarea efectivă medie pe toată lungimea conductei, incluzînd și zona de rugozitate diferită de pe ultima porțiune. Prin urmare, comparînd valorile calculate prin cele două metode vom avea posibilitatea acum să obținem informații prețioase, pentru practica exploatării conductelor magistrale, asupra stării acestora din punct de vedere al rezistenței la curgere.

În diagrama din figura 1 s-a reprezentat creșterea presiunii în timp pentru o conductă magistrală avînd următoarele caracteristici [4] :
$d = 0{,}5$ m, $Q = 30$ kg/s, $\lambda = 0{,}012$, $p_k = 50$ ata, $p_0 = 25$ ata și $l = 300$ km.

După cum se remarcă din grafic timpul de restabilire a presiunii este aproximativ de 7 ore.

## DESPRE O METODĂ PENTRU DETERMINAREA COEFICIENTULUI DE FRECARE HIDRODINAMIC ÎN CAZUL CURGERII GAZELOR PRIN CONDUCTE MAGISTRALE

Mai sus s-a menționat că în condiții reale, după oprirea afluxului, presiunea în punctul inițial, datorită scăderii continue a debitului de gaze care pătrunde din rezervorul subteran în conductă, nu rămîne constantă. Din acest motiv, apare necesar să luăm în considerare variațiile debitului cu timpul din punctul inițial, după închiderea ventilului. În acest scop, pentru o prelucrare mai exactă a datelor obținute, trebuie să efectuăm înregistrarea grafică, după închiderea ventilului, a variațiilor de debit la intrarea gazelor în conducta magistrală. Din punct de vedere practic, acest lucru se obține din diagrama debitmetrului cu diafragmă, care se află montat chiar în punctul inițial al conductei.

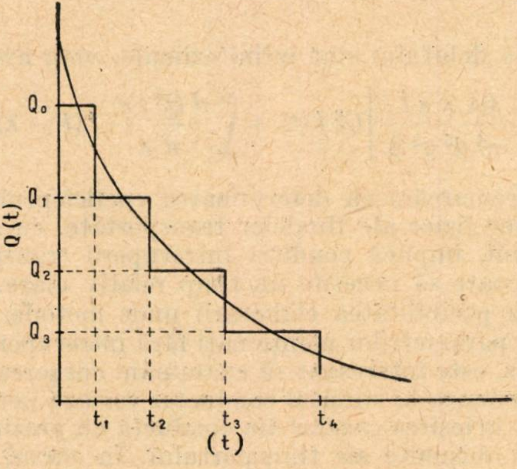


Fig. 2

Dacă presupunem că într-un interval de timp, convenabil ales, debitul este constant, atunci putem înlocui curba reală de variație printr-o succesiune de debite constante, după cum se arată în figura 2 [1]).

În felul acesta, datorită liniarității ecuației [2], putem aplica, pentru analiza curbei de creștere a presiunii, principiul superpoziției, scriind că creșterea presiunii, într-un timp dat, este egală cu suma algebrică a creșterilor de presiune datorită fiecărui debit în parte.

După cum s-a arătat, creșterea presiunii în punctul terminus, pentru situația cînd se consideră presiunea respectiv debitul constant în punctul inițial, după închiderea ventilului, se exprimă prin relația

$$\Delta p = e^{\alpha p_k} - e^{\alpha p_0} = \frac{64\, Q^2\, \lambda\, l\, \alpha}{\pi^4\, d^5\, g^2\, \beta}\, f(t), \qquad (1)$$

---

[1]) În prezent există numeroase procedee grafice și numerice care permit să aproximăm curba reală cu o eroare acceptabilă.

unde funcția $f\,(t)$ are forma

$$f\,(t) = \sum_{m-0}^{m=\infty} \frac{e^{-(2m+1)^2 \frac{2\pi^2 k}{4l^2} t}}{(2\,m+1)^2}\,. \tag{2}$$

Prin urmare, căderea cumulativă de presiune va fi, în conformitate cu principiul superpoziției, dată de ecuația

$$\Delta\,p = \frac{64\,\lambda\,\alpha\,l}{\pi^4\,d^5\,g^2\,\beta}\,[Q_0^2 f(t) + (Q_1^2 - Q_0^2)\,f(t-t_1) + (Q_2^2 - Q_1^2)\,f(t-t_2) + \ldots], \tag{3}$$

sau dacă variațiile debitului sînt infinitezimale, vom avea

$$\Delta\,p = \frac{64\,\lambda\,\alpha\,l}{\pi^4\,d^5\,g^2\,\beta}\left[Q_0^2\,f\,(t) + \int_0^t \frac{d\,Q^2\,(\lambda)}{d\,\lambda}\,f\,(t-\lambda)\,d\lambda\right]. \tag{4}$$

Trebuie să remarcăm că determinarea coeficientului hidrodinamic, sau a proprietăților fizice ale fluidelor transportate, cu ajutorul metodei restabilirii presiunii, implică condiția întreruperii transportului, care în anumite situații poate să necesite un timp relativ mare. Acest lucru, ne obligă să studiem posibilitatea elaborării unor metode practice care să permită stabilirea parametrilor menționați fără întreruperea transportului.

În acest sens, este interesant să examinăm curgerea gazelor în cazul cînd debitul și presiunea la sfîrșitul conductei variază periodic. Realizarea regimului periodic la ieșirea gazelor din conductă nu prezintă nici o dificultate, în condițiile obișnuite ale transportului. În cursul zilelor de iarnă, mai ales, caracterul periodic se observă foarte frecvent, fără a mai fi necesar să-l creăm. Aceasta permite să exprimăm debitul și presiunea în punctul terminus printr-o serie Fourier.

Dacă considerăm ecuațiile care descriu curgerea nestaționară, cu ipotezele admise în lucrarea [1], vom avea

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -b\,\rho\,v\,;\quad \frac{\partial\,(\rho\,v)}{\partial x} = -\frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial H}{\partial t}, \tag{5}$$

unde

$$b = \frac{\lambda\,(\rho\,v)_{\text{med.}}}{2d}$$

În cazul regimului periodic întreținut, care acționează în timp suficient de mare, condițiile inițiale vor fi nule, întrucît oscilațiile libere ale debitului și presiunii sînt importante numai în primele momente ale mișcării ; după un timp relativ mic influența lor devine practic neglijabilă. Prin urmare, soluțiile particulare ale ecuațiilor (5) pot fi scrise sub forma

$$\begin{aligned} \rho\,v\,(x,t) &= (A\cos\,k\,x + B\sin k\,x)\,e^{i\omega t}, \\ H\,(x,t) &= (A_0\cos\,k\,x + B_0\sin k\,x)\,e^{i\omega t}. \end{aligned} \tag{6}$$

Este ușor de observat că introducînd acum ecuațiile (6) în (5) rezultă, între constantele $A$, $B$, $A_0$, $B_0$ și $k$, următoarele relații :

$$A = \frac{i\,\omega\,\alpha}{k} B_0\,; \quad B = -\frac{i\,\omega\,\alpha}{k} A_0\,; \quad k = \pm (1 - i)\sqrt{\frac{b\,\omega\,\alpha}{2}}. \tag{7}$$

Pentru a reduce unele transformări intermediare vom exprima condițiile la limită în mărimi complexe, sub formă generală

$$\rho v\,(0, t) = \sum_m |\,A_m\,|\, e^{i\,(m\omega t - \theta_m)}\,; \quad H\,(0, t) = \sum_m |\,B_m\,|\, e^{i\,(m\omega t - \varphi_m)}, \tag{8}$$

unde amplitudinile $A_m$, $B_m$ și unghiurile de fază $\theta_m$ și $\varphi_m$ sînt considerate, cunoscute, iar valorile lor numerice se determină prin metodele obișnuite ale analizei armonice. În ceea ce privește numărul armonicelor, care trebuie utilizate în calculele numerice, acestea vor putea fi precizate numai după prelucrarea unui anumit număr de curbe experimentale.

După cîteva calcule simple, considerînd condițiile la limită (8) și luînd valoarea pozitivă a lui $k$, vom obține, în cele din urmă, următoarele ecuații :

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}eal\ \frac{\beta}{\alpha}\,(e^{\alpha p} - e^{\alpha p_0}) = \sum_m (\psi_1(x) \cos m\,\omega\,t - \psi_2(x) \sin m\,\omega\,t) \\ &\mathcal{R}eal\ \rho\,v = \sum (\psi_1'(x) \cos m\,\omega\,t - \psi_2'(x) \sin m\,\omega\,t), \end{aligned} \tag{9}$$

unde funcțiile $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_1'(x)$ și $\psi_2'(x)$ au expresiile

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= |\,B_m \rho_1|\cos(\theta_1 - \varphi_m) + \frac{|\,A_m \rho_2\,|}{\omega\alpha}\sqrt{\frac{b\,\omega\,\alpha}{2}}[\cos(\theta_2 + \theta_m) + \\ &\quad + \sin(\theta_2 + \theta_m)], \\ \psi_2(x) &= |\,B_m \rho_1\,|\sin(\theta_1 - \varphi_m) + \frac{|\,A_m \rho_2\,|}{\omega\alpha}\sqrt{\frac{b\,\omega\,\alpha}{2}}[\cos(\theta_2 + \theta_m) - \\ &\quad - \sin(\theta_2 + \theta_m)], \\ \psi_1'(x) &= |\,A_m \rho_1\,|\cos(\theta_1 - \theta_m) + \frac{|\,B_m \rho_2\,|\,\omega\alpha}{\sqrt{\frac{b\,\omega\,\alpha}{2}}}[\cos(\varphi_m + \theta_2) + \\ &\quad + \sin(\varphi_m + \theta_2)], \\ \psi_2'(x) &= |\,A_m \rho_1\,|\sin(\theta_1 - \theta_m) + \frac{|\,B_m \rho_2\,|\,\omega\alpha}{\sqrt{\frac{b\,\omega\,\alpha}{2}}}[\cos(\varphi_m + \theta_2) + \\ &\quad + \sin(\varphi_m + \theta_2)]; \end{aligned} \tag{10}$$

iar $\rho_1$, $\rho_2$, $\theta_1$ și $\theta_2$ se obțin din relațiile de mai jos

$$\begin{aligned}
\rho_1^2 &= \cos^2\sqrt{\frac{b\,\omega\,\alpha}{2}}\,x\,\mathrm{ch}^2\sqrt{\frac{b\,\omega\,\alpha}{2}}\,x+\sin^2\sqrt{\frac{b\,\omega\,\alpha}{2}}\,x\,\mathrm{sh}^2\sqrt{\frac{b\,\omega\,\alpha}{2}}\,x,\\
\rho_2^2 &= \sin^2\sqrt{\frac{b\,\omega\,\alpha}{2}}\,x\,\mathrm{ch}^2\sqrt{\frac{b\,\omega\,\alpha}{2}}\,x+\cos^2\sqrt{\frac{b\,\omega\,\alpha}{2}}\,x\,\mathrm{sh}^2\sqrt{\frac{b\,\omega\,\alpha}{2}}\,x,\\
\theta_1 &+ \mathrm{arc\,tg}\left(\mathrm{th}\sqrt{\frac{b\,\omega\,\alpha}{2}}\,x\,\mathrm{tg}\sqrt{\frac{b\,\omega\,\alpha}{2}}\,x\right),\\
\theta_2 &= \mathrm{arc\,tg}\left(\mathrm{th}\sqrt{\frac{b\,\omega\,\alpha}{2}}\,x\,\mathrm{cotg}\sqrt{\frac{b\,\omega\,\alpha}{2}}\,x\right).
\end{aligned}\qquad(11)$$

Trecem acum la determinarea coeficientului de frecare hidrodinamic, utilizînd un procedeu frecvent aplicat în teoria oscilațiilor sistemelor elastice disipative neliniare. Pe baza acestui procedeu, coeficientul de frecare hidrodinamic trebuie să satisfacă egalitatea dintre pierderea de putere calculată și cea măsurată efectiv.

Astfel, dacă notăm cu $N_1$ puterea medie existentă în punctul inițial, într-un timp $T$, care reprezintă perioada de oscilație, vom avea

$$N_1=\frac{\pi d^2}{4}\,\frac{1}{T}\int_0^T p\,(l,t)\,v\,(l,t)\,dt, \qquad (12)$$

iar pentru puterea din punctul terminus

$$N_0=\frac{\pi d^2}{4}\,\frac{1}{T}\int_0^T p\,(0,t)\,v\,(0,t)\,dt. \qquad (13)$$

Prin urmare, puterea pierdută va fi exprimată prin relația [5]

$$\Delta N^{\star}=\frac{\pi d^2}{4}\,\frac{1}{T}\int_0^T [p\,(l,t)\,v\,(l,t)-p_0\,(0,t)\,v\,(0,t)]\,dt, \qquad (14)$$

iar după integrare rezultă o ecuație transcendentă, care rezolvată prin încercări ne permite să obținem valoarea coeficientului de frecare ; mărimile stelate reprezintă valorile măsurate. Deoarece în punctul terminus puterea calculată este egală cu cea măsurată, presiunea și debitul fiind chiar condițiile limită, stabilite în urma măsurătorilor, atunci ecuația (14) devine :

$$\frac{4\,N_1\,T}{\pi d^2}=\int_0^T p\,(l,\ t)\,v\,(l,\ t)\,dt, \qquad (15)$$

unde funcțiile $p\,(l,t)$ și $v\,(\mathrm{l},\ t)$ se deduc din ecuațiile (9), introducînd $x=l$. Este ușor de observat că stabilirea valorii lui $\lambda$ necesită un volum laborios de calcule numerice, întrucît integrarea efectivă a ecuației (15) nefiind posibilă, ținînd seama de forma funcției (9), decît numai prin metode grafice sau numerice. Dificultățile de calcul menționate pot fi bineînțeles evitate, dacă utilizăm analogiile existente dintre ecuaţiile (5) şi cele care descriu variaţiile curentului şi tensiunii într-o linie electrică lungă cu constante uniform distribuite, şi anume : capacitate şi rezistenţă. Prin urmare, realizînd pe un model electric condiţii la limită identice cu cele înregistrate la capătul unei conducte magistrale, avem posibilitatea să determinăm, prin calcule simple, valoarea reală medie a coeficientului de frecare care se referă la toată lungimea, fără a mai fi necesară întreruperea transportului.

*Primită la redacţie la 8 iulie 1960*

## ПЕРЕХОДНОЕ ТЕЧЕНИЕ ГАЗОВ В МАГИСТРАЛЯХ

### РЕЗЮМЕ

В настоящей работе рассматривается вопрос восстановления давления в магистральной трубе после закрытия вентиля в ее конечной части.

В качестве исходной точки для математического описания течения рассматриваются уравнения, полученные в работе [1]. Что касается граничных и начальных условий предполагается, что течение до закрытия вентиля стационарно, а давление в начальной точке после мгновенного закрытия вентиля остается постоянным.

В отличие от расчетного метода, где применяется уравнение стационарного течения, предложенный нами способ имеет преимущества, состоящие в том, что полученное значение относится ко всей длине трубопровода, невключающего в себя существование зоны с различной шероховатостью на последнем участке трубопровода. Устранение влияния этой зоны на увеличение давления, выражающегося отклонением от линейного изменения в полилогарифмических диаграммах, со временем можно осуществить путем обработки данных, полученных измерениями, пользуя прямолинейный участок кривой, восстанавливающийся после истечения некоторого интервала времени от остановки притока в конечной точке. Таким образом, сопоставление значений, полученных двумя методами позволяет получить некоторые, крайне ценные сведения о состоянии трубопровода на последней части, относительно всей длины трубопровода, с точки зрения сопротивления течению.

В приложении излагается способ обработки записанных данных, применяя принцип суперпозиции, благодаря линеаризации уравнений течения для случая, когда давление в начальной точке после закрытия вентиля изменяется со временем. Далее предлагается способ, не нуждающийся в остановке переноса, основанный на математической обработке данных, полученных путем измерения колебаний давления и расхода, который можно осуществить периодическим изменением рас-

хода в начальной или конечной точке трубопровода. Применение аналогии, существующей между уравнениями течения и описывающих изменение напряжения в длинной электрической линии с распределенными постоянными, а именно: емкость и сопротивление позволяют определить на электрической модели значение коэффициента трения при помощи нескольких простых вычислений.

# TRANSIENT FLOW OF GASES THROUGH MAIN PIPELINES

## ABSTRACT

This paper discusses the re-establishing of pressure in a main gas pipeline after the shutting of the valve at its terminus point.

As a starting point for the mathematical description of the flow, the equations established in paper [1] are considered. As regards the boundary and initial conditions, it was assumed that before the shutting of the valve, the flow was stationary while the pressure at the initial point after the instantaneous shutting of the valve remained constant.

As distinguished from the calculation method which uses the stationary flow equation, this procedure is advantageous in that the value obtained refers to the whole pipeline length, without assuming the existence of a zone of different roughness on its last portion. The elimination of the influence of this zone on the increase of pressure, which appears in a semilogarithmic diagram as a deviation from the linear variation with the time, may be realized by processing the data obtained from measurements and by using the rectilinear portion of the curve which becomes linear after a certain time interval has ellapsed since the stopping of the flow at the terminus point. In this way, a comparison of the values obtained through the two methods gives valuable information on the state of the last portion of the pipeline as compared to its whole length from the viewpoint of the flow resistance.

The appendix indicates the manner of processing the recorded data by applying the principle of superposition, due to the linearity of the flow equations, for the case in which the pressure at the initial point after the shutting of the valve varies in time. Further, a procedure is proposed which does not require the stopping of the flow, and is based on the mathematical processing of the data obtained from the measurements of pressure and rate of flow oscillations, which may be obtained through the periodic variation of the rate of flow at the initial or terminus point of the pipeline. The utilization of the analogy existing between the flow equations and those describing the electrical tension variation in a long electrical line with distributed constants, i.e. capacity and resistance, permits one to determine on the electric model the friction coefficient by single calculations.

## BIBLIOGRAFIE

1. И. А. Черный, *Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах*. Гостоптехиздат, Москва, 1951.
2. — *О методах линеаризации нелинейных уравнений типа уравнений теплопроводности*. Известия ОТД, Техн. Наук АН СССР, *6* (1951).
3. В. И. Аравин, С. Н. Нумеров, *Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде*. Москва, 1953, 396.
4. А. С. Смирнов, А. И. Сироковский, *Добыча и транспорт газа*. Гостоптехиздат, Москва, 1957, 294.
5. H. Pascal, *O metodă pentru determinarea permeabilității unui mediu poros*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, *4* (1959).

# STUDII

## SCURGERI PRIN MEDII POROASE

# CONSIDERAŢII ASUPRA SCURGERII LICHIDELOR COMPRESIBILE PRIN MEDII POROASE NEOMOGENE

DE

T. OROVEANU

1. *Introducere.* Într-o lucrare anterioară [3], am stabilit, împreună cu H. Pascal, o ecuaţie diferenţială pentru studiul scurgerii lichidelor compresibile prin medii poroase, în ipoteza că legea lui Darcy trebuie modificată pentru a se ţine seama de caracterul nestaţionar al scurgerii. Ca aplicaţii posibile ale acestei ecuaţii, indicam tocmai acele fenomene însoţite de o variaţie rapidă a presiunii în mediul poros cum ar fi, de exemplu, restabilirea presiunii după închiderea unei sonde. Ulterior am studiat împreună cu E. Silveanu [4] această ultimă problemă şi calculele numerice au indicat diferenţe sensibile faţă de soluţia clasică. De asemenea, M. P. Ranga Rao [5], pornind tot de la ecuaţia noastră, a tratat problema deschiderii unei sonde într-un mediu poros în care lichidul se află iniţial în stare de repaus.

În cele ce urmează, vom extinde ecuaţia stabilită anterior la scurgerea lichidelor compresibile prin medii poroase neomogene, a căror permeabilitate este funcţie de punct.

2. *Legea de filtrare în regim nestaţionar.* Pentru a introduce caracterul nestaţionar al scurgerii în legea de filtrare, vom porni de la raţionamentul utilizat de V. I. Aravin şi S. N. Numerov [1], pe care îl vom extinde pentru mediile poroase neuniforme. Precizăm că aceste medii poroase sînt atît neomogene cît şi anizotrope, permeabilitatea lor fiind o mărime tensorială.

Prin utilizarea valorilor medii, se scrie ecuaţia de mişcare pentru scurgerea macroscopică a fluidului. Fără a mai repeta consideraţiile expuse în lucrarea citată [1], vom aminti numai că această ecuaţie are forma

$$\frac{dv_i}{dt} = mf_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + mr_i \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{1}$$

în care $v_i$ reprezintă componentele vitezei de filtrare, $m$ porozitatea, $f_i$ componentele forțelor exterioare raportate la unitatea de masă de fluid, în care sînt incluse și forțele de presiune exercitate de granule asupra fluidului, $\rho$ masa specifică a fluidului, $p$ presiunea și $r_i$ componentele forțelor de rezistență, datorite frecării dintre fluid și granulele mediului poros.

Deoarece mișcarea fluidului este lentă, în expresia accelerației ¹)

$$\frac{dv_i}{dt}=\frac{\partial v_i}{\partial t}+\frac{\partial v_i}{\partial x_j}v_j, \tag{2}$$

termenii neliniari pot fi neglijați, componentele vitezei de filtrare și derivatele lor în raport cu coordonatele avînd valori mici. De asemenea, tot pentru mișcările lente, se poate admite o relație liniară între forțele de frecare și viteza de filtrare. În cazul cel mai general, în care mediul poros este neomogen și anizotrop, această relație are forma [2]

$$r_i = - a_{ij} v_j, \tag{3}$$

unde $a_{ij}$ sînt componentele unui tensor de ordinul al doilea.

Am ajuns astfel la ecuația

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = mf_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} - ma_{ij} v_j \tag{4}$$

și urmează să găsim o relație între tensorul $a_{ij}$ și tensorul permeabilitate $k_{ij}$. În acest scop, vom scrie ecuația (4) pentru regimul staționar și vom obține

$$a_{ij} v_j = -\frac{1}{\rho m}\frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i . \tag{5}$$

Considerînd toate valorile indicelui $i$, avem un sistem de ecuații algebrice liniare cu necunoscutele $v_j$. Rezolvîndu-l, găsim pentru acestea din urmă expresiile

$$v_j = -\frac{A_{ij}\left(\frac{1}{\rho m}\frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i\right)}{|\, a_{ij} \,|}, \tag{6}$$

în care $|\, a_{ij} \,|$ este determinantul sistemului iar $A_{ij}$ complementul algebric al elementului $a_{ij}$ din acest determinant.

Pe de altă parte, în regim staționar este valabilă legea lui Darcy și dacă luăm forma generală a acesteia

$$v_i = \frac{\rho}{\mu} k_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, \tag{7}$$

---

¹) Pentru simplificare, utilizăm convenția indicelui de sumare.

în care

$$\varphi = -\left(\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho} + V\right), \tag{8}$$

$V$ fiind potențialul forțelor exterioare, rezultă

$$v_j = -\frac{\rho}{\mu}k_{ji}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i}\right). \tag{9}$$

Mai putem scrie însă

$$v_j = -\frac{\rho m}{\mu}k_{ji}\left(\frac{1}{\rho m}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial x_i}\right) \tag{10}$$

și comparînd relațiile (6) și (10) obținem

$$\frac{\rho m}{\mu}k_{ji} = \frac{A_{ij}}{|\, a_{ij}\,|} = a_{ji}^{(-1)}, \tag{11}$$

unde $a_{ij}^{(-1)}$ sînt componentele unui tensor care se numește inversul tensorului $a_{ij}$. Se observă ușor că din relația precedentă avem

$$a_{ij} = \frac{\mu}{\rho m}k_{ij}^{(-1)}, \tag{12}$$

$k_{ij}^{(-1)}$ fiind componentele inversului tensorului $k_{ij}$. Pentru ca acest tensor invers să existe, este necesar ca determinantul $|\, k_{ij}\,|$ să fie diferit de zero, adică tensorul $k_{ij}$ să fie complet. Se poate arăta însă că tensorul permeabilitate este simetric și ca atare are direcțiile principale ortogonale. Pe de altă parte, determinantul $|\, k_{ij}\,|$ este un scalar, a cărui valoare este deci independentă de sistemul de coordonate ales. Scriind acest determinant în sistemul de axe cartezian rectangular orientat după direcțiile principale, se constată imediat că el are valoarea

$$|\, k_{ij}\,| = \lambda_{(1)}\,\lambda_{(2)}\,\lambda_{(3)}, \tag{13}$$

unde $\lambda_{(i)}$ sînt valorile proprii ale tensorului permeabilitate. Condiția ca tensorul $k_{ij}^{(-1)}$ să existe se mai poate așadar exprima spunînd că valorile proprii ale tensorului $k_{ij}$ trebuie să fie toate diferite de zero [1]).

Admițînd acest lucru, ecuația (4) se scrie

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = mf_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\mu}{\rho}k_{ij}^{(-1)}\,v_j \tag{14}$$

și este ușor de observat că, dacă presupunem scurgerea staționară $\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} = 0\right)$ regăsim legea lui Darcy sub forma ei generalizată pentru mediile poroase neuniforme, în care avem

$$f_i = -\frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial x_i}. \tag{15}$$

---

[1]) Se demonstrează că valorile proprii ale unui tensor simetric de ordinul al doilea sînt toate reale.

Dacă filtrarea este staționară, rectilinie și uniformă, așa fel încît accelerația medie să fie nulă, se poate arăta, urmînd raționamentul expus în [1] că

$$f_i = \frac{g_i}{m}, \tag{16}$$

$g_i$ fiind componentele accelerației gravitației.

Admițînd că acest rezultat poate fi aplicat și în cazul în care filtrarea este nestaționară și neuniformă, ecuația (14) devine

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = g_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\mu}{\rho} k_{ij}^{(-1)} v_j. \tag{17}$$

3. *Ecuația diferențială a scurgerii prin medii poroase neomogene.* Ne vom referi în continuare la scurgerea lichidelor compresibile prin medii poroase neomogene. Permeabilitatea fiind un scalar funcție de punct, în loc de ecuația (17) avem

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = g_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\mu}{\rho k} v_i. \tag{18}$$

Presupunînd că mediul poros este indeformabil, ecuația de continuitate are forma

$$m\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0. \tag{19}$$

Din ecuația de stare

$$\rho = \rho_0 e^{\beta_l (p - p_0)} \tag{20}$$

în care coeficientul de compresibilitate $\beta_l$ al lichidului este considerat constant, deducem

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{1}{\beta_l \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x_i} \tag{21}$$

și dacă înlocuim în (18) găsim

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{1}{\beta_l \rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial x_i} - \frac{\mu}{\rho k} v_i \tag{22}$$

sau

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\beta_l}\frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \frac{\mu\rho}{k} v_i\right), \tag{23}$$

cu observația că am neglijat efectul gravitațional, așa cum se face de obicei în studiul scurgerii lichidelor compresibile prin medii poroase.

Tot din ecuaţia de stare (20) avem

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta_l \rho \frac{\partial p}{\partial t} \tag{24}$$

şi deoarece $\beta_l$ are valori mici, putem pune

$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} \approx \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \tag{25}$$

neglijînd termenul $v_i \frac{\partial \rho}{\partial t}$ care este mic faţă de $\rho \frac{\partial v_i}{\partial t}$, aşa cum rezultă din (24). Prin urmare, ţinînd seama de (23), avem

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} \approx -\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\beta_l}\frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \frac{\mu\rho}{k} v_i\right). \tag{26}$$

Pe de altă parte, dacă derivăm ecuaţia de continuitate (19) în raport cu timpul, obţinem

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t}\right] = -m\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}, \tag{27}$$

iar (26) ne dă

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t}\right] = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\beta_l}\frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \frac{\mu\rho}{k} v_i\right)\right] \approx -\frac{1}{\rho_0}\left[\frac{1}{\beta_l}\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_i} + \mu\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\rho v_i}{k}\right)\right], \tag{28}$$

unde am admis că viscozitatea este constantă şi am înlocuit pe $\frac{1}{\rho}$ cu $\frac{1}{\rho_0}$, această din urmă aproximaţie fiind justificată prin faptul că variaţia lui $\rho$ este redusă, datorită valorii mici a coeficientului de compresibilitate al lichidului.

Înlocuind în (27) rezultatul derivării efectuate în (28), avem

$$\frac{1}{\rho_0 \beta_l}\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\mu}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\rho v_i}{k}\right) = m\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}. \tag{29}$$

Dacă ţinem din nou seama de ecuaţia de continuitate (19), găsim însă

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\rho v_i}{k}\right) = \frac{1}{k}\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} - \frac{\rho v_i}{k^2}\frac{\partial k}{\partial x_i} = -\frac{m}{k}\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\rho v_i}{k^2}\frac{\partial k}{\partial x_i} \tag{30}$$

şi pentru a înlocui viteza de filtrare, vom neglija variaţia acesteia cu timpul, revenind deci la forma obişnuită a legii lui Darcy care ne dă

$$v_i = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x_i} = -\frac{k}{\mu \beta_l \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x_i}, \tag{31}$$

omițînd, ca și mai înainte, efectul gravitațional. În felul acesta, ajungem la expresia

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\rho v_i}{k}\right) = -\frac{m}{k}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\mu\beta_l k}\frac{\partial k}{\partial x_i}\frac{\partial \rho}{\partial x_i}, \tag{32}$$

pe care o introducem în (29). După cîteva calcule simple, găsim ecuația

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\right) = \rho_0\beta_l m k\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \mu\beta_l m\frac{\partial \rho}{\partial t}, \tag{33}$$

care reprezintă generalizarea aceleia pe care am dedus-o mai de mult, împreună cu H. Pascal, pentru mediile poroase omogene [3].

Ecuația corespunzătoare pentru presiune rezultă cu ușurință, dacă observăm că din ecuația de stare (20) și relațiile (21) și (24) avem

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \beta_l^2\rho\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2 + \beta_l\rho\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \approx \beta_l\rho\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \tag{34}$$

și

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_i} = \beta_l^2\rho\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)^2 + \beta_l\rho\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} \approx \beta_l\rho\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} \tag{35}$$

termenii care conțin pe $\beta_l^2$ fiind neglijabili pentru motivul arătat mai înainte.

Prin urmare, se obține o ecuație de aceeași formă și anume

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial p}{\partial x_i}\right) = \rho_0\beta_l m k\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \mu\beta_l m\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{36}$$

Dacă observăm că putem pune

$$\beta_l = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dp} \approx \frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{\rho_0 a^2}, \tag{37}$$

*a* fiind viteza de propagare a sunetului în lichidul considerat, ecuația precedentă se mai poate scrie

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial p}{\partial x_i}\right) = \frac{mk}{a^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\mu m}{\rho_0 a^2}\frac{\partial p}{\partial t} \tag{38}$$

și atunci cînd lichidul este considerat incompresibil, regăsim ecuația cunoscută pentru presiune.

Remarcăm de asemenea faptul că ecuațiile deduse pentru masa specifică și pentru presiune își păstrează aceeași formă dacă se ia ca punct de plecare ecuația de stare aproximativă

$$\rho = \rho_0[1 + \beta_l(p - p_0)]. \tag{39}$$

*Primită la redacție la 10 decembrie 1960*

# СООБРАЖЕНИЯ О ТЕЧЕНИИ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ В НЕОДНОРОДНЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

## РЕЗЮМЕ

В работе устанавливается дифференциальное уравнение течения сжимаемой жидкости в пористой среде, проницаемость которой является переменной, в случае, когда преобладает нестационарный характер явления. Для этой цели распространяется линейный закон фильтрации для нестационарного режима течения и затем обобщаются результаты, полученные в одной из предыдущих работ, причем выводится дифференциальное уравнение удельной массы и давления.

# CONSIDÉRATIONS SUR L'ÉCOULEMENT DES LIQUIDES COMPRESSIBLES DANS LES MILIEUX POREUX NON HOMOGÈNES

## RÉSUMÉ

Ce travail a pour but l'établissement de l'équation différentielle de l'écoulement d'un liquide compressible dans un milieu poreux dont la perméabilité est variable, lorsque le caractère non stationnaire du phénomène est prédominant. On déduit d'abord la loi linéaire de filtration pour le régime non stationnaire d'écoulement et ensuite on passe à la généralisation des résultats obtenus dans un travail antérieur, en déduisant les équations différentielles pour la densité et pour la pression.

## BIBLIOGRAFIE

1. В. И. Аравин, С. Н. Нумеров, *Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде.* ГИТТЛ. Москва, 1953, 39—42, 62—65.
2. G. Heinrich, K. Desoyer, *Hydromechanische Grundlagen für die Behandlung von stationären und instationären Grundwasserströmungen.* Ingenieur-Archiv., **XXIII**, *2* (1955).
3. T. Oroveanu, H. Pascal, *Asupra propagării undelor de presiune într-un lichid care curge printr-un mediu poros.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *3* (1958).
4. T. Oroveanu, E. Silveanu, *Asupra creşterii presiunii într-o sondă după închiderea acesteia.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **X**, *4* (1959).
5. M. P. Ranga Rao, *Curgerea radială nestaţionară şi nedarcyană a unui lichid printr-un mediu poros.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **XII**, (acest volum) (1961).

# CURGEREA RADIALĂ NESTAȚIONARĂ ȘI NEDARCYANĂ A UNUI LICHID PRINTR-UN MEDIU POROS

DE

M. P. RANGA RAO[1]

## 1. INTRODUCERE

În general, curgerea fluidelor printr-un mediu poros se supune legii lui Darcy. Asupra acestui tip de probleme s-au scris multe lucrări [1]. Totuși, atunci cînd curgerea este foarte înceată iar caracterul nestaționar este predominant, legea lui Darcy nu mai este în concordanță cu rezultatele experimentale. În asemenea cazuri ecuațiile de mișcare, așa cum sînt formulate, de exemplu, în tratatul lui Aravin și Numerov [2] sînt socotite a da rezultate mai satisfăcătoare. Combinînd aceste ecuații de mișcare cu ecuația de continuitate și cu aceea de stare și introducînd anumite aproximații, Oroveanu și Pascal [3] au derivat ecuația fundamentală care descrie curgerea nestaționară a unui lichid compresibil printr-un mediu poros.

Articolul de față tratează problema curgerii radiale nestaționare a unui lichid cu compresibilitate redusă spre o sondă, dintr-un contur de alimentare circular concentric. În mod practic, un asemenea fenomen apare atunci cînd sonda pătrunde complet nisipul de grosime uniformă care conține fluidul. Se presupune că presiunea lichidului, atît la sondă cît și la conturul de alimentare, este uniformă și se consideră că presiunea inițială este aceea a conturului de alimentare. Se presupune, de asemenea, că inițial nu există nici o variație a presiunii cu timpul și că domeniul mărginit între sondă și conturul de alimentare nu conține surse pozitive sau negative. Cu aceste condiții, ecuația lui Oroveanu și Pascal pentru curgerea radială este rezolvată analitic folosind transformatele finite ale lui Hankel. Se obțin expresii aproximative pentru distribuția vitezelor și pentru debit.

---

[1] Secția de matematică aplicată, Institutul Indian de tehnologie, Kharagpur, India.

## 2. ECUAȚIILE FUNDAMENTALE

Ecuația de continuitate este

$$\operatorname{div}(\rho\vec{v}) = -f\frac{\partial\rho}{\partial t}, \tag{1}$$

iar ecuația de stare

$$\rho = \rho_0 \exp[\beta(p - p_0)]. \tag{2}$$

Ecuațiile de mișcare date de Aravin și Numerov [2] (neglijînd efectul gravitației) sînt

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p - \frac{\mu}{\rho k}\vec{v}. \tag{3}$$

Combinînd ecuațiile (1) cu (2) și (3) și făcînd unele aproximații, Oroveanu și Pascal [3] au arătat recent că ecuația diferențială fundamentală pentru curgerea nestaționară a unui lichid compresibil printr-un mediu poros este de forma

$$\nabla^2 p = \frac{f\beta\mu}{k}\frac{\partial p}{\partial t} + f\beta\rho_0\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \tag{4}$$

unde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

## 3. ENUNȚAREA PROBLEMEI

Considerăm distribuția de presiune a unei curgeri radiale nestaționare a unui lichid compresibil spre o sondă cu raza $r_\omega$, dintr-un contur de alimentare circular concentric cu raza $r_e$ $(r_e > r_\omega)$ cînd presiunile atît la sondă cît și la conturul de alimentare sînt uniforme, iar presiunea inițială în sistemul de curgere este aceeași cu aceea de pe contur. De asemenea, se consideră că inițial variația presiunii cu timpul este egală cu zero. În acest caz, ecuația (4) se reduce la

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{f\beta\mu}{k}\frac{\partial p}{\partial t} + f\beta\rho_0\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \tag{5}$$

Problema ce trebuie rezolvată acum este aceea de a găsi $p(r, t)$ din ecuația (5) cu condițiile inițiale

$$\begin{aligned} &p(r, 0) = p_e, && r_\omega \leqslant r \leqslant r_e, \\ &\left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]_{t=0} = 0, && r_\omega \leqslant r \leqslant r_e, \end{aligned} \tag{6}$$

şi condiţiile la limită

$$\begin{aligned} p(r_\omega, t) &= p_\omega, & t &> 0, \\ p(r_e, t) &= p_e, & t &> 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Dacă exprimăm presiunea, timpul şi distanţa în formă adimensională, adică $W = \frac{p - p_e}{p_\omega - p_e}$, $\tau = \frac{kt}{f\beta\mu r_\omega^2}$ şi $\varepsilon = \frac{r}{r_\omega}$ ecuaţiile (5) pînă la (7) se reduc respectiv la

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial W}{\partial\varepsilon} = a\frac{\partial^2 W}{\partial\tau^2} + \frac{\partial W}{\partial\tau}, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} W(\varepsilon, 0) &= 0, & 1 &\leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \\ \left[\frac{\partial W}{\partial\tau}\right]_{\tau=0} &= 0, & 1 &\leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} W(1, \tau) &= 1, & \tau &> 0 \\ W(\varepsilon_0, \tau) &= 0, & \tau &> 0 \end{aligned} \tag{10}$$

unde $a = \frac{k^2\rho_0}{f\beta\mu^2 r_\omega^2}$ şi $\varepsilon_0 = \frac{r_e}{r_\omega}$ sînt constante adimensionale pozitive.

### 4. SOLUŢIA

Dacă înmulţim ambii membrii ai ecuaţiei (8) cu

$$\varepsilon[J_0(\alpha_n\varepsilon)G_0(\alpha_n\varepsilon_0) - J_0(\alpha_n\varepsilon_0)G_0(\alpha_n\varepsilon)],$$

unde $J_0(\alpha_n\varepsilon)$ şi $G_0(\alpha_n\varepsilon)$ sînt funcţii Bessel de ordinul zero şi respectiv de prima şi a doua speţă, iar $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, ... etc. sînt rădăcinile ecuaţiei transcendente

$$J_0(\alpha_n)G_0(\alpha_n\varepsilon_0) - J_0(\alpha_n\varepsilon_0)G_0(\alpha_n) = 0 \tag{11}$$

şi integrăm între limitele 1 şi $\varepsilon_0$, obţinem [4], folosind relaţia (10)

$$a\frac{d^2\overline{W}}{d\tau^2} + \frac{d\overline{W}}{d\tau} = \frac{J_0(\alpha_n\varepsilon_0)}{J_0(\alpha_n)} - \alpha_n^2\overline{W}, \tag{12}$$

cu

$$\overline{W}(\alpha_n, \tau) = \int_1^{\varepsilon_0} \varepsilon W[J_0(\alpha_n\varepsilon)G_0(\alpha_n\varepsilon_0) - J_0(\alpha_n\varepsilon_0)G_0(\alpha_n\varepsilon)]\,d\varepsilon.$$

Soluţia generală a ecuaţiei (12) este

$$\overline{W} = A\exp\left(\frac{-1+b_n}{2a}\tau\right) + B\exp\left(\frac{-1-b_n}{2a}\tau\right) + \frac{1}{\alpha_n^2}\frac{J_0(\alpha_n\varepsilon_0)}{J_0(\alpha_n)}, \tag{13}$$

unde $b_n = (1 - 4\,a\,\alpha_n^2)^{\frac{1}{2}}$, $A$ și $B$ sînt constante. Aici s-a presupus că $b_n$ nu se anulează niciodată (vezi anexa II pentru cazul $b_n = 0$).

Din relația (9) obținem

$$\begin{aligned} \overline{W} &= 0 \quad \text{la} \quad \tau = 0, \\ \frac{d\overline{W}}{d\tau} &= 0 \quad \text{la} \quad \tau = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Apoi, din relațiile (14) și (13) rezultă

$$\begin{aligned} 0 &= A + B + \frac{1}{\alpha_n^2}\frac{J_0(\alpha_n \varepsilon_0)}{J_0(\alpha_n)}, \\ 0 &= A\left(\frac{-1 + b_n}{2a}\right) + B\left(\frac{-1 - b_n}{2a}\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Rezolvînd ecuațiile (15) pentru $A$ și $B$ și substituind apoi valorile lor în formula (13) găsim

$$\begin{aligned} \overline{W} = \frac{J_0(\alpha_n \varepsilon_0)}{\alpha_n^2 J_0(\alpha_n)}\Bigg[1 - \frac{(1 + b_n)}{2b_n}\exp\left(\frac{-1 + b_n}{2a}\tau\right) - \\ - \frac{(b_n - 1)}{2b_n}\exp\left(\frac{-1 - b_n}{2a}\tau\right)\Bigg]. \end{aligned} \tag{16}$$

Folosind formula de inversiune [5], obținem din relația (16)

$$\begin{aligned} W = \sum_n \frac{2\,J_0(\alpha_n) J_0(\alpha_n \varepsilon_0)}{J_0^2(\alpha_n \varepsilon_0) - J_0^2(\alpha_n)}\left[J_0(\alpha_n \varepsilon) G_0(\alpha_n \varepsilon_0) - J_0(\alpha_n \varepsilon_0) G_0(\alpha_n \varepsilon)\right] \times \\ \times \left\{1 - \frac{(1 + b_n)}{2b_n}\exp\left(\frac{-1 + b_n}{2a}\tau\right) - \frac{(b_n - 1)}{2b_n}\exp\left(\frac{-1 - b_n}{2a}\tau\right)\right\}, \end{aligned} \tag{17}$$

unde semnul de însumare se extinde asupra tuturor rădăcinilor pozitive ale ecuației (11)

În anexa I s-a arătat că

$$- \frac{\log \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}{\log \varepsilon_0} = \sum_n \frac{2\,J_0(\alpha_n) J_0(\alpha_n \varepsilon_0)}{J_0^2(\alpha_n \varepsilon_0) - J_0^2(\alpha_n)}\left[J_0(\alpha_n \varepsilon) G_0(\alpha_n \varepsilon_0) - J_0(\alpha_n \varepsilon_0) G_0(\alpha_n \varepsilon)\right]$$

și în consecință $W$ poate fi simplificat după cum urmează

$$\begin{aligned} W = -\frac{\log \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}{\log \varepsilon_0} + \sum_n \frac{J_0(\alpha_n) J_0(\alpha_n \varepsilon_0)}{J_0^2(\alpha_n) - J_0^2(\alpha_n \varepsilon_0)}\left[J_0(\alpha_n\varepsilon) G_0(\alpha_n\varepsilon_0) - J_0(\alpha_n\varepsilon_0) G_0(\alpha_n \varepsilon)\right] \times \\ \times \frac{\exp\left(-\frac{\tau}{2a}\right)}{b_n}\left\{(1 + b_n)\exp\left(\frac{b_n \tau}{2a}\right) - (1 - b_n)\exp\left(-\frac{b_n \tau}{2a}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{18}$$

Vom despărți acum însumarea din membrul drept al ecuației (18) în două părți. Prima parte este însumarea ce se extinde de la 1 la $N$, unde $N$ reprezintă o anumită valoare a lui $n$ astfel încît $4\,a\,\alpha_N^2 < 1$ și deci $b_n$ este real în acest domeniu, iar cealaltă parte este însumarea ce se extinde asupra restului rădăcinilor ecuației (11) astfel încît în acest domeniu inegalitatea $4\,a\,\alpha_n^2 > 1$ este valabilă și deci $b_n$ este imaginar. Putem lua apoi $b_n = i\,c_n$ unde $c_n$ este real și $n > N$.

Deci, din ecuația (18) obținem

$$p = p_\omega + (p_e - p_\omega)\left[\frac{\log\varepsilon}{\log\varepsilon_0} - \sum_{n=1}^{N}\frac{J_0(\alpha_n)\,J_0(\alpha_n\,\varepsilon_0)}{J_0^2(\alpha_n) - J_0^2(\alpha_n\,\varepsilon_0)}\,[J_0(\alpha_n\,\varepsilon)G_0(\alpha_n\,\varepsilon_0) - \right.$$

$$-J_0(\alpha_n\varepsilon_0)\,G_0(\alpha_n\varepsilon)]\,\frac{\exp\left(-\dfrac{\tau}{2a}\right)}{b_n}\left\{(1+b_n)\exp\left(\frac{b_n\tau}{2a}\right) - (1-b_n)\exp\left(-\frac{b_n\tau}{2a}\right)\right\} -$$

$$-\sum_{n>N}\frac{2J_0(\alpha_n)\,J_0(\alpha_n\,\varepsilon_0)}{J_0^2(\alpha_n) - J_0^2(\alpha_n\,\varepsilon_0)}\,[J_0(\alpha_n\,\varepsilon)\,G_0(\alpha_n\,\varepsilon_0) - J_0(\alpha_n\,\varepsilon_0)\,G_0(\alpha_n\,\varepsilon)]\,\times$$

$$\left.\times\exp\left(-\frac{\tau}{2a}\right)\left\{\cos\left(\frac{c_n\tau}{2a}\right) + \frac{1}{c_n}\sin\left(\frac{c_n\,\tau}{2a}\right)\right\}\right]. \tag{19}$$

### 5. EXPRESIA APROXIMATIVĂ A VITEZEI

Singura componentă a vitezei care nu se anulează este de-a lungul direcției radiale. Astfel din ecuația (3) obținem

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{\mu}{\rho k}\,v_r = -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial r}. \tag{20}$$

În termenii lui $\tau$ și $\varepsilon$, aceasta se reduce la

$$\frac{\partial v_r}{\partial \tau} + \frac{f\beta\mu^2 r_\omega^2}{k^2\rho}\,v_r = -\frac{f\beta\mu r_\omega}{k\rho}\,\frac{\partial p}{\partial\varepsilon}. \tag{21}$$

Soluția ecuației (21) este

$$v_r = -\frac{f\beta\mu r_\omega}{k}\exp\left(-\int\frac{f\beta\mu^2 r_\omega^2}{k^2\rho}\,d\tau\right)\int\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial\varepsilon}\exp\left(\frac{f\beta\mu^2 r_\omega^2}{k^2}\int\frac{d\tau}{\rho}\right)d\tau +$$

$$+g(\varepsilon)\exp\left(-\frac{f\beta r_\omega^2\mu^2}{k^2}\int\frac{d\tau}{\rho}\right), \tag{22}$$

unde $g(\varepsilon)$ este o funcție de $\varepsilon$.

Dacă presupunem

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0}\exp\left[-\beta(p - p_0)\right] \approx \frac{1}{\rho_0}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA

ceea ce este justificat atunci cînd compresibilitatea lichidului este foarte mică, relația (22) poate fi aproximată după cum urmează

$$v_r \approx -\frac{f\beta\mu r_\omega}{\rho k}\exp\left(-\frac{\tau}{a}\right)\int\frac{\partial p}{\partial\varepsilon}\exp\left(\frac{\tau}{a}\right)d\tau + g(\varepsilon)\exp\left(-\frac{\tau}{a}\right). \tag{23}$$

Substituind pentru $\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}$ în membrul stîng al ecuației (23) expresia dedusă din (19) și apoi integrînd obținem

$$\begin{aligned} v_r \approx -\frac{k(p_e-p_\omega)}{\mu r_\omega}\Bigg[\frac{1}{\varepsilon\log\varepsilon_0} &- \sum_{n=1}^{N}\frac{4\alpha_n J_0(\alpha_n)J_0(\alpha_n\varepsilon_0)}{J_0^2(\alpha_n)-J_0^2(\alpha_n\varepsilon_0)}[J_0'(\alpha_n\varepsilon)G_0(\alpha_n\varepsilon_0)- \\ &- J_0(\alpha_n\varepsilon_0)G_0'(\alpha_n\varepsilon)]\exp\left(-\frac{\tau}{2a}\right)\sinh\left(\frac{b_n\tau}{2a}\right)- \\ -\sum_{n>N}\frac{4\alpha_n J_0(\alpha_n)J_0(\alpha_n\varepsilon_0)}{J_0^2(\alpha_n)-J_0^2(\alpha_n\varepsilon_0)}&[J_0'(\alpha_n\varepsilon)G_0(\alpha_n\varepsilon_0)-J_0(\alpha_n\varepsilon_0)G_0'(\alpha_n\varepsilon)]\times \\ \times\frac{\exp\left(-\frac{\tau}{2a}\right)}{1+c_n^2}\Bigg\{(\tau-1)\cos\left(\frac{c_n\tau}{2a}\right)&+\frac{c_n^2+\tau}{c_n}\sin\left(\frac{c_n\tau}{2a}\right)\Bigg\}\Bigg] + g(\varepsilon)\exp\left(-\frac{\tau}{a}\right), \end{aligned} \tag{24}$$

unde semnele prim notează derivatele față de argumente. Dacă viteza inițială este dată ca fiind egală cu zero, funcția $g(\varepsilon)$ va avea valoarea

$$\begin{aligned} g(\varepsilon) = \frac{k(p_e-p_\omega)}{\mu r_\omega}\Bigg\{\frac{1}{\varepsilon\log\varepsilon_0} &+ \\ +\sum_{n>N}\frac{4\alpha_n J_0(\alpha_n)J_0(\alpha_n\varepsilon_0)}{[J_0^2(\alpha_n)-J_0^2(\alpha_n\varepsilon_0)](1+c_n^2)}&[J_0'(\alpha_n\varepsilon)G_0(\alpha_n\varepsilon_0)-J_0(\alpha_n\varepsilon_0)G_0'(\alpha_n\varepsilon)]\Bigg\}, \end{aligned}$$

astfel încît

$$\begin{aligned} v_r \approx -\frac{k(p_e-p_\omega)}{\mu r_\omega}\Bigg[&\frac{1}{\varepsilon\log\varepsilon_0}\left(1-\exp\left(-\frac{\tau}{a}\right)\right)- \\ &-\sum_{n=1}^{N}\frac{4\alpha_n J_0(\alpha_n)J_0(\alpha_n\varepsilon_0)}{J_0^2(\alpha_n)-J_0^2(\alpha_n\varepsilon_0)}[J_0'(\alpha_n\varepsilon)G_0(\alpha_n\varepsilon_0)-J_0(\alpha_n\varepsilon_0)G_0'(\alpha_n\varepsilon)]\times \\ &\times\exp\left(-\frac{\tau}{2a}\right)\sinh\left(\frac{b_n\tau}{2a}\right)- \\ &-\sum_{n>N}\frac{4\alpha_n J_0(\alpha_n)J_0(\alpha_n\varepsilon_0)}{J_0^2(\alpha_n)-J_0^2(\alpha_n\varepsilon_0)}[J_0'(\alpha_n\varepsilon)G_0(\alpha_n\varepsilon_0)-J_0(\alpha_n\varepsilon_0)G_0'(\alpha_n\varepsilon)]\times \\ &\times\frac{\exp\left(-\frac{\tau}{2a}\right)}{1+c_n^2}\left\{(\tau-1)\cos\left(\frac{c_n\tau}{2a}\right)+\frac{c_n^2+\tau}{c_n}\sin\left(\frac{c_n\tau}{2a}\right)+\exp\left(-\frac{\tau}{2a}\right)\right\}\Bigg]. \end{aligned} \tag{25}$$

## 6. EXPRESIA APROXIMATIVĂ A DEBITULUI

Este interesant să găsim debitul $Q$, adică curgerea lichidului în sondă prin unitatea de grosime a nisipului dată de

$$Q = -2\pi r_\omega (v_r)_{\varepsilon=1}. \tag{26}$$

Substituind în formula (26) pentru $v_r$ la $\varepsilon = 1$, expresia dedusă din (25) şi folosind următoarea formulă [4]

$$J_0'(\alpha_n) G_0(\alpha_n \varepsilon_0) - J_0(\alpha_n \varepsilon_0) G_0'(\alpha_n) = \frac{J_0(\alpha_n \varepsilon_0)}{\alpha_n J_0(\alpha_n)}, \tag{27}$$

obţinem expresia finală pentru debit

$$\begin{aligned} Q \approx \frac{2\pi k (p_e - p_\omega)}{\mu} & \left[ \frac{1}{\log \varepsilon_0} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{a}\right) \right\} - \right. \\ & - \sum_{n=1}^{N} \frac{4 J_0^2(\alpha_n \varepsilon_0)}{J_0^2(\alpha_n) - J_0^2(\alpha_n \varepsilon_0)} \exp\left(-\frac{\tau}{2a}\right) \sinh\left(\frac{b_n \tau}{2a}\right) - \\ & - \sum_{n>N} \frac{4 J_0^2(\alpha_n \varepsilon_0) \exp\left(-\dfrac{\tau}{2a}\right)}{(1 + c_n^2)[J_0^2(\alpha_n) - J_0^2(\alpha_n \varepsilon_0)]} \left\{ (\tau - 1) \cos\left(\frac{c_n \tau}{2a}\right) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{c_n^2 + \tau}{c_n} \sin\left(\frac{c_n \tau}{2a}\right) + \exp\left(-\frac{\tau}{2a}\right) \right\} \right]. \end{aligned} \tag{28}$$

Din formula (28) se poate vedea uşor că atunci cînd $\tau \to \infty$ avem

$$Q \approx \frac{2\pi k (p_e - p_\omega)}{\mu \log \varepsilon_0} = \tag{29}$$

= debit de stare staţionară.

Cu alte cuvinte, putem spune că debitul adimensional $\overline{Q} = \dfrac{Q\mu}{2\pi k (p_e - p_\omega)}$ se anulează la $\tau = 0$ şi se apropie în mod asimptotic de valoarea $\dfrac{1}{\log \varepsilon_0}$ cînd $\tau \to \infty$, aşa cum era de aşteptat din considerente de ordin fizic.

## ANEXA I

Fie

$$U(\alpha_n \varepsilon) = J_0(\alpha_n \varepsilon) G_0(\alpha_n \varepsilon_0) - J_0(\alpha_n \varepsilon_0) G_0(\alpha_n \varepsilon). \tag{30}$$

În mod evident $U(\alpha_n \varepsilon)$ satisface ecuaţia lui Bessel

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \varepsilon \frac{dU(\alpha_n \varepsilon)}{d\varepsilon} \right] = -\alpha_n^2 U(\alpha_n \varepsilon), \tag{31}$$

astfel încît avem

$$\int_1^{\varepsilon_0} \varepsilon\, U(\alpha_n \varepsilon) \log\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) d\varepsilon = \frac{1}{\alpha_n^2}\left[U(\alpha_n \varepsilon) - \varepsilon \log\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) \frac{dU(\alpha_n \varepsilon)}{d\varepsilon}\right]_1^{\varepsilon_0}. \tag{32}$$

În notația lui Sneddon, formula (32) poate fi scrisă după cum urmează, folosind relațiile (11) și (27),

$$H_0\left[\log\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)\right] = -\frac{\log \varepsilon_0}{\alpha_n^2} \cdot \frac{J_0(\alpha_n \varepsilon_0)}{J_0(\alpha_n)}. \tag{33}$$

Deci cu ajutorul formulei de inversiune [4] ¹) obținem

$$-\frac{\log \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}{\log \varepsilon_0} = \sum \frac{2J_0(\alpha_n)\, J_0(\alpha_n\varepsilon_0)}{J_0^2(\alpha_n \varepsilon_0) - J_0^2(\alpha_n)} \left[J_0(\alpha_n \varepsilon)\, G_0(\alpha_n \varepsilon_0) - J_0(\alpha_n \varepsilon_0)\, G_0(\alpha_n \varepsilon)\right]. \tag{34}$$

## ANEXA II

Dacă $b_n$ se anulează pentru o anumită valoare a lui $n$, să spunem $n = M$, atunci soluția generală a ecuației (12) este

$$\overline{W}(\alpha_M, \tau) = (C + D\tau)\exp\left(-\frac{\tau}{2a}\right) + \frac{1}{\alpha_M^2}\,\frac{J_0(\alpha_M \varepsilon_0)}{J_0(\alpha_M)}, \tag{35}$$

unde $C$ și $D$ sînt constante.

Din condițiile (14) și din (35) avem

$$0 = C + \frac{1}{\alpha_M^2}\,\frac{J_0(\alpha_M \varepsilon_0)}{J_0(\alpha_M)}, \tag{36}$$

$$0 = -\frac{C}{2a} + D.$$

Rezolvînd ecuațiile (36) pentru $C$ și $D$ și substituind apoi aceste valori în formula (35) obținem

$$\overline{W}(\alpha_M, \tau) = \frac{J_0(\alpha_M \varepsilon_0)}{\alpha_M^2\, J_0(\alpha_M)}\left[1 - \left(1 + \frac{\tau}{2a}\right)\exp\left(-\frac{\tau}{2a}\right)\right]. \tag{37}$$

Combinînd cele două soluții, adică (16) și (37), putem scrie

$$\overline{W}(\alpha_n, \tau) = \left[\frac{J_0(\alpha_n \varepsilon_0)}{\alpha_n^2\, J_0(\alpha_n)}\left\{1 - \frac{(1+b_n)}{2b_n}\exp\left(\frac{-1+b_n}{2a}\tau\right) - \frac{(b_n-1)}{2b_n}\exp\left(\frac{-1-b_n}{2a}\tau\right)\right\}\right]\delta_n^{\prime M} +$$

$$+\left[\frac{J_0(\alpha_n \varepsilon_0)}{\alpha_n^2\, J_0(\alpha_n)}\left\{1 - \left(1 + \frac{\tau}{2a}\right)\exp\left(-\frac{\tau}{2a}\right)\right\}\right]\delta_n^M, \tag{38}$$

unde $\delta_n^{\prime M} = \begin{cases} 0 \text{ cînd } n = M \\ 1 \text{ cînd } n \neq M \end{cases}$ și $\delta_n^M = \begin{cases} 1 \text{ cînd } n = M \\ 0 \text{ cînd } n \neq M. \end{cases}$

---

¹) p. 85.

Cu ajutorul formulei de inversiune [4] ¹) obținem din ecuația (38)

$$W = \sum \frac{2\alpha_n^2 J_0^2(\alpha_n)}{J_0^2(\alpha_n \varepsilon_0) - J_0^2(\alpha_n)} \left[J_0(\alpha_n \varepsilon)\, G_0(\alpha_n \varepsilon_0) - J_0(\alpha_n \varepsilon_0)\, G_0(\alpha_n \varepsilon)\right] \times$$

$$\times \left[\left[\frac{J_0(\alpha_n \varepsilon_0)}{\alpha_n^2 J_0(\alpha_n)} \left\{1 - \frac{(1+b_n)}{2b_n} \exp\left(\frac{-1+b_n}{2a}\tau\right) - \frac{(b_n-1)}{2b_n} \exp\left(\frac{-1-b_n}{2a}\tau\right)\right\}\right] \delta_n'^{M} + \right. \tag{39}$$

$$\left. + \left[\frac{J_0(\alpha_n \varepsilon_0)}{\alpha_n^2 J_0(\alpha_n)} \left\{1 - \left(1 + \frac{\tau}{2a}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{2a}\right)\right\}\right] \delta_n^M \right],$$

unde însumarea se extinde asupra tuturor rădăcinilor pozitive ale ecuației (11).

Folosind acum relația (34) și despărțind însumarea de mai sus în două părți, așa cum s-a făcut pentru a se obține formula (19), putem scrie ecuația (39) după cum urmează

$$W = -\frac{\log\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)}{\log \varepsilon_0} + \sum_{n=1}^{N} \frac{J_0(\alpha_n)\, J_0(\alpha_n \varepsilon_0)}{J_0^2(\alpha_n) - J_0^2(\alpha_n \varepsilon_0)} \left[J_0(\alpha_n \varepsilon)\, G_0(\alpha_n \varepsilon_0) - J_0(\alpha_n \varepsilon_0)\, G_0(\alpha_n \varepsilon)\right] \times$$

$$\times \frac{\exp\left(-\frac{\tau}{2a}\right)}{b_n} \left\{(1+b_n) \exp\left(\frac{b_n \tau}{2a}\right) - (1-b_n) \exp\left(-\frac{b_n \tau}{2a}\right)\right\} +$$

$$+ \sum_{n>N} \frac{2J_0(\alpha_n)\, J_0(\alpha_n \varepsilon_0)}{J_0^2(\alpha_n) - J_0^2(\alpha_n \varepsilon_0)} \left[J_0(\alpha_n \varepsilon)\, G_0(\alpha_n \varepsilon_0) - J_0(\alpha_n \varepsilon_0)\, G_0(\alpha_n \varepsilon)\right] \times \tag{40}$$

$$\times \exp\left(-\frac{\tau}{2a}\right) \left\{\cos\left(\frac{c_n \tau}{2a}\right) + c_n \sin\left(\frac{c_n \tau}{2a}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{2J_0(\alpha_M)\, J_0(\alpha_M \varepsilon_0)}{J_0^2(\alpha_M) - J_0^2(\alpha_M \varepsilon_0)} \left[J_0(\alpha_M \varepsilon)\, G_0(\alpha_M \varepsilon_0) - J_0(\alpha_M \varepsilon_0)\, G_0(\alpha_M \varepsilon)\right] \left(1 + \frac{\tau}{2a}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{2a}\right)$$

unde $n$ nu ia niciodată valoarea $M$.

## NOTĂ

Autorul este recunoscător profesorului Dr. B. R. Seth pentru faptul de a-i fi pus la dispoziție toate mijloacele necesare pentru executarea acestor cercetări.

El dorește să mulțumească de asemenea doctorului G. Paria pentru ajutorul dat la elaborarea acestui articol.

*Primită la redacție la 14 iulie 1960*

---

¹) p. 85.

# НЕСТАЦИОНАРНОЕ РАДИАЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ, НЕПОДЧИНЯЮЩЕЕСЯ ЗАКОНУ ДАРСИ, В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

## РЕЗЮМЕ

Предметом настоящей работы является аналитическое решение задачи нестационарного радиального течения сжимаемой жидкости в пористой среде, в том случае, когда течение жидкости подчиняется более общим уравнениям, чем хорошо известному уравнению Дарси. Применяется конечное преобразование Ханкеля для решения дифференциальных уравнений, описывающих этот тип движения, полученных Оровяну и Паскалем. Выводятся выражения для распределения скорости и для расхода.

# NON-DARCIAN UNSTEADY RADIAL FLOW OF COMPRESSIBLE LIQUIDS THROUGH A POROUS MEDIUM

## ABSTRACT

The present paper is concerned with an analytical solution of the problem of unsteady radial flow of a compressible liquid through a porous medium when the flow of the liquid is governed by equations more general than the well-known ones of Darcy. Finite Hankel transforms are employed for solving the basic differential equation describing this type of motion given recently by Oroveanu and Pascal. Expressions for velocity distribution and discharge are given.

## BIBLIOGRAFIE

1. M. MUSKAT, *The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media.* Mc. Graw-Hill Book Company, New York and London, 1937.
2. В. И. АРАВИН, НУМЕРОВ С. Н., *Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде.* ГТТЛ, Москва, 1953, 39—42, 65.
3. T. OROVEANU, H. PASCAL, *On the propagation of pressure waves in a liquid flowing through a porous medium.* Revue de mécanique appliquée, **IV**, *3*, 445 (1959).
4. I. N. SNEDDON, *Fourier Transforms.* Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1951, 90, 85.

# STUDII

## METODE DE CALCUL

# CONTRIBUȚIE LA CALCULUL APROXIMATIV AL COEFICIENȚILOR SERIEI FOURIER A UNEI FUNCȚII PERIODICE

DE

ANDREI RIPIANU[1]

1. Analiza armonică a funcțiilor periodice prezintă în tehnica vibrațiilor o importanță particulară. Determinarea valorilor exacte ale coeficienților care intervin în dezvoltarea în serie Fourier a unei funcții periodice, este posibilă numai în cazul cînd funcția periodică poate fi exprimată sub formă analitică prin expresia $y = f(x)$.

În majoritatea cazurilor care apar în tehnică, o astfel de exprimare a funcției periodice nu este posibilă. De aceea, în mod practic, determinarea coeficienților pentru dezvoltarea în serie Fourier a funcțiilor periodice care apar în tehnică se execută în mod aproximativ, împărțind perioada într-un număr de s părți egale și utilizînd una din schemele de calcul existente (Zipperer, Runge). În cazul utilizării șabloanelor Zipperer $s = 24$ (cazul cel mai frecvent), iar în cazul utilizării schemei de calcul Runge $s = 4k$ unde $k$ este un număr întreg și pozitiv (frecvent se alege $s = 12$ ; $s = 24$ ; $s = 36$).

Eroarea care afectează valorile aproximative obținute ale coeficienților este cu atît mai mare cu cît ordinul armonicei este mai mare. Această eroare poate fi micșorată prin majorarea numărului de diviziuni egale în care se împarte perioada.

În prezenta lucrare am căutat să găsim un procedeu de calcul pentru ameliorarea exactității valorilor coeficienților dezvoltării în serie Fourier obținuți prin utilizarea uneia dintre schemele de calcul existente în cadrul căreia perioada s-a împărțit în $s$ părți egale. În consecință am încercat să găsim relații matematice care să exprime coeficienții seriei Fourier obținuți în cazul împărțirii perioadei în $ks$ părți egale notați $\binom{a_0}{ks}$, $\binom{a_i}{ks}$, $\binom{b_i}{ks}$, în funcție de coeficienții obținuți în cazul împărțirii perioadei în $s$ părți egale notați $\binom{a_0}{s}$, $\binom{a_i}{s}$, $\binom{b_i}{s}$.

---

[1] Institutul politehnic, Cluj.

Am ales cazul general cînd $k = p^n$ propunîndu-ne să determinăm coeficienții $\binom{a_0}{p^n s}$, $\binom{a_i}{p^n s}$, $\binom{b_i}{p^n s}$, în funcție de coeficienții $\binom{a_0}{s}$, $\binom{a_i}{s}$, $\binom{b_i}{s}$.

2. Se consideră o funcție periodică $f(x)$ avînd perioada $l$.

Prin schimbarea de variabilă $x = \frac{l}{2\pi} u$, se obține funcția periodică

$$\varphi(u) = f\left(\frac{l}{2\pi} u\right) = f(x) \tag{1}$$

avînd perioada $2\pi$.

Funcția $\varphi(u)$ se dezvoltă în serie Fourier

$$\varphi(u) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos iu + b_i \sin iu), \tag{2}$$

unde

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(u)\,du\,;\ a_i = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(u)\cos iu\,du\,;\ b_i = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(u)\sin iu\,du. \tag{3}$$

Din (1) și (2) rezultă

$$f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty}\left(a_i \cos i\frac{2\pi}{l}x + b_i \sin i\frac{2\pi}{l}x\right),$$

de unde rezultă că coeficienții $a_0$, $a_i$, $b_i$, din (2) corespund seriei Fourier a funcției $f(x)$.

Pentru calculul efectiv al valorii lui $\varphi(u)$ din (2) se va face o dublă aproximație :

*a*) se va limita dezvoltarea la valorile 1 ; 2 ; . . . ; $m$, ale lui $i$ ;

*b*) pentru calculul lui $a_0$, $a_i$, $b_i$, din (3) se va utiliza formula de cuadratură aproximativă

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \theta(u)\,du \cong \frac{1}{s}\sum_{h=1}^{s} \theta(h\alpha), \tag{4}$$

unde $\theta(u)$ este o funcție periodică de perioadă $2\pi$. Se lucrează cu o valoare aproximativă a integralei $\int_0^{2\pi} \theta(u)\,du$, deci a ariei $OABC$ din figura 1, egală cu aria ce rezultă din sumarea dreptunghiurilor haşurate în figura 1, avînd baza egală cu

$$\alpha = \frac{2\pi}{s} \tag{5}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\theta(u)\,du \cong \frac{\alpha}{2\pi}\sum_{h=1}^{s}\theta(h\alpha) = \frac{1}{s}\sum_{h=1}^{s}\theta(h\alpha).$$

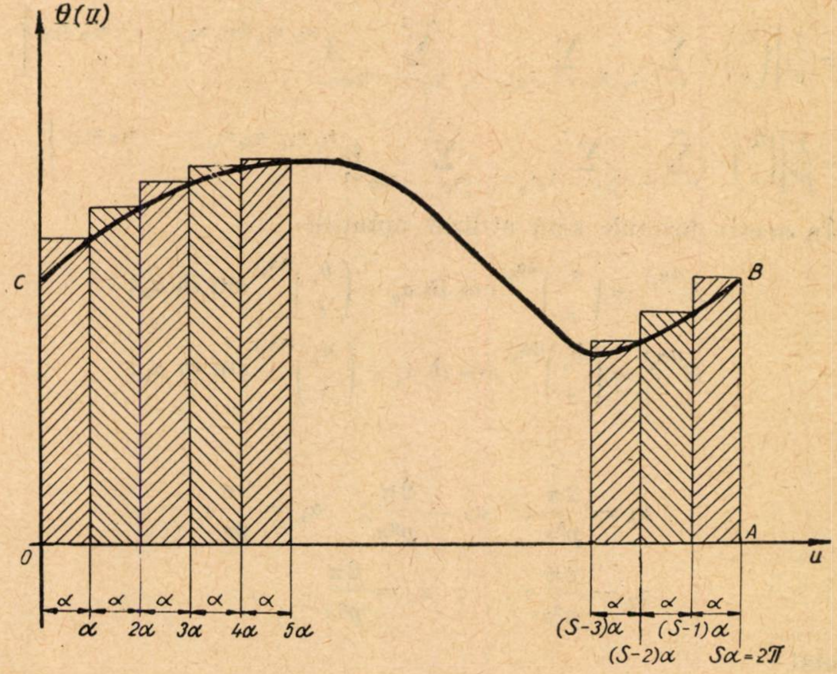


Fig. 1

Se notează

$$\varphi(h\alpha) = y_{h}^{|s}. \tag{5'}$$

Din (3) şi (4) se obţine

$$a_0 \cong \left(\frac{a_0}{s}\right) = \frac{1}{s}\sum_{h=1}^{s} y_{h}^{|s}\,; \quad a_i \cong \left(\frac{a_i}{s}\right) = \frac{2}{s}\sum_{h=1}^{s} y_{h}^{|s}\cos ih\alpha\,;$$

$$b_i \cong \left(\frac{b_i}{s}\right) = \frac{2}{s}\sum_{h=1}^{s} y_{h}^{|s}\sin ih\alpha. \tag{6}$$

După efectuarea unor calcule laborioase se obţin expresiile coeficienţilor $\left(\frac{a_0}{p^n s}\right)$, $\left(\frac{a_i}{p^n s}\right)$, $\left(\frac{b_i}{p^n s}\right)$, corespunzători fracţionării perioadei $(0-2\pi)$

în $p^n s$ părți egale în funcție de coeficienții $\binom{a_0}{s}$, $\binom{a_i}{s}$, $\binom{b_i}{s}$, ce se obțin prin fracționarea perioadei $(0-2\pi)$ în $s$ părți egale și imprimarea unor decalaje perioadei $(0-2\pi)$ în lungul axei $Ou$ a căror valori rezultă din formulele următoare:

$$\binom{a_0}{p^n s} = \frac{1}{p}\left[\binom{a_0}{p^{n-1}s} + \sum_{\sigma=1}^{p-1}\binom{a_0}{p^{n-1}s}^{(\sigma\alpha_n)}\right], \tag{7}$$

$$\binom{a_i}{p^n s} = \frac{1}{p^n}\left[\binom{a_i}{s} + \sum_{\varphi=1}^{n}\sum_{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\varphi)_n}\sum_{\sigma_{\lambda_1},\sigma_{\lambda_2},\ldots,\sigma_{\lambda\varphi}=1}^{p-1} A^{(\sigma_{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}+\sigma_{\lambda_2}\alpha_{\lambda_2}+\ldots+\sigma_{\lambda\varphi}\alpha_{\lambda\varphi})}\right],$$

$$\binom{b_i}{p^n s} = \frac{1}{p^n}\left[\binom{b_i}{s} + \sum_{\varphi=1}^{n}\sum_{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\varphi)_n}\sum_{\sigma_{\lambda_1},\sigma_{\lambda_2},\ldots,\sigma_{\lambda\varphi}=1}^{p-1} B^{(\sigma_{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}+\sigma_{\lambda_2}\alpha_{\lambda_2}+\ldots+\sigma_{\lambda\varphi}\alpha_{\lambda\varphi})}\right].$$

În aceste formule s-au utilizat notațiile

$$\begin{aligned} A^{(h\alpha_q)} &= \binom{a_i}{s}^{(h\alpha_q)}\cos ih\,\alpha_q - \binom{b_i}{s}^{(h\alpha_q)}\sin ih\,\alpha_q; \\ B^{(h\alpha_q)} &= \binom{b_i}{s}^{(h\alpha_q)}\cos ih\,\alpha_q + \binom{a_i}{s}^{(h\alpha_q)}\sin ih\,\alpha_q; \end{aligned} \tag{8}$$

și

$$\begin{aligned} &\alpha_\lambda = \frac{2\pi}{p^\lambda s}; \quad \alpha_\mu = \frac{2\pi}{p^\mu s}; \quad \alpha_1 = \frac{2\pi}{ps}; \\ &\alpha_2 = \frac{2\pi}{p^2 s}; \ldots; \quad \alpha_\varphi = \frac{2\pi}{p^\varphi s}. \end{aligned} \tag{9}$$

Simbolul

$$\sum_{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\varphi)_n} a_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\varphi}$$

unde

$$a_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\varphi} = \sum_{\sigma_{\lambda_1},\sigma_{\lambda_2},\ldots,\sigma_{\lambda\varphi}=1}^{p-1} A^{(\sigma_{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}+\sigma_{\lambda_2}\alpha_{\lambda_2}+\ldots+\sigma_{\lambda\varphi}\alpha_{\lambda\varphi})}$$

înseamnă o sumă a valorilor $a_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\varphi}$ obținute făcînd ca grupa de indici $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\varphi$ să parcurgă cele $C_n^\varphi$ grupe de cîte $\varphi$ indici alcătuite cu numerele 1; 2; ...; $n$ deci o sumă de $C_n^\varphi$ termeni.
Simbolul

$$\sum_{\sigma_{\lambda_1},\sigma_{\lambda_2},\ldots,\sigma_{\lambda\varphi}=1}^{p-1} b_{\sigma_{\lambda_1},\sigma_{\lambda_2},\ldots,\sigma_{\lambda\varphi}},$$

unde

$$b_{\sigma_{\lambda_1},\,\sigma_{\lambda_2},\,\dots,\,\sigma_{\lambda\varphi}} = A^{(\sigma_{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}+\sigma_{\lambda_2}\alpha_{\lambda_2}+\dots+\sigma_{\lambda\varphi}\alpha_{\lambda\varphi})}$$

reprezintă o sumă a valorilor $b_{\sigma_{\lambda_1},\,\sigma_{\lambda_2},\,\dots,\,\sigma_{\lambda\varphi}}$ obținută făcînd ca indicii $\sigma_{\lambda_1}, \sigma_{\lambda_2}, \dots, \sigma_{\lambda\varphi}$ să ia independent valorile $1; 2; \dots; p-1$, deci o sumă de $(p-1)^{\varphi}$ termeni.

## EXEMPLE NUMERICE

Pentru a pune în evidență utilitatea formulelor generale (7), vom trata două exemple numerice de calcul.

1. Fie $p = 2$; $n = 3$; $s = 12$.

Pentru $\lambda = 1; 2; 3$, cu ajutorul relației $\alpha_\lambda = \frac{2\pi}{p^\lambda s}$ se calculează

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{12};\quad \alpha_2 = \frac{\pi}{24};\quad \alpha_3 = \frac{\pi}{48};\quad \alpha_1+\alpha_2 = \frac{\pi}{8};\quad \alpha_2+\alpha_3 = \frac{\pi}{16};$$

$$\alpha_3+\alpha_1 = \frac{5\pi}{48};\quad \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = \frac{7\pi}{48}.$$

Se introduc aceste valori numerice în (7) și se obține

$$\binom{a_0}{96} = \frac{1}{8}\left[\binom{a_0}{12} + \binom{a_0}{12}^{\left(\frac{\pi}{12}\right)} + \binom{a_0}{12}^{\left(\frac{\pi}{24}\right)} + \binom{a_0}{12}^{\left(\frac{\pi}{48}\right)} + \binom{a_0}{12}^{\left(\frac{\pi}{8}\right)} + \binom{a_0}{12}^{\left(\frac{\pi}{16}\right)} + \right.$$
$$\left. + \binom{a_0}{12}^{\left(\frac{5\pi}{48}\right)} + \binom{a_0}{12}^{\left(\frac{7\pi}{48}\right)}\right], \tag{10}$$

$$\binom{a_i}{96} = \frac{1}{8}\left[\binom{a_i}{12} + \binom{a_i}{12}^{\left(\frac{\pi}{12}\right)} \cos i\frac{\pi}{12} - \binom{b_i}{12}^{\left(\frac{\pi}{12}\right)} \sin i\frac{\pi}{12} + \binom{a_i}{12}^{\left(\frac{\pi}{24}\right)} \cos i\frac{\pi}{24} - \right.$$
$$- \binom{b_i}{12}^{\left(\frac{\pi}{24}\right)} \sin i\frac{\pi}{24} + \binom{a_i}{12}^{\left(\frac{\pi}{48}\right)} \cos i\frac{\pi}{48} - \binom{b_i}{12}^{\left(\frac{\pi}{48}\right)} \sin i\frac{\pi}{48} + \binom{a_i}{12}^{\left(\frac{\pi}{8}\right)} \cos i\frac{\pi}{8} -$$
$$- \binom{b_i}{12}^{\left(\frac{\pi}{8}\right)} \sin i\frac{\pi}{8} + \binom{a_i}{12}^{\left(\frac{\pi}{16}\right)} \cos i\frac{\pi}{16} - \binom{b_i}{12}^{\left(\frac{\pi}{16}\right)} \sin i\frac{\pi}{16} + \binom{a_i}{12}^{\left(\frac{5\pi}{48}\right)} \cos i\frac{5\pi}{48} -$$
$$\left. - \binom{b_i}{12}^{\left(\frac{5\pi}{48}\right)} \sin i\frac{5\pi}{48} + \binom{a_i}{12}^{\left(\frac{7\pi}{48}\right)} \cos i\frac{7\pi}{48} - \binom{b_i}{12}^{\left(\frac{7\pi}{48}\right)} \sin i\frac{7\pi}{48}\right], \tag{11}$$

$$\binom{b_i}{96} = \frac{1}{8}\left[\binom{b_i}{12} + \binom{b_i}{12}^{\left(\frac{\pi}{12}\right)} \cos i\frac{\pi}{12} + \binom{a_i}{12}^{\left(\frac{\pi}{12}\right)} \sin i\frac{\pi}{12} + \binom{b_i}{12}^{\left(\frac{\pi}{24}\right)} \cos i\frac{\pi}{24} + \right.$$

$$+ \binom{a_i}{12}^{\left(\frac{\pi}{24}\right)} \sin i\frac{\pi}{24} + \binom{b_i}{12}^{\left(\frac{\pi}{48}\right)} \cos i\frac{\pi}{48} + \binom{a_i}{12}^{\left(\frac{\pi}{48}\right)} \sin i\frac{\pi}{48} + \binom{b_i}{12}^{\left(\frac{\pi}{8}\right)} \cos i\frac{\pi}{8} +$$

$$+ \binom{a_i}{12}^{\left(\frac{\pi}{8}\right)} \sin i\frac{\pi}{8} + \binom{b_i}{12}^{\left(\frac{\pi}{16}\right)} \cos i\frac{\pi}{16} + \binom{a_i}{12}^{\left(\frac{\pi}{16}\right)} \sin i\frac{\pi}{16} + \binom{b_i}{12}^{\left(\frac{5\pi}{48}\right)} \cos i\frac{5\pi}{48} +$$

$$\left. + \binom{a_i}{12}^{\left(\frac{5\pi}{48}\right)} \sin i\frac{5\pi}{48} + \binom{b_i}{12}^{\left(\frac{7\pi}{48}\right)} \cos i\frac{7\pi}{48} + \binom{a_i}{12}^{\left(\frac{7\pi}{48}\right)} \sin i\frac{7\pi}{48}\right]. \qquad (12)$$

Se calculează cu ajutorul şabloanelor lui Zipperer sau al tabelelor lui Runge valorile coeficienţilor $\binom{a_0}{12}$, $\binom{a_i}{12}$, $\binom{b_i}{12}$ dînd perioadei $(0 - 2\pi)$ în lungul axei *Ou* decalaje egale cu : $0; \frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{24}; \frac{\pi}{48}; \frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{16}; \frac{5\pi}{48}; \frac{7\pi}{48}$.

Se introduc valorile astfel obţinute în relaţiile (10), (11), (12), obţinîndu-se astfel valorile coeficienţilor $\binom{a_0}{96}$, $\binom{a_i}{96}$, $\binom{b_i}{96}$.

**2.** Fie $p = 2$; $n = 4$; $s = 8$.

Pentru $\lambda = 1; 2; 3; 4$ cu ajutorul relaţiei $\alpha_\lambda = \frac{2\pi}{p^\lambda s}$ se calculează

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{8};\ \alpha_2 = \frac{\pi}{16};\ \alpha_3 = \frac{\pi}{32};\ \alpha_4 = \frac{\pi}{64};\ \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{3\pi}{16};\ \alpha_1 + \alpha_3 = \frac{5\pi}{32};$$

$$\alpha_1 + \alpha_4 = \frac{9\pi}{64};\ \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{3\pi}{32};\ \alpha_2 + \alpha_4 = \frac{5\pi}{64};\ \alpha_3 + \alpha_4 = \frac{3\pi}{64};\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{7\pi}{32};$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = \frac{13\pi}{64};\quad \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 = \frac{11\pi}{64};\quad \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \frac{7\pi}{64};$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \frac{15\pi}{64}.$$

Se introduc aceste valori numerice în (7) şi se obţine

$$\binom{a_0}{128} = \frac{1}{16}\left[\binom{a_0}{8} + \binom{a_0}{8}^{\left(\frac{\pi}{8}\right)} + \binom{a_0}{8}^{\left(\frac{\pi}{16}\right)} + \binom{a_0}{8}^{\left(\frac{\pi}{32}\right)} + \binom{a_0}{8}^{\left(\frac{\pi}{64}\right)} + \binom{a_0}{8}^{\left(\frac{3\pi}{16}\right)} + \right.$$

$$+ \binom{a_0}{8}^{\left(\frac{5\pi}{32}\right)} + \binom{a_0}{8}^{\left(\frac{9\pi}{64}\right)} + \binom{a_0}{8}^{\left(\frac{3\pi}{32}\right)} + \binom{a_0}{8}^{\left(\frac{5\pi}{64}\right)} + \binom{a_0}{8}^{\left(\frac{3\pi}{64}\right)} + \binom{a_0}{8}^{\left(\frac{7\pi}{32}\right)} +$$

$$\left. + \binom{a_0}{8}^{\left(\frac{13\pi}{64}\right)} + \binom{a_0}{8}^{\left(\frac{11\pi}{64}\right)} + \binom{a_0}{8}^{\left(\frac{7\pi}{64}\right)} + \binom{a_0}{8}^{\left(\frac{15\pi}{64}\right)}\right], \qquad (13)$$

$$\begin{aligned}
\binom{a_i}{128} = \frac{1}{16}\Bigg[&\binom{a_i}{8} + \binom{a_i}{8}^{\left(\frac{\pi}{8}\right)} \cos i\frac{\pi}{8} - \binom{b_i}{8}^{\left(\frac{\pi}{8}\right)} \sin i\frac{\pi}{8} + \binom{a_i}{8}^{\left(\frac{\pi}{16}\right)} \cos i\frac{\pi}{16} - \\
&- \binom{b_i}{8}^{\left(\frac{\pi}{16}\right)} \sin i\frac{\pi}{16} + \binom{a_i}{8}^{\left(\frac{\pi}{32}\right)} \cos i\frac{\pi}{32} - \binom{b_i}{8}^{\left(\frac{\pi}{32}\right)} \sin i\frac{\pi}{32} + \binom{a_i}{8}^{\left(\frac{\pi}{64}\right)} \cos i\frac{\pi}{64} - \\
&- \binom{b_i}{8}^{\left(\frac{\pi}{64}\right)} \sin i\frac{\pi}{64} + \binom{a_i}{8}^{\left(\frac{3\pi}{16}\right)} \cos i\frac{3\pi}{16} - \binom{b_i}{8}^{\left(\frac{3\pi}{16}\right)} \sin i\frac{3\pi}{16} + \binom{a_i}{8}^{\left(\frac{5\pi}{32}\right)} \cos i\frac{5\pi}{32} - \\
&- \binom{b_i}{8}^{\left(\frac{5\pi}{32}\right)} \sin i\frac{5\pi}{32} + \binom{a_i}{8}^{\left(\frac{9\pi}{64}\right)} \cos i\frac{9\pi}{64} - \binom{b_i}{8}^{\left(\frac{9\pi}{64}\right)} \sin i\frac{9\pi}{64} + \binom{a_i}{8}^{\left(\frac{3\pi}{32}\right)} \cos i\frac{3\pi}{32} - \\
&- \binom{b_i}{8}^{\left(\frac{3\pi}{32}\right)} \sin i\frac{3\pi}{32} + \binom{a_i}{8}^{\left(\frac{5\pi}{64}\right)} \cos i\frac{5\pi}{64} - \binom{b_i}{8}^{\left(\frac{5\pi}{64}\right)} \sin i\frac{5\pi}{64} + \binom{a_i}{8}^{\left(\frac{3\pi}{64}\right)} \cos i\frac{3\pi}{64} - \\
&- \binom{b_i}{8}^{\left(\frac{3\pi}{64}\right)} \sin i\frac{3\pi}{64} + \binom{a_i}{8}^{\left(\frac{7\pi}{32}\right)} \cos i\frac{7\pi}{32} - \binom{b_i}{8}^{\left(\frac{7\pi}{32}\right)} \sin i\frac{7\pi}{32} + \binom{a_i}{8}^{\left(\frac{13\pi}{64}\right)} \cos i\frac{13\pi}{64} - \\
&- \binom{b_i}{8}^{\left(\frac{13\pi}{64}\right)} \sin i\frac{13\pi}{64} + \binom{a_i}{8}^{\left(\frac{11\pi}{64}\right)} \cos i\frac{11\pi}{64} - \binom{b_i}{8}^{\left(\frac{11\pi}{64}\right)} \sin i\frac{11\pi}{64} + \binom{a_i}{8}^{\left(\frac{7\pi}{64}\right)} \cos i\frac{7\pi}{64} - \\
&- \binom{b_i}{8}^{\left(\frac{7\pi}{64}\right)} \sin i\frac{7\pi}{64} + \binom{a_i}{8}^{\left(\frac{15\pi}{64}\right)} \cos i\frac{15\pi}{64} - \binom{b_i}{8}^{\left(\frac{15\pi}{64}\right)} \sin i\frac{15\pi}{64}\Bigg], \qquad (14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\binom{b_i}{128} = \frac{1}{16}\Bigg[&\binom{b_i}{8} + \binom{b_i}{8}^{\left(\frac{\pi}{8}\right)} \cos i\frac{\pi}{8} + \binom{a_i}{8}^{\left(\frac{\pi}{8}\right)} \sin i\frac{\pi}{8} + \binom{b_i}{8}^{\left(\frac{\pi}{16}\right)} \cos i\frac{\pi}{16} + \\
&+ \binom{a_i}{8}^{\left(\frac{\pi}{16}\right)} \sin i\frac{\pi}{16} + \binom{b_i}{8}^{\left(\frac{\pi}{32}\right)} \cos i\frac{\pi}{32} + \binom{a_i}{8}^{\left(\frac{\pi}{32}\right)} \sin i\frac{\pi}{32} + \binom{b_i}{8}^{\left(\frac{\pi}{64}\right)} \cos i\frac{\pi}{64} + \\
&+ \binom{a_i}{8}^{\left(\frac{\pi}{64}\right)} \sin i\frac{\pi}{64} + \binom{b_i}{8}^{\left(\frac{3\pi}{16}\right)} \cos i\frac{3\pi}{16} + \binom{a_i}{8}^{\left(\frac{3\pi}{16}\right)} \sin i\frac{3\pi}{16} + \binom{b_i}{8}^{\left(\frac{5\pi}{32}\right)} \cos i\frac{5\pi}{32} + \\
&+ \binom{a_i}{8}^{\left(\frac{5\pi}{32}\right)} \sin i\frac{5\pi}{32} + \binom{b_i}{8}^{\left(\frac{9\pi}{64}\right)} \cos i\frac{9\pi}{64} + \binom{a_i}{8}^{\left(\frac{9\pi}{64}\right)} \sin i\frac{9\pi}{64} + \binom{b_i}{8}^{\left(\frac{3\pi}{32}\right)} \cos i\frac{3\pi}{32} + \\
&+ \binom{a_i}{8}^{\left(\frac{3\pi}{32}\right)} \sin i\frac{3\pi}{32} + \binom{b_i}{8}^{\left(\frac{5\pi}{64}\right)} \cos i\frac{5\pi}{64} + \binom{a_i}{8}^{\left(\frac{5\pi}{64}\right)} \sin i\frac{5\pi}{64} + \binom{b_i}{8}^{\left(\frac{3\pi}{64}\right)} \cos i\frac{3\pi}{64} + \\
&+ \binom{a_i}{8}^{\left(\frac{3\pi}{64}\right)} \sin i\frac{3\pi}{64} + \binom{b_i}{8}^{\left(\frac{7\pi}{32}\right)} \cos i\frac{7\pi}{32} + \binom{a_i}{8}^{\left(\frac{7\pi}{32}\right)} \sin i\frac{7\pi}{32} + \binom{b_i}{8}^{\left(\frac{13\pi}{64}\right)} \cos i\frac{13\pi}{64} + \\
&+ \binom{a_i}{8}^{\left(\frac{13\pi}{64}\right)} \sin i\frac{13\pi}{64} + \binom{b_i}{8}^{\left(\frac{11\pi}{64}\right)} \cos i\frac{11\pi}{64} + \binom{a_i}{8}^{\left(\frac{11\pi}{64}\right)} \sin i\frac{11\pi}{64} + \binom{b_i}{8}^{\left(\frac{7\pi}{64}\right)} \cos i\frac{7\pi}{64} + \\
&+ \binom{a_i}{8}^{\left(\frac{7\pi}{64}\right)} \sin i\frac{7\pi}{64} + \binom{b_i}{8}^{\left(\frac{15\pi}{64}\right)} \cos i\frac{15\pi}{64} + \binom{a_i}{8}^{\left(\frac{15\pi}{64}\right)} \sin i\frac{15\pi}{64}\Bigg]. \qquad (15)
\end{aligned}$$

Se calculează cu ajutorul şabloanelor lui Zipperer sau a tabelelor lui Runge valorile coeficienţilor $\begin{pmatrix}a_0\\8\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a_i\\8\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}b_i\\8\end{pmatrix}$, dînd perioadei $(0-2\pi)$ în lungul axei $Ou$ decalaje egale cu

$$0;\ \frac{\pi}{8};\ \frac{\pi}{16};\ \frac{\pi}{32};\ \frac{\pi}{64};\ \frac{3\pi}{16};\ \frac{5\pi}{32};\ \frac{9\pi}{64};\ \frac{3\pi}{32};\ \frac{5\pi}{64};\ \frac{3\pi}{64};\ \frac{7\pi}{32};$$
$$\frac{13\pi}{64};\ \frac{11\pi}{64};\ \frac{7\pi}{64};\ \frac{15\pi}{64}.$$

Se introduc valorile astfel obţinute în relaţiile (13), (14), (15), obţinîndu-se astfel valorile coeficienţilor $\begin{pmatrix}a_0\\128\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a_i\\128\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}b_i\\128\end{pmatrix}$.

Aceste calcule se pot executa pentru orice valoare a ordinului $i$.

Pe baza formulelor (7) se pot determina valorile aproximative ale coeficienţilor $\begin{pmatrix}a_i\\p^n s\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}b_i\\p^n s\end{pmatrix}$ corespunzătoare unui număr de $p^n s$ diviziuni egale în care s-a împărţit perioada atunci cînd se cunosc valorile coeficienţilor $\begin{pmatrix}a_i\\s\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}b_i\\s\end{pmatrix}$ corespunzătoare unui număr de $s$ diviziuni egale, în care s-a împărţit perioada plecînd însă de la origini diferite plasate pe axa absciselor $Ou$.

Avantajele metodei de determinare aproximativă a coeficienţilor seriei Fourier propuse în prezenta lucrare faţă de celelalte metode existenţe sînt următoarele :

— Utilizarea schemelor existente de calcul a valorilor aproximative ale coeficienţilor seriei Fourier (Runge, Zipperer), necesită calcule foarte laborioase atunci, cînd se cere o exactitate mai mare pentru valorile coeficienţilor determinaţi, adică atunci cînd perioada funcţiei periodice trebuie împărţită într-un mare număr de părţi egale. Utilizînd relaţiile (7) se pot deduce valorile coeficienţilor seriei Fourier cu o exactitate mai mare pe baza valorilor foarte aproximative ale acestor coeficienţi obţinute rapid şi comod, prin aplicarea schemelor de calcul existente (Runge, Zipperer), în cazul împărţirii perioadei într-un mic număr de părţi egale.

— Formulele (7) permit deducerea valorilor aproximative ale coeficienţilor seriei Fourier pentru o mult mai largă gamă de valori a numărului de diviziuni egale în care se fracţionează perioada decît cea permisă de schemele de calcul existente.

Rezultă de aici, că aceste formule permit obţinerea valorilor aproximative ale coeficienţilor seriei Fourier cu orice grad de aproximare dorit.

Cu cît numărul de diviziuni egale $p^n s$ este mai mare cu atît valorile coeficienţilor $\begin{pmatrix}a_0\\p^n s\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a_i\\p^n s\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}b_i\\p^n s\end{pmatrix}$, obţinute cu ajutorul formulelor (7) sînt mai exacte.

Numărul de diviziuni egale $p^n s$ creşte repede atunci, cînd $p$ sau $n$ cresc şi deci exactitatea valorilor coeficienţilor seriei Fourier obţinuţi cu formulele (7) creşte şi ea repede.

*Primită la redacţie la 21 noiembrie 1959*; *o nouă versiune la 27 octombrie 1960*

# К ПРИБЛИЖЕННОМУ РАСЧЕТУ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЯДА ФУРЬЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

## РЕЗЮМЕ

В работе представлен способ расчета ввиду улучшения точности значений коэффициентов разложения в ряд Фурье, полученных путем применения одной из существующих расчетных схем.

Способ проиллюстрирован двумя численными примерами.

# CONTRIBUTION AU CALCUL APPROXIMATIF DES COEFFICIENTS DE LA SÉRIE DE FOURIER D'UNE FONCTION PÉRIODIQUE

## RÉSUMÉ

L'auteur propose un procédé de calcul permettant d'améliorer l'exactitude des valeurs des coefficients du développement en série de Fourier fournis par l'utilisation d'un des schémas de calcul actuels.

Le procédé est illustré par deux exemples numériques.

## BIBLIOGRAFIE

1. G. Scotto Lavina, *Sul calcolo dei coeficienti approsimati nell analisi armonico delle funzioni periodiche.* Revista di Ingegneria, *10* (1952).
2. Zipperer, *Schwingungslehre.* **953**, **961/961 a**. Verlag De Gruyter, Berlin, 1955.

# MĂSURAREA VIBRAȚIILOR PE MODELE DE PLĂCI CURBE SUBȚIRI ȘI PE MODELE TRIDIMENSIONALE DE SISTEME DE BARE CU AJUTORUL UNUI APARAT ELECTRONIC

DE

ALEXANDER LISOWSKI ¹)

În acest articol se studiază legea dimensională pentru modele de plăci curbe subțiri, cu aplicații la vibrațiile proprii ale modelelor și se prezintă un aparat special pentru măsurarea deplasărilor statice și dinamice cu ajutorul unui traductor capacitiv.

Lucrarea a fost executată în Secția de mecanică a mediilor continue a Institutului pentru probleme tehnice fundamentale al Academiei Poloneze de Științe. Partea electronică a aparatului a fost construită de către ing. A. Ormicki, șef de lucrări la Academia de mine și metalurgie din Cracovia.

## 1. STABILIREA LEGILOR DIMENSIONALE PENTRU PLĂCILE CURBE SUBȚIRI

Ne vom baza pe ipoteza analizei dimensionale și pe legea sa fundamentală stabilită de E. Buckingham (legea $\pi$). Presupunînd existența unei similitudini geometrice între modelul construit și obiectul real, dimensiunile sale pot fi determinate cu ajutorul unei singure valori $L$. Atunci frecvența vibrațiilor proprii $n$ depinde de forma și valoarea modelului, de modulul de elasticitate $E$, de masa datorită unei unități de suprafață a învelitorii $\mu$ și de coeficientul lui Poisson $\nu$.

Aceste valori se exprimă prin sistemul CGS astfel :

$$L = [\mathrm{cm}^1], \qquad \mu = [\mathrm{cm}^{-3}\mathrm{g}^1], \qquad n = [\mathrm{s}^{-1}],$$
$$E = [\mathrm{cm}^{-1}\mathrm{g}^1\mathrm{s}^{-2}], \qquad \nu = [\mathrm{cm}^0\mathrm{g}^0\mathrm{s}^0].$$

---

¹) Laboratorul de încercări pe modele al Academiei de Științe Poloneze, filiala Cracovia.

Rezultă

$$n = \theta\,(E, L, \mu : \nu), \tag{1}$$

valorile independente dimensional din această expresie fiind $E$, $L$ și $\mu$.

Determinantul format de exponenții valorilor acestor expresii trebuie să fie diferit de zero; aceasta are loc în cazul nostru

$$\left|\begin{array}{ccc} G & C & S \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{array}\right| = 1\,(1\cdot 0 + 3\cdot 0) + 1\,(0) - 2\,(-1\cdot 1) = 2.$$

Exprimînd valoarea $\nu$ dependentă dimensional, cu ajutorul valorilor independente dimensional, obținem

$$\nu = \pi_1 \cdot E^{l_1} L^{l_1} \mu^{m_1}. \tag{2}$$

Folosind valoarea $\nu$ în sistemul $C\,G\,S$, putem scrie

$$[\mathrm{cm}^0 \mathrm{g}^0 \mathrm{s}^0] = [\mathrm{cm}^{-e_1} \mathrm{g}^{e_1} \mathrm{s}^{-2e_1} \mathrm{cm}^{l_1} \mathrm{cm}^{-3m} \mathrm{g}^{1m}].$$

Comparînd ambii membri ai ecuației, găsim

$$0 = -e_1 + l_1 - 3\,m_1,$$
$$0 = e_1 + m_1,$$
$$0 = -2\,e_1.$$

Soluția acestor trei ecuații dă $e_1 = m = l_1 = 0$.

Prin substituirea acestor valori în ecuația (2), obținem

$$\nu = \pi_1. \tag{3}$$

Aplicînd legea lui Buckingham funcției (1) obținem ¹)

$$n = \varphi\,(\nu) \cdot E^e L^l \mu^m. \tag{4}$$

Comparînd ambii termeni ai ecuației găsim

$$[\mathrm{s}^{-1}] = [\mathrm{cm}^{-e} \mathrm{g}^e \mathrm{s}^{-2e} \mathrm{cm}^l \mathrm{cm}^{3m} \mathrm{g}^m],$$

---

¹) Dacă în funcția omogenă și invariabilă dimensional $\Phi\,(A_1, \ldots, A_m;\ P_1, \ldots, P_q)$ argumentele $A_1, \ldots, A_m$ sînt independente dimensional, iar argumentele $P_1, \ldots, P_q$ sînt dependente dimensional de $A_1, \ldots, A_m$, adică dacă sînt exprimate în modul următor:

$$P_1 = \pi_1 A_1^{r_{11}}, \ldots, A_m^{r_{m1}} \qquad P_q = \pi_q A_1^{r_{qr}}, \ldots, A_m^{r_{mq}},$$

unde $\pi_1, \ldots, \pi_q$ sînt numere adimensionale, iar exponenții $r_{11}, \ldots, r_{mq}$ sînt numere reale, $\Phi$ trebuie să aibă forma

$$\Phi\,(A_1, \ldots, A_m;\ P_1, \ldots, P_q) = \varphi\,(\pi_1, \ldots, \pi_q)\, A_1^{f_1}, \ldots, A_m^{f_m}$$

unde $\varphi\,(\pi_1, \ldots, \pi_q)$ este o funcție ordinară de argumentele adimensionale $\pi_1, \ldots, \pi_q$ și nu depinde de $A_1, \ldots, A_m$, iar exponenții $f_1, \ldots, f_m$ (reali) nu depind de $\pi_1, \ldots, \pi_q$ și de $A_1, \ldots, A_m$.

ceea ce duce la sistemul de ecuații

$$\begin{aligned} 0 &= -e + l - 3m, \\ 0 &= e + m, \\ -1 &= -2e. \end{aligned}$$

Rezolvînd sistemul de ecuații, constatăm că $e = \frac{1}{2}$, $l = -1$ și $m = -\frac{1}{2}$. Substituind aceste valori în ecuația (4) ajungem la următoarea concluzie :

$$n = \varphi(\nu) E^{\frac{1}{2}} L^{-1} \mu^{-\frac{1}{2}} = \varphi(\nu) \frac{1}{L} \sqrt{\frac{E}{\mu}}. \tag{5}$$

Neglijînd coeficientul lui Poisson, obținem o formulă dimensională foarte simplă

$$\frac{n'}{n''} = \frac{L''}{L'} \cdot \sqrt{\frac{E'}{E''} \cdot \frac{\mu''}{\mu'}}, \tag{6}$$

unde valorile notate cu indice prim se referă la primul obiect, iar acelea notate cu indice secund, la cel de-al doilea obiect.

Analizînd ecuația (6) constatăm că frecvența vibrațiilor a două modele diferite, construită din același material și avînd forme similare, este invers proporțională cu valorile liniare ale modelelor.

## 2. APARAT PENTRU MĂSURAREA DEPLASĂRILOR STATICE ȘI DINAMICE, FUNCȚIONÎND PE BAZA VARIAȚIILOR DE CAPACITATE

Acest aparat a fost proiectat și realizat special pentru măsurarea vibrațiilor pe modele.

*Caracteristicile aparatului.* Aparatul permite :

1) măsurători fără solicitarea obiectului măsurat ;
2) sensibilitate mare (funcționare la o intensitate mică a difuzorului) ;
3) un domeniu mare al frecvenței măsurate ;
4) calibrare statică ușoară.

La aceasta se adaugă dimensiunile relativ mici ale aparatului, simplicitatea de construcție (poate fi construit într-un atelier electromecanic de laborator), precum și costul scăzut.

Aparatul constă din următoarele 3 părți principale :

1) sistemul de traductori capacitivi (două sisteme separate) ;
2) voltmetrul electronic cu ieșire adaptată la oscilograf ;
3) blocul de alimentare (220 V curent alternativ).

### 2.1. SISTEMUL DE TRADUCTOR CAPACITIV

Schema electrică a traductorului este arătată în figura 1. Tubul triodo-hexodă ECH81 este adaptat la circuitul traductorului. Partea triodă a lămpii funcționează ca oscilator de tip MEISENER, generînd curent alternativ cu frecvența de aproximativ 10 Mc/s. Partea hexodă lucrează ca detector sensibil la fază, iar circuitul de măsurat este cuplat electronic. Defazarea produsă prin dezacordarea circuitului de măsurare (circuitul oscilant format din bobină și condensator, compus din armătura caldă

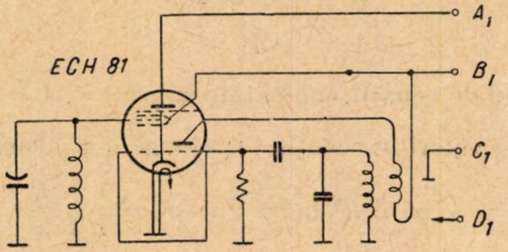


Fig. 1

a traductorului și model) are ca rezultat variația componentei continue a curentului anodic în hexodă. Hexoda lucrează cu sarcină rezistivă, tensiunea de ieșire, se aplică voltmetrul electronic în punte, cu indicator.

Acesta este realizat pe baza tuburilor EBL 21 montate în punte cu sarcină catodică. Anodul lămpii ECH81 este cuplat galvanic cu prima

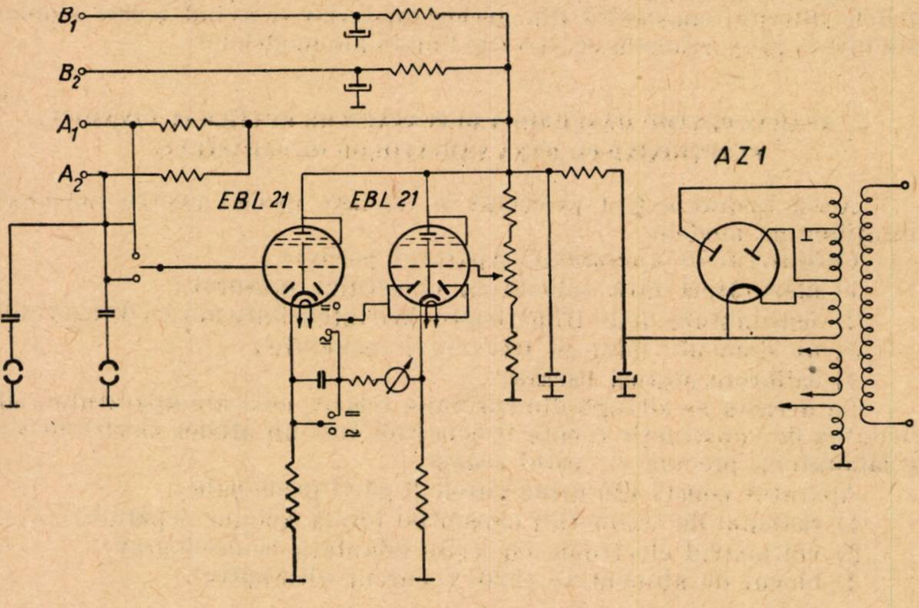


Fig. 2

grilă a tubului din partea stîngă a voltmetrului EBL 21, ceea ce face posibil să se măsoare deplasările statice și să se calibreze static sistemul de măsurare. În timpul măsurării deplasărilor dinamice, diodele uneia din lămpile EBL 21 servesc pentru detectarea semnalului alternativ. Constanta de timp *RC* pentru diodă este astfel aleasă încît să permită măsurarea tensiunii de la frecvenţa de 20 cicli/s.; ea determină limita inferioară a domeniului de frecvenţă măsurat. Anodele tuburilor ECH81, sînt prevăzute cu borne de ieşire pentru oscilograful catodic. Folosind un oscilograf catodic cu amplificatoare de curent continuu, se pot observa vibraţii de frecvenţă oricît de joasă (traductorul însuşi funcţionează de la 0 cicli/s).

Limita superioară a frecvenţei este determinată de capacitatea paralelă pe anodul ECH81; ea este însă influenţată mai ales de capacitatea cablului ecranat care leagă traductorul însuşi de sursă şi de aparatul de măsurare. Deoarece rezistenţa anodică a lămpii ECH81 este mică, se poate obţine uşor limita superioară a frecvenţei măsurate pînă la 50 kc/s.

Blocul de alimentare din figura 2 este constituit dintr-un redresor de curent alternativ alimentat la 220 V prevăzut cu două ieşiri în paralel pentru două sisteme independente. Astfel este posibilă observarea a două diagrame de vibraţie pe ecranul tubului catodic cu două spoturi. Calibrarea statică şi măsurarea deplasărilor statice şi dinamice cu ajutorul voltmetrului electronic se obţin succesiv pentru fiecare sistem conectînd grila de control a lămpii EBL21 din stînga cu anodul ECH81 al primului sau celui de-al doilea sistem de măsură.

### 2.2. DESCRIEREA ÎNTREGII INSTALAŢII PENTRU MĂSURAREA VIBRAŢIILOR PE MODELE DE PLĂCI CURBE SUBŢIRI

Aparatul se compune din următoarele părţi:

1) O parte care serveşte la excitarea vibraţiilor modelului;

2) Traductorul capacitiv, cu un dispozitiv indicator sau oscilograf pentru determinarea valorii şi caracterului deplasării modelului.

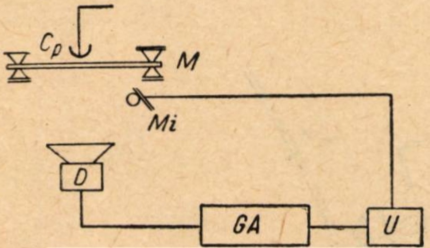


Fig. 3
D — difuzor
GA — generator acustic
Mi — microfon
U — dispozitiv pentru controlul presiunii acustice constante
Cp — traductor capacitiv
M — modelul examinat.

Cea de-a doua parte a aparatului a fost descrisă în cele de mai sus.

Schema bloc a aparatului pentru excitarea vibraţiilor pe cale acustică este arătată în figura 3.

Vibraţiile modelului sînt provocate cu ajutorul difuzorului care este aşezat sub model. Înălţimea sunetului este reglată de generatorul acustic. Pentru a obţine aceeaşi intensitate a impulsurilor, s-a prevăzut un dispozitiv automat de reglaj al presiunii acustice cu ajutorul unui microfon, independent de frecvenţă.

### 3. MĂSURAREA VIBRAŢIILOR PE MODEL

Figura 4 reprezintă traductorul aparatului aşezat pe modelul plăcii curbe subţiri. Modelul este aşezat pe un cadru solid special, care face posibilă executarea măsurătorilor pe modele cu lungimea de aproximativ 1 m.

Traductorii sînt montați pe console legate de bare verticale. Datorită suporților, traductorii pot fi așezați foarte repede pe punctul măsurat. Traductorul este întotdeauna așezat perpendicular pe suprafața plăcii

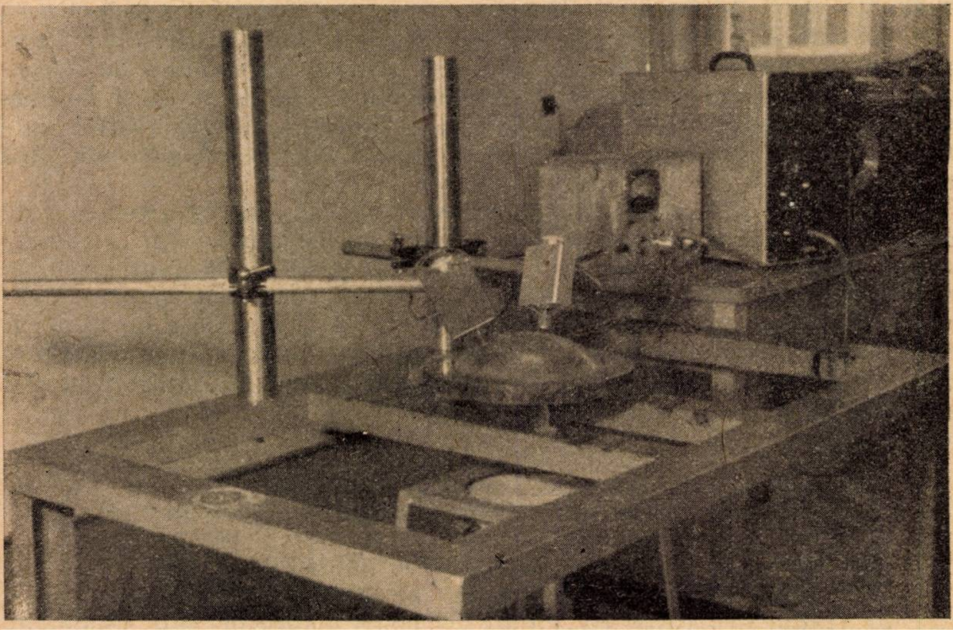


Fig. 4

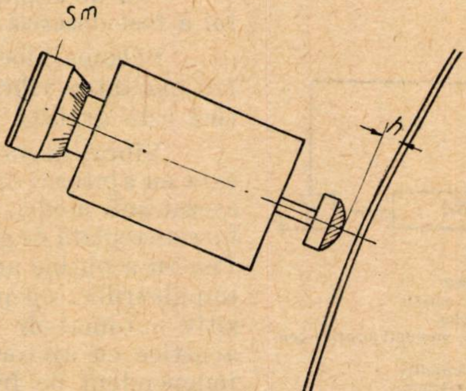


Fig. 5

subțiri ce urmează a fi examinată (figura 5). Distanța $h$ de la model este reglată cu ajutorul șurubului micrometric $Sm$. Capacul traductorului are o formă curbă pentru a micşora nepotrivirile de fixare normală pe suprafaţă.

Prin schimbarea frecvenţei undelor sonore cu ajutorul generatorului acustic, se determină frecvenţele de rezonanţă ; avînd apoi frecvenţele de inducţie determinate, traductorul este deplasat succesiv pe suprafaţa examinată pentru a se măsura amplitudinea vibraţiilor şi a determina astfel formele de vibraţii. Se găsesc astfel în primul rînd liniile de nod în lungul cărora punctele plăcii nu au deplasări. Mînuirea simultană a două traductoare face ca executarea măsurătorilor să fie mai uşoară. Unul din traductoare este aşezat pe un anumit punct în vibraţie (în afară de liniile de nod), iar poziţia lui rămîne fixată. Folosind celălalt traductor, se examinează vibraţiile punctelor modelului studiat în mod succesiv faţă de primul punct stabilit. Aceasta dă posibilitatea comparării amplitudinilor precum şi a fazelor, ceea ce pare a fi foarte important în acest caz. Observarea simultană a celor două diagrame de vibraţie pe ecranul tubului catodic cu două spoturi va răspunde la întrebarea dacă mişcările punctelor pe care este aşezat traductorul apar în concordanţă de fază (fig. 6 *a*), în faze opuse (fig. 6 *b*) sau dacă ele se deplasează cu un anumit unghi de fază $\alpha$ (fig. 6 *c*). Aceasta prezintă importanţă mai ales cînd se examinează plăci subţiri cu dublă curbură, pentru care forma vibraţiilor este mai complicată, precum şi atunci cînd nu se formează linii de nod.

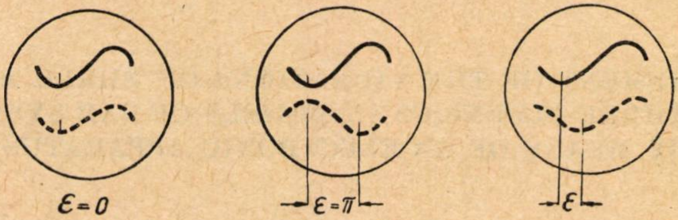


Fig. 6

Măsurările au fost făcute pe modele tridimensionale de reţele, plăci, plăci subţiri cilindrice, conice şi conoidale, precum şi de cupole de rotaţie. Fotografia prezentată ilustrează măsurarea vibraţiilor pe un asemenea model. Rezultatele obţinute pentru mai multe măsurări pe modele din diferite materiale şi dimensiuni confirmă formula (6) şi au fost comparate cu datele teoretice obţinute cu ajutorul metodei forţelor.

## ИЗМЕРЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ НА МОДЕЛЯХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК И НА ТРЕХМЕРНЫХ МОДЕЛЯХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПРИ ПОМОЩИ ЭЛЕКТРОННОГО АППАРАТА

### РЕЗЮМЕ

Приводится формула собственных частот для тонких оболочек, установленная на основании размерностного анализа моделей.

Для измерения колебаний в цилиндрических решетках и тонких оболочках была спроектирована и построена электронная установка для измерений на моделях.

Колебания возбуждаются при помощи громкоговорителя, питаемого от генератора. Измерение статических и динамических перемещений модели производится при помощи емкостного датчика. Система обладает диапазоном частот в пределах от 0 до примерно 20000 гц.

# MEASUREMENT OF THE VIBRATIONS OF SHELL MODELS AND THREE-DIMENSIONAL MODELS OF BAR SYSTEMS BY MEANS OF AN ELECTRONIC APPARATUS

## ABSTRACT

This paper presents a formula for determining the natural frequencies of vibration of thin shells on the basis of the dimensional analysis of models.

For measuring the vibrations of cylindrical lattices and thin shells, an electronic device for model measurements was designed and constructed.

The vibrations are excited with the aid of a loud-speaker coupled with a generator. The measuring of the static and dynamic displacements of the model is made with the aid of a capacitive gauge. The system has a frequency range of 0 to about 20 000 c.p.s.

# INGINERUL ARHITECT ALEXANDRU COSTINESCU, PRIMUL PROFESOR DE MECANICĂ POPULARĂ, PREDATĂ LA NOI ÎN LIMBA ROMÎNĂ (1812 – 1872)

DE

GEORGE ŞT. ANDONIE

Primul profesor de *Mecanică populară* (acesta era titlul catedrei), predată în învățămîntul mediu la noi, este inginerul arhitect Alexandru Costinescu, care își începe activitatea didactică la Academia mihăileană din Iași, în septembrie 1837.

Vom da în cele ce urmează o scurtă privire de ansamblu asupra vieții și operei acestui profesor, înaintaș al breslei noastre inginerești.

Tatăl lui Alexandru Costinescu, pe nume Costi sau Costea, era macedonean din Moscopole. În timpul unei revolte a fugit de aici, trecînd în Oltenia, la Craiova, plecînd apoi spre Moldova. El s-a stabilit la Iași, fiind, pe timpul cînd domnea în Moldova Alexandru Moruzi (1802 – 1806), căpitan de oaste și consilier financiar al domnitorului. Mai pe urmă s-a făcut negustor, rămînînd în continuare la Iași. Aici, s-a născut în 1812, fiul său Alexandru. În aprilie 1828 îl găsim pe Alexandru cu numele schimbat din Costea în Costinescu (sub influența profesorilor săi), ca elev la școala normală vasiliană, cu durata cursurilor de doi ani, ce funcționa la mănăstirea Trei Ierarhi din Iași. El se numără printre cei 12 bursieri ai acestei școli.

La 20 februarie 1829 Costinescu dă examen de absolvire a școlii normale. La cîteva zile însă după examen, izbucnește ciuma, care ține din martie 1829 pînă în aprilie 1830. În acest interval toate școlile din Iași au fost închise [6], [7].

În toamna anului 1830, Alexandru Costinescu trece ca elev la gimnaziul vasilian de la Trei Ierarhi, care avea o durată de școlaritate de patru ani. Aici se relevă ca un elev foarte silitor, fiind premiant an după an, făcînd în cursul anului şcolar 1831/1832 parte dintre cei 39 de stipendişti ai gimnaziului vasilian. La 26 aprilie 1833, la terminarea examenelor de sfîrşit de an pentru clasa a III-a gimnazială, Al. Costinescu este din nou premiantul I. El obţine din partea Eforiei şcolare, pentru acest succes, suma de lei 333, importantă pentru acele timpuri.

În august 1833 Gh. Asachi, într-un raport către eforie, propune să se trimită tineri la universităţile străine pentru perfecţionare, urmînd să se reîntoarcă apoi profesori la viitoarea Academie, a cărei înfiinţare se discuta pe atunci cu aprindere.

La 10 mai 1834 sub jurnalul nr. 17, epitropia şcolilor hotărăşte să-l trimită pe Al. Costinescu (împreună cu alţi elevi) la Viena. Costinescu trebuia să studieze la Politehnica de acolo (care funcţiona din 1797) *ştiinţele teoretico-practice de inginerie civilă şi militară, mecanică şi hidraulică.* La 26 mai 1834 Costinescu dă epitropiei declaraţia că va urma aceste studii şi va face rapoarte trimestriale de activitatea desfăşurată ca student.

În septembrie 1834, Alexandru Costinescu, împreună cu ceilalţi colegi este instalat la pensionul Furlani. La Viena, Al. Costinescu cunoaşte pe poetul dramatic austriac Franz Grillparzer (1791—1872). Deşi Grillparzer era cu peste 20 de ani mai în vîrstă decît Costinescu o prietenie intimă s-a născut între aceşti doi oameni. Costinescu a rămas în corespondenţă cu Grillparzer, pînă la moartea sa. Este interesant de amintit că Grillparzer i-a dăruit manuscrisul tragediei sale *Hero şi Leandru.* Cu ocazia vizitei Doctorului Lueger, primarul Vienei, la Bucureşti, după moartea lui Costinescu, un fiu al său, la rugămintea vienezului, a cedat acest manuscris, care se păstrează şi astăzi la muzeul oraşului Viena. Pe una din primele foi ale manuscrisului se poate citi dedicaţia lui Grillparzer către Costinescu.

Către sfîrşitul anului 1836, epitropia şcolilor din Iaşi hotărăşte să recheme pe doi stipendişti de la Viena : Al. Costinescu şi Teodor Stamati, care împlineau trei ani de studii. De aceea, eforia semnează anaforaua nr. 67 (raportul către domn), pentru rechemarea lor în vederea numirii ca profesori la Academia mihăileană. Domnitorul Moldovei, Mihail Sturza, aprobă această anafora la 20 martie 1837.

În raportul doctorului Constantin Popp din 11 aprilie 1837 şi jurnalul epitropiei din 10 martie 1837, se vede că ,,Al. Costinescu a învăţat cu sîrguinţă la Institutul Politehnic din Viena : desenul, matematica elementară şi înaltă, fizica şi arhitectura''. Toate examenele acestea au fost luate cu calificativul ,,eminenţia''. De aceea Alexandru Costinescu este chemat ca în septembrie 1837 să vie în ţară. Costinescu se reîntoarce la data cerută de epitropie.

E de menţionat că deşi înaintea lui studiase la Politehnica din Viena Petrache Poenaru, între octombrie 1825 şi februarie 1826, totuşi acesta — din cauza timpului scurt — nu şi-a luat diploma de inginer aici. Astfel încît *Alexandru Costinescu este primul inginer-arhitect romîn cu diploma de la Politehnica din Viena*; nu însă şi primul inginer romîn, fiindcă înaintea sa fuseseră inginerii Răducan Măinescu şi Petrache Poenaru (ultimul din 1832), cum şi hotarnicii de la şcolile de inginerie ale lui Gh. Asachi şi Gh. Lazăr.

Academia mihăileană fusese deschisă duminică 16 iunie 1835 de însuşi domnitorul Moldovei Mihalache Sturza. Pentru anul şcolar 1837 — 1838 erau următoarele clase : *a*) clasele începătoare ; *b*) clasele normale ; *c*) gimnaziul (clasa I şi a II-a) ; *d*) umanioarele (clasa a III-a şi a IV-a) ; *e*) Academia, cu clase înalte şi clase de inginerie civilă.

Alexandru Costinescu este numit la 15 septembrie 1837, la clasa a II-a gimnazială pentru a preda *mecanica populară* şi *desenul liniar*, cu un salariu de 1250 lei anual, care s-a majorat mai tîrziu. Epitropia şcolilor obligă nu numai pe şcolarii de gimnaziu să urmeze cursurile de mecanică populară şi desen liniar ale lui Costinescu, ci şi pe toţi profesorii tineri să audieze aceste cursuri. În acelaşi timp Costinescu este numit şi profesor de *inginerie civilă* la clasele de inginerie civilă, profesor de *geometrie şi arhitectură* la clasele înalte ale Academiei mihăilene. O dată cu numirea ca profesor la Academie, domnitorul Sturza îi acordă rangul de paharnic, fiindcă predomina ideea retrogradă că la Academie nu pot preda decît cei cu titluri de boierie.

Cum înainte de 1837 nu s-a putut preda nicăieri în ţările romîneşti un *curs de mecanică în limba romînă, rezultă că pentru prima oară a predat în romîneşte această disciplină la noi Alexandru Costinescu, la Iaşi, în anul şcolar 1837—38.* Nu ne-a rămas nici un manuscris de mecanică de la Costinescu, ca să ne orientăm precis asupra materiei predate. Ştim numai că a folosit *Mecanica* lui Maizner (Meissner) de la Viena, dar nu ne putem da seama de capitolele predate din această mecanică.

La 28 octombrie 1838 Alexandru Costinescu raportează comitetului Academiei că nu merge prea bine clasa de inginerie şi că din 7 elevi înscrişi lipsesc trei, iar 4 sînt slab pregătiţi, nu are nici sală de cursuri, şi cere să se ia măsuri. La examenul de sfîrşit de an, pentru semestrul II de vară (iunie — iulie 1839) la ingineria civilă a lui Costinescu se prezintă şi reuşesc 4 elevi şi 5 iuncări. Apoi la examenul de inginerie civilă, din iunie—iulie 1840, se prezintă 6 elevi. Lucrul acesta face ca atunci cînd vine Ion Ghica la Iaşi, epitropia şcolilor să hotărască, sub influenţa acestuia, reorganizarea în anul şcolar 1841—42 a claselor de inginerie după un program de patru ani. În urma acestei organizări, la *1 martie 1842 se creează şi o catedră de geometrie analitică şi descriptivă*, la care titular este numit tot Alexandru Costinescu.

*Costinescu este astfel nu numai primul profesor de „mecanică populară'' de la noi, ci şi primul profesor de geometrie analitică şi descriptivă.*

În una din cunoscutele sale *Scrisori către Vasile Alexandri* Ion Ghica spune : „Iată-mă aşezat înaintea unei table cu creionul de cretă în mînă, arătînd tinerilor, dimineaţa, *proprietăţile cercului, ale elipsei, ale parabolei şi ale iperbolei şi*, după masa vorbindu-le despre formaţiunile munţilor şi ale straturilor pămîntului''. Aceasta ar însemna că şi Ghica a predat *Geometria analitică.* S-ar pune întrebarea cine a predat atunci cel dintîi analitica la Iaşi, Ghica sau Costinescu? Costinescu, căci el era titular la analitică, pe cînd Ghica era titular la Geologie şi Mineralogie (de la 12 octombrie 1842—28 iunie 1843, ca inginer de mine), iar mai pe urmă titular la Economia politică (1843—1845). Poate că Ghica a ţinut uneori locul lui Costinescu, sau va fi făcut elevilor săi unele lecţii complementare de geometrie pură şi geometrie analitică. În nici un caz nu poate fi vorba de geometrie analitică predată cu continuitate. De altfel din toată arhiva rămasă de la Academia mihăileană, rezultă clar că în tot timpul 1842—1847, Al. Costinescu a funcţionat singur ca profesor de geometrie analitică.

Să adăugăm în plus că oricît de sumar ar fi predat Costinescu *ingineria civilă* (construcţii civile) şi *arhitectura* la Academia mihăileană, *el rămîne şi primul profesor care a predat în romîneşte aceste discipline în ţările noastre.*

La 14 ianuarie 1843 direcţia Academiei mihăilene i-a scris lui Costinescu să se pregătească pentru a expune la sfîrşitul examenului public al semestrului I, mai multe planuri şi anume : 1. Planul unei şcoli publice ; 2. Arcul Academiei ; 3. Fabrica de hîrtie ; 4. Fabrica de sticlă, cu deviz şi descriere ; 5. Institutul de înot cu băi, grădini etc. ; 6. planuri de poduri şi alte desene. Costinescu a prezentat aceste planuri ale elevilor, dintre care se va ocupa special, ulterior, el însuşi de realizarea arcului Academiei.

La 10 decembrie 1839 printr-un raport Gh. Asachi propusese epitropiei şcolilor să adauge la Academia mihăileană un număr de camere şi un arc care să unească cele două clădiri existente. Ivan Costacov începe în octombrie 1842 executarea arcului, dar el nu termină lucrarea. Atunci, în octombrie 1843, Costinescu preia lucrarea, obligîndu-se să o termine. Arcul este sfîrşit în 1845 şi recepţionat în octombrie 1847, comisia declarînd lucrarea bună, deşi nu are baso-reliefurile şi inscripţiile prevăzute în proiect. Acest arc a existat ca o curiozitate ieşană pînă în 1890, cînd pe locul Academiei s-a construit noua clădire a Liceului Naţional, actualmente ,,Şcoala medie M. Sadoveanu'' din Iaşi.

Costinescu a fost profesor la Academia mihăileană pînă în 1847, cînd, Academia transformîndu-se într-un institut francez pus sub direcţia lui *Malgouverné*, epitropia îi mulţumeşte pentru slujbele aduse, ,,păstrîndu-i dreptatea de a fi protimisit la caz de vacanţie''. Dar această protimisire (drept de prioritate la nouă numire) nu mai are loc. Şi nu are loc nici cînd *Grigore Al. Ghica*, domnitorul Moldovei desfiinţează la 3 septembrie 1849 institutul lui *Malgouverné*, promulgînd legea noului aşezămînt şcolar.

Din 1847 pînă în 1859 viaţa lui Al. Costinescu ne este mai puţin cunoscută, fiindcă nu se găsesc nici documente, nici scrisori familiare. Între 1847 şi 1859 proiectează şi construieşte ca inginer şi arhitect mai multe construcţii importante publice şi private, printre care şi cazărmile de la Copou (unde a fost odinioară Regimentul 13 infanterie şi Comandamentul Corpului de Armată din Iaşi).

În 1859, o dată cu numirea lui Cuza ca domnitor şi instalarea acestuia la Bucureşti, Al Costinescu se mută în capitala ţării. Aici, a fost la început membru al Consiliului lucrărilor publice, iar o dată cu înfiinţarea Şcolii naţionale de ponţi şi şosele, mine şi arhitectură din Bucureşti, a fost numit la 10 octombrie 1864 directorul acestei şcoli. În această calitate a funcţionat pînă la 11 februarie 1866, dată la care Cuza a fost răsturnat. Nu ştim dacă Costinescu a demisionat de bună voie, sau a fost silit să demisioneze. În orice caz plecarea sa, în ziua demiterii domnitorului, de la Şcoala de ponţi şi şosele, unde a fost primul director, ni-l arată ca un adept al lui Cuza.

Format în şcoala vasiliană de la Iaşi şi la Institutul Politehnic de la Viena, Costinescu era un om cult pentru timpul său; vorbea greaca, germana, franceza şi italiana, formîndu-şi cultura după terminarea cursurilor superioare. Ca inginer a urcat toate treptele corpului ingineresc de atunci.

A decedat la Iaşi în urma unei nefrite, în 1872.

De la Alexandru Costinescu ne-a rămas în primul rînd [2] un *Memoriu cu privire la pricinile ce au împiedicat pregătirea învăţăturii publice (în Moldova) şi mijloacele cele mai însuşite spre a sa îndreptare*. Acest memoriu scris la 15 martie 1845 era un răspuns la o anchetă întreprinsă de o comisie numită de Adunarea obştească a Moldovei, pentru a se cerceta — aşa cum arată titlul — cauzele datorită cărora nu progresează suficient învăţămîntul şi ce e de făcut pentru îndreptarea stărilor de lucruri. Memoriul a fost publicat mai tîrziu, în 1910, în Revista generală a învăţămîntului [2], [4].

În acest memoriu Costinescu precizează că atîta vreme cît în serviciile de Stat nu se va da precădere celor veniţi cu studii de la Academie, nimeni nu va fi dornic să studieze 12 ani. Arată apoi necesitatea măririi numărului de şcoli elementare şi normale. Precizează că nu s-au publicat cărţi, spunînd: „Manuscriptele după care am propus: geometria, trigonometria, geometria practică şi arhitectura stau şi acum netipărite". De aici rezultă că în timpul profesoratului său Costinescu a pregătit şi asemenea manuscrise. Într-adevăr, în Biblioteca Academiei R. P.R. se află manuscrisul intitulat: *Geometria pentru studenţii claselor colegia din Academia Mihăileană de Paharnicul A. Costinescu, profesoru* (în litere chirilice). S-ar părea că acest manuscris [5] nu e cel redactat de profesor [1], ci o copie scrisă de un elev al său.

De la pagina 2—163 manuscrisul cuprinde geometria plană, apoi de la 169—209 trigonometrie plană, de la 210—225 trigonometrie sferică, de la 226—242 despre logaritmi, iar de la 243—251 figurile pentru geometria plană. Trigonometria şi cu tot restul fiind pe o altă hîrtie (albastră) şi scrise de altă mînă, partea aceasta a fost adăugată ulterior la geometria plană. Acest material reprezintă cursul predat de Al. Costinescu în jurul anului 1840 la Academia mihăileană, la clasele de filozofie şi nu la clasele *colegia* cum se spune pe copertă.

Partea de geometrie a manuscrisului este tradusă şi prelucrată după Iosef Salomon, fostul său profesor, de la Viena, care a tipărit un volum intitulat *Lehrbuch der reinen Elementar-Geometrie* (ediţia a II-a). Probabil şi trigonometria este tradusă după acelaşi autor.

S-a emis ipoteza [1] că şi manuscrisul de algebră scris de I. Praja şi aflat în Biblioteca N. Bălcescu a Universităţii din Iaşi ar fi un curs ţinut de Costinescu la clasele de filozofie, ceea ce pare mai puţin probabil, deoarece Costinescu n-a fost însărcinat niciodată cu ţinerea unui curs de algebră.

Ca să încheiem cu viaţa şi opera acestui profesor şi inginer-arhitect, primul care a predat la noi mecanica populară, geometria analitică, geometria descriptivă şi ingineria civilă, în limba romînă, adăugăm că Alexandru Costinescu are merite şi aport pentru Moldova, în totul similare cu cele ale lui Petrache Poenaru, alt inginer, om al şcolii, din Muntenia.

*Primită la redacţie, în formă definitivă. la 12 octombrie 1960*

## BIBLIOGRAFIE

1. FLORICA CÎMPAN, *Cursuri de matematici ţinute la Academia mihăileană*. Analele ştiinţ. ale Univ. Iaşi, serie nouă, sect. I, mat. fiz. chim., **II**, *1—2*, 325 — 331 (1956).
2. AL. COSTINESCU, *Memoriu cu privire la pricinile ce au împiedicat propăşirea învăţăturii publice*. Revista gen. a învăţămîntului, *10*, 758—761 (1910).
3. ION IONESCU, *Istoricul învăţămîntului ingineriei în Romînia, pînă la înfiinţarea Şcoalelor Politehnice*, în *Aniversarea a 75 ani de învăţămînt tehnic în Romînia*. Cartea Romînească, Bucureşti, 105—227 (1931).
4. AL. LAPEDATU, *Întîia reformă a Şcoalelor din Moldova 1845 — 1846*. Rev. generală a învăţ., *7*, 493—504 (1910).
5. * * * *Manuscrisul nr. 1814 din Biblioteca Academiei R.P.R.* : *Geometria pentru studenţii claselor colegia din Academia Mihăileană*, de paharnicul *Al. Costinescu*, profesoru.
6. V. A. URECHIA, *Istoria şcoalelor de la 1800 la 1864*. Bucureşti, 1892.
7. A. D. XENOPOL, *Istoria Romînilor*. **XIII**, Cartea Romînească, Bucureşti, 1930

# RECENZII

N. IOSIPESCU, *Introducere în fotoelasticitate.* I, 1958; II, 1960 (190 + 160 p.), Ed. tehnică, București.

Cele două volume, publicate cu titlul de mai sus, prezintă pe scurt o sinteză a noțiunilor de bază și aplicațiilor fotoelasticității.

În primul volum, se dau mai întîi elementele de elasticitate bidimensională și de optică necesare înțelegerii capitolelor ce urmează. Se trece apoi la prezentarea noțiunilor fundamentale ale fotoelasticității: birefringența accidentală și legile ei, curbele caracteristice obținute, prelucrarea rezultatelor, condițiile de similitudine etc. Se descriu apoi în continuare metodele experimentale ajutătoare: metoda analogiei membranei, metode pentru determinarea sumei tensiunilor principale etc. În ultima parte a volumului I, se face o trecere în revistă a diferitelor tipuri de aparate de fotoelasticitate, dispozitive de solicitare și materiale pentru modele.

Cel de-al doilea volum, ce are ca subtitlu *Aplicații ale fotoelasticității*, începe printr-un capitol în care se dezvoltă metodele de determinare a tensiunilor din rezultatele cercetărilor fotoelastice, metode ce au fost prezentate pe scurt și parțial în volumul I. În continuare, se dau exemple de probleme teoretice ale teoriei elasticității, precum și exemple de elemente de construcții și de mașini studiate prin metodele fotoelasticității. Sînt de remarcat în special exemplele din domeniul construcțiilor, bine alese și reprezentative, capabile să justifice utilizarea metodei în rezolvarea unor asemenea probleme. Merită, de asemenea, să fie menționate exemplele date cu privire la rezolvarea unor probleme teoretice, cum sînt cele ale grinzilor de secțiune variabilă.

Materialul cuprins în cele două volume reușește să redea principalele elemente necesare unui inginer în vederea cunoașterii domeniului respectiv.

Autorul se străduiește și face aceasta cu succes, să prezinte o serie de mijloace practice de lucru, în laborator, astfel încît să constituie un ajutor pentru munca în specialitate.

Printre lucrările prezentate ca exemplificare, în special în volumul II, în număr mare sînt cele realizate în țara noastră, atît de autor cît și de alți cercetători; acest fapt constituie un merit deosebit al lucrării, deoarece el scoate în evidență contribuția romînească la dezvoltarea acestui domeniu de activitate științifică.

Publicarea lucrării constituie, așadar, în afară de un ajutor pentru laboratoarele în curs de formare pe lîngă diferitele institute de cercetări, o manifestare a activității și succeselor în cercetarea științifică din țara noastră într-un domeniu cu multiple aplicații tehnice.

*M. Arcan*

L. LANDAU, E. LIFCHITZ, *Mécanique*. Ed. en langues étrangères, Moscou, 1960, 236 p.

Această carte reprezintă primul volum al cursului de fizică teoretică al autorilor, curs care va cuprinde nouă volume, reprezentînd traducerea ediției în limba rusă din 1958. Lucrarea este împărțită în șapte capitole și prezintă cele mai importante rezultate din domeniul mecanicii generale, interesînd în special pe fizicieni.

Capitolul I cuprinde ecuațiile de mișcare, folosindu-se de la început coordonatele generalizate și metodele mecanicii analitice. Funcția lui Lagrange este introdusă pentru un punct material liber și pentru un sistem de puncte materiale. Se folosește principiul lui Hamilton și principiul de relativitate al mecanicii clasice (Galilei). În capitolul al II-lea se dau legi de conservare a energiei, a impulsului și a momentului cinetic. Sînt, de asemenea, cuprinse unele noțiuni de similitudine mecanică. Pe baza acestor rezultate se trece la integrarea ecuațiilor de mișcare (Capitolul al III-lea). Menționăm în special mișcarea sub acțiunea unor forțe centrale și problema lui Kepler.

Capitolul al IV-lea tratează problema ciocnirii punctelor materiale (șocul particulelor, cum este numit de autori). Se dau rezultate clasice cu privire la șocul elastic, difracția particulelor și formula lui Rutheford.

Micile oscilații în jurul unei poziții stabile de echilibru sînt considerate în capitolul al V-lea. Se studiază astfel oscilații cu unul sau mai multe grade de libertate, oscilații proprii și oscilații forțate, oscilații amortizate și neamortizate etc. Problema rezonanței parametrice este de asemenea luată în considerare. Menționăm unele chestiuni mai moderne cum sînt oscilațiile neliniare și mișcarea într-un cîmp de oscilații rapide.

Capitolul al VI-lea se ocupă de mișcarea solidului, folosindu-se atît metode vectoriale cît și metode analitice de calcul. Se studiază tensorul de inerție și se consideră ecuațiile mișcării generale ale solidului. Se introduc ecuațiile lui Euler și se analizează problema giroscopului. Menționăm, de asemenea, cazul contactului a două corpuri solide și mișcarea într-un sistem de referință negalileian.

Capitolul al VII-lea cuprinde studiul ecuațiilor canonice ale mișcării. Menționăm introducerea funcției lui Routh. Ecuațiile lui Hamilton se integrează cu ajutorul metodei Hamilton-Iacobi. Se dă noțiunea de acțiune și se enunță principiul lui Maupertuis. Se consideră transformările canonice și se studiază invarianții integrali, enunțîndu-se teorema lui Liouville. Lucrarea se încheie cu un studiu al proprietăților generale ale mișcării în spațiu.

Aproape fiecare din cele 50 de paragrafe ale cărții este însoțit de numeroase exerciții, pentru care se dau enunțul și soluția. Aceasta dă posibilitatea unei mai bune aprofundări a problemelor respective de către cititor.

Acest curs este scris într-o formă destul de concentrată, totuși deosebit de clară, dînd toate rezultatele necesare unei abordări a mecanicilor moderne, precum și a problemelor moderne din fizică. Cartea prof. Landau și Lifchitz poate fi astfel consultată cu succes de către cei ce lucrează în diferite ramuri ale fizicii, timpul scurs de la apariția primei ei ediții arătînd că ea a devenit o lucrare de bază în acest domeniu.

*P. P. Teodorescu*

Г. П. ТОЛСТОВ, *Ряды Фурье* (Serii Fourier) Издание второе, исправленное (ediția a doua, revăzută), физматгиз, Москва, 1960, 390 p.

Monografia prof. Tolstov, care cuprinde teoria seriilor Fourier precum și alte chestiuni înrudite, este redactată într-o formă deosebit de clară și de accesibilă, fiind destinată inginerilor care au de rezolvat probleme ale fizicii matematice.

Capitolul I introduce noţiunile elementare în legătură cu serii Fourier, precum şi teoremele de bază. Se dau rezultate în diferite cazuri particulare, insistîndu-se asupra proprietăţilor de paritate sau imparitate ale funcţiilor. Menţionăm forma complexă a seriilor Fourier şi dezvoltările corespunzătoare unor perioade oarecare.

În al II-lea capitol se generalizează noţiunile introduse, trecîndu-se la sisteme ortogonale oarecare. Se insistă asupra sistemelor complete şi asupra proprietăţilor de completitudine.

În capitolele III, IV, V, VI şi VII se fac diferite studii în legătură cu seriile Fourier. Astfel se consideră problemele de convergenţă ale seriilor Fourier şi problema completitudinii sistemului trigonometric. Se insistă asupra seriilor cu coeficienţi descrescători şi se dau metode de sumare a seriilor trigonometrice. Seriile Fourier duble sînt de asemenea luate în considerare. Ca un caz limită al seriilor trigonometrice se obţine integrala Fourier.

Capitolele VIII şi IX se ocupă de funcţii Bessel şi de posibilitatea de a construi serii Fourier cu aceste funcţii. Se dau rezultate pentru seriile Fourier-Bessel de tipul întîi şi de tipul al doilea.

Ultimele două capitole (X şi XI) dau diferite aplicaţii la problemele fizicii matematice. Se introduce metoda funcţiilor proprii şi se construiesc serii Fourier de funcţii proprii. Autorul se referă în special la probleme de vibraţii şi de propagarea căldurii, ca interesînd un cerc mai mare de cititori.

Pentru a nu se supraîncărca expunerea, unele teoreme nu sînt însoţite de demonstraţii. Rezultatele prezentate sînt însă suficiente pentru a familiariza pe cititor cu chestiunile fundamentale ale teoriei. Monografia prof. Tolstov poate fi astfel utilă cercetătorilor din domeniile aplicate ale ecuaţiilor fizicii matematice precum şi tuturor celor care vor să se iniţieze în această direcţie.

*P. P. Teodorescu*

---

В. Г. БЕРЕЗАНТЬЕВ, *Расчет прочности оснований сооружений* (Calculul rezistenţei terenului de fundaţie al construcţilor). ГОССТРОЙИЗДАТ, Ленинград, 1960, 138 p., 74 fig., 55 ref. bibl.

Lucrarea prof. Berezanţev are caracterul unei monografii, conţinînd o expunere sistematică a problemei rezistenţei terenurilor de fundaţie şi metodelor de rezolvarea lor, bazată în mare măsură pe studiile originale ale autorului şi colaboratorilor lui.

Caracteristic pentru modul cum abordează problema prof. Berezanţev este marea importanţă acordată deformaţiilor produse de încărcarea exterioară în masivul de pămînt. Prof. Berezanţev menţionează că, în funcţie de starea de îndesare a pămîntului şi de natura lui sau de adîncimea de fundare, încărcările exterioare pot produce deformaţii suficient de mari pentru ca ele să nu mai fie acceptabile pentru construcţii, deşi eforturile corespunzătoare în masivul de pămînt sînt încă departe de cele maxime pe care le poate prelua pămîntul. În momentul de faţă, calculul terenurilor de fundaţie se face fie în ipoteza mediului liniar deformabil (pentru determinarea tasărilor probabile), fie sub forma unui calcul de rezistenţă (în majoritatea cazurilor, la rupere). O rezolvare satisfăcătoare a calculului terenurilor de fundaţie ar necesita metode care să permită stabilirea încărcărilor în stare să producă fie depăşirea rezistenţei masivului de pămînt, fie deformaţii depăşind pe cele caracteristice mediului liniar deformabil, fără să se ajungă la solicitarea maximă capabilă a pămîntului.

Pe linia rezolvării acestei probleme, prof. Berezanţev analizează deformaţiile produse de încărcările exterioare în masivele de pămînturi necoezive, cu stare de îndesare medie sau maximă, în funcţie de adîncimea relativă de fundare (raportul dintre adîncimea de fundare şi lăţimea fundaţiei). El constată că se pot deosebi mai multe cazuri, şi anume :

— pentru fundaţiile aşezate la suprafaţa masivului de nisip sau la o adîncime relativă de fundare redusă (sub 0,5), ruperea masivului de pămînt se produce sub forma lunercării şi refulării unor volume de pămînt care pornesc nemijlocit de sub talpa fundaţiei sau de la suprafaţa sîmburelui îndesat. Suprafaţa de lunecare este continuă şi iese la suprafaţă sub o înclinare egală cu $45°-\varphi/2$ ($\varphi$ — unghiul de frecare internă al pămîntului) ;

— în cazul adîncimii relative de fundare cuprinsă între 0,5—1,5 sau 2,0, ruperea se produce în aceleaşi condiţii ca în cazul precedent, numai că se constată o diferenţă în ceea ce priveşte forma suprafeţei de lunecare. Spre deosebire de cazul precedent, suprafaţa de lunecare face un unghi cu orizontala crescînd pe măsură ce se apropie de planul tălpii fundaţiei, ajungînd la o valoare egală cu $90°-\varphi$ care se păstrează pe o porţiune din grosimea stratului de pămînt deasupra nivelului tălpii. Apoi suprafaţa se frînge ajungînd la suprafaţa terenului sub un unghi egal cu $45°-\varphi/2$.

În ambele cazuri menţionate mai sus, încărcările corespunzătoare ruperii masivelor de pămînt şi deformaţiile corespunzătoare se încadrează în limite care se întîlnesc în tehnica construcţiilor şi sînt în consecinţă de luat în consideraţie la calculul terenurilor de fundaţie.

Pentru adîncimi relative de fundare mai mari, încărcarea corespunzătoare solicitării maxime a masivului de pămînt (ruperii lui) corespunde unor deformaţii mult prea mari şi inacceptabile din punctul de vedere al construcţiei pentru a mai putea fi luată în consideraţie. De aceea, prof. Berezenţev precizează două cazuri pentru adîncimile relative de fundare depăşind 1,5—2,0. :

— pentru adîncimi relative de fundare egale cu 1,5—2 pînă la 3—4, starea limită din punctul de vedere al rezistenţei pămîntului nu mai este caracterizată prin ruperea şi refularea unei părţi din masivul de pămînt, ci prin încărcarea de la care începe o creştere intensă a tasărilor. Această încărcare corespunde stării de dezvoltare a zonelor de lunecare în care aceste zone au ajuns la nivelul tălpii fundaţiei. Dacă s-ar continua încărcarea, ar începe deformarea stratului în care este îngropată fundaţia şi o creştere accentuată a tasărilor ;

— la adîncimi relative de fundare mai mari decît 3—4, sub talpa fundaţiei se formează zone locale în stare de echilibru limită şi zone în care creşte sensibil îndesarea pămîntului, ajungîndu-se astfel la tasări importante înainte ca procesele specifice trecerii întregului masiv de pămînt în stare de echilibru limită (ruperea masivului) să se producă. În consecinţă, în astfel de cazuri, calculul rezistenţei masivului de pămînt de fundaţie devine inutil. Hotărîtor pentru stabilirea încărcării admisibile pe terenul de fundaţie devine criteriul de deformaţie (tasarea admisibilă).

Pentru primele trei cazuri caracteristice enumerate mai sus prof. Berezanţev indică metode de calcul, atît corespunzătoare problemei plane, cît şi celei axial simetrice, pentru încărcări verticale sau, în unele cazuri, şi pentru cele înclinate. Metodele propuse se bazează pe tehnica de calcul şi concluziile studiilor acad. V.V. Sokolovski asupra stării de eforturi limită în masivele de pămînt. Pentru fiecare caz în parte însă indicaţiile date de acad. Sokolovski sînt completate cu elemente necesare adaptării metodelor de calcul asupra felului cum se dezvoltă lunecările în interiorul masivului de pămînt în cazul respectiv.

O caracteristică a tehnicii de calcul adoptată de prof. Berezanţev este stabilirea, pe baza teoriei generale a stării de eforturi limită a masivelor de pămînt şi a datelor experimentale cu privire la dezvoltarea lunecărilor în fiecare categorie de cazuri examinate a formei suprafeţei de lunecare. Pornind de la suprafaţa de lunecare astfel stabilită se deduce tehnica sau formula pentru calculul încărcărilor pe terenul de fundaţie.

Pentru metodele propuse se prezintă tabele şi grafice ajutătoare precum şi exemple de calcul care fac foarte accesibile aplicarea lor.

În lucrare se face de asemenea o prezentare a unora dintre metodele existente pentru calculul rezistenţei terenului de fundaţie, insistîndu-se asupra metodei acad. V. V. Sokolovski pentru problema plană şi a prof. Berezanţev pentru cea axial simetrică a stării de eforturi limită. Se dau unele indicaţii cu privire la problema rezistenţei masivelor de pămînt argilos, la calculul tasărilor după depăşirea stadiului deformabilităţii liniare şi începerea lunecărilor în masivul de pămînt, la precizarea metodelor teoretice de calculul capacităţii portante a piloţilor înfipţi în terenuri nisipoase.

Monografia prof. Berezanţev este o lucrare actuală şi interesantă pe de o parte, prin faptul că recomandă sub o formă sistematică şi accesibilă aplicării curente, metode pentru calculul rezistenţei masivelor de pămînt (domeniu în care varietatea metodelor existente şi rezultatele extrem de împrăştiate obţinute pe baza lor face foarte dificilă alegerea metodei celei mai indicate pentru fiecare caz în parte); pe de altă parte, prin indicaţiile cu privire la dezvoltarea deformaţiilor în interiorul masivelor de pămînt şi adaptarea metodelor de calcul fiecărui caz tipic de deformare şi apariţie a zonelor sau suprafeţelor de rupere în pămînt. În momentul de faţă metodele pentru calculul stabilităţii masivelor de pămînt se bazează aproape exclusiv pe consideraţii de rezistenţă.

De aceea lucrarea prof. Berezanţev orientată spre considerarea deformaţiilor şi deplasărilor provocate în interiorul masivului de pămînt de încărcarea exterioară drept un criteriu de bază în calculul rezistenţei masivului, aduce o contribuţie valoroasă pentru rezolvarea acestei probleme.

*R. J. Bally*

---

М. М. ХРУЩЕВ, Е. С. БЕРКОВИЧ, *Определение износа деталей машин методом искусственных баз* (Determinarea uzurii pieselor de maşini prin metoda bazelor artificiale). Изд. Акад. Наук СССР, Москва, 1959.

Elaborarea metodelor eficiente de mărire a rezistenţei la uzură a pieselor de maşini constituie una din problemele principale puse în faţa cercetătorilor din domeniul construcţiilor de maşini. În primul rînd trebuie, însă, rezolvată problema determinării mărimii reale a uzurii pieselor şi distribuţia uzurii lor pe suprafaţa de frecare. Instrumentele de măsură, cel mai des folosite pentru acest scop (micrometre, calibre de interior micrometrice, diferite aparate indicatoare) nu permit în majoritatea cazurilor să se rezolve cu exactitatea suficientă problemele menţionate. Erorile de măsură în aceste cazuri sînt de acelaşi ordin de mărime ca şi uzurile înseşi.

Pentru stabilirea mărimii exacte a uzurii pieselor de maşini şi a distribuţiei uzurii pe suprafaţa de frecare sînt necesare metode, principial, noi. Aceste metode şi aparatele respective sînt descrise în lucrarea recenzată.

Autorii se ocupă, de mulţi ani, de problemele mai sus menţionate şi au o serie de lucrări publicate, care îi consacră printre specialiştii din acest domeniu (o serie de capitole ale lucrării, sub formă mai restrînsă, constituie obiectul unei alte lucrări publicată în 1953).

La baza noilor metode stă ideea determinării cantitative a mărimii uzurii liniare după variaţia dimensiunilor unei scobituri, de profil dinainte cunoscute, făcute pe suprafaţa în frecare, forma geometrică a acestei scobituri trebuie să aibă o axă normală pe suprafaţă, de-a lungul căreia trebuie să se măsoare uzura liniară locală.

În lucrare se face analiza eficacității diverselor forme geometrice a scobiturilor (piramidă pătratică — capitolul III, piramidă rombică — capitolul IV, adîncitură conică — capitolul V, adîncitură cilindrică — capitolul VI, adîncitură obținută prin așchiere — capitolul VII etc.).

Fiecare din metode a fost experimentată pe diverse tipuri de organe de mașini sau mecanisme (uzura ghidajelor batiului de la mașini unelte, cilindri motoarelor de la avioane, de la automobile, de la tractoare, pistonul de la pompele de ulei de la motoarele Diesel, arborii cotiți, roțile dințate, sertărașele și bucșele de la locomtive etc.).

Aparatura necesară pentru aplicarea acestor metode de măsură, a fost elaborată inițial numai la Institutul pentru cercetarea mașinilor al Academiei de Științe a U.R.S.S. de autori sau sub îndrumarea autorilor; în ultimii ani se efectuează cercetări și la Școala Tehnică Superioară „Bauman" din Moscova — pentru batiurile mașinilor unelte — la M.T.I. pentru mașini textile etc.

Capitolul X al lucrării se ocupă cu descrierea aparatului universal UPOI-6 pentru determinarea uzurii cilindrilor, segmenților și bolțurilor motoarelor de automobil și de tractor de diferite tipuri și dimensiuni.

O serie de epruvete și de aparate executate de Institutul pentru cercetarea mașinilor au fost repartizate pentru experimentare la diferite institute și uzine. În felul acesta, au fost atrași în munca de cercetare a metodei bazelor artificiale, un număr mare de specialiști din diferite organizații.

În lucrarea recenzată, autorii au generalizat toată experiența acumulată de cercetătorii de la Institutul pentru cercetarea mașinilor și de la alte organizații.

Lucrarea reprezintă un model strălucit de organizare complexă a cercetării și rezolvării unor probleme dificile puse de dezvoltarea construcțiilor de mașini. Autorii au pornit de la o anumită idee (stabilirea uzurii prin metoda bazelor artificiale) au construit suportul teoretic, au elaborat aparatura și metodica de laborator pentru verificarea experimentală a considerațiilor teoretice, au antrenat un număr mare de colective pentru efectuarea cercetărilor experimentale și după aceea au trecut la verificarea în diverse uzine a acestor rezultate.

Astfel rezultatele prezentate se bucură de garanția verificării lor experimentale în industrie și deci pot fi folosite fără rezerve.

Rezultatele prezentate sînt deosebit de utile, atît pentru inginerii proiectanți, cît și pentru cei din institutele de cercetări care se ocupă cu astfel de probleme.

*P. Freund*

W. S. WLASSOW, *Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik*. (Teoria generală a plăcilor curbe subțiri și aplicarea ei în tehnică). Akademie-Verlag-Berlin, 1958, 661 p.

Editura Academiei din R.D.G. a publicat în traducere germană monumentala monografie a regretatului savant sovietic V. Z. Vlasov. Lucrarea originală, apărută în limba rusă la Editura de Stat pentru literatură tehnică-teoretică, Moscova-Leningrad, 1949 a fost distinsă cu premiul Stalin.

În U.R.S.S., teoria plăcilor curbe subțiri s-a dezvoltat cu succes în două direcții principale; una din aceste direcții — reprezentată prin lucrările lui Goldenweiser, Kilcevski, Lurie, Muștari, Novojilov și Rabotnov se ocupă cu teoria matematică. A doua direcție, reprezentată în principal de V. Z. Vlasov și școala sa se ocupă cu teoria tehnică a plăcilor curbe subțiri, cuprinzînd ca un caz special și teoria generală a barelor cu pereți subțiri. Ea este determinată prin introducerea unui șir de noi ipoteze fizice, ceea ce face posibilă rezolvarea a numeroase probleme practice importante din mecanica construcțiilor.

Monografia lui V. Z. Vlasov se referă la teoria tehnică și — așa cum se menționează și în prefață — este rezultatul cercetărilor de mulți ani ale autorului.

Lucrarea este împărțită în 5 părți și 14 capitole, urmate de anexe și bibliografie exclusiv sovietică.

Partea I tratează despre teoria de membrană a plăcilor curbe subțiri. În capitolul I sînt studiate suprafețele de rotație. Capitolul al II-lea cuprinde teoria generală a suprafețelor de gradul al 2-lea (ca suprafețe particulare de tip Liouville), pentru care ecuațiile diferențiale de echilibru (făcute omogene) se pot reduce la una din ecuațiile

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} = 0 \text{ sau } \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} = 0.$$

Prima ecuație este valabilă pentru suprafețele avînd curbura lui Gauss pozitivă, iar a doua pentru suprafețele cu curbură gaussiană negativă.

Capitolul al III-lea tratează despre metodele de calcul ale suprafețelor eliptice și sferice la acțiunea forțelor concentrate și a cupolelor.

Teoria de membrană se încheie cu capitolul V tratînd despre cupolele eliptice și sferice sub încărcare oarecare și suprafețele avînd curbura lui Gauss negativă. Menționăm la acest capitol soluția pentru cupolele în absidă și deducerea eforturilor datorite sarcinilor distribuite pe suprafață, cu ajutorul suprafețelor de influență.

Partea a II-a cuprinde teoria generală a încovoierii plăcilor curbe subțiri (dezvoltată în două capitole).

Capitolul V cuprinde ecuațiile generale ale teoriei elasticității tridimensionale în coordonate curbilinii ortogonale (metrica pe suprafață, ecuațiile de deformații, ecuațiile de echilibru și relațiile de elasticitate).

Capitolul VI introduce ipoteza normalei la suprafața deformată

$$e_{\alpha\gamma} = e_{\beta\gamma} = e_{\gamma\gamma} = 0;$$

dezvoltînd expresiile deformațiilor în serie după puterile coordonatei $\gamma$ (după normala la suprafață) se determină deformațiile specifice (de diferite ordine) în suprafața mediană. Neglijînd termenii de ordinul al 3-lea și superiori din dezvoltările în serie și aplicînd metoda variațională, ecuațiile generale ale teoriei elasticității tridimensionale se reduc la ecuațiile plăcilor curbe subțiri. Cu această ocazie sînt examinate critic și ecuațiile stabilite de Love, care prezintă anumite nesimetrii.

În încheierea acestui capitol se mai dau : deducerea directă a ecuațiilor diferențiale ale plăcilor curbe subțiri, plăcile subțiri cilindrice și două forme invariante ale ecuațiilor sferei.

Partea a III-a, cuprinzînd patru capitole, tratează despre teoria și metodele de calcul ale plăcilor subțiri pleoștite.

În capitolul VII se arată reducerea ecuațiilor generale la două ecuații avînd ca necunoscute o funcție de eforturi $\varphi$ (de tip Airy) și săgețile $w$.

Capitolul VIII cuprinde o analiză detaliată a cilindrilor, însoțită de numeroase abace, utile pentru calculele practice.

Capitolul IX tratează despre cupola sferică pleoștită și analogia cu placa circulară pe mediu elastic. Trebuie menționat aici faptul că analogia cu placa circulară nu este corectă riguros, așa cum a demonstrat cercetătorul bulgar M. Mișonov.

Ultimul capitol (al X-lea) se referă la probleme mai complicate de plăci subţiri pleoştite. Sînt examinate mai detaliat suprafeţele sferice (de fapt paraboloizi eliptici şi de rotaţie) pe contur dreptunghiular, particularizîndu-se rezultatele şi pentru teoria de membrană. În încheierea acestui capitol, rezultatele sînt extinse pentru problemele de stabilitate elastică, vibraţii şi deformaţii finite (generalizarea ecuaţiilor lui Kármán).

Partea a IV-a cuprinde plăcile cilindrice ortotrope de lungime medie (două capitole), una din cele mai variate analize din întreaga literatură tehnică.

Ultima parte dezvoltă metodele de calcul ale plăcilor subţiri prismatice, cu şi fără neglijarea deformaţiilor de lunecare.

Trebuie menţionată aici utilizarea funcţiilor fundamentale, care generalizează funcţiile trigonometrice pentru ori ce fel de rezemare la două capete opuse.

În cei 11 ani de la apariţia primei ediţii în limbă rusă, monografia lui V. Z. Vlasov şi-a cîştigat un renume binemeritat prin fundamentarea teoriei plăcilor curbe subţiri şi modul de rezolvare pentru cîteva clase importante de suprafeţe. Traducerea ei în limba germană, editată în condiţii grafice excelente, va contribui în şi mai mare măsură la răspîndirea acestei importante lucrări, care interesează în egală măsură pe cercetătorii ştiinţifici şi aspiranţii în domeniul construcţiilor, pe inginerii proiectanţi şi pe studenţii institutelor de construcţii.

*Mircea Soare*

L. M. MILNE-THOMSON, *Plane elastic systems* (Sisteme elastice plane). *Ergebnisse der angewandten Mathematik* (Cercetări de matematică aplicată), caietul 6, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960, 212 + VII p.

L. M. Milne-Thomson, binecunoscut datorită tratatului său de hidrodinamică teoretică (care a ajuns în 1960 la a IV-a ediţie), ne prezintă succint — într-o carte de întindere relativ mică — cele mai importante rezultate din domeniul problemei plane a teoriei elasticităţii, studiată cu ajutorul funcţiilor de variabilă complexă.

Capitolul I cuprinde consideraţii generale cu privire la problema plană a teoriei elasticităţii, arătînd pe larg rolul pe care-l joacă funcţia lui Airy în această problemă. În capitolul II se introduce noţiunea de tensiuni complexe şi se formulează problema plană, din punct de vedere matematic, cu ajutorul funcţiilor de variabilă complexă. Pentru ca cititorul să nu fie nevoit să recurgă la alte lucrări, se face în capitolul III o scurtă trecere în revistă a principalelor rezultate din teoria funcţiilor de variabilă complexă, necesare pentru înţelegerea expunerii ulterioare.

Capitolul IV este dedicat studiului planului elastic infinit şi al semiplanului elastic. Se consideră atît prima problemă fundamentală (condiţii pe contur în tensiuni) cît şi a doua problemă fundamentală (condiţii pe contur în deplasări) şi problema mixtă. Se dau rezultate în multe cazuri particulare. Remarcăm şi considerarea problemei de contact a semiplanului elastic. Autorul se preocupă şi de unele probleme cu caracter dinamic.

În capitolul V se studiază domeniile mărginite de arce de cerc. Se dau rezultate pentru cazul domeniului circular, inelar etc., considerîndu-se şi multe probleme anexe. Menţionăm astfel cazul planului infinit cu tăieturi după arce de cerc, supus la o stare de tensiune plană.

Cazul domeniilor mărginite de o frontieră oarecare este studiat în capitolul VI. Se introduc coordonatele curbilinii ortogonale, insistîndu-se asupra posibilităţilor pe care le prezintă, în particular, transformările conforme. Cu această ocazie se consideră unele cazuri particulare cum ar fi de exemplu cazul unui domeniu mărginit de o elipsă, cazul planului elastic cu goluri interioare etc.

În capitolul VII se ia în considerare influența anizotropiei materialului. Se dau întîi rezultate cu caracter general, reluîndu-se apoi unele probleme studiate anterior pentru cazul izotrop.

Fiecare din cele șapte capitole menționate mai sus este însoțit de numeroase exemple de calcul, pentru care se dau numai enunțurile. Remarcăm, de asemenea, că bibliografia care însoțește lucrarea este foarte sumară.

Cartea lui L. M. Milne-Thomson este scrisă într-o formă teoretică, totuși ea este direct adaptată aplicațiilor de ordin fizic și tehnic, cercul de cititori căruia i se adresează fiind astfel destul de mare. Trebuie să subliniem deosebita claritate a expunerii, precum și rigurozitatea matematică cu care sînt tratate diferitele probleme. Considerațiile de mai sus fac ca această lucrare să prezinte un interes deosebit pentru cei care se ocupă cu determinarea stării de solicitare în corpuri elastice supuse la o stare de tensiune plană sau la o stare de deformație plană.

*P. P. Teodorescu*

* * * *Обработка и состояние обработанной поверхности* (Finisarea și starea suprafeței prelucrate). Издательство Ленинградского университета, 1960, 268 p.

Elaborarea unor metode de tratament mecanic care să asigure o mare productivitate și economicitate în paralel cu o mare rezistență la uzură, reprezintă una din problemele importante ce trebuie rezolvate de constructorii de mașini.

De unele aspecte ale acestei probleme se ocupă și un colectiv de colaboratori de la Catedra de tehnologie a construcției de mașini și studiul metalelor de la Institutul de ingineri economiști din Leningrad (LIEI). O serie de rezultate obținute de acest colectiv au fost publicate în 1956 în lucrările Institutului, iar unele din rezultatele obținute în 1956—1958 sînt publicate în prima parte a lucrării recenzate.

Astfel în articolul *Mărirea rezistenței la uzură prin frecare a pieselor de la capul de proiector de cinema KPT-1 prin șlefuirea cu diverse regimuri*, semnat de doctor în științe tehnice A. A. Matalin și candidat în științe tehnice, docent V. S. Rîștova, se expun rezultatele încercărilor comparative ale pieselor capului de la proiectorul KPT-1 prelucrate după regimuri obișnuite și după regimurile de înaltă productivitate recomandate de catedră. Încercările efectuate în condiții normale de exploatare au confirmat mărirea rezistenței la uzură a pieselor de mașini ce au fost prelucrate după regimurile cele mai adecvate.

V. S. Rîștova mai publică și articolul *Influența finisării asupra rezistenței la uzură a pieselor* în care sînt prezentate rezultatele experimentale prin care s-a determinat rezistența la uzură a unor epruvete prelucrate în mod diferit (suprafinisare, diferite metode de șlefuire fină, rulare cu bile etc.). Ca urmare a cercetărilor efectuate, s-a constatat că rezistența la uzură este influențată de rugozitatea suprafeței, de gradul de durcisare a suprafeței, de regimurile de prelucrare, de materialul și structura piesei etc., influență predominantă avînd-o rugozitatea și durcisarea suprafeței.

O. Ia. Constantinov publică două articole în care se ocupă de problemele legate de șlefuirea plană a pieselor circulare. Sînt prezentate dispozitivele speciale create de autor cu ajutorul cărora se poate obține gradul de prelucrare 11 și 12.

Prima parte mai conține și articolul publicat de prof. L. A. Glikman în care se face o trecere în revistă a celor mai importante metode mecanice de determinare a tensiunilor remanente în piesele de mașini.

Partea a II-a a lucrării se ocupă de o serie de probleme legate de eficacitatea economică a utilizării în producție a mecanismelor hidraulice de susținere.

Docentul V. A. Biumberg pe baza analizării experiențelor unor uzine și a unor cercetări experimentale, propune o serie de normative și nomograme pentru calculul economicității aplicării în producție a acestor mecanisme.

De problema preciziei prelucrării pieselor cu ajutorul mecanismelor hidraulice se ocupă articolul elaborat de G. A. Matrosov, intitulat *Precizia de prelucrare a pieselor cu ajutorul suporturilor hidraulice*.

În lucrare mai sînt cuprinse și două articole ale docentului P. A. Pakidova în care sînt tratate probleme legate de sistemul de comandă după program a mașinilor unelte și problema utilizării traductorilor capacitivi.

Ing. A. A. Suhoparov în articolul prezentat, face o analiză a pregătirii producției pentru prelucrarea pieselor la uzina „Ekonomaizer".

Partea a treia a lucrării cuprinde două articole elaborate de dr. în științe tehnice prof. A. A. Matalin. În aceste articole este descris stadiul actual al pregătirii tehnice a producției, organizarea serviciului tehnologic și a diferitelor metode de tehnologie înaintată, ce se aplică la uzinele constructoare de mașini din R.D.G.

Aceste considerații sînt deosebit de utile, atît pentru cei din institutele de cercetări cît și pentru inginerii proiectanți.

*P. Freund*

* * * *Second international metal spraying conference* (al II-lea Congres de Metalizare prin pulverizare). Edited by the Association of Metal Sprayers, Barclays Bank Chambers, Dudley, Works, 29 Sept. — 3 Oct. 1958, (Birmingham — Anglia) 1958, 224 p.

Metalizarea prin pulverizare a căpătat o largă răspîndire în ultimii ani, în numeroase țări, prin variate aplicații și printr-o serie de manifestații internaționale la care metalizarea prin pulverizare a fost consacrată ca un procedeu tehnologic cu largi posibilități de aplicare și cu mari perspective.

Una dintre aceste manifestații de o mai mare amploare a fost și congresul al II-lea de metalizare ținut la Birmingham (Anglia) între 29 sept. și 3 oct. 1958.

La acest congres au participat 133 delegați din U.R.S.S., R.S. Cehoslovacă, R.P. Polonă, R.P. Ungară, R.D.G., R.F.G., R.F. Iugoslavă, Anglia, Austria, Belgia, Danemarca, Franța, S.U.A. etc. etc. și s-au prezentat 31 de comunicări care au pus în evidență succesele obținute în aplicarea metalizării prin pulverizare, precum și problemele ce sînt ridicate de perspectivele aplicării acestui procedeu.

Astfel ing. E. V. Antoșin, șeful secției de metalizare de la Institutul de cercetări științifice din domeniul sudurii din Moscova, în comunicarea intitulată *Instalații și cercetări de* *pulverizarea metalelor în U.R.S.S.* pune în evidență realizările obținute în U.R.S.S. în urma acestor cercetări.

În U.R.S.S. cercetările referitoare la metalizarea prin pulverizare au luat o largă răspîndire, existînd numeroase colective care se ocupă cu studierea diverselor aspecte ale acestui procedeu. Astfel de aspectul fizico-matematic al problemei se ocupă colectivele de la Moscova, Tașkent și Tomsk. La Zaporoje se fac cercetări pentru utilizarea curentului de înaltă frecvență pentru topirea materialului de adaos. La Rostov pe Don și Harcov se fac cercetări pentru determinarea caracteristicilor de antifricțiune a straturilor depuse, iar capacitatea lor portantă se studiază la Kiev. Rezultatele acestei bogate activități de cercetare au fost concretizate prin multiple aplicații în producție.

Pentru satisfacerea necesităților producției se fabrică anual circa 3 500 aparate de metalizare din care 70 % sînt electrice. În comunicare, se prezintă și caracteristicile unor aparate cu o mai largă răspîndire.

O contribuție deosebită la dezvoltarea metalizării prin pulverizare o au cercetătorii polonezi. La Congresul Internațional de la Birmingham ei s-au prezentat cu 4 comunicări bine documentate în care sînt expuse rezultate ale activității lor de cercetare.

Astfel în comunicarea *Cuzineți de antifricțiune obținuți prin pulverizarea metalelor* prezentată de Stanislaw Gebalski se fac recomandări asupra domeniului de utilizare a acestor cuzineți. De asemenea, se dă procesul tehnologic de realizare al lor precum și cîteva exemple de aplicații practice. Se dau caracteristicile fizico-mecanice ale cuzineților obținuți prin metalizare în funcție de o gamă întreagă de materiale de adaos ce se întrebuințează în astfel de cazuri.

Ing. Zbigniew Kowalski arată în comunicarea prezentată care este rezistența la coroziune a straturilor metalizate cu plumb. Rezultate au fost obținute pe epruvete metalizate cu plumb și expuse în 5 condiții atmosferice diferite.

Delegația poloneză a mai prezentat Comunicarea *Rezistența la compresiune a straturilor metalizate prin pulverizare* de Tadeusz Drazkiewicz, iar în comunicarea prezentată de Witold Milewski se arată caracteristicile pistoalelor cu arc electric fabricate în Polonia.

Congresul a dat o deosebită atenție exemplelor de aplicare a metalizării prin pulverizare ca mijloc de protecție împotriva coroziunii.

Astfel în comunicarea sa J. Cauchetier de la Noua societate de metalizare din Franța arată că suprastructura vaselor L'Ile de France și Normandie a fost metalizată cu zinc și s-a prezentat în condiții bune după mulți ani de funcționare. Camerele de balast de la submarinele grecești „Katsonis" și „Papanikonist" fabricate în Franța între 1923 și 1926 au fost metalizate cu zinc. După 20 de ani de funcționare ele se prezentau în condiții foarte bune.

Exemple interesante de poduri metalice protejate prin metalizare cu zinc sînt date în comunicarea lui G.A. Curson din Londra. Se arată astfel că podul peste Menai, podul Pelham, podul peste canalul navigabil Manchester etc. au fost metalizate cu zinc și ele se prezintă în condiții foarte bune. Ca urmare a experiențelor făcute, autorul recomandă ca pentru atmosferă marină și rurală să se utilizeze metalizarea cu zinc, iar pentru atmosferă industrială, metalizarea cu aluminiu. Rezultatele foarte bune pentru protecția împotriva coroziunii în atmosfere diferite au dat-o straturile mixte. De ex. un strat de aluminiu de 0,07 mm peste un strat de zinc de 0,07 mm.

Comunicarea prezentată de J. F. Attwell pune, de asemenea, în evidență buna comportare la coroziune a straturilor metalizate. În Uniunea Sud Africană, de unde sînt citate exemplele, s-au metalizat cu zinc tancurile-auto pentru transportul cărnii la mare distanță, iar rezervoarele de apă au fost metalizate cu aluminiu. Protecția cu aluminiu a unei conducte pe o distanță de aproximativ 4 000 m, plasată într-o regiune apropiată de ecuator cu atmosferă puternic corozivă a dat perfectă satisfacție, și se prezintă bine după opt ani de la metalizare. Un exemplu interesant îl constituie metalizarea cu cupru în scopuri decorative a 70 tone de laminate ce reprezintă scheletul metalic al geamurilor unei importante clădiri în această țară.

Problema rezistenței la coroziune a straturilor metalizate mai este dezbătută și în alte comunicări, cum sînt de exemplu : *Controlul efectului coroziv al apei sărate asupra straturilor metalizate depuse pe oțel,* de Manley H. Clark ; *Amenajarea unui atelier pentru metalizarea vagoanelor de cărbune* de M. Lacorne. *O trecere în revistă a industriei metalizării prin pulverizare, în Australia* de D. E. Harris ; *Metalizarea prin pulverizare la latitudine nordică* de Sigurd B. Giertsen ; *Protecția împotriva coroziunii în oțelării prin straturi de aluminiu pulverizat de* Stephen Y. Scott etc.

În foarte multe țări metalizarea prin pulverizare a ajuns la o mare dezvoltare, elaborîndu-se și standarde în acest scop. P. Marisset în comunicarea prezentată face o analiză a standardelor franceze comparativ cu standardele apărute în alte țări.

Elaborarea de aparate care să poată pulveriza materiale plastice, materiale metalo-ceramice etc. precum și determinarea caracteristicilor straturilor ce se obțin utilizînd aceste materiale, constituie, de asemenea, o preocupare a cercetărilor din acest domeniu, preocupare ce se oglindește și în comunicările prezentate la Congres. Astfel în comunicarea prezentată la Congres de H. Schwarz din R.D.G., sînt arătate caracteristicile aparatelor W.S III și W.S VI care pulverizează materiale plastice. De asemenea, în lucrare se arată și metodele de prelucrare a suprafeței de bază.

Aceeași problemă este tratată și în comunicarea lui D.E. J. Cunningham (Londra).

Comunicarea prezentată de W. J. Burling (Canada) se ocupă de problema pulverizării colmonoyului. Se dau indicații asupra caracteristicilor straturilor metalizate obținute prin pulverizarea a patru compoziții diferite de colmonoy și se arată condițiile în care aplicarea metalizării cu aceste materiale este economică. În a doua comunicare expusă de J. Cauchetier se arată rezultatele experimentale ale metalizării cu tungsten pur sau în diverse combinații.

Alte comunicări se ocupă de problema pierderilor de materiale în timpul metalizării, în scopul determinării consumurilor specifice (gradul de eficiență a stratului de material în cazul metalizării prin pulverizare de E. Kretzschmar).

Un interes deosebit prezintă comunicarea expusă de W. E. Ballard (Londra), în care se analizează accidentele de muncă, ce au apărut în industria metalizării și se fac propuneri de organizarea protecției muncii.

În comunicările prezentate se mai tratează și problema recondiționării prin metalizare, calitățile straturilor de difuziune etc.

Și în R.P.R. metalizarea prin pulverizare a început să se aplice în tot mai multe domenii. Sub îndrumarea colectivului de metalizare a Institutului de mecanică aplicată ,,Traian Vuia'' s-a proiectat electrometalizatorul tip IMA, ce se fabrică în serie de către IOR. Cu colaborarea acestui colectiv s-au realizat o serie întreagă de instalații de electrometalizare.

Prima instalație industrială de electrometalizare dotată cu aparate tip IMA s-a realizat la Uzina metalurgică ,,Poiana'' unde se recondiționează în serie axe cu came și alte piese.

La ,,Intreprinderea de Transporturi București'' se recondiționează în serie butoane cap de osii de la tramvaie. S-au mai realizat instalații de electrometalizare și la Uzinele ,,23 August'', la Uzinele ,,Semănătoarea'', la Uzina mecanică din Teleajen, la Uzina ,,Steagul Roșu'', la șantiere navale etc.

La Fabrica ,,Metalul Roșu'' se aplică de peste doi ani metalizarea cu aluminiu a bazinelor cu apă de la mașinile de spălat ce se livrează la diverse instituții.

Conducta forțată de la ,,Hidrocentrala V. I. Lenin '' de la Bicaz a fost protejată împotriva coroziunii prin metalizare cu aluminiu. La Întreprinderea Petrochimică o serie întreagă de instalații au fost protejate împotriva coroziunii prin metalizare cu zinc. La Întreprinderea de utilaj chimic s-a aplicat de asemenea, metalizarea prin pulverizare ca mijloc de protecţie împotriva coroziunii a unor importante instalaţii.

Din cele de mai sus se constată că metalizarea prin pulverizare a căpătat o largă răspîndire şi a devenit un procedeu tehnologic ce poate fi aplicat cu succes în multe domenii.

*V. Marcu* şi *P. Freund*

A. HAUTOT, *Inventaire des travaux menés dans le champ de la photographie scientifique* (Culegere de lucrări efectuate asupra fotografiei ştiinţifice). Établissements Centerick, Louvain, Belgique, 1958, 380 p.

În acest volum prof. A. Hautot, publică lucrările pe care le-a făcut în perioada 1950—1958 în cadrul laboratorului de fizică generală al Universităţii din Liège, cercetări care au fost executate sub auspiciile Institutului pentru încurajarea cercetărilor ştiinţifice în industrie şi agricultură din Belgia.

Socotim interesant de menţionat faptul că autorul dedică lucrarea memoriei părinţilor săi „victime ale barbariei războiului", şi fiului său „pentru ca el să cunoască bucuria activităţii dusă în timp de pace".

Materialul este prezentat în 7 capitole mari după cum urmează :

Capitolul 1. *Repartiţia germenilor imaginei latente în microcristalele de bromură şi clorură de argint, a emulsiilor fotografice.*

Remarcăm în special paragraful 1.6, ce tratează importanţa imaginii latente interne. Se accentuează faptul că în afară de lumină, radiaţiile X, $\gamma$ şi particulele $\alpha$ şi $\beta$ creează de asemenea o imagine latentă interioară, mult mai intensă decît în cazul celei create de lumină.

Capitolul 2. *Acţiunea radiaţiilor fără acţiune asupra halogeanurii de argint* „radiation inactiviques" *de lungime de undă mare, asupra imaginii fotografice latente : efectele Herschel, Debot şi efectele colaterale.*

Capitolul 3. *Studii asupra diverselor proprietăţi ale imaginii latente.* Se descrie un sensitometru pentru durata de expunere controlată între $10^{-2}$ s$-10^{-6}$ s.

Se studiază *ecartul de reciprocitate* funcţie de valoarea maximă de înnegrire a materialului fotografic, sau în cazul materialelor primitive şi sensibilizate, slab iluminate şi intens iluminate. Se tratează fenomenul de solarizare, comparîndu-se rezultatele obţinute cu lumină şi cu raze X.

Menţionăm paragraful 3.7 în care se tratează efectul Villard, care constă în ştergerea unei imagini latente creată de o iradiere X, prin o iradiere luminoasă.

Capitolul 4. *Comportarea emulsiilor cu bromură de argint în timpul* „maturizării fizice" *între 1 minut şi 45 minute la 43—45°C.* Se studiază variaţia sensibilităţii înnegririi maxime şi a factorului de contrast la emulsiile amoniacale Ag Br ; se studiază variaţia sensibilităţii emulsiilor funcţie de dimensiunile granulelor, punîndu-se în paralel rezultatele obţinute cu lumină şi cu raze X.

Capitolul 5. *Procesul sensibilizării chimice a emulsiilor.* Se tratează cazul înnegririi latente superficiale şi interne, precum şi acţiunea desensibilatorilor asupra emulsiilor primitive şi sensibilizate.

Capitolul 6. *Procesul de desolubilizare.* Interesează îndeosebi paragraful 6.6. privind acţiunea luminii asupra unei emulsii supraexpuse şi apoi desensibilizată.

Capitolul 7. *Cercetări asupra structurii materialelor și imaginilor fotografice*. Principalele studii privesc măsurarea puterii de rezoluție și mai ales a granularității. Se compară granulația unor imagini fotografice (directă), cu granulația imaginii mărite (de un obiectiv fotografic). De asemenea se studiază variația granularității funcție de developarea și densitatea imaginii.

Fiecare capitol al lucrării conține și referințe bibliografice, destul de complete.

Ar fi fost util ca alături de diagrame să fie prezentate și planșe fotografice cu rezultate practice, cu atît mai mult cu cît lucrarea este editată în condiții corespunzătoare.

Lucrarea este tratată la un nivel științific corespunzător (în special cap. 7, p. 295—378) ea fiind utilă laboratoarelor ce studiază defectoscopia metalelor (cu radiații X și $\gamma$) prin faptul că contribuie la lămurirea unor aspecte legate de puterea separatoare, sensibilitatea, contrastul și calitatea de redare corespunzătoare a imaginilor de către filmele fotosensibile.

De asemeneea lucrarea interesează în general laboratoarele de fizică nucleară ce folosesc vizualizarea pe film, precum și laboratoarele de spectroscopie, astronomie, cinematografie rapidă etc.

*D. Pavelescu*

J. HAAG, R. CHALÉAT, *Problèmes de théorie générale des oscillations et de chronométrie* (Probleme ale teoriei generale a oscilațiilor și cronometriei). Editeurs : Gauthier Villars — Eyrolles, Paris, 1960, 412 p.

Acest volum constituie o culegere de probleme cu soluții și discuții din domeniul oscilațiilor și cronometriei, ramură a mecanicii aplicate de precizie ridicată la rangul de disciplină independentă, în țările cu o importantă industrie de orologerie, cum sînt Elveția și Franța. Astfel în această din urmă țară există la Besançon un institut de cronometrie și micromecanică, precum și o secție de cronometrie la facultatea de științe a universității din acest oraș. De asemenea, în țările mai sus indicate există școli profesionale pentru formarea tehnicienilor ceasornicari.

Lucrarea cuprinde 15 capitole care corespund tratatului respectiv de teoria și practica cronometriei și un index de terminologie al organelor constitutive și al elementelor de calcul ale cronometrelor.

Primul capitol conține probleme referitoare la mijloacele din antichitate pentru determinarea orei locale și anume gnomonul sau cadranul solar. În capitolele următoare sînt expuse probleme și aplicații în legătură cu măsurarea mecanică a timpului, sistemele oscilante, întreținerea mișcării acestora și forțele perturbatoare. Fiecare procedeu de întreținere a oscilațiilor, ca impulsuri instantanee, mecanisme de scăpare, acțiuni periodice etc. face obiectul unui capitol separat. Capitolele care urmează cuprind probleme referitoare la teoria elementară a sincronizării, pendulul circular, balansierul-spiral, metronomul, compensarea termică, ceasornice oscilante, pendulul compus etc.

Capitolul XIV conține numeroase probleme referitoare la teoria aprofundată a sincronizării, tratată la nivel înalt prin metoda lui H. Poincaré a ecuațiilor diferențiale cu puncte singulare. Această metodă este expusă în tratatele de analiză, însă în majoritatea cazurilor fără exerciții sau aplicații.

Ultimul capitol al cărții este rezervat problemelor generale care permit verificarea cunoștințelor de cronometrie bazată pe teoria oscilațiilor și mecanica rațională.

Dintre autorii lucrării, Jules Haag, decedat, a fost academician şi cunoscut matematician, autor a numeroase tratate de matematici superioare, profesor la facultatea de ştiinţe din Besançon şi director al Institutului de cronometrie şi micromecanică. Multe din problemele şi aplicaţiile expuse în lucrarea recenzată cuprind contribuţii deosebit de valoroase ale prof. Jules Haag. Lucrarea constituie astfel nu numai o culegere de probleme de valoare didactică, ci prezintă interes şi pentru cercetătorii de mecanică aplicată în ce priveşte de exemplu studiul oscilaţiilor, analiza funcţionării mecanismelor în micromecanică, teoria generală a sincronizării etc.

Multe din problemele tratate în această lucrare ar putea foarte bine figura într-o culegere de probleme de mecanică aplicată, avînd pe lîngă alte calităţi şi o minuţioasă atenţie acordată calculului numeric.

Consider că ar fi fost util şi un capitol special cu aplicaţii asupra cronometrelor de marină şi asupra cronometrelor electronice care reprezintă o realizare de tehnică înaintată.

În ansamblu, lucrarea recenzată, deşi destinată unui cerc restrîns de specialişti, prezintă interes şi pentru cei care activează în alte domenii ale mecanicii aplicate.

*V. Marcu*

---

V. M. FAIRES, R. MC. ARDLE KEOWN, *Mechanisms* (Mecanisme). McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London, 1960, 332 p.

Recenta ediţie a lucrării *Mechanism* (ediţia a V-a) conţine numeroase completări importante cu caracter de noutate, care aduc cartea la nivelul actual al preocupărilor studenţilor şi inginerilor din acest domeniu.

Materialul este parcurs de-a lungul a unsprezece capitole, la sfîrşitul fiecărui capitol existînd o scurtă încheiere şi probleme.

Capitolul I, *Ecuaţiile mişcării plane*, cuprinde o serie de noţiuni elementare, indispensabile studiului mecanismelor.

Capitolul II, *Came*, conţine ceea ce este esenţial pentru proiectarea camelor de diferite tipuri, abordînd printre altele aspecte legate de unghiul de presiune, mişcare cicloidală şi şoc infinit.

Capitolul III, *Centre şi viteze*, tratează pe larg metodele pentru determinarea centrelor, precum şi găsirea vitezelor cu ajutorul centrelor, cu exemplificări pe diverse mecanisme.

Capitolele IV, *Viteze relative* V, *Diagrame de viteză* şi VI, *Acceleraţii relative*, dezvoltă problemele clasice legate de determinarea vitezelor şi acceleraţiilor în mecanisme, utilizînd şi analiza acceleraţiei prin mecanisme echivalente.

Capitolul VII, *Angrenaje cilindrice*, dă elementele necesare calculării roţilor dinţate cilindrice, insistînd asupra interferenţei dinţilor. Se tratează, de asemenea, angrenajele cicloidale şi angrenările interioare.

Capitolul VIII, *Angrenaje elicoidale, conice şi cu şurub melc*, cuprinde noţiunile legate de aceste tipuri de angrenaje şi relaţiile de calcul.

Capitolul IX, *Trenuri de angrenaje*, abordează trenurile de angrenaje planetare cu roţi conice, trenuri inverse şi forţele centrifuge de echilibrare, diferenţiale cu roţi conice şi transmisia automată.

Capitolul X, *Transmisii indirecte şi roţi de fricţiune*, se ocupă cu curele plate, transmisii cu curele, curea de sincronizare, lanţuri cu role, lanţuri cu dinţi inverşi, acţionări prin fricţiune şi acţionări cu viteză variabilă.

Capitolul XI, *Dispozitive diverse,* abordează problema clicheților (mascați, silencioși) și a articulațiilor universale.

Într-o anexă, sînt cuprinse o serie de indicații utile pentru studenți, cum ar fi de exemplu cremalierele de referință, reprezentarea conurilor de rostogolire etc.

Lucrarea se remarcă prin completările aduse edițiilor anterioare, prin exemplele care permit o concretizare eficace a teoriei și prin numeroasele probleme cu care este încheiat fiecare capitol.

*V. I. Calcan*

HAROLD B. KEPLER, *Basic Graphical Kinematics* (Bazele cinematicii grafice). Mc. Graw-Hill Company, Inc., New York-Toronto-London, 1960, 314 p.

Lucrarea dezvoltă o serie de prelegeri ținute în cadrul cursului de Cinematică la Air Force Institute of Technology, Ohio (Institutul Tehnologic al Forțelor Aeriene, Ohio), selecționarea materialului fiind bazată pe premisa că cititorul a urmat un curs de mecanică, inclusiv dinamică.

Cartea pune în special accentul pe metodele grafice utilizate în cinematică, păstrînd numai strictul necesar din aspectul analitic și evitînd pe cît posibil metodele riguros matematice.

Trebuie remarcat că sînt prezentate numai acele metode grafice, care aduc o contribuție efectivă la analiza mecanismelor. Dacă determinarea vitezelor și accelerațiilor în unele tipuri de mecanisme — de exemplu cele care implică pîrghii și came — este mai comodă prin construcții grafice, rămîn totuși multe tipuri de mecanisme ce nu pot fi analizate decît prin combinarea metodelor grafice și analitice sau numai prin metode analitice.

Sînt parcurse toate subiectele tradiționale ale cinematicii : deplasări, viteze, accelerații, came, roți dințate, lanțuri și curele de transmisie.

Pentru a familiariza cititorul cu o serie de definiții, cu vectorii și ecuațiile vectoriale, la început sînt introduse două capitole separate (1 și 2), asigurîndu-se astfel continuitatea capitolelor următoare.

În capitolul 3 sînt prezentate metode pentru dezvoltarea completă a problemelor legate de mișcare, ceea ce permite obținerea accelerațiilor anumitor lanțuri cinematice fără a se apela la legea lui Coriolis.

Capitolul 4, *Scheme cinematice și traiectorii,* este inclus pentru familiarizarea cu manipularea schemelor cinematice și cu specificul construcțiilor din capitolele următoare.

Capitolul 5 se ocupă cu centrele instantanee de rotație.

Capitolul 6, *Vitezele în mecanisme,* prezintă toate cele patru metode grafice pentru determinarea vitezelor, accentuîndu-se în special metoda vitezelor relative.

Capitolul 7, *Accelerațiile cu mecanisme,* dă o *soluție model* pentru cele două tipuri de bază ale problemelor de accelerații. O demonstrație simplificată — dar integră — a legii lui Coriolis, permite soluționarea problemelor ce nu pot fi abordate prin metoda mecanismului echivalent.

Capitolul 8 este destinat metodelor pentru determinarea traiectoriilor, vitezelor și accelerațiilor.

Capitolele 9, 10, 11 și 12 se ocupă cu came, teoria roților dințate, lanțuri, curele de transmisie și mecanisme diverse.

Materialul privind roțile dințate a fost selecționat, eliminîndu-se tot ceea ce nu este esențial, tipurile de bază ale problemelor de roți dințate fiind clasificate.

Capitolul 12 — și ultimul — aruncă o privire asupra unora din piesele standard, care stau la dispoziția constructorilor de mașini, ilustrînd în același timp și modul în care au fost rezolvate cîteva din problemele clasice de transmitere a mișcării.

Sînt prezentate astfel reductoare, variatoare, cuplaje (cu lanț, cu roți dințate, cu amortizare, elastice), articulații etc.

Cartea cuprinde numeroase exemple ilustrative cu soluții demonstrate pas cu pas. La sfîrșitul fiecărui capitol există probleme, fiecare grup de probleme fiind aranjat în ordinea greutății.

*V. I. Calcan*

# LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R.P.R.

## MECANICĂ APLICATĂ

E. CARAFOLI, **Aerodinamica vitezelor mari (fluide compresibile)**, 708 p., 20 lei

E. CARAFOLI, T. OROVEANU, **Mecanica fluidelor**, vol. II—412 p., 10 lei

N. N. PATRAULEA, **Aerodinamica suprafețelor permeabile**, 175 p., 16,25 lei

N. TIPEI, **Hidro-aerodinamica lubrificației**, 696 p., 16 lei

AL. MARINESCU, **Teoria elicopterului**, 268 p., 12,60 lei

GH. BUZDUGAN, **Mașini pentru încercările mecanice ale materialelor**, 192 p., 5 lei

## AUTOMATICĂ

C. PENESCU, **Automatica şi telemecanica sistemelor energetice**, vol. I — 787 p., 52,50 lei; vol. II — 576 p., 35,70 lei

* * * **Probleme de automatizare, I — A doua consfătuire asupra automatizărilor industriale din R.P.R.** (5—8 iunie 1957), 345 p., 15 lei; II — **Folosirea mașinilor electronice de calcul în industrie și economie**, 171 p., 8,55 lei

## CONSTRUCŢII

R. J. BALLY, **Metode electrice de îmbunătățire a pămînturilor în lucrările de construcții**, 248 p., 10 lei

* * * **Măsuri constructive pentru prevenirea degradărilor construcțiilor fundate pe pămînturi argiloase cu contracții mari**, 31 p., 1 leu

GH. RUSU, **Tehnica măsurătorilor în construcțiile masive**, 319 p., 25,90 lei

E. ZAHARESCU, **Contribuții la studiul capacității portante a fundațiilor**, 300 p. + 4 pl., 16,40 lei.

F 2557

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

3
ANUL XII
1961

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

# STUDII ŞI CERCETĂRI DE
# MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

# COMITETUL DE REDACȚIE

*Redactor responsabil* :

ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri :

ACADEMICIAN N. PROFIRI ;
A. BELEȘ, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
CR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
R. BOGDAN, conferențiar la Institutul de petrol, gaze și geologie, București ;
N. TIPEI, conferențiar la Institutul politehnic, București ;
M. ARCAN, șef secție ; Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor (INCERC), București.

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
APARE DE 6 ORI PE AN

*Redacția* : INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"
**Str. Const. Mille 15, tel. 17.34.09**

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

# STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

3

ANUL XII

1961

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

**Revista**

*STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ*

*publică :*

— Studii originale *de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.*

— Note (*lucrări mai scurte*) *cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.*

— Referate ştiinţifice şi tehnice *în care se expune stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.*

— Recenzii *asupra cărţilor şi studiilor romîne sau străine.*

*Domeniile de specialitate ale revistei sînt* :

— *Aeromecanică* (*mecanica fluidelor, aerodinamică, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori*).

— *Hidromecanică* (*hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine hidraulice şi pompe, amenajări hidraulice*).

— *Construcţii de maşini* (*cinematica şi dinamica mecansimelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue*).

— *Mecanică generală* (*rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice*).

— *Statica şi dinamica construcţiilor* (*metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode de executarea lucrărilor de construcţii*).

— *Tehnica măsurătorilor* (*aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică*).

*Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.*

★

*Articolele vor fi redactate într-o formă concisă şi clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părţile cunoscute ale problemei :*

*Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar şi citeţ cu cerneală. Figurile şi graficele se vor desena în tuş pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar şi în număr cît mai mic.*

*Literatura citată în text se va însera la sfîrşitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariţie, iar pentru revistă se va indica şi numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.*

*Pe lîngă* **text** *se vor înainta pentru fiecare exemplar rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză engleză şi germană, Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.*

*Aceleaşi norme sînt valabile şi pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.*

*Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, Bucureşti, str. C. Mille 15, raionul Gh. Gheorghiu-Dej.*

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA”

# STUDII ȘI CERCETĂRI
# DE
# MECANICĂ APLICATĂ

Tomul XII, nr. 3 1961

## SUMAR

**STUDII**

*CINEMATICA ȘI DINAMICA SOLIDULUI* Pag.

N. TIPEI, Asupra mișcării rachetei în mediu rezistent. I. Ascensiunea rachetei . . . 475

*ELASTICITATE – PLASTICITATE – REZISTENȚA MATERIALELOR*

M. MIȘICU și FL. DINCĂ, Încovoierea dinamică a barelor cu proprietăți viscoelastice. II . . . 487
A. PETRE, Vibrații aeroelastice produse de vîrtejuri alternate . . . 511
N. IOSIPESCU, Studiul fotoelastic spațial al fundațiilor de sub stîlpi izolați prin metoda înghețării eforturilor . . . 519
GEORGETA STĂNCULESCU și NATALIA TEODORESCU, Asupra unor proprietăți fizico-mecanice ale betoanelor armate cu oțeluri superioare . . . 545
H. SANDI, Proprietăți statistice ale capacității portante a structurilor static nedeterminate . . . 563

*UNGERE – FRECARE – UZURĂ*

V. N. CONSTANTINESCU, Calculul lagărelor cu alunecare, funcționînd în regim turbulent . . . 573

*TEORIA MECANISMELOR*

N. I. MANOLESCU, Asupra mecanismelor formate din lanțuri cinematice de diferite familii . . . 589
K. HAIN, Raportul de transmisie în mecanisme cu came cu mai multe elemente . . 617

*SCURGERI PRIN MEDII POROASE*

T. OROVEANU, Asupra unei probleme de scurgere printr-un mediu poros fisurat . . . 633

*TEHNOLOGIA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE*

Pag.

M. P. POPOV, E. D. DECIU şi I. MITRICĂ, Asupra utilizării plăcuţelor mineraloceramice romîneşti ENC . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 641
C. I. FLORESCU, N. BĂJESCU, I. ALEXANDRESCU şi M. VASILESCU, Posibilităţi de clasificare a tipurilor de sol şi de determinare a efectelor lucrărilor cu ajutorul unor mărimi fizico-mecanice. II . . . . . . . . . . . . . . . . 653

NOTE

GH. D. MUNTEANU, Efectele dinamice corespunzătoare acceleraţiilor de ordin oarecare . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 675

**REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE**

MARIUS PECULEA, Studiul şi determinarea principiilor de proiectare ale compresoarelor şi pompelor cu membrane metalice . . . . . . . . . . . . . . . . 681
GH. MARIN, Instalaţie de laborator pentru măsurarea debitelor şi temperaturilor uleiului la lagărele arborilor cotiţi de la motoarele cu ardere internă . . . . 693

**MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE**

A. R. MÉTRAL, Răspunderile economice, culturale şi tehnice în întreprinderile din domeniul mecanicii, în ultima parte a secolului al XX-lea . . . . . . . . 701
**RECENZII** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 717
**LISTA PUBLICAŢIILOR PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE** . . . . . . . 731

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ „ТРАЯН ВУЯ“

# ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том XII, № 3 1961

## СОДЕРЖАНИЕ

**СТАТЬИ**

*КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ТВЕРДЫХ ТЕЛ* Стр.

Н. ТИПЕЙ, О движении ракеты в сопротивляющейся среде. I. Подъем ракеты . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 475

*УПРУГОСТЬ — ПЛАСТИЧНОСТЬ — СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ*

М. МИШИКУ и Ф. ДИНКЭ, Динамический изгиб стержней, обладающих вязко-упругими свойствами. II . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 487
А. ПЕТРЕ, Аэроупругие колебания, вызываемые чередующимися вихрями . 511
Н. ИОСИПЕСКУ, Пространственное фотоупругое исследование фундаментов под изолированными стойками при помощи метода „замораживания”. 519
ДЖЕОРДЖЕТА СТЭНКУЛЕСКУ и НАТАЛИЯ ТЕОДОРЕСКУ, Об одном физико-механическом свойстве железобетонов, армированных высококачественными сталями . . . . . . . . . . . . . . . . . . 545
Х. САНДИ, Статистические свойства несущей способности статически неопределимых систем . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 563

*СМАЗКА — ТРЕНИЕ — ИЗНОС*

В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, Расчет подшипников скольжения, работающих в турбулентном режиме . . . . . . . . . . . . . . . . 573

*ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ*

Н. И. МАНОЛЕСКУ, О механизмах, составленных из кинематических цепей различных семейств . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 589
К. ХАЙН, Передаточное отношение многозвенных кулачковых механизмов 617

*ТЕЧЕНИЯ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ*

Т. ОРОВЯНУ, Об одной задаче течения в трещиноватой пористой среде . 633

*ТЕХНОЛОГИЯ СПЛОШНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ* Стр.

М. П. ПОПОВ, Е. Д. ДЕЧИУ и И. МИТРИКЭ, О применении румынских минерало-керамических пластинок ENC . . . . . . . . . . . . . . . 641

К. И. ФЛОРЕСКУ, Н. БЭЖЕСКУ, И. АЛЕКСАНДРЕСКУ и М. ВАСИЛЕСКУ, Возможности классификации грунтов и определения эффектов работ при помощи физико-механических величин. II . . . . . . 653

**ЗАМЕТКИ**

Г. Д. МУНТЯНУ, Динамические эффекты, соответствующие ускорениям произвольного порядка . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 675

**НАУЧНЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕФЕРАТЫ**

МАРИУС ПЕКУЛЯ, Исследование и определение принципов проектирования компрессоров и насосов с металлическими мембранами . . 681

Г. МАРИН, Лабораторная установка для измерения расходов и температур масла в подшипниках коленчатых валов двигателей внутреннего сгорания . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 693

**НАУЧНЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ МЕРОПРИЯТИЯ**

А. Р. БЕТРАЛ, Экономические, культурные и технические обязанности предприятий в области механики во второй половине XX века . . . 701

**РЕЦЕНЗИИ** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 717

**ПУБЛИКАЦИИ ПОСТУПИВШИЕ ПУТЕМ ОБМЕНА В РЕДАКЦИЮ** . . . 731

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

**Журнал**

## „*ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ*”

*публикует:*

— Оригинальные исследования *высокого уровня, представляющие общий научный интерес, связанный с практикой.*

— Заметки (*краткие работы*) *оригинального характера, представляющие уточнение некоторого вопроса.*

— Научные и технические рефераты, *в которых излагаются: современное состояние определенной задачи с выявлением нового подхода к ней, замечания и обсуждения некоторых работ по прикладной механике.*

— Рецензии *на румынские или зарубежные книги и исследования. В журнале публикуются работы по следующим специальностям:*

*— Аэромеханика (механика жидкостей и газов, аэродинамика, газодинамика, механика самолета, аэроупругость, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, термоаэродинамика реактивных двигателей, вентиляция, ветродвигатели).*

*— Гидромеханика (гидравлика, гидротехнические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства).*

*— Машиностроение (кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей, механика сплошных твердых сред).*

*— Общая механика (сопротивление материалов, упругость, пластичность, вибрация и удары, устойчивость, электрические и гидравлические аналогии).*

*— Статика и динамика сооружений (методы статического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, механика грунтов, устойчивость грунтов, методы производства строительных работ).*

*— Техника измерений (электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в технике).*

*Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех отечественных специалистов и зарубежных сотрудников.*

★

*Статьи должны быть написаны в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений (относящихся к уже известным частям проблемы).*

*Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала, формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует делать китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.*

*Литература, цитированная в тексте, должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, заглавие работы, том, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов — и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.*

*Кроме текста, для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском языке или же на русском, французском, английском или немецком языках. Резюме должно составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к работам зарубежных сотрудников, редактированным на русском, английском, французском или немецком языках.*

*Рукописи препровождаются по адресу: Институт прикладной механики. Бухарест, ул. Константин Милле, № 15, район Г. Георгиу-Деж.*

## Le périodique

*STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ*
*(ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE)*

*publie :*

*— des* études originales, *des recherches fondamentales d'un caractère hautement scientifique, orientées vers l'activité pratique* ;

*— des* notes *(communications brèves) à caractère général, ou constituant une mise au point d'une certaine question* ;

*— des* rapports scientifiques et techniques *où l'on expose : l'état actuel d'un certain problème, en soulignant son aspect nouveau* ; *des remarques et discussions au sujet de certains travaux de mécanique appliquée* ;

*— des* notes bibliographiques *au sujet des livres et des études roumains et étrangers.*

*Les domaines de spécialité de la revue sont les suivants* :

*— aéromécanique (mécanique des fluides, aérodynamique, dynamique des gaz, mécanique de l'avion, aéroélasticité, aérodynamique des moteurs à combustion interne, thermo-aérodynamique des moteurs à réaction, ventilation, aéromoteurs)* ;

*— hydromécanique (hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines hydrauliques et pompes)* ;

*— constructions mécaniques (cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des machines, automation, étude des surfaces, technologie des milieux solides continus)* ;

*— mécanique générale (résistance des matériaux, élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques)* ;

*— statique et dynamique des constructions (méthodes de calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilité des terrains, méthodes d'exécution des travaux de construction)* ;

*— technique des mesures (appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation des ultra-sons et des isotopes radioactifs en technique).*

*La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires en publiant, dans ce but, les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.*

★

*Les articles seront rédigés dans un style concis et clair, étant évitées les introductions trop longues concernant les données connues des problèmes.*

*Les manuscrits seront envoyés en trois exemplaires, dactylographiés, aux formules écrites de manière lisible, à l'encre. Les figures, ainsi que les diagrammes, seront tracés à l'encre de Chine sur du papier calque. On utilisera le nombre de figures strictement indispensable.*

*Les références bibliographiques seront mentionnées à la fin de l'article. On y indiquera le nom de l'auteur, le titre de l'ouvrage, le tome, la page, le lieu de la parution et, pour les périodiques on ajoutera le numéro auquel on se réfère. On ne fera pas mention des travaux non publiés.*

*Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé en roumain ou, éventuellement, en russe, français, anglais ou allemand (environ une page pour 20 pages dactylographiées de texte).*

*Les mêmes normes, sont valables pour les collaborateurs étrangers, qui peuvent rédiger leurs travaux en russe, anglais, français ou allemand.*

*Les manuscrits seront envoyés a l'adresse suivante* : *Institut de Mécanique Appliquée „Traian Vuia”, 15, str. Constantin Mille, Bucarest, raionul Gh. Gheorghiu-Dej, Roumanie.*

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE «TRAIAN VUIA»

# ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome XII, nº 3 1961

## SOMMAIRE

### ÉTUDES

*CINÉMATIQUE ET DYNAMIQUE DU SOLIDE* Page

N. TIPEI, On the motion of rockets in resisting medium. I. Ascending motion. . . . 475

*ÉLASTICITÉ — PLASTICITÉ — RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX*

M. MIŞICU and FL. DINCĂ, Dynamic bending of bars with viscoelastic properties. II . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 487
A. PETRE, Aeroelastic vibrations induced by alternating vortices . . . . . . . . . 511
N. IOSIPESCU, Etude photo-élastique à trois dimensions des fondations sous des colonnes isolées, par la méthode du figeage des contraintes . . . . . . . . . 519
GEORGETA STĂNCULESCU et NATALIA TEODORESCU, Sur certaines propriétés physico-mécaniques des bétons armés d'aciers à haute résistance . . . . . . 545
H. SANDI, Propriétés statistiques de la capacité portante des structures hyperstatiques . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 563

*LUBRIFICATION — FROTTEMENT — USURE*

V. N. CONSTANTINESCU, Le calcul des paliers lisses fonctionnant en régime turbulent . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 573

*THÉORIE DES MÉCANISMES*

N. I. MANOLESCU, Über Getriebe aus kinematischen Ketten verschiedener Familien 589
K. HAIN, Das Übersetzungsverhältnis in mehrgliedrigen Kurvengetrieben . . . . . 617

*ÉCOULEMENTS À TRAVERS DES MILIEUX POREUX*

T. OROVEANU, Sur un problème d'écoulement dans un milieu poreux présentant des fissures . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 633

*TECHNOLOGIE DES MILIEUX SOLIDES CONTINUS*

Page

M. P. POPOV, E. D. DECIU and I. MITRICĂ, On the use of Rumanian ENC ceramic tips . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 641
C. I. FLORESCU, N. BĂJESCU, I. ALEXANDRESCU und M. VASILESCU, Möglichkeiten zur Klassifizierung der Bodenarten und zur Bestimmung der Bearbeitungswirkungen mittels physikalisch-mechanischer Größen. II . . . . . . . . 653

**NOTES**

GH. D. MUNTEANU, Les effets dynamiques correspondant à des accélérations d'un ordre quelconque . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 675

**RAPPORTS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES**

MARIUS PECULEA, Etude et détermination des principes pour l'élaboration des projets de compresseurs et de pompes à membranes métalliques . . . . . . . 681
GH. MARIN, Test installation for measuring the oil rate of flow and temperature of crankshaft bearings in internal combustion engines . . . . . . . . . . . . 693

**MANIFESTATIONS SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUES**

A. R. MÉTRAL, Les responsabilités économiques, culturelles et techniques dans les entreprises s'occupant de la mécanique, dans la dernière partie du XX^e^ siècle . 701
**REVUE BIBLIOGRAPHIQUE** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 717
**PUBLICATIONS REÇUES À LA RÉDACTION** . . . . . . . . . . . . . . . . 731

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

## S T U D I I

## CINEMATICA ŞI DINAMICA SOLIDULUI

# ASUPRA MIŞCĂRII RACHETEI ÎN MEDIU REZISTENT

## I. ASCENSIUNEA RACHETEI

DE

N. TIPEI

Într-o lucrare anterioară s-au scris ecuaţiile de mişcare a rachetei pe o traiectorie plană, sub forma [1],

$$\left.\begin{aligned}
\frac{G_0}{g_0}\left(1-\int_{t_0}^{t} k\,dt\right)\dot{v}_1 &= \left(\mathcal{T}-\frac{\rho}{2}SV^2Cx\right)\cos\gamma-\frac{\rho}{2}SV^2Cz\sin\gamma,\\
\frac{G_0}{g_0}\left(1-\int_{t_0}^{t} k\,dt\right)\dot{v}_3 &= \left(\mathcal{T}-\frac{\rho}{2}SV^2Cx\right)\sin\gamma+\frac{\rho}{2}SV^2Cz\cos\gamma-\\
&\quad -G_0\frac{R_0^2}{R^2}\left(1-\int_{t_0}^{t} k dt\right),
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

unde $G_0$, $g_0$ sînt greutatea rachetei şi acceleraţia gravitaţiei la momentul iniţial $t_0$; $R_0$ distanţa de la centrul pămîntului pînă la rachetă în acelaşi moment; $R$ aceeaşi distanţă la un moment oarecare $t$; $\rho$ densitatea aerului; $\gamma$ unghiul traiectoriei cu orizontala şi $V$ viteza mobilului într-un punct oarecare. Coeficienţii aerodinamici $Cx$, $Cz$ se referă la rezistenţa şi portanţa corespunzătoare, iar $k$ este o funcţie de timp care defineşte legea de descreştere a masei, respectiv de ardere a propelantului.

În ecuaţiile (1) s-a considerat unghiul $\tau$ (fig. 1), mic, astfel încît $\mathcal{T}\cos\tau\sim\mathcal{T}$, iar componenta după normala la traiectorie, $\mathcal{T}\sin\gamma$, se adaugă la portanţa aerodinamică, incluzîndu-se efectul ei în coeficientul $Cz$.

De asemenea, s-a considerat că verticalele diferitelor puncte sînt paralele. Această aproximaţie implică împărţirea traiectoriei în porţiuni, în interiorul cărora ipoteza este posibilă. În genere, se poate considera, totuşi, că deplasarea orizontală a rachetei în timpul ascensiunii în mediu rezistent nu este prea mare şi deci nu este întotdeauna necesar, din acest punct de vedere, să se urmărească mişcarea pe zone succesive.

Fie $v$ viteza de ejecţie a gazelor. Tracţiunea va fi

$$\mathfrak{F} = \frac{G_0}{g_0} kv. \tag{2}$$

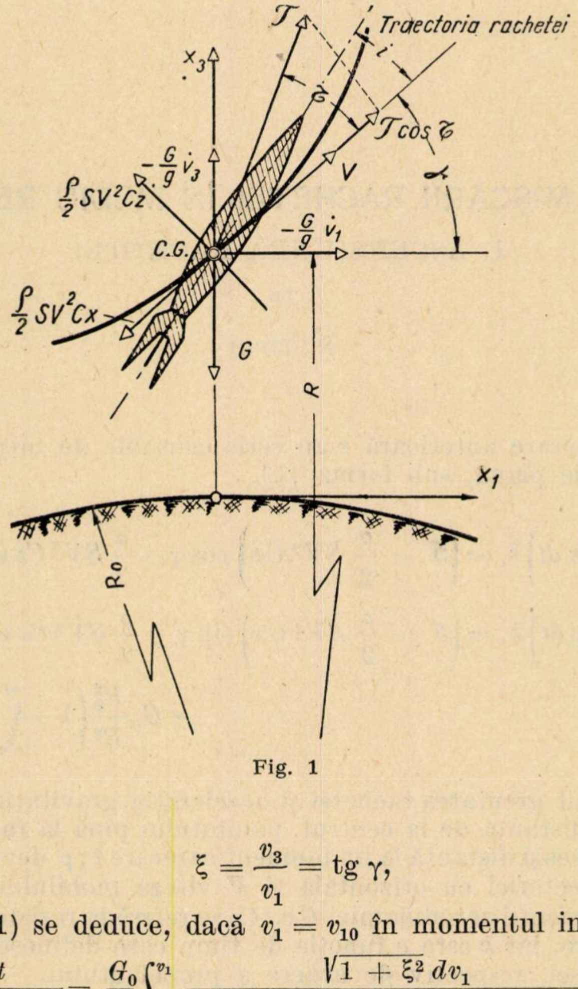

$\mathcal{T}$
Traectoria rachetei
$i$
$\tau$
$\mathcal{T} \cos \tau$
$x_3$
$-\frac{G}{g} \dot{v}_3$
$\frac{\rho}{2} SV^2 Cz$
$V$
$\alpha$
C.G.
$-\frac{G}{g} \dot{v}_1$
$\frac{\rho}{2} SV^2 Cx$
$G$
$R$
$x_1$
$R_0$

Fig. 1

Notînd

$$\xi = \frac{v_3}{v_1} = \operatorname{tg} \gamma, \tag{3}$$

din sistemul (1) se deduce, dacă $v_1 = v_{10}$ în momentul iniţial

$$\left.\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{1 - \int_{t_0}^{t} k dt} &= \frac{G_0}{g_0} \int_{v_{10}}^{v_1} \frac{\sqrt{1 + \xi^2}\, dv_1}{\mathfrak{F} - \frac{\rho}{2} S (1 + \xi^2)(Cx + \xi\, Cz)\, v_1^2}, \\ v_1 \frac{d\xi}{dv_1} &= \frac{\frac{\rho}{2} S\, Cz\, (1 + \xi^2)^{\frac{3}{2}} v_1^2 - G_0 \frac{R_0^2}{R^2} \left(1 - \int_{t_0}^{t} k dt\right)}{\mathfrak{F} - \frac{\rho}{2} S\, (1 + \xi^2)\, (Cx + \xi\, Cz)\, v_1^2} \sqrt{1 + \xi^2}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} R &= R_0 + x_3 = R_0 + \int_{t_0}^{t} \xi\, v_1\, dt \\ \rho &= \rho_0\, e^{-K\,(x_3 - x_{30})} = \rho_0\, e^{-K\int_{t_0}^{t} \xi\, v_1\, dt}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Cum tracțiunea este cunoscută ca funcție de timp prin intermediul lui $k(t)$ și $v$, sistemele (4) și (5) permit calculul lui $v_1$ și $t$ în funcție de $\xi$ sau, în general, a două dintre aceste mărimi în funcție de a treia. Coeficienții $Cx$ și $Cz$ sînt funcții date de numărul Mach, respectiv de viteza totală $V = v_1\sqrt{1 + \xi^2}$, pentru fiecare incidență.

Se observă, apoi, că există relațiile cunoscute, dacă $i$ este unghiul de incidență (unghiul dintre viteza $V$ și axa rachetei)

$$dt = \frac{dx_1}{v_1}\,;\quad Cz = f_3(x_1, v_1, \xi, i)\,;\quad Cz = f_1(x_1, v_1, \xi, i), \qquad (6)$$

sau, eliminînd incidența între ultimele două ecuații,

$$Cx = f(x_1, v_1, \xi, Cz). \qquad (7)$$

Din prima ecuație (1) se deduce astfel, după integrarea în raport cu timpul a funcției $k(t)$, dacă se consideră $\mathcal{F}$ ca o funcție de asemenea dată de $t$ sau de $x_1$ și se ține seama de (5)

$$t = F\left(x_1, v_1, \xi, Cz, \frac{dv_1}{dx_1}, \int_{x_{10}}^{x_1} \xi\, dx_1\right);\quad \frac{dF}{dx_1} = \frac{1}{v_1}. \qquad (8)$$

Această ecuație, împreună cu a doua din sistemul (4), permite rezolvarea problemei pe o cale generală. Fie astfel dată traiectoria

$$x_3 = F_3(x_1), \qquad (9)$$

din care se deduc imediat expresiile

$$v_3 = \frac{dF_3}{dx_1} v_1\,;\quad \xi = \frac{dF_3}{dx_1}\,;\quad \rho = \rho(x_1)\,;\quad R = R(x_1). \qquad (10)$$

Ecuația (8) se scrie

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial v_1}\frac{dv_1}{dx_1} + \frac{\partial F}{\partial\left(\dfrac{dv_1}{dx_1}\right)}\cdot\frac{d^2 v_1}{dx_1^2} + \frac{\partial F}{\partial Cz}\frac{dCz}{dx_1}\right] v_1 = 1. \qquad (11)$$

În aceasta, ca și în ultima din (4) în care se pune $d\xi = \dfrac{d^2F_3}{dx_1^2}\, dx_1$, $v_1$ și $Cz$ apar ca variabile dependente de $x_1$. Rezultă un sistem de două ecuații integrodiferențiale în $v_1$ și $Cz$, care rezolvă problema. Soluția este însă greu de găsit, din cauza complexității relațiilor. Se remarcă, de asemenea, că ecuațiile conțin derivatele de ordinul întîi și al doilea ale lui $v_1$, precum și pe $\frac{dCz}{dx_1}$. După găsirea valorii reale a lui $Cz$, se poate determina incidența la viteza rspectivă, din relațiile (6).

Un procedeu analog conduce la rezolvare cînd se dau, ca funcție de timp, unghiul $i$ și tracțiunea $\mathcal{F}$. Din (8) se deduce

$$t = F(x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1, \xi), \tag{12}$$

iar ultima ecuație (4) se transformă ușor, păstrînd pe $t$ ca variabilă independentă și pe $x_1$, $\xi$ funcții de aceasta; este suficient să se scrie $\frac{d\xi}{dv_1} = \frac{\dot{\xi}}{\ddot{x}_1}$ și să se înlocuiască în relația amintită.

*Traiectorii rectilinii.* Fie $\gamma_0 = \operatorname{arc\,tg} \xi_0$ unghiul traiectoriei cu orizontala în fiecare punct. Rezultă $\frac{d\xi}{dv_1} = 0$ și din (4) se deduce legea de variație a incidenței (portanței)

$$Cz = \frac{2G_0R_0^2}{(1+\xi_0^2)^{\frac{3}{2}}S} \cdot \frac{1-\int_{t_0}^{t} kdt}{\rho R^2 v_1^2} \cong \frac{2G_0}{(1+\xi_0^2)^{\frac{3}{2}}S} \cdot \frac{1-\int_{t_0}^{t} kdt}{\rho v_1^2}. \tag{13}$$

Aproximația $R_0 \sim R$ este posibilă, deoarece în mediul rezistent (atmosferă) diferențele sînt neglijabile. Portanța unitară, $Cz$, poate fi realizată cu ajutorul incidenței rachetei și cu ajutorul jeturilor laterale, sau al devierii direcției tracțiunii, astfel încît componenta acesteia normală pe viteză să aibă valoarea corespunzătoare. Se poate admite, apoi, că incidența are valori mici, care nu atrag variații ale coeficientului $Cx$ peste aproximațiile curente admise la evaluarea teoretică sau experimentală a sa. Astfel $Cx(M)$ depinde numai de numărul Mach, sau de $v_1$, $\xi$ și $x_1$ $(x_3)$; ultima variabilă intervine la stabilirea vitezei sunetului în fiecare punct.

Cu aceste elemente, dacă se dă o lege de pilotaj, problema se poate rezolva. Fie astfel

$$k = \text{const.}, \tag{14}$$

condiție care practic corespunde cazului cînd tracțiunea rămîne constantă (2).

Dacă se divizează traiectoria în mai multe porțiuni, se poate liniariza pe acestea variația lui $Cz$ și $\rho$

$$Cz = Cz_0 - k_z(t - t_0); \quad \rho = \rho_0 - \frac{\rho_0 - \rho^*}{T}(t - t_0). \tag{15}$$

Valorile marcate cu un asterisc corespund limitei superioare a intervalului de timp $T$, iar indicii zero valorilor inițiale.

Ecuația (13) dă imediat

$$v_1^2 = \frac{2G_0}{(1+\xi_0^2)^{\frac{3}{2}} S} \cdot \frac{1 - k(t-t_0)}{\left[\rho_0 - \frac{\rho_0 - \rho^\star}{T}(t-t_0)\right]\left[Cz_0 - k_z(t-t_0)\right]}. \tag{16}$$

Înălțimea rachetei, la un moment oarecare, se scrie

$$x_3 = x_{30} + \int_{t_0}^{t} \xi_0 \frac{\sqrt{2G_0}}{(1+\xi_0^2)^{\frac{3}{4}}\sqrt{S}} \sqrt{\frac{1 - k(t-t_0)}{\left[\rho_0 - \frac{\rho_0-\rho^\star}{T}(t-t_0)\right]\left[Cz - k_z(t-t_0)\right]}}\, dt. \tag{17}$$

Această expresie se poate transforma în felul următor:

$$\left.\begin{aligned} x_3 = x_{30} + \frac{\xi_0}{(1+\xi_0^2)^{\frac{3}{4}}}\sqrt{\frac{2GT}{Skk_z(\rho_0-\rho^\star)}}\int_0^{\tau}\frac{1-k\tau}{\sqrt{\left(\frac{1}{k}-\tau\right)\left(\frac{\rho_0 T}{\rho_0-\rho^\star}-\tau\right)\left(\frac{Cz_0}{k_z}-\tau\right)}}\,d\tau, \\ t - t_0 = \tau. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Observînd că variabila $\tau$ rămîne tot timpul mai mică decît rădăcinile polinomului de sub radical și notînd $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau_3$ aceste rădăcini, cu condiția

$$\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 \quad ; \quad \tau < \tau_2, \tau < \tau_3, \tag{19}$$

se poate exprima $x_3$ cu ajutorul integralelor eliptice de speța întîia și a doua ($F$ și $E$), după cum urmează:

$$\begin{aligned} x_3 = x_{30} + \frac{2\xi_0}{(1+\xi_0^2)^{\frac{3}{4}}}\sqrt{\frac{2GT}{Skk_z(\rho_0-\rho^\star)}}\Bigg\{\frac{(2\tau_3-\tau_1)k-1}{\sqrt{\tau_3-\tau_1}}\Bigg[F\Bigg(\arcsin\sqrt{\frac{\tau_3-\tau}{\tau_3-\tau_1}}, \\ \sqrt{\frac{\tau_3-\tau_2}{\tau_3-\tau_1}}\Bigg) - F\Bigg(\arcsin\sqrt{\frac{\tau_3}{\tau_3-\tau_1}}, \sqrt{\frac{\tau_3-\tau_2}{\tau_3-\tau_1}}\Bigg)\Bigg] - k\sqrt{\tau_3-\tau_1}\Bigg[E\Bigg(\arcsin\sqrt{\frac{\tau_3-\tau}{\tau_3-\tau_1}}, \\ \sqrt{\frac{\tau_3-\tau_2}{\tau_3-\tau_1}}\Bigg) - E\Bigg(\arcsin\sqrt{\frac{\tau_3}{\tau_3-\tau_1}}, \sqrt{\frac{\tau_3-\tau_2}{\tau_3-\tau_1}}\Bigg)\Bigg]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{20}$$

Coeficientul $Cx$ scade cu numărul Mach după o lege complicată și variabilă cu forma rachetei. În general, se poate admite o relație de tipul [2]

$$Cx = Cx^{(0)} + \frac{K_1}{M}, \tag{21}$$

reprezentată în figura 2. Această relație poate fi aproximată prin următoarea:

$$Cx = Cx^{(0)} + \frac{\alpha}{M^2} = Cx^{(0)} + \frac{\alpha \bar{a}^2}{(1+\xi^2)\, v_1^2}, \tag{22}$$

dacă se consideră intervale mai restrînse ale numărului Mach și dacă se iau valorile adecvate ale constantelor $Cx^{(0)}$ și $\alpha$ pe intervalele corespunzătoare. În expresia (22), $\bar{a}$ reprezintă viteza sunetului în fiecare punct și este, deci, o funcție de altitudinea $x_3$ atinsă de rachetă.

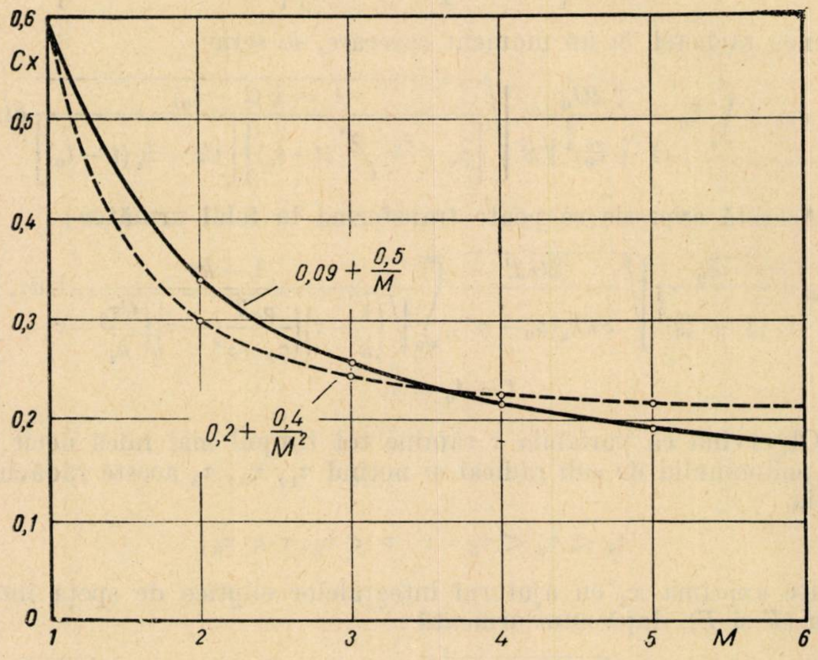


Fig. 2

Urmează, apoi, să se satisfacă și ecuația primă a sistemului (4). Prin liniarizarea valorilor $Cz$, $\rho$ (15), acest lucru nu mai este posibil în fiecare punct. Totuși, dacă se consideră întreg intervalul de timp $T$, această ecuație exprimă o condiție care, împreună cu expresia

$$\rho(x_3)=\rho(t)\,;\quad \rho^\star=\rho(T), \tag{23}$$

aplicată pe același interval, permite determinarea parametrilor $\rho^\star$ și $k_z$, a căror valoare nu a fost fixată anticipat. Se poate scrie deci, notînd cu $v_1^\star$ viteza $v_1$ finala

$$\frac{1}{k}\ln\frac{1}{1-kT}=$$

$$=\frac{G_0\sqrt{1+\xi_0^2}}{g_0}\int_{v_{10}}^{v_1^\star}\frac{dv_1}{\mathcal{T}_0-\frac{\rho}{2}S(1+\xi_0^2)\left(Cx^{(0)}+\xi_0\,Cz+\frac{\alpha\bar{a}^2}{(1+\xi_0^2)\,v_1^2}\right)v_1^2}=I. \tag{24}$$

Fie

$$\left.\begin{aligned}
&\mathcal{T}_0 Cz^\star - \frac{G_0}{\sqrt{1+\xi_0^2}}\left(Cx^{(0)} + \xi_0 Cz_0\right) - \frac{1}{2}\,\alpha\bar{a}^2\rho_0 S Cz_0 = a;\\
&\mathcal{T}_0 k_z - \frac{G_0}{\sqrt{1+\xi_0^2}}\left[\left(Cx^{(0)} + \xi_0 Cz_0\right)k + k_z\xi_0\right] +\\
&\qquad + \frac{1}{2}\,\alpha\bar{a}^2 S\left(\frac{\rho_0-\rho^\star}{T}\,Cz_0 + k_z\rho_0\right) = -\,b;\\
&\qquad \left(\frac{G_0\xi_0 k_z}{\sqrt{1+\xi_0^2}} + \alpha\bar{a}^2 S\,\frac{\rho_0-\rho^\star}{2T}\right)k_z = -\,c;\\
&\qquad \tau^\star_{1,2} = -\,\frac{b}{2c} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4c^2} - \frac{a}{c}};\quad \tau^\star_3 = \frac{\rho_0 T}{\rho_0-\rho^\star}.
\end{aligned}\right\}\qquad (25)$$

Cu aceste notații, ținînd seama și de expresia vitezei $v_1$, (16), membrul al doilea al ecuației (24) este

$$\left.\begin{aligned}
I = {}&\frac{1}{g_0(1+\xi_0)^{\frac{1}{4}}}\sqrt{\frac{G_0^3 k_z T}{2S(\rho_0-\rho^\star)k}}\int_0^T \frac{1}{(a+b\tau+c\tau^2)\sqrt{(\tau_1-\tau)(\tau_2-\tau)(\tau_3-\tau)}}\times\\
&\times\left[1 - \frac{k}{k_z}\,Cz_0 + k\,\frac{\left(\dfrac{1}{k}-\tau\right)\left(\dfrac{Cz_0}{k_z}-\tau\right)}{\dfrac{\rho_0 T}{\rho_0-\rho^\star}-\tau}\right]d\tau =\\
= {}&\frac{1}{cg_0(1+\xi_0^2)^{\frac{1}{4}}}\sqrt{\frac{G_0^3 kT}{2Sk(\rho_0-\rho^\star)}}\int_0^T\left[\left(1-\frac{k}{k_z}\,Cz_0\right)\frac{1}{\tau_2^\star-\tau_1^\star}\left(\frac{1}{\tau_1^\star-\tau}-\frac{1}{\tau_2^\star-\tau}\right)+\right.\\
&\left.+\sum_{i=1}^{3}\frac{(1-k\tau_i^\star)\left(\dfrac{Cz_0}{k}-\tau_i^\star\right)}{(\tau_l^\star-\tau_i^\star)(\tau_m^\star-\tau_i^\star)}\cdot\frac{1}{\tau_i-\tau}\right]\frac{1}{\sqrt{(\tau_1-\tau)(\tau_2-\tau)(\tau_3-\tau)}}\,d\tau,\\
&\qquad\qquad l,\ m \neq i,\ l \neq m.
\end{aligned}\right\}\qquad (26)$$

Dacă se introduce schimbarea de variabilă și notațiile

$$\left.\begin{aligned}
&\tau = \tau_3 - (\tau_3-\tau_2)\sin^2\varphi;\quad k^2 = \frac{\tau_3-\tau_2}{\tau_3-\tau_1};\quad n_i = \frac{\tau_3-\tau_2}{\tau_i^\star-\tau_3};\\
&\varphi^\star = \arcsin\frac{\tau_3-T}{\tau_3-\tau_2};\quad \varphi_0 = \arcsin\frac{\tau_3}{\tau_3-\tau_2},
\end{aligned}\right\}\qquad (27)$$

ecuația (24) se scrie, în cele din urmă

$$\ln \frac{1}{1-kT} = \frac{2}{cg_0(1+\xi_0^2)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\tau_3-\tau_1}}\sqrt{\frac{G_0^3 k k_z T}{2S(\rho_0-\rho^\star)}}\left\{\frac{1-\frac{k}{k_z}Cz_0}{\tau_2^\star-\tau_1^\star}\right.$$

$$\cdot\left(\frac{-1}{\tau_1^\star-\tau_3}[\Pi(\varphi^\star, n_1, k)-\Pi(\varphi_0, n_1, k)]+\frac{1}{\tau_2^\star-\tau_3}[\Pi(\varphi^\star, n_2, k)-\right.$$

$$\left.-\Pi(\varphi_0, n_2, k)]\right)+\sum_{i=1}^{3}\frac{(1-k\tau_i^\star)\left(\frac{Cz_0}{k_z}-\tau_i^\star\right)}{(\tau_l^\star-\tau_i^\star)(\tau_m^\star-\tau_i^\star)}\frac{1}{\tau_3-\tau_i^\star}[\Pi(\varphi^\star, n_i, k)-$$

$$\left.-\Pi(\varphi_0, n_i, k)]\right\}. \tag{28}$$

În aceasta

$$\Pi(\varphi, n_i, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n_i\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \tag{29}$$

reprezintă integrală eliptică de speța a 3-a, de argument $\varphi$, parametru $n_i$ și modul $k$.

Deducînd deci, din (23), (20) și (28) pe $\rho^\star$ și pe $k_z$, se cunoaște viteza în fiecare moment (16) și coordonatele $x_1$, $x_3$ corespunzătoare, iar problema este rezolvată. Se remarcă, totuși, că pe lîngă soluțiile analitice de o formă destul de complicată, se pot determina $\rho^\star$, $k_z$ și pe cale grafică, alegînd valori ale acestor parametri și stabilind valoarea expresiei I prin planimetrare, astfel încît să fie satisfăcută ecuația (24).

Intervalele de timp $T$, corespunzînd la diferite porțiuni de traiectorie și în interiorul cărora se liniarizează expresiile (15), depind de forma curbei descrisă de rachetă în mișcarea sa, și de alura variației mărimilor corespunzătoare. În general, aceste intervale pot fi sensibil mai mari decît în cazul rezolvării numerice prin procedeele obișnuite.

*Traiectorii curbilinii. Cazul* $\mathcal{T} = 0$. Se poate pune, în acest caz,

$$\frac{G_0}{g_0}\left(1-\int_{t_0}^{t} k\,dt\right) = (1-K)\frac{G_0}{g_0}, \tag{30}$$

$K$ fiind o constantă, iar $t_1$ este momentul cînd se întrerupe arderea propelantului. Prima ecuație a sistemului (1) dă

$$\frac{1}{v_1}\frac{dv_1}{d\xi} = -\frac{\rho}{2}S\sqrt{1+\xi^2}\cdot\frac{Cx^{(0)}+\xi Cz+\frac{\alpha\bar{a}^2}{(1+\xi^2)v_1^2}}{\frac{G_0}{g_0}(1-K)\frac{d\xi}{dx_1}}. \tag{31}$$

Comparînd această relaţie cu a doua ecuaţie (4), se deduce imediat

$$Cz = 2G_0(1-K)\frac{\dfrac{1}{g_0}\dfrac{d\xi}{dx_1}+\dfrac{R_0^2}{R^2}\cdot\dfrac{1}{v_1^2}}{\rho S(1+\xi^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{32}$$

Relaţia (32) stabileşte coeficientul forţei portante, în care se cuprinde atît portanţa propriu-zisă, cît şi efectul componentei $\mathcal{T}\sin\tau$ al tracţiunii totale (inclusiv jeturile laterale). Ea leagă direct acest coeficient de poziţia pe traiectorie a rachetei şi de viteza $v_1$, $\rho$ fiind o funcţie de $x_3$ iar $\xi=\dfrac{dx_3}{dx_1}$.

Cînd traiectoria este dată, $\xi$ este o mărime de asemenea cunoscută în fiecare punct, iar coeficientul $Cz$ se pune sub forma

$$Cz = c_1(x_1)+\frac{c_2(x_1)}{v_1^2}. \tag{33}$$

Se remarcă, apoi, că în mediul rezistent (atmosfera) $R\sim R_0$, iar $\dfrac{d\xi}{dx_1}=\dfrac{d^2x_3}{dx_1^2}$ depinde de curbura traiectoriei. Dacă această curbură are valori suficient de mari, rezultă

$$\frac{d\xi}{dx_1}\gg\frac{g_0}{v_1^2} \quad \text{şi} \quad Cz\cong\frac{2G_0(1-K)\dfrac{d\xi}{dx_1}}{g_0\rho S(1+\xi^2)^{\frac{3}{2}}}=Cz(x_1), \tag{34}$$

astfel, încît, în primă aproximaţie, $Cz$ apare ca o funcţie numai de variabila $x_1$.

Din (31) se deduce

$$\frac{dv_1}{dx_1}=-\frac{g_0\rho S\sqrt{1+\xi^2}}{2G_0(1-K)}\left[Cx^{(0)}+\xi c_1+\left(\frac{\alpha\bar{a}^2}{1+\xi^2}+\xi c_2\right)\frac{1}{v_1^2}\right]v_1, \tag{35}$$

sau

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dv_1^2}{dx_1}+\frac{g_0\rho S\sqrt{1+\xi^2}}{G_0(1-K)}\left[(Cx^{(0)}+\xi c_1)v_1^2+\frac{\alpha\bar{a}^2}{1+\xi^2}+\xi c_2\right]=0,\\ &\qquad\frac{dv_1^2}{dx_1}+A(x_1)v_1^2+B(x_1)=0.\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Soluţia acestei ecuaţii se găseşte imediat

$$v_1^2=e^{-\int A\,dx_1}\left(C-\int Be^{\int A\,dx_1}dx_1\right), \tag{37}$$

după care rezultă $Cz$ şi celelalte elemente al mişcării, în fiecare punct.

*Primită la redacţie la 16 februarie 1961*

# О ДВИЖЕНИИ РАКЕТЫ В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

## I. ПОДЪЕМ РАКЕТЫ

### РЕЗЮМЕ

Рассматривается восходящее движение ракеты в сопротивляющейся среде для любого закона изменения тяги и веса. Показывается общий путь решения, учитывая зависимость аэродинамических коэффициентов от числа Маха и плотности от высоты.

Для прямолинейных траекторий, получаются замкнутые формулы, дающие элементы движения при постоянной тяге. Принимая затем, что тяга равна нулю (фаза следующая за горением топлива), выводится закон изменения угла атаки, необходимого для того, чтобы придать траектории заранее заданную форму.

Выражения, введенные для учета изменения плотности и аэродинамических коэффициентов, позволяют применить результаты в больших диапазонах высот и скоростей. Точность полученных значений зависит от величины этих диапазонов и повышается по мере их уменьшения. Таким образом, метод можно применить для расчета элементов движения по участкам траектории. Каждый из них можно охарактеризовать различными значениями постоянных входящих в выражения упомянутых законов изменения. Предполагаемый способ нуждается в вычислении меньшего числа точек, чем при применении обычных методов последовательных дуг, а для менее точных оценок выпадает необходимость в рассмотрении движения по участкам.

# ON THE MOTION OF ROCKETS IN RESISTING MEDIUM

## I. ASCENDING MOTION

### ABSTRACT

This paper discusses the ascending motion of rockets in resisting medium for any law of variation of the thrust and weight. A general manner of solving the problem is presented, taking into account the dependence of the aerodynamic coefficients on the Mach number and of the density on the altitude.

For straight paths, closed formulas are obtained which give the motion elements for constant thrust. Assuming then that thrust vanishes (after the burning of the propellant) the law of variation of the incidence is deduced necessary for giving the path a prescribed form.

The expressions introduced for taking into account the variation of density and aerodynamic coefficients permit one to apply the results over large intervals of altitude and velocities. The accuracy of the values obtained depends on the magnitude of these intervals and increases when the latter decrease. The method may be thus used for calculating the motion elements for separate portions of the path. Each portion may be characterized by different values of the constants entering in the expressions of the above laws of variation. The procedure involves a more reduced number of points than the ordinary methods which use successive arcs and, for less rigorous estimations, the necessity to consider the motion on separate portions is eliminated.

## BIBLIOGRAFIE

1. N. TIPEI, *Sur la descente des fusées*. Revue de Mécanique Appliquée, **II**, *2*, 117 – 125 (1957).
2. W. REECE, R. D. JOSEPHE, D. SHAFFER, *Ballistic Missile Performance*. Jet Propulsion, April, 215–255 (1956).

## ELASTICITATE - PLASTICITATE - REZISTENȚA MATERIALELOR

# ÎNCOVOIEREA DINAMICĂ A BARELOR CU PROPRIETĂȚI VISCOELASTICE. II[1]

DE

M. MIȘICU și FL. DINCĂ

### 4. CAZUL UNUI CORP MAXWELL

Se vor aplica cele expuse în prima parte a acestei lucrări la cazul unui corp Maxwell. Aceasta permite după cum s-a menționat anterior, în fenomenele rapide pentru care curgerea și relaxarea sînt secundare, pentru oțelurile uzuale, o bună aproximare a evaluării disipării de energie, și prin urmare, o evaluare mai corectă a comportării vibrațiilor barelor în regim de rezonanță. Pentru un asemenea corp, dependența între tensiuni și deformații este de forma

$$\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\tau} = E\dot{\varepsilon}, \tag{4.1}$$

$\tau$ fiind timpul de relaxare, definit ca raportul între viscozitatea corpului și modul de forfecare

$$\tau = \frac{\eta}{G}. \tag{4.2}$$

Prin urmare în acest caz avem

$$p_0 = \frac{1}{\tau}\,;\; p_1 = 1\,;\; q_0 = 0\,;\; q_1 = 1, \tag{4.3}$$

ecuația diferențială (1.6) devine

$$EI\frac{\partial^4 \dot{u}}{\partial z^4} + m\left(\dddot{u} + \frac{\ddot{u}}{\tau}\right) = \dot{f} + \frac{f}{\tau}. \tag{4.4}$$

---

[1] Prima parte a acestei lucrări a fost publicată în „Studii și cercetări de mecanică aplicată", **XII**, *2* (1961).

Condiţiile la limită rămîn aceleaşi iar în condiţiile iniţiale (1.9) $n$ va lua valorile 0, 1, 2.

Luînd soluţii de forma (2.1) funcţiile $Z_l(z)$ se determină aşa cum s-a indicat în paragraful 2, ele fiind independente de modelul reologic ales. Funcţiile $T_l(t)$ vor fi determinate de ecuaţia

$$\frac{EI}{m}\lambda_l^4 \dot{T}_l + \left(\dddot{T}_l + \frac{\ddot{T}_l}{\tau}\right) = \frac{1}{m}\left(\dot{f} + \frac{f}{\tau}\right), \tag{4.5}$$

care se deduc din (2.5) prin particularizările (4.3).
Condiţiile iniţiale pentru (4.5) sînt de forma (2.13) pentru $n = 0, 1, 2$.

Vom renunţa din nou la scrierea cu indici. Formulele (2.14′) devin

$$\pi_0 = 0\,; \quad \pi_1 = \omega^2\,; \quad \pi_2 = \frac{1}{\tau}\,; \quad \pi_3 = 1 \tag{4.6}$$

iar formula (2.10)

$$\pi(p) = \omega^2 p + \frac{1}{\tau} p^2 + p^3. \tag{4.7}$$

Din (2.9) deducem

$$\overline{T} = \frac{\overline{f}(p)}{\pi(p)} + \frac{\ddot{T}_0 + T_0\left(p + \frac{1}{\tau}\right) + T_0\left(p^2 + \frac{p}{\tau} + \omega^2\right)}{\pi(p)}. \tag{4.8}$$

Zerourile funcţiei (4.7) sînt

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -\frac{1}{2\tau} + i\Omega', \quad p_3 = -\frac{1}{2\tau} - i\Omega' = \overline{p}_2, \tag{4.8′}$$

cu notaţia

$$\Omega' = \omega\sqrt{1 - \frac{1}{4\tau\omega^2}}. \tag{4.9}$$

Din (2.15) rezultă cu (4.8)

$$Y(t) = \frac{1}{\omega^2}\left[1 - e^{-\frac{t}{2\tau}}\left(\cos\Omega' t + \frac{1}{2\tau\Omega'}\sin\Omega' t\right)\right]. \tag{4.10}$$

Dacă notăm

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4\tau^2\Omega'^2}}}, \qquad \cos\varphi = \frac{\frac{1}{2\tau\Omega'}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4\tau^2\Omega'^2}}}, \tag{4.11}$$

funcția $Y(t)$ se poate scrie sub forma

$$Y(t) = \frac{1}{\omega^2}\left[1 - e^{-\frac{t}{2\tau}}\sqrt{1+\frac{1}{4\tau^2\Omega'^2}}\sin(\Omega' t + \varphi)\right], \tag{4.12}$$

care împreună cu formula (2.18) (scrisă pentru cazul considerat aici)

$$T_2(t) = \ddot{T}_0 Y(t) + \dot{T}_0\left[\dot{Y}(t) + \frac{1}{\tau}Y(t)\right] + T_0\left[\ddot{Y}(t) + \frac{1}{\tau}\dot{Y}(t) + \omega^2 Y(t)\right] \tag{4.13}$$

furnizează cea de-a doua componentă a soluției căutate.

Vom determina pe $T_1$ în două cazuri mai importante și anume : în cazul forței perturbatoare periodice și în cazul în care forța perturbatoare are forma (2.26) utilizînd formula

$$T_1(t) = \int_0^t Y(t-\alpha)\,F(\alpha)\,d\alpha. \tag{4.14}$$

a. *Cazul forței periodice*. Pentru cazul forței perturbatoare periodice avem (2.23)

$$F(\alpha) = \frac{Hi\nu}{m}\left(1 - \frac{i}{\tau\nu}\right)e^{i\nu\alpha}. \tag{4.15}$$

Introducînd (4.15) în (4.14) avem

$$T_1(t) = \frac{Hi\nu\left(1 - \frac{i}{\tau\nu}\right)}{m\omega^2}\int_0^t\left\{1 - e^{-\frac{t-\alpha}{2\tau}}\sqrt{1+\frac{1}{4\tau^2\Omega'^2}}\sin[\Omega'(t-\alpha)+\varphi]\right\}e^{i\nu\alpha}\,d\alpha, \tag{4.16}$$

în formula (4.16) în cele ce vor urma se va înțelege prin $H$ un $H_l$ din șirul (3.28) și de asemenea un $\omega_l$ și $T_{1l}$. Notînd cu

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \int_0^t e^{i\nu\alpha}\cdot d\alpha \\ I_2(t) &= \int_0^t e^{-\frac{t-\alpha}{2\tau}}\sin[\Omega'(t-\alpha)+\varphi]\,e^{i\nu\alpha}\,d\alpha \end{aligned} \tag{4.17}$$

expresia lui $T_1$ devine

$$T_1(t) = \frac{Hi\nu\left(1 - \frac{i}{\tau\nu}\right)}{m\omega^2}\left. I_1(t) - \sqrt{1+\frac{1}{4\tau^2\Omega'^2}}\,I_2(t)\right]. \tag{4.18}$$

Prima integrală se obține imediat

$$I_1 = \frac{1}{i\nu}(e^{i\nu t} - 1). \tag{4.19}$$

Cea de-a doua integrală devine şi ea imediată dacă se trece la exponenţiale conform formulei

$$\sin \zeta = \frac{e^{i\zeta} - e^{-i\zeta}}{2i}. \tag{4.20}$$

Cu ajutorul formulei (4.20)

$$I_2(t) = \frac{1}{2i} \int_0^t e^{-\frac{t-\alpha}{2\tau}} \{ e^{i[\Omega'(t-\alpha)+\varphi]} - e^{-i[\Omega'(t-\alpha)+\varphi]} \} e^{i\nu\alpha} \, d\alpha \tag{4.21}$$

scoţînd factorii constanţi în afară avem

$$I_2(t) = \frac{e^{-\frac{t}{2\tau}}}{2i} \left\{ e^{i[\Omega' t+\varphi]} \int_0^t e^{\alpha\left[i(\nu-\Omega')+\frac{1}{2\tau}\right]} d\alpha - \right. \\ \left. - e^{-i[\Omega' t+\varphi]} \int_0^t e^{\alpha\left[i(\nu+\Omega')+\frac{1}{2\tau}\right]} d\alpha \right\}. \tag{4.22}$$

Prin integrare

$$I_2(t) = \frac{e^{-\frac{t}{2\tau}}}{2i} \left\{ e^{i(\Omega' t+\varphi)} \frac{e^{t\left[i(\nu-\Omega')+\frac{1}{2\tau}\right]} - 1}{i(\nu-\Omega')+\frac{1}{2\tau}} - e^{-i(\Omega' t+\varphi)} \times \right. \\ \left. \times \frac{e^{t\left[i(\nu+\Omega')+\frac{1}{2\tau}\right]} - 1}{i(\nu+\Omega')+\frac{1}{2\tau}} \right\}. \tag{4.23}$$

După efectuarea calculelor se obţine

$$I_2(t) = e^{i\nu t} \frac{\left(i\nu + \frac{1}{\tau\nu}\right) \sin\varphi + \Omega' \cos\varphi}{\omega^2 - \nu^2 \left(1 - \frac{i}{\tau\nu}\right)} - \\ - e^{-\frac{t}{2\tau}} \frac{\left(i\nu + \frac{1}{\tau\nu}\right) \sin(\Omega' t + \varphi) + \Omega' \cos(\Omega' t + \varphi)}{\omega^2 - \nu^2 \left(1 - \frac{i}{\tau\nu}\right)},$$

sau ținînd seamă de (4.11)

$$I_2(t)=\frac{1}{\omega^2-\nu^2\left(1-\frac{i}{\tau\nu}\right)}\left\{\frac{e^{i\nu t}\,i\nu\left(1-\frac{i}{\tau\nu}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{4\tau^2\Omega'^2}}}-\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{t}{2\tau}}\left[\left(i\nu+\frac{1}{2\tau}\right)\sin(\Omega' t+\varphi)+\Omega'\cos(\Omega' t+\varphi)\right]\right\}. \tag{4.24}$$

Cu (4.24) și (4.19) expesia lui $T_1$ se scrie

$$T_1(t)=\frac{Hi\nu\left(1-\frac{i}{\tau\nu}\right)}{m\omega^2}\left\{\frac{e^{i\nu t}}{i\nu}\left[\frac{\omega^2}{\omega^2-\nu^2\left(1-\frac{i}{\tau\nu}\right)}-1\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{1+\frac{1}{4\tau^2\Omega'^2}}}{\omega^2-\nu^2\left(1-\frac{i}{\tau\nu}\right)}e^{-\frac{t}{2\tau}}\left[\left(i\nu+\frac{1}{2\tau}\right)\sin(\Omega' t+\varphi)+\Omega'\cos(\Omega' t+\varphi)\right]\right\}. \tag{4.25}$$

Soluția căutată va fi (revenind la notația cu indici)

$$T_{1l}(t)=\frac{H_l\,i\nu\left(1-\frac{i}{\tau\nu}\right)}{m\omega_l^2}\left\{e^{i\nu t}\frac{\omega_l^2}{i\nu\,[\omega_l^2+\nu^2]\left(1-\frac{i}{\tau\nu}\right)}+\right.$$

$$+e^{-\frac{t}{2\tau}}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{4\tau^2\Omega_l^{12}}}}{\omega_l^2-\nu\left(1-\frac{i}{\tau\nu}\right)}\left[\left(i\nu+\frac{1}{2\tau}\right)\sin(\Omega_l' t+\varphi_l)+\right.$$

$$\left.\left.+\omega_l'\cos(\Omega_l' t+\varphi_l)\right]-\frac{1}{i\nu}\right\}+Y(t)\left[\ddot{T}_{0l}+\frac{1}{\tau}\dot{T}_{0l}+\omega_l^2T_{0l}\right]+$$

$$+\dot{Y}(t)\left[\dot{T}_{0l}+\frac{1}{\tau}T_{0l}\right]+Y\ddot{y}(t)T_{0l}. \tag{4.26}$$

Pentru valori mari ale lui $t$ soluţia (4.26) devine

$$T_{1l}(t)=\frac{H_l\left(1-\frac{i}{\tau\nu}\right)}{m\omega_l^2}\left\{\frac{\omega_l^2}{\omega_l^2-\nu^2\left(1-\frac{i}{\tau\nu}\right)}-1\right\}+\frac{1}{\omega_l^2}\left[\ddot{T}_{0l}+\frac{1}{\tau}\dot{T}_{0l}+\omega^2T_{0l}\right]. \tag{4.27}$$

Deci cu aproximaţia unei constante aditive, pentru valori mari ale lui $t$ funcţia $T_{1l}$ este dată de relaţia

$$T_{1l}(t)=\frac{H_l\left(1-\frac{1}{\tau\nu}\right)}{m\nu^2\left[\frac{\omega_l^2}{\nu^2}-\left(1-\frac{i}{\tau\nu}\right)\right]}e^{i\nu t}, \tag{4.28}$$

expresie care se poate obţine şi direct prin simpla înlocuire a lui $u(z,t)$ cu

$$u=e^{i\nu t}\sum a_nz_n(z). \tag{4.29}$$

Prin urmare, în cazul în care studiem fenomenul stabilizat (în sensul că efectul condiţiilor iniţiale a dispărut) soluţia căutată este

$$u=e^{i\nu t}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{H_l\left(1-\frac{1}{\tau\nu}\right)}{m\nu^2\left[\frac{\omega_l^2}{\nu^e}-\left(1-\frac{i}{\tau\nu}\right)\right]}Z_l(z). \tag{4.30}$$

Avantajul soluţiei (4.26) este că în baza ei se pot trage concluzii pentru vibraţii în regim tranzitoriu, fapt important în cazul unor perturbaţii periodice care durează un timp relativ scurt. Mai mult, pe baza acestei expresii se poate preciza în ce situaţii poate fi neglijat efectul condiţiilor iniţiale.

b. *Cazul în care forţa perturbatoare este pulsatorie cu frecvenţa variind liniar.* În acest caz, după (2.27) avem

$$F(\alpha)=\frac{H}{m}\left[i\varepsilon\alpha+\frac{1}{\tau}\right]e^{i\left(\frac{\varepsilon\alpha^2}{2}+\theta\right)}, \tag{4.31}$$

unde $\varepsilon$ este o constantă dată, $\theta$ este o defazare.

Introducînd (4.31) şi (4.12) în (4.14) se obţine

$$T_1(t)=\frac{H}{m\omega^2}\int_0^t\left\{1-\sqrt{1+\frac{1}{4\tau^2\Omega'^2}}\,e^{-\frac{t-\alpha}{2\tau}}\sin\left[\Omega'(t-\alpha)+\varphi\right]\right\}$$
$$\left[i\varepsilon\alpha+\frac{1}{\tau}\right]e^{i\left[\frac{\varepsilon\alpha^2}{2}+\theta\right]}d\alpha. \tag{4.32}$$

În (4.32) mărimile $T_1$, $H$, $\omega$, $\Omega'$ şi $\varphi$ sînt afectate de indicile $l$, lucru pe care l-am omis pentru simplificarea scrierii.

Exprimînd în (4.32) sinusul prin exponențiale se obține

$$T_1(t) = \frac{H}{m\omega^2}\left\{\int_0^t e^{i\left[\frac{\varepsilon\alpha^3}{2}+\theta\right]} d\left[i\left(\frac{\varepsilon t^2}{2}+\theta\right)\right] + \frac{1}{\tau}\int_0^t e^{i\left(\frac{\varepsilon\alpha^2}{2}+\theta\right)} d\alpha - \right.$$

$$-\sqrt{1+\frac{1}{4\tau^2\Omega'^2}}\,\frac{e^{i\theta}e^{-\frac{t}{2\tau}}}{2i}\left(e^{i(\Omega' t+\varphi)}\left[\int_0^t \exp\left[i\frac{\varepsilon\alpha^2}{2}+\left(\frac{1}{2\tau}-i\Omega'\right)\right] i\,\varepsilon\alpha\, d\alpha + \right.\right.$$

$$+\frac{1}{\tau}\int_0^t \exp\left[i\frac{\varepsilon\alpha^2}{2}+\left(\frac{1}{2\tau}-i\Omega'\right)\alpha\right]d\alpha\right] - e^{-i(\Omega' t+\varphi)}\left[\int_0^t \exp\left[i\frac{\varepsilon\alpha^2}{2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\left(\frac{1}{2\tau}+i\Omega'\right)\alpha\right] i\,\varepsilon\alpha\, d\alpha + \frac{1}{\tau}\int_0^t \exp\left[i\frac{\varepsilon\alpha^2}{2}+\left(\frac{1}{2\tau}+i\,\Omega'\right)\alpha\right]d\alpha\right]\right)\right\}. \qquad (4.33)$$

Notăm

$$I_- = \int_0^t \exp\left[i\frac{\varepsilon\alpha^2}{2}+\left(\frac{1}{2\tau}-i\Omega'\right)\alpha\right]d\alpha,$$

$$I_+ = \int_0^t \exp\left[i\frac{\varepsilon\alpha^2}{2}+\left(\frac{1}{2\tau}-i\Omega'\right)\alpha\right]d\alpha, \qquad (4.34)$$

$$I = \int_0^t \exp\left[i\frac{\varepsilon\alpha^2}{2}+\theta\right]d\alpha.$$

Prima integrală din expresia (4.33) este imediată

$$\int_0^t e^{i\left[\frac{\varepsilon\alpha^2}{2}+\theta\right]} d\left[i\frac{\varepsilon\alpha^2}{2}+\theta\right]d\alpha = e^{i\left[\frac{\varepsilon t^2}{2}+\theta\right]} - e^{i\theta}. \qquad (4.35)$$

Calculăm integrala

$$\int_0^t \exp\left[i\frac{\varepsilon\alpha^2}{2}+\left(\frac{1}{2\tau}-i\Omega'\right)\alpha\right] i\varepsilon\alpha\, d\alpha = \int_0^t \exp\left[i\frac{\varepsilon\alpha^2}{2}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2\tau}-i\Omega'\right)\alpha\right] d\left[i\frac{\varepsilon\alpha^2}{2}+\left(\frac{1}{2\tau}-i\Omega'\right)\alpha\right] - \left(\frac{1}{2\tau}-i\Omega'\right)I_-. \qquad (4.36)$$

Prin urmare

$$\int_0^t \exp\left[i\frac{\varepsilon\alpha^2}{2}+\left(\frac{1}{2\tau}-i\Omega'\right)\alpha\right] i\varepsilon\alpha d\alpha = \exp\left[i\frac{\varepsilon t^2}{2}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2\tau}-i\Omega'\right)t\right] - 1 - \left(\frac{1}{2\tau}-i\Omega'\right)I_-. \qquad (4.37)$$

În mod analog

$$\int_0^t \exp\left[\frac{i\varepsilon\alpha^2}{2}+\left(\frac{1}{2\tau}+i\Omega'\right)\alpha\right] i\,\varepsilon\alpha\,d\alpha=\exp\left[\frac{i\varepsilon t^2}{2}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2\tau}+i\Omega'\right)t\right]-1-\left(\frac{1}{2\tau}+i\Omega'\right)I_+ . \tag{4.38}$$

Introducînd (4.35), (4.37) şi (4.38) în (4.33) se obține

$$T_1(t)=\frac{He^{i\theta}}{m\omega^2}\left\{\left[e^{\frac{i\varepsilon t^2}{2}}-1\right]+\frac{1}{\tau}I-\sqrt{1+\frac{1}{4\tau^2\Omega'^2}}\,\frac{e^{-\frac{t}{2\tau}}}{2i}\left(e^{i(\Omega't+\varphi)}\left[\exp\left[\frac{i\varepsilon t^2}{2}+\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2\tau}-i\Omega'\right)t\right]-1-I_-\left(\frac{1}{\tau}-i\Omega'\right)\Big]-e^{-i(\Omega't+\varphi)}\left[\exp\left[\frac{i\varepsilon t^2}{2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.+\left(\frac{1}{2\tau}+i\Omega'\right)t\right]-1-I_+\left(\frac{1}{2\tau}+i\Omega'\right)\right]\right)\right\}.$$

Grupînd termenii care conțin integrale neefectuate se obține

$$T_1(t)=\frac{He^{i\theta}}{m\omega^2}\left\{\left[e^{i\frac{\varepsilon t^2}{2}}-1\right]-\sqrt{1+\frac{1}{4\tau^2\Omega'^2}}\left[e^{\frac{i\varepsilon t^2}{2}}\sin\varphi-e^{-\frac{t}{2\tau}}\sin(\Omega't+\varphi)\right]+\right.$$

$$+\frac{1}{\tau}I+\sqrt{1+\frac{1}{4\tau^2\Omega'^2}}\,\frac{e^{-\frac{t}{2\tau}}}{2i}\left[I_-\left(\frac{1}{2\tau}-i\Omega'\right)e^{i(\Omega't+\varphi)}-I_+\left(\frac{1}{2\tau}+i\Omega'\right)\times\right.$$

$$\left.\left.\times\, e^{-i(\Omega't+\varphi)}\right]\right\}. \tag{4.39}$$

Integralele $I$, $I_-$, $I_+$ din (4.39) se efectuează în felul următor: Se face în prima schimbarea de variabilă

$$\frac{\varepsilon\alpha^2}{2}=\xi^2,$$

în cea de-a doua

$$\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\left(\varepsilon\alpha-\Omega'-\frac{i}{2\tau}\right)=\eta, \tag{4.40}$$

iar în cea de-a treia

$$\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\left(\varepsilon\alpha+\Omega'-\frac{i}{2\tau}\right)=\zeta,$$

cu aceste schimbări de variabilă integralele (4.34) devin

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\int_0^{\xi_1} e^{i\xi^2}\cdot d\xi, \\ I_- &= \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\exp\left[-\frac{1}{2\varepsilon}\left(\Omega'+\frac{i}{2\tau}\right)^2\right]\left[\int_0^{\eta} e^{i\eta^2}\,d\eta-\int_0^{\eta} e^{i\eta^2}\,d\eta\right], \\ I_+ &= \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\exp\left[-\frac{L}{2\varepsilon}\left(\Omega'-\frac{i}{2\tau}\right)^2\right]\left[\int_0^{\zeta} e^{i\zeta}\,d\zeta-\int_0^{\zeta_0} e^{i\zeta^2}\,d\zeta\right], \end{aligned} \tag{4.41}$$

unde $\xi_1$, $\eta_0$, $\eta_1$, $\zeta_0$ şi $\zeta_1$ sînt noile limite de integrare

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}t \\ \eta_0 &= -\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\left(\Omega'+\frac{i}{2\tau}\right); \quad \eta_1=\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\left(\varepsilon t-\Omega'-\frac{i}{2\tau}\right), \\ \zeta_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\left(\Omega'-\frac{i}{2\tau}\right); \quad \zeta_1=\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\left(\varepsilon t+\Omega'-\frac{i}{2\tau}\right). \end{aligned} \tag{4.42}$$

Prin cele de mai sus calculul integralelor $I$, $I_-$ şi $I_+$ s-a redus la calculul integralei

$$J=\int_0^{v_1} e^{iv^2}\,dv. \tag{4.42'}$$

Integrala din urmă poate fi exprimată cu ajutorul funcţiei de repartiţie

$$w(z)=e^{-z^2}\int_0^z e^{x^2}\,dx, \tag{4.43}$$

care este întabelată. Pentru aceasta facem în (4.43) schimbarea de variabilă

$$x^2=iv^2;\ x=\frac{1+i}{\sqrt{2}}v;\ dx=\frac{1+i}{\sqrt{2}}dv. \tag{4.44}$$

Prin urmare integrînd în raport cu noua variabilă pînă la $v=v_1$ se obţine valoarea funcţiei de repartiţie în punctul

$$z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}v_1. \tag{4.45}$$

Deci

$$w\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}v_1\right)=\frac{1+i}{\sqrt{2}}e^{-iv_1^2}\int_0^{v_1} e^{iv^2}\,dv \tag{4.46}$$

şi prin urmare

$$\int_0^{v_1} e^{iv^2}\, dv = \frac{\sqrt{2}}{1+i} e^{iv_1^2}\, w\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} v_1\right). \tag{4.47}$$

Introducînd (4.47) în (4.34) şi ţinînd seama de (4.40) (4.41) şi (4.42) se obţine

$$I = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\, \frac{\sqrt{2}}{1+i} e^{i\frac{\varepsilon t}{2}} \cdot w\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \xi_1\right), \tag{4.48}$$

$$I_- = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\, \frac{\sqrt{2}}{1+\tau} \left\{ \exp\left[\frac{i\varepsilon t^2}{2} + \left(\frac{1}{2\tau} - i\,\Omega'\right) t\right] w\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \eta_1\right) - w\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \eta_0\right)\right\},$$

$$I_+ = \sqrt{\frac{2}{3}}\, \frac{\sqrt{2}}{1+i} \left\{ \exp\left[\frac{i\varepsilon t^2}{2} + \left(\frac{1}{2\tau} + i\,\Omega'\right) t\right] w\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \xi_1\right) - w\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \zeta_0\right)\right\}.$$

Introducînd (4.48) în (4.39) se obţine

$$T_1(t) = \frac{He^{i\theta}}{m\omega^2} \left\{ \left[ e^{i\frac{\varepsilon t^2}{2}} - 1 \right] - \sqrt{1 + \frac{1}{4\tau^2\,\Omega'^2}} \left[ e^{i\frac{\varepsilon t^2}{2}} \sin\varphi - e^{-\frac{t}{2\tau}} \sin\left(\Omega' t + \varphi\right) \right] + \right.$$

$$+ \frac{1}{\tau}\, \frac{2}{(1+1)\sqrt{\varepsilon}} e^{\frac{i\varepsilon t^2}{2}} w\left(\tilde{\xi}_1\right) + \sqrt{1 + \frac{1}{4\Omega'^2\tau^2}}\, \frac{e^{-\frac{t}{2\tau}}}{2i} \left\{ \frac{2}{(1+i)\sqrt{\varepsilon}} \left(\frac{1}{2\tau} - i\,\Omega'\right) \times \right.$$

$$\times e^{i(\Omega' t + \varphi)} \left( \exp\left[\frac{i\varepsilon t^2}{2} + \frac{1}{2\tau} - i\,\Omega'\right) t\right] w\left(\tilde{\eta}_1\right) - w\left(\tilde{\eta}_0\right) \right) - \frac{2}{(1+i)\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2\tau} + i\,\Omega'\right) \times$$

$$\left. \times\, e^{-i(\Omega' t + \varphi)} \left( \exp\left[\frac{i\varepsilon t^2}{2} + \left(\frac{1}{2\tau} + i\,\Omega'\right) t\right] w\left(\tilde{\zeta}_1\right) - w\left(\tilde{\zeta}_0\right) \right) \right\}. \tag{4.49}$$

Grupînd termenii se obţine

$$T_1(t) = \frac{He^{i\theta}}{m\omega^2} \left\{ e^{i\frac{\varepsilon t^2}{2}} \left( \frac{1}{\tau}\, \frac{2}{1+i} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} w\left(\tilde{\xi}_1\right) + \frac{1}{\sin\varphi}\, \frac{1+i}{2\sqrt{\varepsilon}} \left[ \left(\frac{1}{2\tau} - i\Omega'\right) e^{i\varphi} w\left(\tilde{\eta}\right) - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\frac{1}{2\tau} + i\,\Omega'\right) e^{-i\varphi} w\left(\tilde{\zeta}_1\right) \right] \right) + e^{-\frac{t}{2\tau}} \left( \frac{\sin\left(\Omega' t + \varphi\right)}{\sin\varphi} - \frac{1+i}{2\sin\varphi\sqrt{\varepsilon}} \left[ \left( \frac{1}{2\tau} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + i\,\Omega' \right) w\left(\tilde{\eta}_0\right) e^{i(\Omega' t + \varphi)} - \left(\frac{1}{2\tau} - i\,\Omega'\right) w\left(\tilde{\eta}_0\right) e^{-i(\Omega' t + \varphi)} \right] \right) - 1 \right\}. \tag{4.50}$$

Cu notaţiile

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}} \xi_J = \tilde{\xi}_J;\quad \frac{1+i}{\sqrt{2}} \eta_J = \tilde{\eta}_J;\quad \frac{1+i}{\sqrt{2}} \xi_J = \tilde{\xi}_J;\ J = 0{,}1.$$

Soluția generală va fi

$$T_l = T_{1l} + T_{2l}, \tag{4.51}$$

$T_{1l}$ fiind dat de (4.50) iar $T_{2l}$ de (4.13). Soluția problemei în cazul în care condițiile inițiale nu au efect pentru valori suficient de mari ale lui $t$ este (în afara unei constante)

$$u = \frac{e^{i\theta}}{m\omega^2} e^{i\frac{\varepsilon t^2}{2}} \sum_0^\infty H_n \tilde{f}_n(t)\, Z_n(z), \tag{4.52}$$

cu notația

$$\tilde{f}_n(t) = \frac{1}{\tau}\,\frac{2}{1+i}\,\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\, w(\tilde{\xi}) + \frac{1}{\sin\varphi}\,\frac{1+i}{2\sqrt{\varepsilon}}\left[\left(\frac{1}{2\tau} - i\Omega'\right) e^{i\varphi} w(\tilde{\eta}_1) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{2\tau} + i\Omega'\right) e^{-i\varphi} w(\xi_1)\right]. \tag{4.53}$$

c. *Cazul barei cu suspensii elastice.* Înlocuind valorile (4.3) în (2.53) se obține

$$Q(i\nu) = i\nu;\ (i\nu)^2 P(i\nu) = (i\nu)^2\left[\frac{1}{\tau} + i\nu\right];\ P(i\nu) = \frac{1}{\tau} + i\nu \tag{4.54}$$

și din (2.54)

$$\left\{EI\lambda_l^4 - m\nu^2\left(1 - \frac{i}{\tau\nu}\right)\right\} a_l + \left(1 - \frac{i}{\tau\nu}\right)\sum_{n=0}^\infty a_n b_{ln} = \left(1 - \frac{i}{\tau\nu}\right) H_l \tag{4.55}$$

sau

$$m\nu^2\left[\frac{\omega_l^2}{\nu^2\left(1 - \frac{i}{\tau\nu}\right)} - 1\right] a_l + \sum_{n=0}^\infty a_n b_{ln} = H_l \quad l = 0, 1 \ldots \tag{4.56}$$

Prin urmare în cazul unui model Maxwell coeficienții dezvoltării soluției în serie de funcții proprii sînt determinați de sistemul algebric infinit (4.56). Prin urmare soluția în acest caz va fi de forma

$$u = e^{i\nu t} \sum_0^\infty a_l z_l(z). \tag{4.57}$$

## 5. APLICAȚII LA STUDIUL EFECTELOR DINAMICE PROVENITE DIN VÎNT ASUPRA TRAVERSĂRILOR CU CONDUCTE DE GAZ METAN

Vom prezenta în prealabil anumite rezultate referitoare la scurgerea plan paralelă a unui fluid în jurul unui obstacol cilindric. Demonstrațiile rezultatelor expuse se găsesc în cărțile de specialitate.

Fie un obstacol cilindric de curbă directoare $\Gamma$ plasat într-un curent paralel avînd viteza la infinit amonte $V$.

În acest caz, în spatele obstacolului ia naştere o desprindere periodică de turbioane (aleea Kármán) cu frecvenţa

$$f = 0{,}22 \frac{V}{D}, \tag{5.1}$$

iar pe conductă apare o presiune de intensitate

$$H = \frac{\rho}{2} C_0 V^2 D. \tag{5.2}$$

În formulele precedente s-a notat cu $\rho$ masa unităţii de volum a fluidului, cu $C_0$ un coeficient de formă (care în cazul corpurilor cilindrice circulare este 1) iar prin $D$ o anumită dimensiune a obstacolului (care în cazul corpului cilindric circular este diametrul cilindrului). Notăm

$$\nu = 2\pi f. \tag{5.3}$$

Va trebui deci să considerăm că pe o conductă ia naştere o forţă în plan vertical, periodică în timp, deci în cazul general de forma

$$f(z, t) = He^{i\nu t}. \tag{5.4}$$

Forţa perturbatoare (5.4) va trebui deci considerată în expresiile precedente pentru a studia efectele dinamice ale vîntului pe traversările de conducte.

Vom face în cele ce urmează calculul pentru două cazuri:

*a*) cazul în care conducta este simplu rezemată, fără suspensii;

*b*) cazul în care conducta este simplu rezemată, cu suspensii elastice echidistante.

a) *Conducta simplu rezemată.* În cazul conductei simplu rezemată funcţiile $Z_l(z)$ sînt date de expresiile

$$Z(z) = C \sin \frac{l\pi}{L} z \quad l = 1, 2, 3 \ldots \tag{5.5}$$

$L$ fiind lungimea conductei (tabela 1, prima linie) $C$ este o constantă care se determină prin condiţia de normare (2.9). Se observă că condiţia (2.8) este îndeplinită. Din (2.9) obţinem

$$C = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

şi prin urmare

$$Z_l(z) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{l\pi}{L} z. \tag{5.5'}$$

Forța perturbatoare fiind de forma (5.4) soluția problemei se va scrie după (4.30)

$$u = e^{i\nu t} \sum_{l=1,3,5} \frac{H_l\left(1 - \frac{i}{\tau\nu}\right)}{m\nu^2\left[\frac{\omega_l^2}{\nu^2} - \left(1 - \frac{i}{\tau\nu}\right)\right]} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{l\pi}{L} z \tag{5.6}$$

unde

$H_l$ este dat de soluția (2.55) și are pentru funcțiile (5.5) valoarea

$$H_l = H \frac{4}{l\pi} \sqrt{\frac{L}{2}} \qquad l = 1,\ 3,\ 5, \tag{5.7}$$

iar $\omega_l$ este vibrația proprie de ordinul $l$ a conductei (formula (2.9)).

Cunoscînd soluția (5.6) se pune problema: care este sarcina echivalentă, care aplicată static, uniform în lungul conductei, dă naștere la aceeași stare de tensiune ca și sarcina dinamică (5.4)? Forța statică echivalentă va fi aceea care va da un moment încovoietor echivalent.

Momentul încovoietor are expresia

$$M(z, t) = -EIe^{i\nu t} \sum_{1,3,5} \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2 \frac{\frac{4}{l\pi}\left(1 - \frac{i}{\tau\nu}\right)}{m\nu^2\left[\frac{\omega_l^2}{\nu^2} - \left(1 - \frac{i}{\tau\nu}\right)\right]} \sin \frac{l\pi}{L} z. \tag{5.8}$$

Notînd

$$\nu^2 = \left(\frac{s\pi}{L}\right)^4 \frac{EI}{m}, \tag{5.9}$$

și dînd lui $s$ valori într-un anumit interval vom obține pentru $\nu$ toate valorile posibile; în particular pe cele care produc rezonanță le vom obține dînd lui $s$ valorile 1, 3 5...

Introducînd (5.9) în (5.8) se obține

$$M(z, t) = -EIHe^{i\nu t} \sum_{l=1,3,5} \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2 \frac{\frac{4}{l\pi}\left(1 - \frac{i}{\tau\nu}\right)}{EI\left(\frac{\pi}{L}\right)^4\left[l^4 - s^4\left(1 - \frac{i}{\tau\nu}\right)\right]} \sin \frac{l\pi}{L} z, \tag{5.10}$$

sau, după unele simplificări

$$M(z, t) = -\frac{4HL^2}{\pi^3} e^{i\nu t} \sum_{l=1,3,5\ldots} \frac{l\left(1 - \frac{i}{\tau\nu}\right)}{l^4 - s^4\left(1 - \frac{i}{\tau\nu}\right)} \sin \frac{l\pi}{L} z. \tag{5.11}$$

Înmulţind şi împărţind expresia precedentă cu 8 se obţin

$$M = \frac{H^{\star}L^2}{8} \tag{5.12}$$

unde

$$H^{\star} = -\frac{32H}{\pi^3} e^{i\nu t} \sum_{l=1,3,5} \frac{l\left(1-\dfrac{i}{\tau\nu}\right)}{l^4 - s^4\left(1-\dfrac{i}{\tau\nu}\right)} \sin\frac{l\pi}{L} z. \tag{5.12'}$$

Luînd valoarea maximă a lui $H^{\star}$ şi aplicînd-o static vom obţine momentul (5.12). Observăm că

$$\max H^{\star} = Hq_{\max}. \tag{5.13}$$

Prin $H$ înţelegîndu-se forţa corespunzătoare vîntului care induce pe conductă forţa periodică cu frecvenţa $\nu_s$, iar $q_{\max}$ este dat de expresia

$$q_{\max} = \frac{32}{\pi^3} \sum_{1,3,5} \left| \frac{l\left(1-\dfrac{i}{\tau\nu}\right)}{l^4 - s^4\left(1-\dfrac{i}{\tau\nu}\right)} \right|. \tag{5.14}$$

Cum era şi natural valoarea cea mai ridicată pentru $q$ se obţine pentru $l = s$ (adică în cazul rezonanţei). În acest caz, ceilalţi termeni din suma numerică (5.14) sînt neglijabili şi se obţine

$$q_{\max} = \frac{32}{\pi^3} \frac{\tau\nu}{l^3}. \tag{5.15}$$

Se constată că deşi $q$ tinde către zero cu creşterea frecvenţei critice, forţa echivalentă creşte tinzînd către infinit.

Prin urmare calculul va decurge în modul următor:

1. Se calculează frecvenţele proprii ale barei după formula (2.9) cu $\lambda_l = \dfrac{l\pi}{L}$. Prin împărţire la $2\pi$ se obţin $f_l$ (frecvenţele proprii în Herţi).

2. După formula (5.1) se calculează vitezele vîntului $V_l$ care induc forţe perturbatoare periodice cu aceleaşi frecvenţe $\left(\dfrac{\omega l}{2\pi}\right)$.

3. După formula (5.2) se calculează amplitudinile forţelor perturbatoare $H_l$.

4. Se ia forţa $H_l$ cea mai mare indusă de vîntul cel mai puternic posibil şi se înmulţeşte cu coeficientul (5.15) (formula (5.13)). Forţa rezultată va fi cea care trebuie luată în consideraţie.

### *Aplicație*

*a*) Considerăm cazul unei traversări cu o conductă cu gaz metan, simplu rezemată cu deschiderea de 55 m, cu următoarele caracteristici :

$E = 2{,}110^{+6}$ kg/cm$^2$,
$J = 3{,}92\ 10^4$ cm$^4$, (5.16)
$D = 60$ cm,
$\rho = 0{,}125$ kg s$^2$/m$^4$.
Greutatea țevii 90 kg/ml,
instalație termică 20 kg/ml,
zăpadă + ghiață 59 kg/ml,
Total 169 kg/ml

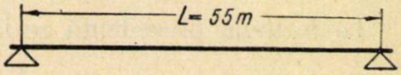


Fig. 2

$$m = \frac{1{,}69\ \text{kg}/}{981\ \text{cm/s}^2} = 1{,}73\ 10^{-3}\ \frac{\text{kg. s}^2}{\text{cm}^2}. \tag{5.17}$$

Procedăm conform schemei de la sfîrșitul paragrafului precedent. Calculăm frecvențele proprii după formula (2.9)

$$\omega_l^2 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \frac{EI}{m} l^4 = \frac{3{,}14^4 \cdot 2{,}1 \cdot 3{,}92 \cdot 10^{13}}{5{,}5^4 \cdot 10^{12} \cdot 1{,}73} = 5{,}055\ l^4 \tag{5.18}$$

$$\omega_l = l^2 \sqrt{5{,}055} \qquad l = 1,\ 3,\ 5...$$

*Tabela 2*

| $l$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $l^2$ | 1 | 9 | 25 | 49 | 81 | 121 | 169 | 225 | 289 | 361 |
| $\omega_l$ | 2,249 | 20,24 | 36,225 | 110,2 | 182,76 | 272,13 | 380,08 | 506,02 | 649,96 | 811,89 |
| $f_l$ | 0,358 | 3,22 | 8,953 | 17,548 | 29,01 | 43,33 | 60,52 | 80,58 | 103,50 | 129,28 |

Viteza $V_l$ a vîntului care induce pe conductă o forță perturbatoare cu frecvența $f_l$ este dată de (5.1)

$$V_l = \frac{fD}{0{,}22} = \frac{60}{0{,}22} f_l\ \text{cm/s} = 272{,}7\ f_l\ \text{cm/s}. \tag{5.19}$$

*Tabela 3*

| $l$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_l$ (m/s) | 0,976 | 8,79 | 24,41 | 47,85 | 79,11 | 118,16 |
| $V$ (km/h) | 3,5 | 31,6 | 87,8 | 172 | 284,00 | 425,00 |

Amplitudinea forţei perturbatoare $H_l$ corespunzătoare vitezei $V_l$ a vîntului este dată de formula (5.2)

$$H_l = \frac{\rho}{2}\, C_0\, D\, V_l^2 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}125\cdot 0{,}60\; V_l^2 = 0{,}0375\; V_l^2\,\mathrm{kg/ml}. \tag{5.20}$$

În formula precedentă se ia viteza în m/s $\rho$ în $\frac{\mathrm{kg\ s^2}}{\mathrm{m^4}}$

Tabela 4

| $l$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_l^2 \left(\frac{m^2}{s^2}\right)$ | 0,952 | 77,26 | 595,85 | 2289,6 | 6258,39 | 13960 |
| $H \left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}\right)$ | 0,035 | 2,89 | 22,34 | 85,86 | 234,68 | 523,50 |

Coeficientul de impact este dat de formula (5.15)

$$q_l = \frac{32}{\pi^3}\,\frac{\tau\nu}{l^3}, \tag{5.21}$$

unde [1])

$$\tau\nu = \frac{2\pi}{\psi}. \tag{5.22}$$

În cazul cel mai defavorabil $\psi = 0{,}11$ el crescînd cu amplitudinea vibraţiilor [2]).
Deci

$$\tau\,\nu = 0{,}57, \tag{5.23}$$

avem

$$q_l = \frac{32\cdot 57\cdot l^{-3}}{(3{,}14)^3} = 58{,}916\; l^{-3}. \tag{5.24}$$

Tabela 5

| $l$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $l^3$ | 1 | 27 | 125 | 343 | 819 | 1331 |
| $q_l$ | 58,916 | 2,182 | 0,471 | 0,1717 | 0,0719 | 0,0443 |

Din formula

$$H_l^* = q_l\cdot H_l, \tag{5.25}$$

---

[1]) M. Kolski, *Stress wave in solids*. Oxford, Clarendon Press, 1953.

[2]) E. S. Sorokin, *Dinamiceskii raşcet nesuscih construcţii zadaci*, p. 13 (a se vedea [24], în prima parte a acestei lucrări).

rezultă

*Tabela 6*

| $l$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_l\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ | 3,5 | 31,6 | 87,8 | 172 | 284 | 425 |
| $H_l^*\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}}\right)$ | 2,06 | 6,321 | 10,52 | 14,74 | 16,87 | 23,19 |

Prin urmare în proiectare va trebui să se considere o sarcină uniformă $H_l^*$ corespunzătoare vînturilor mai puternice posibile, corespunzătoare în tabelul precedent lui $l = 7$ (sau $l = 9$ absolut acoperitor).

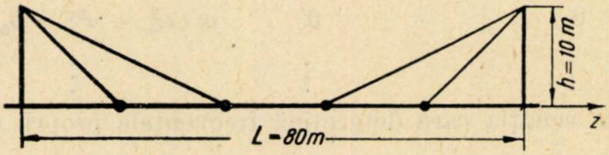


Fig. 3

*b*) Considerăm cazul unei traversări cu o conductă de gaz metan simplu rezemată, cu deschiderea $L$ de 80 m avînd celelalte caracteristice ca în cazul precedent, deosebindu-se de aceasta prin faptul că este suspendată în patru cabluri ce o separă în 5 tronsoane egale (fig. 3). Funcțiile proprii și valorile proprii cu ajutorul cărora se va exprima soluția problemei, sînt tot cele din aplicația precedentă, adică

$$\lambda_l = \frac{l\pi}{L}; \quad Z_l(z) = C \sin \frac{l\pi}{L} z; \quad C = \sqrt{\frac{2}{L}}; \; l = 1, 3, 5... \tag{5.26}$$

ca și în cazul precedent, ne interesează comportarea construcției în regim de rezonanță. Pentru aceasta este necesar să se determine frecvențele proprii ale construcției și apoi să se rezolve sistemul (4.56) pentru cazul în care forța perturbatoare are aceste frecvențe. Vom face ipoteza (compatibilă cu fenomenul) că frecvențele proprii ale conductei considerată ca corp viscoelastic, coincid cu cele elastice. În acest caz, considerînd vibrațiile proprii de forma

$$u = e^{i\nu t} \sum A_l \sin \frac{l\pi}{L} z, \tag{5.27}$$

pentru $\tau\nu = \infty$ (corp Hooke) se obține pentru determinarea coeficienților $A_l$ (în absența forței perturbatoare) sistemul infinit

$$[m(\omega_l^2 - \nu^2) + b_l] A_l + \sum_{n=1}^{\infty}{}' A_n b_{ln}. \tag{5.28}$$

Accentul în suma infinită indică că în această sumă lipseşte termenul corespunzător lui $n = l$.

Sistemul infinit (5.28) este omogen. Pentru ca să admită soluţii nebanale este necesar şi suficient ca determinantul său să fie nul.

Înainte de a scrie explicit acest determinant, vom observa că în conformitate cu (4.56) şi (5.26) avem

$$b_{5n} = b_{l5} = \frac{2}{L} \sum_{J} K_J \sin \frac{n\pi}{L} \frac{n\pi}{5} \sin \frac{5\pi}{L} \frac{JL}{5} = 0, \tag{5.29}$$

pentru orice $l$ şi $n$. Cu această observaţie, determinantul sistemului infinit (5.28) pe care îl vom nota cu $\Delta$ se scrie

$$\Delta = \begin{vmatrix} m(\omega_1^2 - \nu^2) + b_{11} & b_{15} & 0 & b_{17} \dots \\ b_{31} & m(\omega_3^2 - \nu^2) + b_{33} & 0 & b_{37} \dots \\ 0 & 0 & m(\omega_5^2 - \nu^2) + b_{55} \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix} \tag{5.30}$$

şi prin urmare ecuaţia care determină frecvenţele proprii este

$$\Delta = 0. \tag{5.31}$$

Determinantul $\Delta$ are următoarea structură : coloanele şi liniile care conţin termenul $\omega_{5(2n+1)}^2$, conţin numai acest element, la intersecţia lor sub forma $m\,[\omega_{5(2n+1)}^2 - \nu^2]$, celelalte elemente fiind nule. Dezvoltînd succesiv determinantul $\Delta$ după aceste linii, se obţine în definitiv

$$m \prod_{0}^{\infty} [\omega_{5(2n+1)}^2 - \nu^2]\, \mathcal{D} = 0 \tag{5.32}$$

unde s-a notat prin $\Pi$ produsul factorilor din paranteză, iar prin $\mathcal{D}$ determinantul ce se obţine din $\Delta$ prin suprimarea tuturor liniilor şi coloanelor ce conţin un singur element de forma $m\,[\omega_{5(2n+1)}^2 - \nu^2]$ adică

$$\begin{vmatrix} m(\omega_1^2 - \nu^2) + b_{11} & b_{13} & b_{17} & b_{19} \\ b_{31} & m(\omega_3^2 - \nu^2) + b_{33} & b_{37} & b_{39} \\ b_{71} & b_{73} & m(\omega_7^2 - \nu^2) + b_{77} & b_{79} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \tag{5.33}$$

Prin urmare frecvenţele proprii sînt determinate de ecuaţiile

$$\prod_{n=0}^{\infty} [\omega_{5(2n+1)}^2 - \nu^2] = 0\,;\; \mathcal{D} = 0. \tag{5.34}$$

Prima ecuaţie dă frecvenţele proprii

$$\nu^2 = \omega_{5(2n+1)}^2 \qquad n = 0, 1, 2, \dots \tag{5.35}$$

iar cea de-a doua dă restul frecvenţelor proprii.

Constantele elastice $K_J$ se determină în modul următor:

Fie $u$ săgeata conductei în punctul $z = z_J$, $h$ cota la care este fixat cablul de secțiune $A$ și modul de elasticitate $E_1$. Prin deplasarea $u$ a conductei, într-o secțiune oarecare a cablului, ia naștere un efort $\sigma_1$, corespunzător deplasării $\varepsilon_1$, legate prin legea lui Hooke

$$\sigma_1 = E_1\, \varepsilon_1. \tag{5.36}$$

Efortul total în cablu este

$$F_c = A\, \sigma_1 = AE_1\, \varepsilon_1. \tag{5.37}$$

Din cauză că $\alpha \approx \alpha'$ (fig. 4) avem

$$\varepsilon_1 = \frac{u}{\sqrt{h^2 + Z_J^2}} \cos \alpha;$$

$$F_c = AE_1 \frac{u}{\sqrt{h^2 + Z_J^2}}.$$

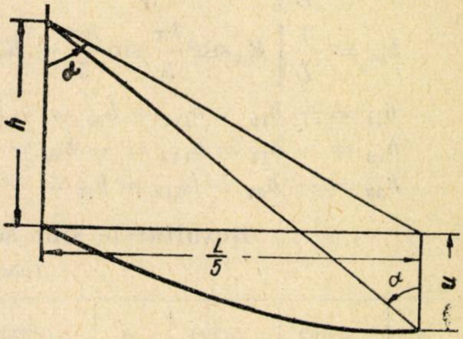


Fig. 4

Proiectînd forța $F_c$ pe normala la conductă se obține

$$F = AE_1 \frac{u}{\sqrt{u^2 + z_J^2}} \cos^2\alpha; \quad \cos^2 \alpha = \frac{h^2}{h^2 + z_J^2}.$$

Deci

$$K_1 = K_4 = AE_1 \frac{h^2}{\left[h^2 + \left(\frac{L}{5}\right)^2\right]\sqrt{h^2 + \left(\frac{L}{5}\right)^2}}, \tag{5.38}$$

$$K_2 = K_3 = AE_1 \frac{h^2}{\left[h^2 + \left(\frac{L}{5}\right)^2\right]\sqrt{h^2 + 4\left(\frac{L}{5}\right)^2}}.$$

Soluția problemei se efectuează după următoarea schemă:

1° Se calculează coeficienții $K_J$,

2° Se calculează coeficienții $b_{ln}$,

3° Se determină frecvențele critice,

4° Se rezolvă sistemul (4.56) pentru frecvențele critice obținute anume pentru acele frecvențe critice care prin formula (5.19) corespund unor intensități de vînt de curente.

1°. *Calculul coeficienților* $K_J$. Se consideră cablul cu următoarele date: $A = 5{,}62$ cm²; $E = 1{,}610^6$ kg/cm²; $h = 1\,000$ cm; $L = 8\,000$ cm. După formulele (5.38) avem

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{5{,}62 \cdot 1{,}6 \cdot 10^3}{3{,}56\sqrt{3{,}56}} = 1330 = K_4 \\ K_2 &= \frac{5{,}62 \cdot 1{,}6 \cdot 10^3}{10{,}2\sqrt{10{,}2}} = 276 = K_3. \end{aligned} \tag{5.39}$$

2° *Calculul coeficienţilor* $b_{ln}$. Din (2.53) avem

$$
\begin{aligned}
b_{nn} &= \frac{4}{L}\left[K_1 \sin^2\frac{n\pi}{5} + K_2 \sin^2\frac{n\pi}{2}\right]\\
b_{ln} &= \frac{4}{L}\left[K_1 \sin^2\frac{l\pi}{5}\sin\frac{n\pi}{5} + K_2 \sin\frac{2l\pi}{5}\sin\frac{2\pi n}{5}\right]
\end{aligned}
\tag{5.40}
$$

$$
\begin{aligned}
&b_{11} = -b_{19} = b_{111} = b_{99} = -b_{911} = b_{11\,11},\\
&b_{13} = -b_{17} = b_{113} = -b_{39} = -b_{311} = b_{79} = -b_{711} = -b_{913},\\
&b_{33} = -b_{37} = b_{313} = b_{77} = -b_{713} = b_{13\,13}.
\end{aligned}
\tag{5.41}
$$

Rezultatele sînt scrise în tabela 7.

*Tabela 7*

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,352 | 0,294 | 0 | −0,294 | −0,352 | 0,352 | 0,294 | 0 |
| 3 | 0,294 | 0,648 | 0 | −0,648 | −0,294 | 0,294 | 0,648 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | −0,294 | −0,648 | 0 | 0,648 | 0,294 | −0,294 | −0,648 | 0 |
| 9 | −0,352 | −0,294 | 0 | 0,294 | 0,352 | −0,352 | −0,294 | 0 |
| 11 | 0,352 | 0,294 | 0 | −0,294 | −0,352 | 0,352 | 0,294 | 0 |
| 13 | 0,294 | 0,648 | 0 | −0,648 | −0,294 | 0,294 | 0,648 | 0 |
| 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

3° *Determinarea frecvenţelor critice.* Vom face calculul complet pentru prima frecvenţă critică corespunzătoare primei ecuaţii (5.34)

$$\nu_5^2 = \omega_5^2,$$

$$\omega_l^2 = \frac{EI}{m}\left(\frac{l\pi}{L}\right)^4 = \frac{2{,}1\cdot 10^6\cdot 3{,}92\cdot 10^4\cdot (3{,}14)^4}{1{,}73\cdot 10^{-3}\cdot 8^4\cdot 10^{12}} = 1{,}129\, l^4. \tag{5.42}$$

*Tabela 8*

| $l$ | 1 | 3 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| $\omega_l^2$ | 1,129 | 91,4 | 705,6 | 2710 |
| $m\,\omega_l^2$ | 0,002 | 0,168 | 1,221 | 4,668 |

4° *Rezolvarea sistemului* (4.56) *pentru* $\nu = \omega_5$.

Notînd $\frac{1}{\tau\nu} = \alpha \ll 1$ avem

$$[m(\omega_l^2 - \nu^2) + i\alpha m\,\omega_l^2 + b_{ll}]\,a_l + \sum_1^{\infty}{}' a'_m\, b_{ln} = H_l\sqrt{\frac{L}{2}}, \tag{5.43}$$

semnul' avînd efectul precizat anterior, iar $H_l$ fiind dat de (5.7).

*Tabela 9*

| $l$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{H_l}{H\sqrt{\dfrac{L}{2}}} = \dfrac{4}{l\pi}$ | 1,273 | 0,425 | 0,255 | 0,182 | 0,142 |

$$m\,(\omega_1^2 - \omega_5^2) + b_{11} = 1{,}7310^{-3}\,(1{,}129 - 705{,}6) + 0{,}352 = -\,0{,}860,$$

$$m\,(a_3^2 - \omega_5^2) + b_{33} = 1{,}7310^{-3}\,(91{,}4 - 705{,}6) + 0{,}648 = -\,0{,}414,$$

$$m\,(\omega_5^2 - \omega_5^2) + b_{55} = 0,$$

$$m\,(\omega_7^2 - \omega_5^2) + b_{77} = 1{,}7310^{-3}\,(2710 - 705{,}6) + 0{,}648 = 4{,}115.$$

Pentru acest caz sistemul (5.43) devine

$$-0{,}866\,a_1 - 0{,}294\,a_3 - 0{,}294\,a_7 = 1{,}273\,H\sqrt{\frac{L}{2}},$$

$$0.294\,a_1 - 0{,}414\,a_3 - 0{,}648\,a_7 = 0{,}425\,H\sqrt{\frac{L}{2}},$$

$$-0{,}294\,a_1 - 0{,}648\,a_3 + 4{,}115\,a_7 = 0{,}182\quad\sqrt{\frac{L}{2}}.$$

Cu soluția

$$a_1 = -\,1{,}955\,H\sqrt{\frac{2}{L}}\,;\quad a_3 = -\,1{,}813\sqrt{\frac{2}{L}}\,;\quad a_7 = -\,0{,}381\,H\sqrt{\frac{2}{L}}.$$

În plus pentru orice $l = 5\ (2\,n + 1)$ avem

$$a_l = \frac{\sqrt{\dfrac{L}{2}}\,H}{m\,(\omega_l^2 - \nu^2) + i\alpha\,m\omega_l^2}. \tag{5.44}$$

Din cauza celei de-a patra relații (5.40) pentru $n = 0$ și $\nu = \omega_5$ (5.44) devine

$$a_5 = \sqrt{\frac{L}{2}}\,H\frac{0{,}209}{i\alpha}.$$

Soluția problemei este dată de forma

$$u = - H^{i\nu t}\left[1{,}955 \sin \frac{\pi}{L} z + 1{,}813 \sin \frac{3\pi}{L} z - \frac{0{,}209}{i\alpha} \sin \frac{5\pi}{L} z + \right.$$

$$\left. + 0{,}381 \sin \frac{z\pi}{L} z\right].$$

Coeficientul de impact se determină ca în cazul precedent. Avem

$$| M | = EI \frac{HL^2}{8} \frac{8}{L^2} \frac{\pi^2}{L^2} \sum_1^\infty n^2 \frac{a_n}{H} \sin \frac{n\pi}{L} z,$$

sau

$$| M | = \frac{H^\star L^2}{8},$$

cu

$$H^\star = H \; |q|,$$

unde

$$| q | \leqslant \frac{EI\, 8\, \pi^2}{L^4} \cdot 0{,}355 = 0{,}55,$$

iar $\tau\nu = \frac{1}{\alpha} = 0{,}57$ ca și în cazul precedent.

Remarcăm că dacă considerăm momentul unei grinzi simplu rezemată de o deschidere $L/5$ între două suspensii atunci

$$| M | = \frac{H^\star \left(\frac{L}{5}\right)^2}{8} \quad \text{iar} \quad | q | \leqslant 0{,}55.5^2 = 13{,}75.$$

În partea a III-a a studiului se vor da o serie de rezultate experimentale în legătură cu problemele prezentate.

*Primită la redacție la 25 februarie 1961*

## ДИНАМИЧЕСКИЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ, ОБЛАДАЮЩИХ ВЯЗКО-УПРУГИМИ СВОЙСТВАМИ. II

### РЕЗЮМЕ

Результаты, полученные в первой части работы для тела Максвелла, применяются к частным случаям. Даются решения для случая периодической возмущающей силы, причем результаты применяются к исследованию воздушных трубопроводов для природного газа. Кроме

того, приводится решение для случая, когда возмущающая сила подобна порыву ветра, а также для случая когда стержень имеет упругие подвески.

В третьей (последующей) части работы приводятся некоторые экспериментальные результаты.

## DYNAMIC BENDING OF BARS WITH VISCOELASTIC PROPERTIES. II

### ABSTRACT

The results obtained in part I of this paper are particularized for a Maxwell body. Solutions are given for the case of a periodic disturbing force and the results are applied for studying gas pipes across rivers.

Solutions are given for the case in which the disturbing force is of gust type, as well as for the case when the bar is elastically supported.

Part III of this paper (yet to appear) will present several experimental results.

ELASTICITATE—PLASTICITATE—REZISTENȚA MATERIALELOR

# VIBRAȚII AEROELASTICE PRODUSE DE VÎRTEJURI ALTERNATE

DE

AUGUSTIN PETRE[1]

Una din problemele de bază care se pune în verificarea construcțiilor lungi și suple sub acțiunea vîntului (conducte suspendate, turnuri, coșuri înalte etc.) este stabilitatea din punct de vedere aeroelastic.

Dacă o asemenea construcție prezintă o simetrie aerodinamică radială (formă cilindrică, prismă cu număr mare de fețe laterale etc.) vibrațiile care se produc se datoresc vîrtejurilor alternante Bénard—Kármán și se produc după mecanismul oscilațiilor forțate. În caz contrar, este posibilă apariția altor tipuri de fluturări, cum ar fi cele de răsucire datorită efectului Wagner, a celor binare de răsucire și încovoiere etc.

În cele ce urmează se va considera cazul construcțiilor ce prezintă un element principal cilindric și eventual elemente de suspendare, legături, suporți intermediari etc. (de exemplu în cazul conductelor suspendate, cazul cablurilor, tiranților și pilelor intermediare).

Din punct de vedere aerodinamic, elementul principal va prezenta o simetrie radială.

Pentru asemenea construcții, în general, rezonanța nu poate fi evitată și cazurile cele mai defavorabile precum și studiul lor cantitativ este prezentat în cele ce urmează.

Sarcina datorită vîrtejurilor Bénard—Kármán repartizată în lungul conductelor și acționînd normal la viteza vîntului poate fi pusă sub forma

$$q = \frac{\rho}{2} D V^2 c_k \sin(\omega t + \varphi), \tag{1}$$

unde $\rho$ este masa unității de volum al fluidului, în cazul considerat al aerului.

---

[1] Institutul politehnic, București.

$D$ — diametrul exterior al construcției,

$V$ — viteza vîntului,

$c_k$ — coeficient al lui Kármán care poate fi considerat în mod acoperitor

$$c_k = 1,$$

iar

$$\omega \approx 0{,}22 \frac{2\pi V}{D} = 1{,}38 \frac{V}{D}. \tag{2}$$

Se observă că deoarece frecvența (2) a sarcinii perturbatoare (1) depinde de viteza vîntului, aceasta poate lua orice valori pînă la cea corespunzătoare vitezelor maxime pentru regiunea respectivă, ale vîntului. Pentru $V_{\max} = 50$ m/s se obține

$$\omega = 69 \frac{1}{D} s^{-1}$$

unde $D$ s-a considerat în metri.

Pericolul de rezonanță în aceste condiții nu se poate elimina și întreaga problemă se reduce la determinarea amplitudinilor și solicitărilor maxime în condițiile cele mai defavorabile. Se observă din cele de mai sus că în ceea ce privește sarcina, situația cea mai defavorabilă se obține pentru frecvența de rezonanță cea mai ridicată care corespunde vitezei vîntului, respectiv sarcinii perturbatoare celei mai mari.

Deoarece vîrtejurile se pot desprinde de conductă progresiv în lungul acesteia, defazarea $\varphi$ se poate lua ca o funcție continuă

$$\varphi = \varphi(x). \tag{3}$$

Cercetări experimentale recente [1] au arătat că vîrtejurile ce se desprind de un corp cilindric sînt antrenate de deplasarea acestuia. Funcția $\varphi(x)$ trebuie aleasă în consecință astfel încît să rezulte o repartiție a sarcinii în fază cu modul corespunzător de oscilație.

Notînd deplasarea transversală, normală pe direcția vîntului, cu $\eta$, pentru modurile normale de oscilație, aceasta se poate lua de forma

$$\eta = \sum T_n(t) X_n(x), \tag{4}$$

unde factorul dimensional este cuprins în funcțiile necunoscute de timp $T_n(t)$.

Energia cinetică a sistemului elastic se poate scrie sub forma

$$E_c = \sum \frac{1}{2} m_n v_n^2 = \sum \frac{1}{2} \int \dot{\eta}^2 \mu \, dx = \sum \frac{1}{2} \int \mu \, T^2(t) X_n^2(x) \, dx, \tag{5}$$

unde $\mu$ reprezintă masa pe unitate de lungime de ansamblul construcției.

Energia potențială se compune din cea a porțiunii solicitate la încovoiere și eventual la compresiune, cea a cablurilor de suspendare și rigidizare, tiranților etc., evident în caz că există asemenea elemente.

Considerînd ca parametri generalizați funcțiile $T_n$, ecuațiile Lagrange vor fi de forma

$$\ddot{T}_n(t) + (1 + i\gamma)\,\omega_n^2\,T_n(t) = \frac{Q_n}{\int \mu\,X_n^2(x)\,dx}, \tag{6}$$

unde $\omega_n$ reprezintă pulsația proprie corespunzătoare modului $n$.

Prin termenul $i\gamma$ s-a ținut seama de efectul frecării, presupunînd energia pierdută prin frecare proporțională cu energia potențială [2], forța de frecare fiind proporțională cu viteza de deplasare a sistemului elastic.

Forța generalizată $Q_n$ se poate lua de forma

$$Q_n = \frac{\int_0^l q(x, t)\,\eta_n\,dx}{T_n(t)}, \tag{7}$$

unde $l$ este deschiderea totală;

$q(x, t)$ se ia ținînd seama de (1) și (3) de forma

$$q(x, t) = p \sin[\omega t + \varphi(x)], \tag{8}$$

cu notația

$$p = \frac{\rho}{2} D V^2 c_k. \tag{9}$$

Ecuația (6) devine astfel

$$\ddot{T}_n(t) + (1 + i\gamma)\,\omega_n^2\,T_n(t) = \frac{\int_0^l p \sin[\omega t + \varphi(x)]\,X_n(x)\,dx}{\int_0^l \mu\,X_n^2(x)\,dx}. \tag{10}$$

Pentru alegerea funcției $\varphi(x)$ se va ține seama de observațiile experimentale [1] potrivit cărora desprinderile vîrtejurilor sînt antrenate de deplasarea corpului ce le produce. Soluția ce convine cel mai mult acestei observații este

$$\varphi(x) = \arcsin X_n(x), \tag{11}$$

astfel încît fără erori prea mari, ecuația (10) devine

$$\ddot{T}_n(t) + (1 + i\gamma)\,\omega_n^2\,T_n(t) = \frac{p}{\mu}\cos\omega t, \tag{12}$$

a cărei amplitudine maximă $a_n$ în momentul rezonanței va fi

$$a_n = \frac{p}{\mu\gamma\omega_n^2}, \tag{13}$$

sau ținînd seama de (9) această expresie se poate scrie

$$a_n = \frac{\rho}{2} \frac{DV^2}{\mu\gamma\omega_n^2}. \tag{14}$$

Deplasarea $\eta_n$ în timpul oscilației va fi

$$\eta_n = a_n \cos \omega_n t . X_n (x), \tag{15}$$

iar eforturile unitare corespunzătoare produse datorită curbării conductei vor fi

$$\sigma = E \frac{D_e}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \tag{16}$$

respectiv pentru modul $n$

$$\sigma = E \frac{D_e}{2} a_n \cos \omega_n t.\ X_n'' (x), \tag{17}$$

unde prin $\frac{D_e}{2}$ s-a notat distanța de la centrul secțiunii transversale pînă la fibra extremă a acesteia.

Ținînd seama de (14) eforturile unitare (17) se pot scrie sub forma

$$\sigma = \frac{\rho}{4} \frac{EDD_e V^2}{\mu\gamma\omega_n^2} \cos \omega_n t.\ X_n'' (x). \tag{18}$$

Pentru cazurile în care frecvențele proprii înalte au valori suficient de apropiate, spectrul de frecvențe se poate presupune cvasicontinuu, iar expresia de mai sus, ținînd seama de (2) devine

$$\sigma = 0{,}13 \frac{\rho E D^3 De}{\mu\gamma} \cos \omega_n t.\ X_n'' (x). \tag{19}$$

Ca moduri de oscilație, pentru funcția $X_n (x)$ se pot lua modurile normale de oscilații libere ale ansamblului.

În cazul construcțiilor așezate orizontal, ecuația de mișcare va fi de forma

$$K_1 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + k_2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + k_3 \eta + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0, \tag{20}$$

unde s-a ținut seama prin $K_1$ de rigiditatea de încovoiere, prin $K_2$ de eventuala existență a cablurilor de suspensie, iar prin $K_3$ de efectele similare mediului elastic.

Admițînd soluții de forma

$$\eta = X_n (x).\ T_n (t), \tag{21}$$

ecuaţia (20) devine

$$\begin{aligned}&\frac{d^2 T_n}{dt^2} + \omega_n^2 T_n = 0,\\ &K_1 \frac{d^4 X_n}{dx^4} + K_2 \frac{d^2 X_n}{dx^2} + (K_3 - \omega_n^2) X_n = 0,\end{aligned} \tag{22}$$

astfel încît funcţiile $X_n$ vor fi în general de forma

$$X_n(x) = \sin\frac{\alpha_n x}{l} + A_n \cos\frac{\alpha_n x}{l} + B_n\, sh\frac{\beta_n x}{l} + C_n\, \mathrm{ch}\frac{\beta_n x}{l}. \tag{23}$$

Dacă nu există cabluri de suspensie, sau dacă efectul acestora este neglijabil rezultă

$$\alpha_n = \beta_n. \tag{24}$$

Constantele $A_n$, $B_n$ şi $C_n$ se determină funcţie de condiţiile de rezemare. Astfel pentru o conductă rezemată la capete rezultă

$$A_n = B_n = C_n = 0, \tag{25}$$

$$\alpha_n = n\pi. \tag{26}$$

Pentru o conductă încastrată la ambele capete

$$\begin{aligned}B_n &= -1,\\ A_n &= -B_n,\end{aligned} \tag{27}$$

iar

$$\begin{aligned}A_1 &= -1{,}0178,\\ A_2 &= -0{,}999223,\\ A_3 &= -1{,}0000335,\\ A_4 &= -0{,}9999986,\\ A_5 &= -1{,}0000001,\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 4{,}73,\\ \alpha_2 &= 7{,}853,\\ \alpha_3 &= 10{,}996,\\ \alpha_4 &= 14{,}137,\\ \alpha_5 &= 17{,}279.\end{aligned} \tag{29}$$

Pentru o asemenea construcție în consolă va rezulta

$$B_n = -1, \qquad A_n = -C_n, \tag{30}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= -1{,}3622, \\ A_2 &= -0{,}98187, \\ A_3 &= -1{,}000777, \\ A_4 &= -0{,}999965, \\ A_5 &= -1{,}0000015, \end{aligned} \tag{31}$$

iar

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1{,}875, \\ \alpha_2 &= 4{,}694, \\ \alpha_3 &= 7{,}855, \\ \alpha_4 &= 10{,}996, \\ \alpha_5 &= 14{,}137. \end{aligned} \tag{32}$$

În cazul construcțiilor așezate vertical intervine și efectul greutății proprii.

Pentru o asemenea construcție, ținînd seama de modul de scriere a ecuației diferențiale pentru bare încărcate axial și transversal [3] rezultă

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\,\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(P\,\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \mu\,\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0, \tag{33}$$

unde s-a notat prin $P$ forța axială.

Pentru moduri normale, ținînd seama de (21) această ecuație devine

$$\frac{d^2 T_n}{dt^2} + \omega_n^2\, T_n = 0, \tag{34}$$

$$\frac{1}{\mu}\,\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\,\frac{d^2 X_n}{dx^2}\right) + \frac{1}{\mu}\,\frac{d}{dx}\left(P\,\frac{dX_n}{dx}\right) - \omega_n^2\, X_n = 0. \tag{35}$$

Pentru bare de secțiune constantă forța $P$ va fi de forma

$$P = q\,x, \tag{36}$$

iar ecuația (35) devine

$$\frac{d^4 X_n}{dx^4} + \frac{q}{EI}\,x.\frac{d^2 X_n}{dx^2} + \frac{q}{EI}\,\frac{dX_n}{dx} - \frac{\mu}{EI}\,\omega_n^2 X_n = 0, \tag{37}$$

ecuație care determină modurile de vibrație funcție de condițiile de limită.

O dată cunoscute modurile proprii de vibrație, valoarea eforturilor unitare se poate determina utilizînd expresia (19).

Astfel, de exemplu, pentru cazul unei construcții cilindrice orizontale rezemate la capete, valoarea eforturilor unitare maxime va fi

$$\sigma = 0{,}13 \frac{\rho E D^3 D_e}{\mu\gamma} \frac{n^2\pi^2}{l^2}. \tag{38}$$

Ținînd seama de expresia pulsațiilor proprii care pentru acest caz este

$$\omega = \frac{n^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}, \tag{39}$$

precum şi de (2), expresia (39) devine

$$\sigma = 0{,}18\, D_e \frac{\rho D^2 V}{\gamma}\sqrt{\frac{E}{\mu I}}, \tag{40}$$

unde $I$ este momentul de inerție al secțiunei transversale de rezistență, iar $V$ viteza vîntului corespunzătoare modului propriu cel mai ridicat.

Problema este deci în întregime soluționată cu excepția coeficientului de amortizare $\gamma$. Valoarea acestui coeficient pentru construcții metalice se poate lua între 0,01 şi 0,03. Este util însă de a se face experimentări directe în vederea obținerii valorilor efective pentru fiecare construcție în parte.

*Primită la redacție la 11 februarie 1961*

## АЭРОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ, ВЫЗЫВАЕМЫЕ ЧЕРЕДУЮЩИМИСЯ ВИХРЯМИ

### РЕЗЮМЕ

Излагается способ расчета гибких конструкций (висячие трубопроводы большого пролета, высокие дымовые трубы, антены и пр.), с точки зрения аэроупругости, в случае если эти конструкции обладают радиальной аэродинамической симметрией. В этом случае колебания вызваны чередующимися вихрями типа Бернар-Кармана. Приводится расчет максимальных деформаций и напряжений во время резонанса, учитывая при этом предшествующие трения, а также наиболее неблагоприятное расположение вихревой дорожки.

BUDAPESTI

# AEROELASTIC VIBRATIONS INDUCED BY ALTERNATING VORTICES

## ABSTRACT

This paper concerns the aeroelastic calculation of slender structures (hanging pipelines with large openings, tall chimneys, antennae and so on) provided that these structures present aerodynamic radial symmetry. The vibrations are induced in this case by Bénard-Kármán alternating vortices. The maximum strains and stresses are calculated during resonance taking into account the interior friction as well as the most un favourable formation of the vortex street.

## BIBLIOGRAFIE

1. L. P. SMIRNOV, M. A. PAVLIHINA, *Urma turbionară în cazul scurgerii în jurul cilindrilor în vibrație.*
2. R. L. BISPLINGHOFF, H. ASHLEY, R. HALFMANN, *Aeroelasticity*. Addison-Wesley P. C. 1956.
3. A. PETRE, *Détermination de l'équation différentielle de la ligne élastique dans le cas des barres droites sous l'action des charges longitudinales et transversales*. Bul. Instit. politehnic, Buc., **XXI**, *1* (1959).
4. И. М. БАБАКОВ, *Теория колебаний*, Гостехиздат, Москва, 1958.

# STUDIUL FOTOELASTIC SPAȚIAL AL FUNDAȚIILOR DE SUB STÎLPI IZOLAȚI, PRIN METODA ÎNGHEȚĂRII EFORTURILOR

DE

N. IOSIPESCU [1]

O primă aplicație a cercetărilor fotoelastice cu caracter tridimensional, efectuată prin metoda înghețării eforturilor, a fost făcută în țara noastră prin studiul de față asupra modului comparativ de comportare elastică a fundațiilor de sub stîlpi izolați, considerate din punct de vedere spațial. Problema studiului fotoelastic al fundațiilor a preocupat pînă în prezent pe mai mulți cercetători, printre care : Föppl și Mönch [1], Hirschfeld [2], Brunarski [3] etc., însă numai sub forma plană a ei și în ipoteza unei repartiții uniforme a presiunilor pe teren, fiind aplicată deci pentru cercetarea fundațiilor în formă de talpă din lungul zidurilor longitudinale ale construcțiilor (fig. 1).

Această problemă plană comportă de altfel și o soluție teoretică exactă, cu ajutorul funcțiilor de tensiuni din teoria elasticității, stabilite pentru studiul penelor trunchiate, conform schemei suprapunerii de funcțiuni de tensiuni cunoscute, reprezentate în figura 2, după cum am arătat într-un studiu separat, făcînd astfel inutile cercetările fotoelastice. Pe de altă parte unele studii experimentale ale fundațiilor de sub stîlpi izolați, realizate pe modele din beton armat, au fost făcute și publicate în țara noastră de către prof. ing. D. Stan [4], pe baza cărora s-a preconizat o metodă practică de calcul și proiectare, propusă în urma rezultatelor acelor încercări, într-o lucrare tipărită în anul 1948 [5].

Preocuparea principală a studiului de față a fost aceea de a constata, cu ajutorul metodei moderne a fotoelasticității spațiale, modul real de comportare la solicitare a fundațiilor de sub stîlpi izolați, de formă pătrată în planul lor, considerat în mod comparativ într-o secțiune dusă după planul median de simetrie, paralel cu o latură a bazei, sau într-o secțiune dusă după diagonala pătratului de bază. De asemenea, s-a urmărit compararea acestor rezultate cu acele date de solicitarea unei fundații echivalente cu cea de mai sus, ca sarcină totală de care este capabilă pentru o anumită presiune admisibilă pe teren, de o formă circulară sau octogonală, care se putea presupune în mod intuitiv că va rezista în condiții mai avantajoase decît aceea pătrată, care are colțurile mai îndepărtate de stîlp decît mijloacele laturilor. Totodată se urmărea a se stabili care este modul de calcul cel mai potrivit al fundației de formă pătrată, considerată cu caracterul ei real spațial, cum și pentru o repartiție a presiunilor pe teren cît mai apropiată de aceea reală, în loc de repartiția convențională, uniform distribuită pe toată suprafața de rezemare a bazei, admisă în general la calcule.

---

[1] INCERC.

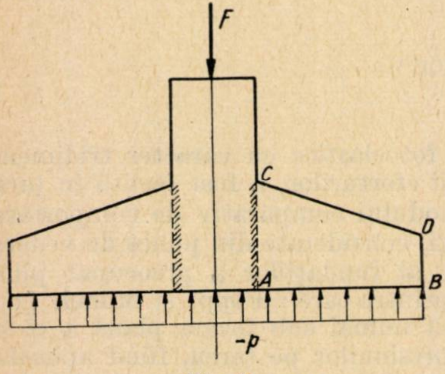


Fig. 1

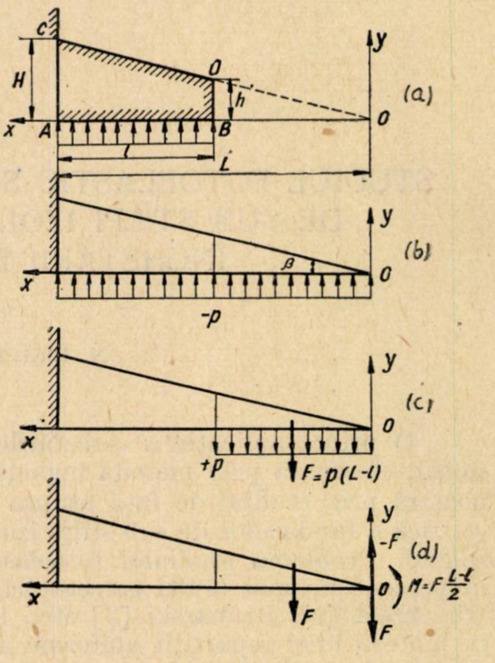


Fig. 2

Studiul fotoelastic spațial al elementelor de construcții prin metoda *înghețării eforturilor*, se bazează pe o proprietate interesantă pe care o posedă unele rășini sintetice, cum sînt *fenol-formaldehidele* de exemplu, datorită structurii lor așa numite *bifazice*, produsă prin modul de polimerizare diferit, în cuprinsul masei lor, al acestor rășini [6], [7], [8]. O parte din masa acestei rășini polimerizează astfel în mod mai rapid, cu ocazia preparării ei, fiind alcătuită în formă de lanțuri de *macromolecule* constituind o rețea spațială continuă, elastică și infuzibilă la o temperatură variind în jurul aceleia de 100°C. Ochiurile acestei rețele spațiale sînt umplute de către o masă mai puțin polimerizată, alcătuită tot din aceeași rășină, într-un alt stadiu, fuzibilă la această temperatură, devenind prin topire o substanță vîscoasă care lasă rețeaua elastică să se deformeze în voie sub acțiunea eforturilor, atunci cînd corpul cercetat este supus unei tratări termice corespunzătoare în timpul solicitării lui.

Folosind o piesă de model de formă spaţială, confecţionată din acest material, solicitînd-o conform condiţiilor piesei reale studiate, încălzind-o la o temperatură potrivită pentru tratarea termică necesară îngheţării eforturilor şi răcind-o apoi în mod lent, sub acţiunea continuă a sarcinilor de solicitare, masa topită se întăreşte sau *îngheaţă*, fixînd astfel reţeaua elastică în starea ei de deformaţie, deci de încordare elastică, producînd ceea ce se numeşte *îngheţarea* sau *fixarea* stării de eforturi respective [9], [10].

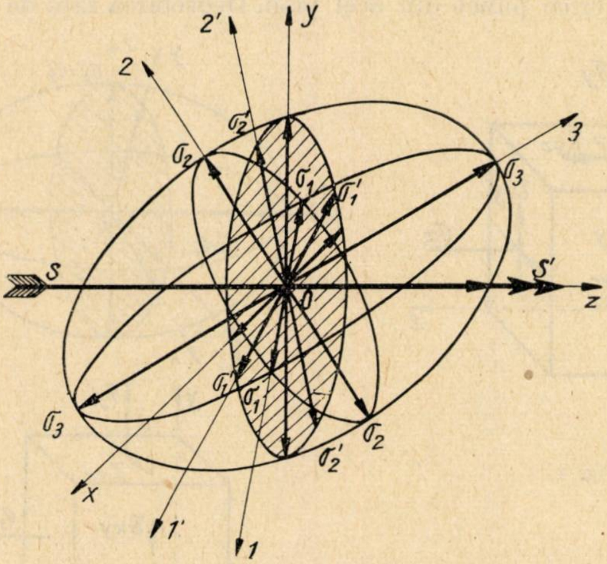


Fig. 3

Tăind apoi acest model în felii, după diferitele secţiuni care ne interesează din corpul spaţial al piesei, ca stări de eforturi în cercetarea modelului respectiv şi examinînd aceste felii în lumină polarizată, ca şi piesele plane obişnuite solicitate în mod actual, făcînd obiectul fotoelasticităţii bidimensionale, se obţin fenomene fotoelastice analoge acelora ale pieselor plane, produse datorită stării de tensiuni îngheţate din felia respectivă. Aceste fenomene, constituite din izocline şi izocromatice, se produc după aceleaşi legi ale birefrigenţei accidentale, aplicabile în acelaşi mod ca şi pentru fotoelasticitatea plană, cu aproximaţia considerării unei omogenităţi a stării de tensiuni în sensul grosimii feliei, în caz că aceasta este suficient de subţire, deci prin asimilarea stării de tensiuni respective cu aceea a unei stări de deformaţii plane [11].

Aceste legi ale fotoelasticităţii spaţiale stabilesc relaţiile dintre direcţiile şi diferenţele tensiunilor principale-secundare din acelaşi plan al feliei ($\sigma_1' - \sigma_2'$) (fig. 3) şi dintre fenomenele fotoelastice, izoclinele şi izocromaticele respective, de care sînt legate prin legea calitativă și prin aceea cantitativă a lui Wertheim,

$$\sigma_1' - \sigma_2' = \frac{k\lambda}{Ce} = k\,\sigma_o$$

relații permițînd să se determine tensiunile $\sigma_x$, $\sigma_y$ și $\tau_{xy}$ din planul feliei, pentru orice punct din acel plan. Deosebirea față de starea plană

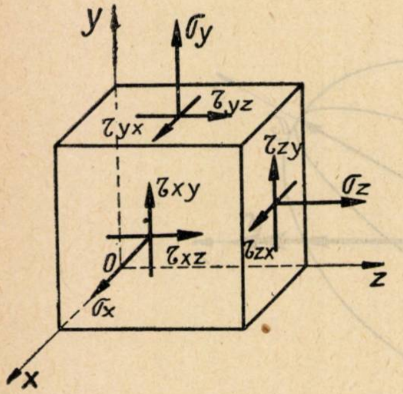


Fig. 4

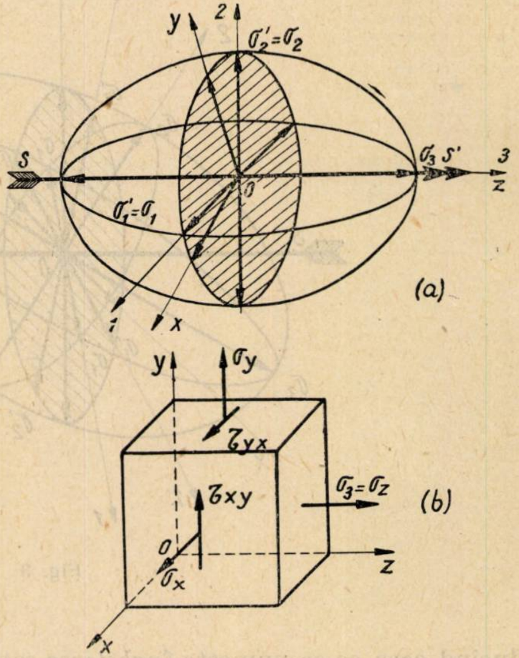


Fig. 5

propriu-zisă constă în faptul că, în cazul spațial, există și o a treia tensiune normală $\sigma_z$, perpendiculară pe planul feliei, ca și în cazul stării de deformație plană (fig. 4), care nu produce însă nici un efect fotoelastic în acea felie. Există aici, în cazul general al unei felii oarecare, în plus și tensiunile tangențiale $\tau_{xz}$ și $\tau_{yz}$ din plane normale pe suprafața feliei, dar acționînd în direcția razelor de lumină, cum și cele din planul feliei dar acționînd pe fețele exterioare ale acesteia, care de asemenea nu produc nici un fel de efect fotoelastic. Pentru a se putea determina toate aceste componente de tensiuni ale stării spațiale, nu mai este suficient în acest caz general de a se recurge numai la tăierea și examinarea unor felii paralele cu un singur plan al piesei, ci sînt necesare de efectuat unele cercetări suplimentare mai ample. Astfel pentru a se determina toate cele 6 componente spațiale ale tensiunilor din fiecare punct al unei felii oarecare, cercetarea se realizează după diferite metode : a incidenței oblice, a diferenței tensiunilor tangențiale aplicată spațial etc. [12], [13].

În cazul unei așa-numite felii principale, tăiate din model după un plan de simetrie al piesei și al solicitării studiate, problema se simplifică mult, cele două tensiuni principale-secundare respective ($\sigma_1'$ şi $\sigma_2'$) din acel plan de simetrie, fiind chiar tensiunile principale propriu-zise ($\sigma_1$ şi $\sigma_2$) ale stării de tensiuni spațiale, în toate punctele acelui plan de simetrie, iar cea de-a treia tensiune principală $\sigma_3 = \sigma_z$ fiind normală pe acel plan (fig. 5 *a*). În acest caz, al feliei principale, starea de tensiune din planul feliei, în fiecare punct al ei, este absolut analogă cu aceea a unui disc în stare de deformație plană (fig. 5 *b*), putîndu-se deci aplica metodele de tratare obişnuite ale unei asemenea stări din fotoelasticitatea plană, avînd în vedere că $\sigma_3$ nu produce nici un efect fotoelastic în acea felie.

Pregătirea aplicării în țară la noi a metodei fotoelastice spațiale prin înghețarea eforturilor s-a făcut în timpul ultimilor 3—4 ani de cercetare, în primul rînd prin prepararea răşinii sintetice fenol-formaldehide, cu structura bifazică necesară confecționării modelelor de forme spațiale, obținută printr-o colaborare susținută şi continuă cu ing. C. Poclitaru.

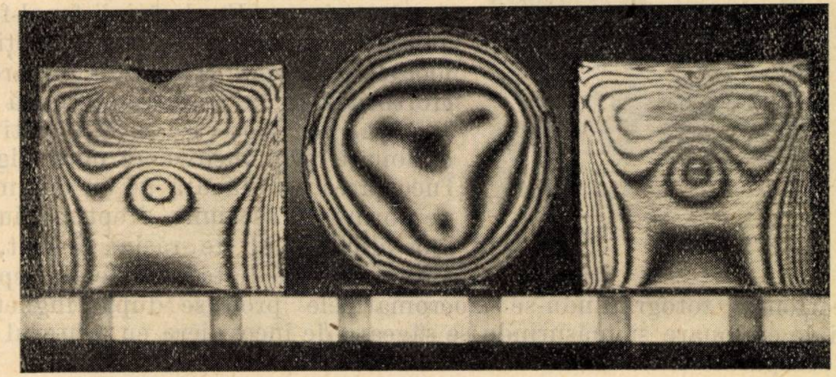


Fig. 6

De asemenea, s-au făcut unele pregătiri experimentale prin studiile şi încercările preliminare făcute cu aceste răşini, asupra operațiilor şi temperaturilor de înghețare a eforturilor, asupra procedeelor de tăiere a modelelor respective în felii şi asupra examinării stărilor de tensiuni produse în aceste felii, cum şi a fotografierii fenomenelor fotoelastice înghețate în asemenea piese, din care dăm un exemplu în figura 6, obținut pe un model cilindric solicitat axial, rezemat elastic şi fretat lateral. S-au pregătit şi confecționat, de asemenea, în acelaşi timp diferitele dispozitive speciale necesare pentru solicitarea modelelor şi pentru etalonarea materialului folosit, cum şi pentru confecționarea şi încercarea acestor modele.

Pentru solicitare s-a alcătuit astfel un dispozitiv format din bare metalice găurite asamblate, alcătuite după sistemul jocurilor ,,Meccano'', care permite ca, prin intermediul a trei pîrghii suprapuse, articulate în mod alternativ pe unul şi pe altul din cei doi stîlpi ai cadrului, multiplicîndu-se astfel eforturile în rapoartele succesive: 13/5, 13/5 şi 13/4 (fig. 7), să se obțină o amplificare de $\frac{13^3}{4 \times 5^2} = 22$ ori a greutății așezate în capătul ultimei pîrghii de solicitare. Cu toate dimensiunile reduse ale acestui dispozitiv, care permit să fie introdus în întregime în termostatul folosit pentru tratarea termică a modelului solicitat, în vederea realizării înghețării eforturilor, se obține totuși un efort de solicitare a piesei suficient de puternic, pentru o acționare satisfăcătoare a modelului cu un număr redus de greutăți.

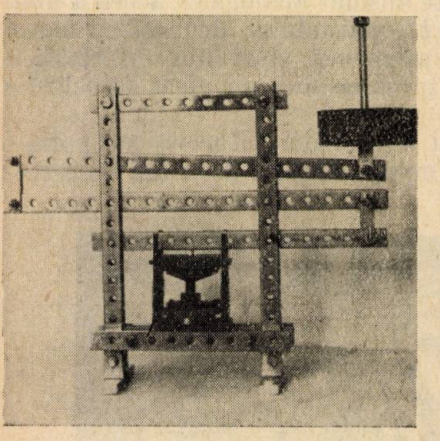


Fig. 7

Pentru determinarea constantei fotoelastice ($C$ sau $\sigma_0$), cum și a modulului de elasticitate ($E$) al rășinii fenol-formaldehide din care este confecționat modelul, în condițiile de înghețare ale eforturilor, prin tratarea termică respectivă, se folosește un dispozitiv de etalonare prin încovoiere pură (fig. 8). Încercarea este făcută pe un mic model de formă și secțiune dreptunghiulară, scos din blocul de rășină folosit, din apropierea imediată a modelului spațial confecționat, fotografiindu-se izocromaticele produse după înghețarea piesei de etalonare și măsurîndu-se săgeata de încovoiere cu ajutorul unui ceas comparator.

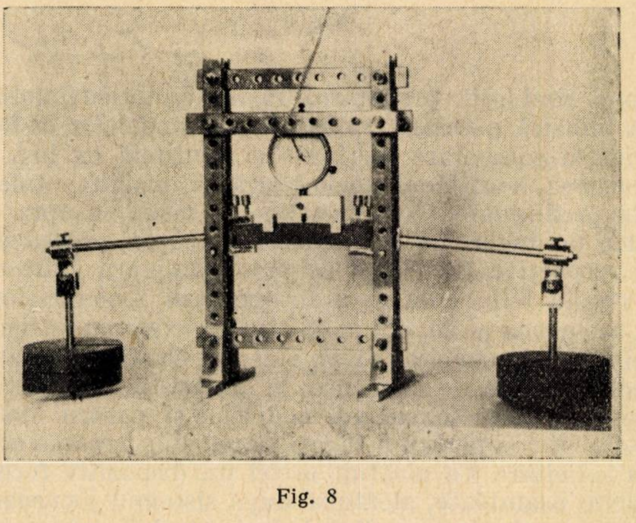


Fig. 8

Întrucît, pentru cercetările fotoelastice spațiale similitudinea nu mai este independentă de constantele elastice $E$, $G$ și $\mu$ ale materialului de model, va trebui determinată o dată cu încercările propriu-zise şi valoarea coeficientului lui Poisson respectiv ($\mu$), corespunzător pentru starea de îngheţare a răşinii sintetice respective. Avînd în vedere micimea contracţiilor sau dilatărilor transversale ale materialului, determinarea directă a lui $\mu$ pentru modele la scară redusă ar cere o aparatură şi un procedeu de lucru extrem de delicat şi de sensibil, greu de folosit, mai ales

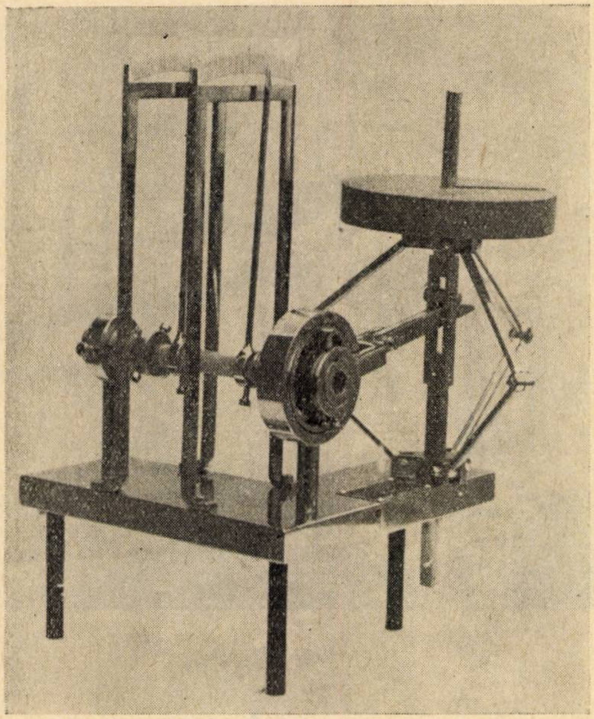


Fig. 9

în condiţiile de lucru necesare pentru îngheţarea eforturilor, la temperatura din interiorul termostatului.

S-a construit deci mai degrabă un dispozitiv pentru determinarea valorii modulului de elasticitate transversală ($G$), efectuată printr-o solicitare de torsiune pură, realizată printr-un dispozitiv special (fig. 9), folosindu-se în acest scop un mic model cilindric de $\varnothing$ 10 mm, scos din acelaşi bloc de fenol-formaldehidă din care se confecţionează şi modelul spaţial studiat. Cunoscîndu-se şi valoarea lui $E$, din încercarea de etalonare anterioară, se poate calcula uşor valoarea coeficientului lui Poisson respectiv:

$$\mu = \frac{E - 2G}{2\,G}.$$

Toate aceste trei dispozitive, de solicitare a modelului și de etalonare a materialului, pregătite pentru încercare, înainte de introducerea lor în termostat, sînt reproduse în fotografia din figura 10.

Pentru a constata modul de comportare perfect elastic al rășinii fenol-formaldehide folosite pentru operația de *înghețare* a eforturilor, s-au făcut unele încercări de *dezghețare* ale unor modele în formă de piese plane confecționate din acest material. Înghețînd astfel o piesă de model, de formă și de secțiune dreptunghiulară, printr-o tratare termică la o temperatură de 100°C, sub acțiunea unei solicitări de încovoiere pură suficient de puternice, s-a constatat că, o dată cu fenomenele fotoelastice corespunzătoare acestei solicitări, piesa a suferit și o deformație pronunțată, atît de încovoiere în planul ei de solicitare, cît și de cedare a tălpii comprimate în direcție normală pe acel plan, după cum se poate vedea în fotografiile din figurile 11 *a* și *b*. Această deformație exagerată, analogă aceleia de voalare sau de flambare a unei plăci plane dreptunghiulare solicitate la o încovoiere puternică în planul său, ar putea face să se presupună că solicitarea piesei ar fi dus la deformații permanente în domeniul plastic, trecînd deci dincolo de limita elastică.

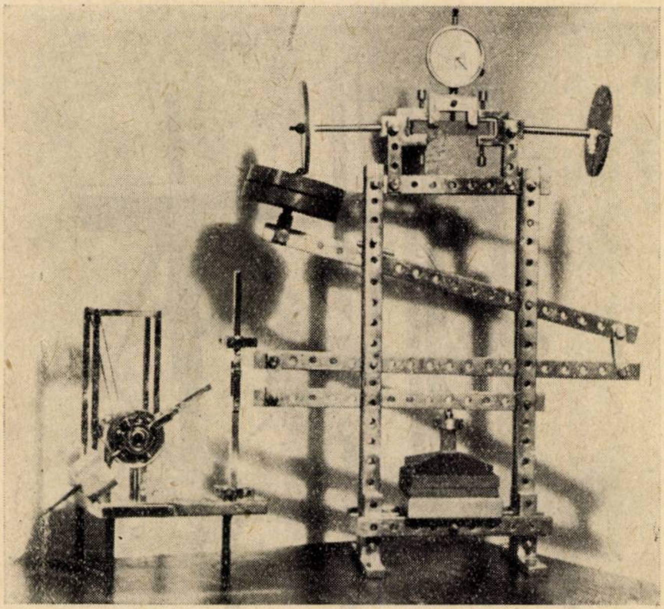


Fig. 10

Supunînd totuși ulterior această piesă la o temperatură de 110°C, puțin superioară aceleia de înghețare, timp de două ore, simplu așezată pe un geam, fără a o supune nici unui efort de sens contrar aceluia care o deformase anterior la înghețare, s-a constatat că piesa respectivă își revine complet la forma sa dreaptă inițială. Dezghețîndu-se, acea piesă își pierde orice fenomen fotoelastic, care să arate existența vreunui efort remanent din solicitarea anterioară înghețată, în afară de efectele de margine respective, produse de îmbătrînirea materialului. Chiar și la o simplă examinare vizuală a piesei dezghețate, se constată că ea s-a îndreptat complet,

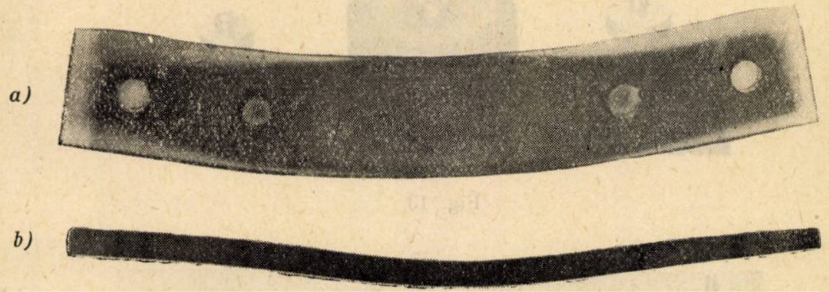


Fig. 11

ajungînd astfel la forma ei inițială nedeformată, după cum se observă bine în fotografiile din figurile 12 *a* și *b*, făcute după dezghețarea piesei, comparate cu acele din figura 11 *a* și *b* ale piesei înghețate. Acest lucru nu se putea întîmpla decît dacă starea de eforturi înghețată avea o comportare perfect elastică, care să facă piesa să-și revină complet la forma inițială, numai prin tratarea termică de *dezghețare*. Se pot vedea condițiile de aplicare ale acestor proprietăți de dezghețare cu ocazia descrierii unui procedeu folosit pentru cercetările spațiale de către Frocht [14].

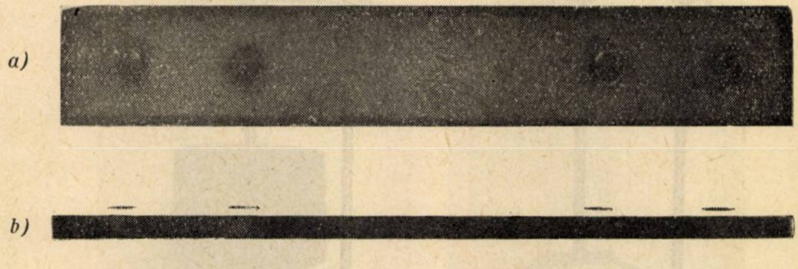


Fig. 12

S-a putut ajunge astfel, în urma pregătirilor și a încercărilor preliminare făcute anterior, la posibilitatea executării primelor cercetări fotoelastice cu caracter spațial, realizate prin metoda înghețării eforturilor, aplicîndu-se la studiul unor modele de fundații de sub stîlpi izolați.

S-au confecționat astfel din această rășină sintetică fenol-formaldehidă, turnată și polimerizată în formă de blocuri, preparată de către ing. C. Poclitaru și s-au încercat două modele diferite de fundații, de profile tip STAS (fig. 13). Unul, cel din stînga, este de formă pătrată în planul său şi altul, cel din dreapta, este de formă circulară, cel de-al treilea model din fotografie, de formă cilindrică, de la mijloc, avînd un alt scop, care va constitui obiectul unui nou studiu. Modelele s-au încercat prin solicitarea lor cu ajutorul dispozitivului demultiplicator cu pîrghii

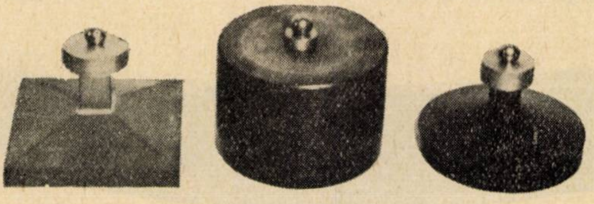
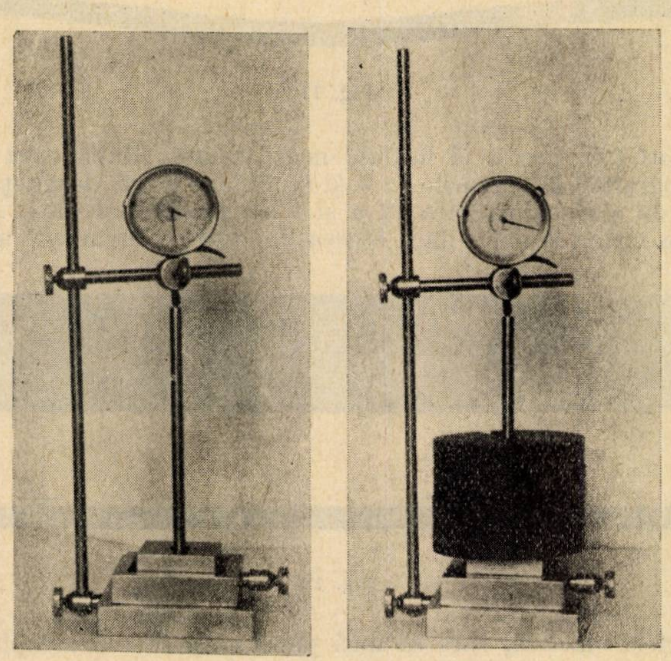


Fig. 13



a) b)

Fig. 14

suprapuse descris anterior, cu care au fost introduse pe rînd în termostat, unde au fost încălzite şi menţinute la temperatura de 80°C timp de două ore; după aceea ele au fost răcite în mod lent, cu o coborîre a temperaturii variind cu cîte 10°C pe oră, ajungînd astfel pînă la temperatura normală a camerei.

Pentru a corespunde cît mai bine cu realitatea de comportare a pieselor de fundaţie studiate, modelele au fost rezemate pe un strat de cauciuc format din două plăci suprapuse de cîte 10 mm grosime. Caracteristicile elastice ale acestui strat de cauciuc, corespunzătoare modului de comportare al terenului şi anume modulul de deformaţie şi coeficientul de tasare, au putut fi stabilite experimental cu ajutorul unui dispozitiv simplu, a cărui fotografie este dată în figura 14. Relaţia dintre încărcarea de solicitare a stratului de cauciuc şi tasarea lui respectivă, obţinută cu ocazia etalonării făcute înainte de încercare, este reprezentată în diagrama din figura 15, avînd o variaţie aproximativ liniară pentru tot domeniul de solicitare de la încercarea modelelor de fundaţie respective.

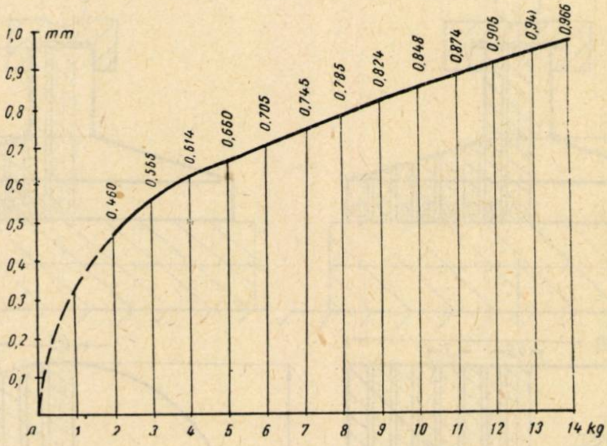
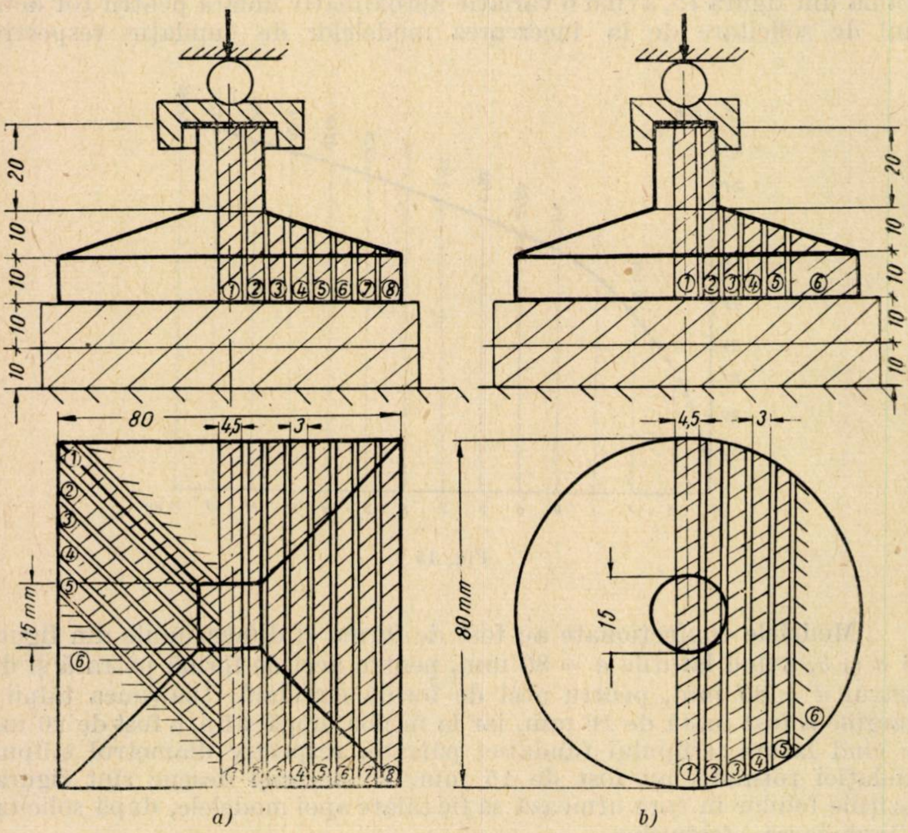


Fig. 15

Modelele confecţionate au fost de forma şi dimensiunile din figurile 16 *a* şi *b*, avînd laturile $a = 80$ mm, pentru acel de formă pătrată şi diametrul $d = 80$ mm, pentru acel de formă circulară. Înălţimea tălpii la margine a fost luată de 10 mm, iar la mijloc, lîngă stîlp, a fost de 20 mm, pe cînd latura stîlpului fundaţiei pătrate, respectiv diametrul stîlpului fundaţiei rotunde, au fost de 15 mm. În aceleaşi desene sînt figurate poziţiile feliilor în care urmează să fie tăiate apoi modelele, după solicitare şi îngheţarea eforturilor.

Modelele au fost solicitate de către o forţă axială, transmisă în mod cît mai centrat prin intermediul unei bile de oţel şi a unei piese metalice intermediare, care a fost aşezată în capul stîlpului piesei de model prin interpunerea unei plăcuţe de cauciuc. Forţele de solicitare transmise modelelor au fost de 47 kg pentru fundaţia pătrată şi de 36 kg pentru cea de formă circulară, fiind deci aproximativ proporţionale cu suprafeţele bazelor de rezemare ale modelelor. În acest mod se va realiza condiţia ca presiunile pe teren respective să fie aceleaşi, pentru a se putea compara astfel între ele cele două modele, ca mod de rezistenţă al lor datorit formei lor diferite în plan, pentru o aceeaşi presiune admisibilă a terenului de fundaţie.

După solicitarea şi îngheţarea modelelor, acestea au fost tăiate în felii cu ajutorul unei freze circulare de ⌀ 120 mm, în grosime de 0,9 mm, feliile fiind apoi şlefuite pe hîrtie de şmirghel pe feţele lor laterale pînă la grosimea lor definitivă. Tăierea s-a făcut începînd cu o felie centrală de 4,5 mm grosime, din planul median de simetrie al piesei, urmată apoi de alte felii mai subţiri paralele cu aceasta, de cîte 3 mm grosime rămasă după şlefuire, situate la distanţe egale de cîte 4,8 mm dintre ele. Modelul de formă pătrată a fost tăiat astfel în şapte felii paralele cu o latură, pentru o primă jumătate din model, după cum se poate vedea în fotografia din figura 17, pornind de la cea situată în planul de simetrie al piesei. De asemenea, s-au realizat cinci jumătăţi de felii tăiate după direcţii înclinate la 45° faţă de cele precedente, începînd cu cea îndreptată după diagonala pătratului de bază, în grosime de 4,5 mm, urmată apoi de altele de cîte 3 mm grosime rămasă după şlefuire, obţinute din cealaltă jumătate a modelului. Modelul de formă circulară a fost tăiat şi el în cinci felii paralele, începînd cu cea diametrală în grosime de 4,5 mm şi urmată de celelalte, situate la distanţe de cîte 4,8 mm, în grosimi de cîte 3 mm rămase după şlefuire.



a) b)

Fig. 16

Fotografiile izocromaticelor, obținute în lumina monocromatică polarizată circular, pentru feliile principale situate după planele de simetrie

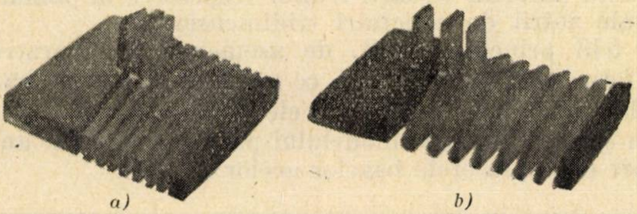


Fig. 17

centrale tăiate după secțiunile mediane paralele cu latura, cum și după diagonala pătratului de bază, pentru modelul pătrat, sînt date în figurile

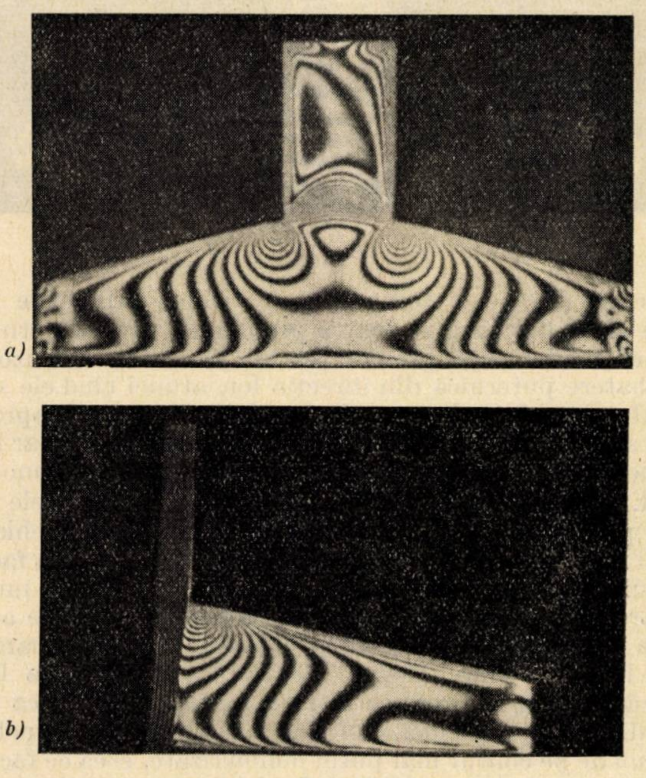


Fig. 18

18 *a* și *b*. Fotografia izocromaticelor obținute pentru felia principală din direcție diametrală a modelului de formă circulară este dată de asemenea în figura 19. Se constată din aspectul distinct al izocromaticelor din aceste fotografii că aceste felii să găsesc într-o stare de tensiune simi-

lară cu aceea a unor piese plane sau discuri solicitate în planul lor, deși ele sînt obținute dintr-o stare de tensiuni complet spațială. Explicația acestui fapt este datorită situării feliilor respective în planurile principale de simetrie ale stării de solicitări tridimensionale.

Aceste felii principale sînt, de asemenea, comparative între ele, ca rezultate fotoelastice cantitative, ce pot fi apreciate pe baza aspectului izocromaticelor, datorită faptului că ele sînt de aceleași grosimi de cîte 4,5 mm, cum și că solicitările modelului pătrat și circular au fost echivalente în raport cu suprafețele bazelor acelor modele.

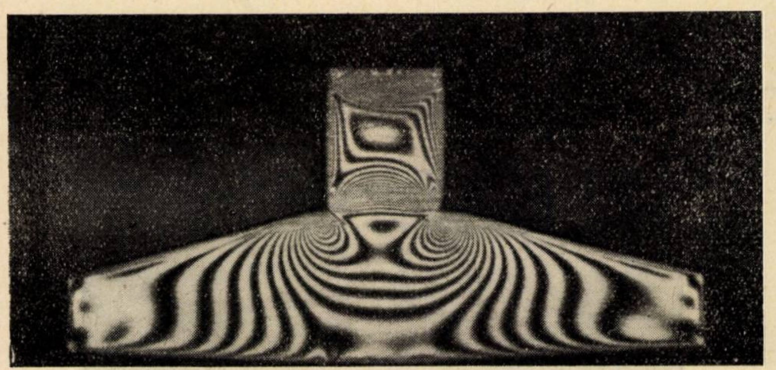


Fig. 19

Se observă din acele fotografii ale feliilor principale mijlocii ale modelelor un efect de margine foarte pronunțat, produs prin învechirea materialului de model după prelucrarea lui. Acesta face ca izocromaticele să sufere o abatere puternică din direcția lor, atunci cînd ele se îndreaptă către marginile piesei,față de care ele ajung într-o direcție aproape asimptotică, în loc să le intersecteze într-un unghi viu, așa cum ar fi fost cazul să se întîmple, după cum rezultă din compararea cu un model plan de același profil. Acest lucru se datorește faptului că modelele spațiale au fost tăiate și prelucrate din blocul de rășină fenol-formaldehidă, cu mult înainte de a fi fost încercate, înghețate și tăiate felii. Aceasta face ca suprafața modelului spațial și deci marginile acestor felii să fie mult mai înaintate ca stare de polimerizare, pe cînd fețele laterale ale acestor felii, mai proaspăt tăiate, polimerizează în continuare cu oarecare întîrziere, numai după trecerea unui interval de timp după tăierea lor.

Urmează deci că se produce aici un fenomen invers ca la modelele plane tăiate din plăci de rășină, cu fețele laterale mai mult polimerizate și cu tăieturile noi de pe contur mai puțin polimerizate, ceea ce face ca efectul de margine să se accentueze cu timpul. La feliile recent tăiate din modelul spațial, fețele laterale ale acestor felii se polimerizează mai mult numai prin învechirea lor, apropiindu-se de starea marginilor, care sînt mai mult polimerizate inițial, ceea ce face ca acel efect de margine să scadă cu timpul, după cum vom vedea mai departe, în loc de a crește, după cum se produce cazul la piesele plane propriu-zise.

Fotografiind astfel izocromaticele feliei mijlocii a modelului pătrat, după trecerea unui interval de timp de două săptămîni de la tăierea feliilor (fig. 20), s-a constatat o reducere simţitoare a efectului de margine, prin atenuarea întoarcerii izocromaticelor spre marginile piesei. Deoarece întoarcerile izocromaticelor ce merg către cele două margini mai lungi ale feliei sînt de sens contrar, pentru latura superioară faţă de cea inferioară, la părţile laterale ale tălpii, atenuarea efectului de margine se manifestă printr-o rotire a părţilor mijlocii ale izocromaticelor în jurul cîte unui punct intermediar al lor, fără a se modifica numărul şi aspectul lor general.

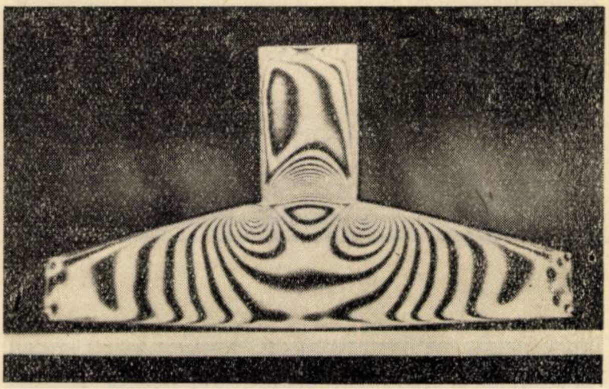


Fig. 20

Se ştie că pentru un model plan propriu-zis, diagrama de variaţie a tensiunilor de pe un contur liber de sarcini se obţine prin intersecţia izocromaticelor de numere de ordine succesive cu acel contur, ceea ce este valabil de asemenea şi pentru cazul feliilor principale din modelele spaţiale. După cum s-a arătat mai sus, aspectul izocromaticelor acestor felii principale se modifică puţin şi numai local, din cauza efectului de margine produs, anume în acelaşi sens pentru toate cele trei felii comparate între ele. Rezultă deci că alura diagramelor de variaţie ale acestor tensiuni de contur nu se va deosebi decît foarte puţin, prin considerarea producerii efectului de margine, putîndu-se face deci comparaţia eforturilor şi pe baza izocromaticelor obţinute imediat după tăierea feliilor, din cele trei fotografii din figurile 18 *a* şi *b*, cum şi din figura 19 de mai sus, cu toate distorsiunile produse către marginile feliilor.

Pentru o mai bună informare asupra efectului de margine produs la aceste felii, s-a făcut o încercare suplimentară pe un model plan în grosime de 4 mm de aceeaşi formă cu profilul modelelor spaţiale încercate, scos din acelaşi bloc ca şi modelul de formă pătrată şi tăiat din imediata apropiere a acelui model. Rezemînd baza acestui model plan pe un strat de cauciuc de 10 mm grosime şi solicitîndu-l cu o sarcină verticală axială de circa 114 kg la temperatura ordinară, s-au obţinut izocromaticele din figura 21, în care a rezultat o uşoară excentricitate a forţei de solicitare, produsă în primul rînd din cauza neomogenităţii perfecte a cauciucului folosit pentru rezemare. Solicitînd acelaşi model cu o sarcină axială de circa 11,640 kg şi îngheţîndu-l, prin acelaşi tratament termic la o temperatură de 80°C ca şi modelele spaţiale, s-au obţinut izocromaticele din figura 22, în care se constată de asemenea efectul excentricităţii forţei de solicitare.

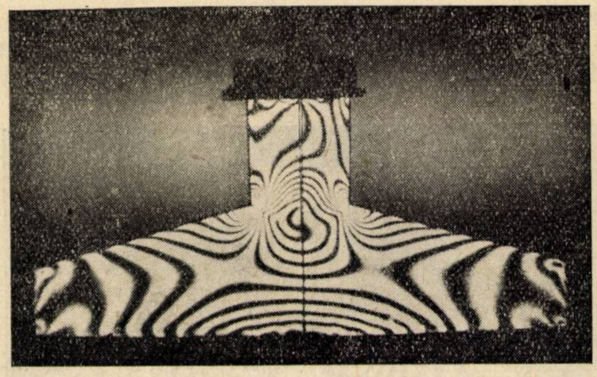


Fig. 21

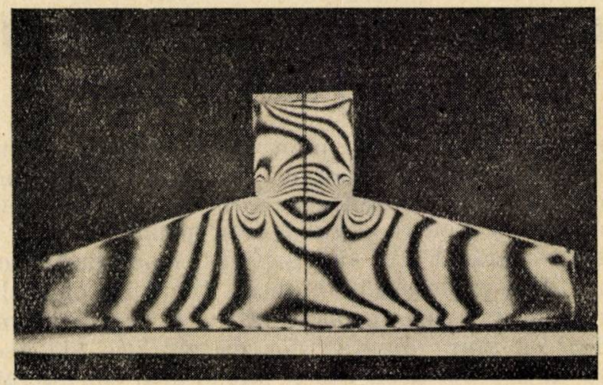


Fig. 22

Se observă aspectul diferit al izocromaticelor acestor ultime două încercări, datorit deformaţiei mult mai pronunţate a tălpii fundaţiei pentru modelul plan îngheţat din figura 22, din cauza tratării termice corespunzătoare, faţă de acel încercat la temperatura ordinară din figura 21. Se poate constata apoi aspectul asemănător al izocromaticelor din talpă obţinute pentru modelul plan îngheţat din figura 22, cu acele ale feliei mediane tăiate din modelul de formă pătrată îngheţat din figura 20, fotografiate după trecerea unui timp de două săptămîni de la efectuarea operaţiilor de îngheţare şi tăiere, cu toată diferenţa efortului şi diferenţa de excentricitate a forţei de solicitare. Rezultă că aspectele eforturilor de solicitare ale feliei principale centrale, pentru modelul considerat spaţial, faţă de acele ale unui model în stare de solicitare sau de deformaţii plane, sînt asemănătoare. Astfel că se poate face un calcul asemănător pentru dimensionare în cele două ipoteze, a piesei spaţiale sau a piesei în stare de deformaţie plană, singura consideraţie ce trebuie avută în vedere fiind aceea asupra modului global de repartiţie a presiunilor de sub fundaţie, ţinînd seama de forma în plan a piesei.

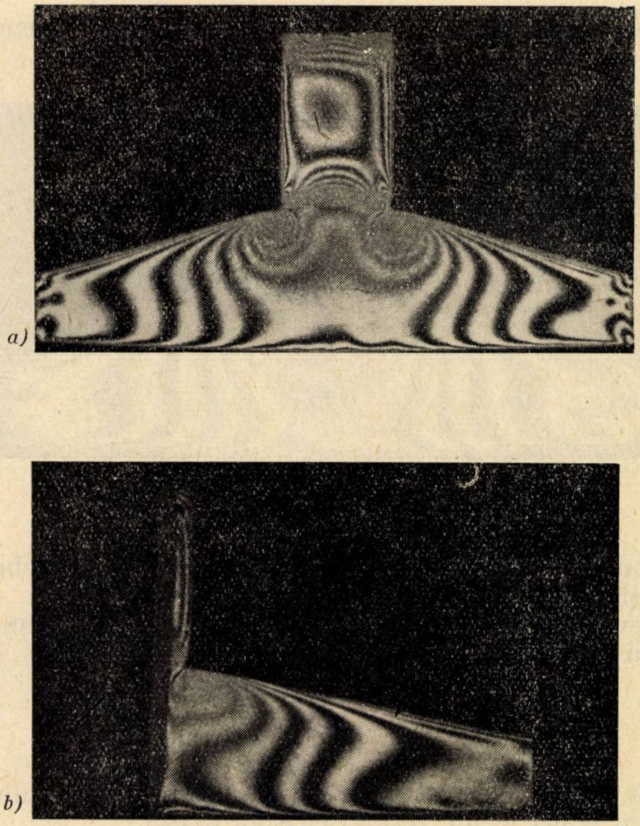
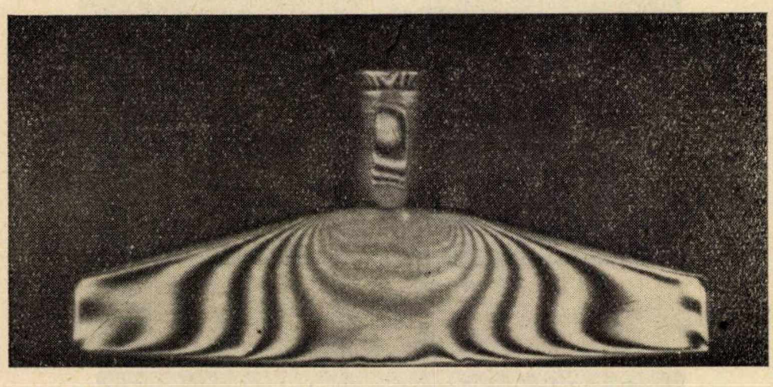


Fig. 23

Feliile imediat următoare celor principale au o grosime de cîte 3 mm, fiind situate încă în cuprinsul lăţimii stîlpului. Cu toată subţirimea lor, ele nu mai sînt într-o stare de tensiuni sau de deformaţii plană, ci pur spaţială. Fotografiile izocromaticelor din figurile 23 *a* şi *b* şi figura 24, pentru secţiunile paralele cu latura şi cu diagonala modelului de formă pătrată, cum şi pentru secţiunea dusă la aceeaşi distanţă de cea diametrală pentru modelul de formă circulară, dovedesc acest lucru. Într-adevăr primele felii următoare, deplasate faţă de feliile principale din planele de simetrie, au izocromaticele dinspre extremitățile secțiunilor mai clare și mai nete, ca și la o piesă plană supusă la o stare de tensiuni bidimensională, pe cînd înspre partea din mijloc a acestor felii izocromaticele apar mai tulburi din cauza variației mai pronunțate a stării de tensiuni în sensul grosimii modelului, pentru acea porțiune apropiată de axul piesei. Trebuie ținut seama apoi că, din cauza subțierii acestor felii la o grosime de 3 mm, față de grosimea de 4,5 mm a feliilor mijlocii, deci în raportul de $\frac{3}{4,5} = \frac{2}{3} = \frac{1}{1,5}$, fenomenele fotoelastice produse, ce se pot constata din fotografie, trebuie considerate în același raport al grosimii feliilor.



F g. 24

Într-adevăr, într-o felie cu o stare omogenă de tensiuni înghețate, din relația lui Wertheim

$$\sigma_1' - \sigma_2' = \frac{k\lambda}{Ce}$$

considerînd că $\sigma_1' - \sigma_2' = $ const. în sensul grosimii feliei modelului înghețat, în dreptul unui punct al lui, rezultă că vom avea

$$k = (\sigma_1' - \sigma_2')\, e \frac{C}{\lambda}.$$

Urmează deci că ordinul izocromaticelor, pentru o aceeași valoare a lui $\sigma_1' - \sigma_2'$ din dreptul aceluiași punct al feliei, este proporțional cu $e$, grosimea feliei tăiate din modelul spațial. Astfel că cele patru izocromatice existente pe fotografiile obținute pentru porțiunile de talpă ale fundației, pentru toate cele trei felii de 3 mm grosime din figurile 23 și 24, echivalează cu cîte 4 × 1,5 = 6 izocromatice ale feliilor mijlocii, de 4,5 mm grosime, din figurile 18 și 19. Rezultă deci că, pentru porțiunea din fundație de pe o lățime egală cu lățimea stîlpului, solicitarea este aproximativ uniformă pe toată această lățime, de unde rezultă justificarea unui mod de calcul curent folosit, prin considerarea unei piese plane de o lăţime egală cu aceea a stîlpului, în loc de aceea spaţială propriu-zisă a fundaţiei.

Ţinînd seama că planele mediane ale feliilor principale sînt plane principale ale unei stări de tensiuni spaţiale simetrice în raport cu ele, stările de tensiuni din planul lor sînt absolut analoge unor stări de deformaţii plane, în sensul definiţiei acesteia din teoria elasticităţii. Se pot trasa deci uşor, în acelaşi mod ca şi pentru problemele fotoelastice plane, diagramele de variaţie ale tensiunilor normale $\sigma$ de margine, rezultate din încovoiere, de-a lungul oricărui contur liber de sarcini şi chiar ale aceluia în care sarcinile normale exterioare sînt neglijabile faţă de cele rezultate din încovoiere, sau care sînt cunoscute măcar în mod aproximativ. Acesta este de fapt cazul pentru marginea inferioară a feliilor tălpii, rezultînd din secţionarea suprafeţei de contact dintre fundaţie şi dintre stratul de cauciuc de dedesubt, pentru care se poate presupune că efortul normal de pe acel contur $\sigma_2 = -p$ este de o valoare neglijabilă faţă de tensiunea de margine $\sigma_c = \sigma_1$ rezultată din încovoiere, sau în orice caz se poate evalua în mod foarte apropiat de realitate, din considerarea unei repartiţii uniforme a presiunii totale acţionînd modelul. De asemenea efortul tangenţial $\tau$ dintre faţa inferioară a tălpii şi stratul de cauciuc de dedesubt poate fi considerat a fi nul, datorită uşoarei deformabilităţi laterale a acelui cauciuc elastic, produsă prin strivirea lui sub presiunea verticală a piesei, după cum arată şi Brunarski în studiul său efectuat pentru modele plane, menţionat anterior [3].

În urma tuturor observaţiilor deduse mai sus din cercetările suplimentare făcute, s-au obţinut informaţii suficiente pentru corectarea traseului izocromaticelor, deformate din cauza efectului de margine pronunţat, îmbunătăţindu-se forma acestora pe porţiunile lor din apropiere de conturul feliilor principale. Din forma lor, corectată pe baza observaţiilor de mai sus, s-au putut determina apoi diagramele comparative de variaţie ale tensiunilor normale de contur $\sigma_c = -\sigma'_2$ pentru laturile superioare şi ale lui $\sigma'_1 - \sigma'_2 = \sigma_c + p$ pentru tălpile inferioare ale acelor felii, la scara de intervale de izocromatice din figurile 25 *a* şi *b*, pentru modelul de formă pătrată şi din figura 26, pentru modelul rotund.

Din compararea diagramelor eforturilor normale de contur ale feliilor principale, solicitarea considerată după felia diagonală a fundaţiei de formă pătrată duce la producerea unor tensiuni normale maxime din încovoiere de valori cu circa $100 \times \frac{9{,}5 - 7{,}5}{7{,}5} = 27\,\%$ mai mari faţă de aceea a solicitării aceleiaşi piese considerate după felia mediană, rezultînd deci necesitatea prevederii unor armături suplimentare în consecinţă, cu ocazia proiectării fundaţiilor de beton armat de formă pătrată. De asemenea, din compararea diagramelor feliei mediane a formei pătrate, cu aceea a feliei diametrale a formei rotunde, rezultă valori ale tensiunilor normale maxime din încovoiere cu circa $100 \times \frac{7{,}5 - 6{,}5}{7{,}5} = 13\,\%$ mai mari, pentru prima piesă faţă de cea de-a doua, la o sarcină totală echivalentă corespunzătoare unei aceleiaşi presiuni unitare pe teren, pentru ambele modele încercate, ceea ce prezintă interes pentru compararea și alegerea formei în plan a fundației. Bineînțeles că o formă octogonală de fundație s-ar găsi într-o situație intermediară din acest punct de vedere. Privitor la alegerea formei optime în plan a fundației, un factor hotărîtor îl va constitui însă modul de variație și de repartizare a presiunilor pe teren, sub diferitele forme în plan ale fundației, ceea ce hotărăște asupra capacității portante din punctul de vedere al rezistenței terenului, preocupare care va forma obiectul unui studiu viitor.

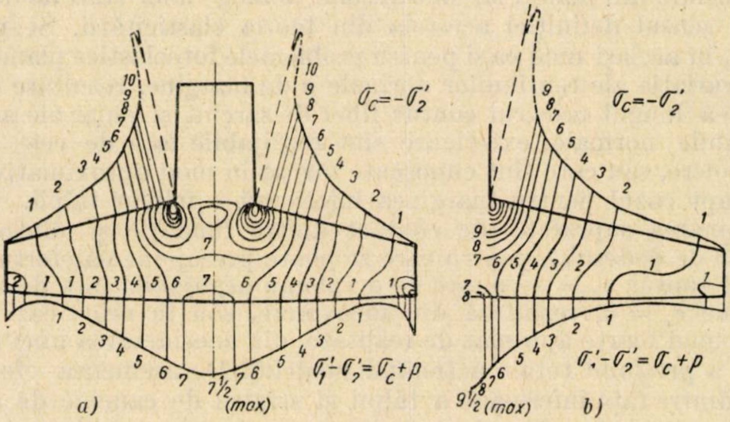


Fig. 25

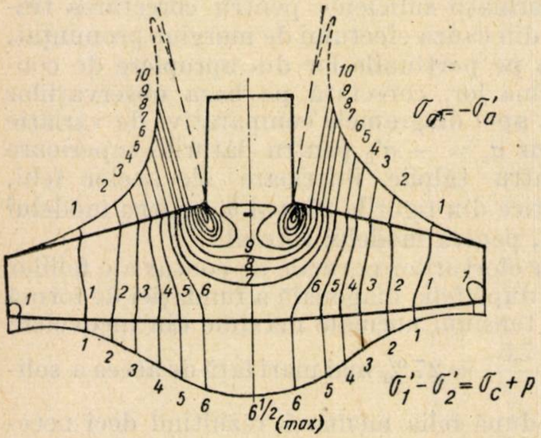


Fig. 26

O altă observație importantă care se poate face din examinarea aspectului izocromaticelor, rezultă din constatarea puternicelor concentrări de tensiuni de pe laturile superioare, din apropiere de unghiurile vii intrînde de la legătura dintre stîlp și talpa fundației, produse chiar în cazul transmiterii axiale centrate a sarcinii de la stîlp la fundație. Aceste concentrări s-ar putea accentua încă și mai mult în cazul unei excentricități a forței, sau în cazul transmiterii unui moment, deși prin deformația exagerată produsă la înghețare, ele sînt ceva mai pronunțate la aceste modele decît în realitate. Cu toate măsurile de precauție ce se iau în mod obișnuit, de a se prelungi armăturile stîlpului în sens vertical și de a se prevedea armături de garanție în sens paralel cu fețele superioare ale tălpii, în dreptul bazei stîlpului, ar fi totuși necesar să se evite mai bine aceste concentrări de tensiuni. Acestea pot duce la fisurări periculoase, ce pot da naştere la producerea de articulaţii plastice tocmai la locul de legătură dintre stîlp şi fundaţie, unde ar fi mai util să se introducă încă de la început o asemenea articulaţie, în cazul cînd acest lucru este necesar.

În lipsa acestei articulaţii, pentru a putea transmite eventual şi unele momente de la stîlp la fundaţie, ar fi mai sigur de a se introduce o racordare progresivă între stîlp şi talpă, sub forma unui capitel invers. Din cauza dificultăţilor constructive de execuţie ale unor asemenea racordări sub forme curbe, în cazul betonului armat, ele ar putea fi realizate prin vute, sau printr-un trunchi de piramidă de racordare, cu feţele înclinate la 45°, sau la un alt unghi de înclinare mai potrivit, sau chiar în trepte. În orice caz, după aspectul izocromaticelor obţinute pe feliile tăiate din modelele îngheţate, coeficientul de concentrare de tensiuni de la colţul intrînd ar fi de o valoare egală aproximativ cu trei, faţă de valoarea tensiunii maxime de la faţa de jos a tălpii.

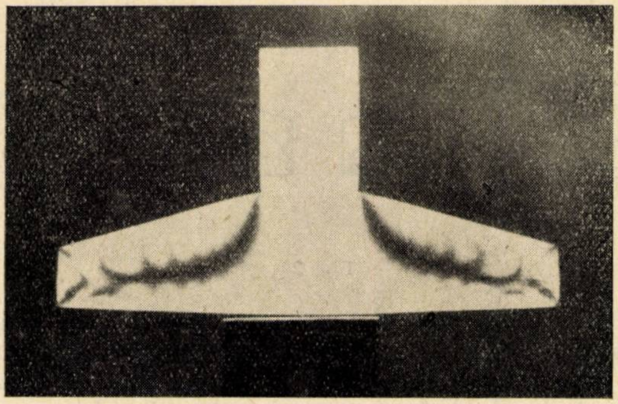
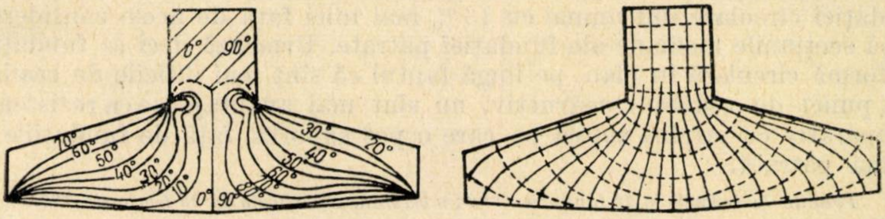


Fig. 27



a)

b)

Fig. 28

Pentru a completa cercetarea cu rezultatele calitative date de studiul izoclinelor, s-au fotografiat aceste izocline pentru parametri variind din 10 în 10°, lucrînd în lumină albă polarizată rectiliniu, pe un film „Leica", cu ajutorul unui filtru oranj, folosind aceleaşi felii principale întrebuinţate şi la cercetările cantitative. Un exemplu al fotografiei izoclinei de 45°, obţinute pentru modelul pătrat este dat în figura 27. După aceste fotografii ale izoclinelor de la 0—90°, trasate pe cîte o singură epură în figurile 28 *a* şi 29 *a*, s-au putut trasa reţelele de izostatice din figurile 28 *b* şi 29 *b*,

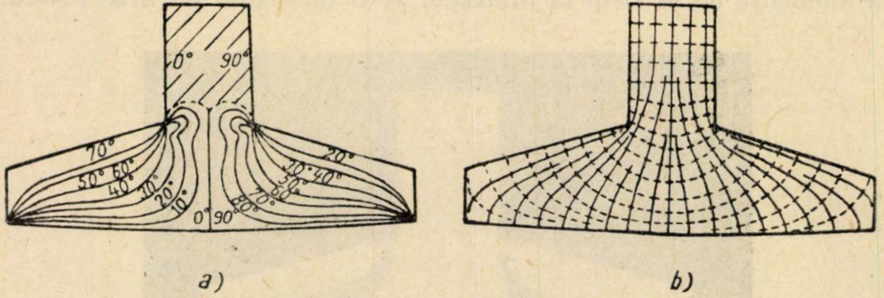


Fig. 29

care s-au dovedit a fi de forme foarte apropiate pentru felia mediană a modelului pătrat şi pentru aceea diametrală a modelului rotund.

Rezultă din încercările fotoelastice comparative făcute că, pentru modelul de formă circulară, de un diametru $d$ egal cu latura $a$ a modelului pătrat, adică pentru o suprafaţă de rezemare de o mărime egală cu

$$\frac{\pi d^2/_4}{d^2} = \frac{\pi}{4} = 0{,}78,$$

din aceea a fundaţiei de formă pătrată, considerate la o aceeaşi presiune pe teren, deci pentru o sarcină totală capabilă cu 22 % mai mică decît aceea a fundaţiei pătrate, eforturile, maxime rezultate din solicitarea tălpii fundaţiei circulare sînt numai cu 13 % mai mici faţă de acele considerate după secţiunile mediane ale fundaţiei pătrate. Urmează deci că fundaţiile de formă circulară în plan, pe lîngă faptul că sînt mai dificile de realizat din punct de vedere constructiv, nu sînt mai avantajoase ca rezistenţă, comparativ cu sarcina totală pe care o pot suporta, faţă de fundaţiile de formă pătrată.

*Primită la redacţie la 16 ianuarie 1960 ; o versiune modificată la 25 februarie 1961*

# ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ФОТОУПРУГОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНДАМЕНТОВ ПОД ИЗОЛИРОВАННЫМИ СТОЙКАМИ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА „ЗАМОРАЖИВАНИЯ"

## РЕЗЮМЕ

Исследование фундаментов в виде бетонной или железобетонной подошвы явилось предметом многочисленных теоретических и экспериментальных исследований. Эту задачу до сих пор изучали методом

фотоупругости только в ее плоской форме, то есть для подошвообразных фундаментов под продольными стенками. Впервые было осуществлено пространственное фотоупругое исследование методом ,,замораживания'', что является предметом настоящего нашего изложения.

Для этой цели при изготовлении моделей пользовались фенолальдегидной синтетической смолой, полученной инженером Поклитару, а также различными специальными приспособлениями для определения упругих и фотоупругих постоянных материалов и для нагружения моделей.

Было произведено сравнительное исследование двух моделей фундамента, из которых одна — квадратной формы, а другая — круглой. Эти модели, опиравшиеся на резиновые плиты, были подвержены осевой нагрузке и термической обработке, с целью получения ,,замораживания''. Затем они нарезались тонкими пластинками, которые наблюдались в поляризованном свете. Таким образом были получены картины полос для основных пластинок, нарезанных по сечениям симметрии двух моделей, а также для других пластинок, параллельных первым. Эти результаты были применены для получения сравнительных диаграмм контурных усилий, вызываемых изгибом нагруженной детали.

В результате применения этого метода устанавливается, что нагружение, рассматриваемое по диагональному направлению квадратной модели, вызывает максимальное напряжение, на 27% большее, чем нагружение, рассматриваемое по срединному направлению детали; с этим нужно считаться при расчете такой формы фундамента. Аналогичным путем был получен сравнительный результат, показывающий, что при одном и том же давлении на основание, фундамент круглой формы на 13% менее нагружен в диаметральной плоскости, чем фундамент квадратной формы в своей срединной плоскости, причем максимальные усилия находятся в таком же процентном отношении. Аналогичным путем было найдено значение коэффициента сосредоточений напряжений, появляющихся во входных углах края, связывающего подошву со стойкой, равное примерно трем, по сравнению с максимальным усилием на нижней части подошвы.

Эти сравнительные результаты могут послужить для выбора формы фундамента и для дополнения расчета этих фундаментов на прочность.

## ÉTUDE PHOTO-ÉLASTIQUE À TROIS DIMENSIONS DES FONDATIONS SOUS DES COLONNES ISOLÉES, PAR LA MÉTHODE DU FIGEAGE DES CONTRAINTES

### RÉSUMÉ

L'étude des fondations en béton simple ou en béton armé a constitué la préoccupation de beaucoup de recherches théoriques et expérimentales. En photo-élasticité, ce n'est que sous la forme plane que ce problème a

été étudié jusqu'ici, à savoir pour les fondations en forme de semelle sous des murs longitudinaux. C'est donc pour la première fois qu'une étude photo-élastique à trois dimensions en a été faite, par la méthode du figeage des contraintes, étude qui constitue l'objet de notre exposé.

A ces fins, on a employé, pour l'exécution des modèles, une résine coulée de phénol-formaldéhyde, préparée par l'ingénieur Poclitaru, ainsi que divers dispositifs spéciaux permettant de déterminer les constantes élastiques et photo-élastiques des matériaux et d'appliquer les sollicitations nécessaires aux modèles.

On a fait une étude comparative de deux modèles de fondations, l'un de forme carrée et l'autre de forme ronde. Ces modèles, appuyés sur des plaques de caoutchouc, ont été sollicités axialement et soumis à des traitements thermiques, afin d'obtenir le figeage des contraintes. Après, ils ont été coupés en tranches minces, que l'on a examiné en lumière polarisée.

On a obtenu ainsi les isochromatiques, non seulement des tranches principales, coupées suivant les sections de symétrie des deux modèles, mais aussi des tranches parallèles à celles-ci. Ces résultats ont permis d'obtenir les diagrammes comparatifs des efforts de contour, dus au fléchissement de la pièce sollicitée.

Les résultats fournis par cette méthode ont permis d'établir que la sollicitation considérée suivant la direction diagonale du modèle carré produit une contrainte maximum dépassant de plus de 27 % la contrainte maximum produite suivant la direction médiane de la pièce, ce dont il faudra tenir compte dans le calcul de cette forme de fondation. De la même façon, on a obtenu le résultat comparatif qui montre que, pour une même pression sur le sol, la sollicitation dans le plan diamétral de la fondation ronde, ayant le diamètre égal au côté de la fondation carrée, est inférieure de 13 % à la sollicitation de cette dernière dans son plan médian, les contraintes maxima se trouvant dans le même rapport. En outre, on a trouvé que la valeur maximum des contraintes dues à leur concentration dans les angles rentrants de la région de jonction de la semelle à la colonne, est environ trois fois plus grande que l'effort maximum produit à la face inférieure de la semelle.

Ces résultats comparatifs pourront servir au choix de la forme de fondation, ainsi que pour compléter le calcul de la résistance de ces fondations.

## BIBLIOGRAFIE

1. L. FÖPPL, E. MÖNCH, *Praktische Spannungsoptik*. Ed. Springer, Berlin, 1950.
2. K. HIRSCHFELD, *Die Spannungsverteilung in Fundamentquerschnitten-Fortschritte und Forschungen im Bauwesen*. Stuttgart, 1955.
3. L. BRUNARSKI, *Elastooptyczne badanii razkladu naprezen w stopach fundamentowych* — Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo, *6*, Varşovia 1956.
4. D. A. STAN, *Încercări asupra tălpilor de beton armat ale stîlpilor izolaţi*. Bul. Soc. Politehnice, I. VI, *10* (1943).

5. D. STAN, A. TAUBER, *Calculul fundaţiilor de beton armat ale stîlpilor izolaţi*. Ed. Progresul, Sibiu, 1948.
6. M. M. FROCHT, *Photoelasticity*. **I**—**II**, Ed. John Willey, New York, 1948—1949.
7. M. HETENYI, *Handbook of Experimental Stress Analysis*. Ed. John Willey, New York, 1951.
8. H. B. HAYWOOD, *Designing by Photoelasticity*. Ed. Chapmann and Hall, Londra, 1952.
9. * * * *Поляризационно-оптический метод исследования напряжений*. Издательство Академии Наук СССР, Москва, 1956.
10. * * * *Поляризационно-оптический метод исследования напряжений*. Труды конференции 1958, Издательство ленинградского университета, 1960.
11. N. IOSIPESCU, *Introducere în fotoelasticitate*. **I**, Ed. tehnică, Bucureşti, 1958.
12. M. M. FROCHT, *A three-dimensional Study of Contact Stresses*. Proceedings of the Society of Experimental Stress Analysis, 1955.
13. M. M. LEVEN, *Quantitative three-dimensional Photoelasticity*. Proceedings of the Society of Experimental Stress Analysis, **XII**, *2* (1955).
14. M. M. FROCHT, R. A. THOMPSON, *A three-dimensional Photoelastic Investigation of the Stress-Distribution in an Axially thick Ring*. Proceedings of the Society of Experimental Stress. Analysis, **XVI**, *2* (1959).

# ASUPRA UNOR PROPRIETĂȚI FIZICO-MECANICE ALE BETOANELOR ARMATE CU OȚELURI SUPERIOARE

DE

GEORGETA STĂNCULESCU și NATALIA TEODORESCU [1])

## 1. INTRODUCERE

Lucrarea prezintă unele probleme referitoare la utilizarea oțelurilor superioare cu profil periodic. Sînt date rezultate de încercări efectuate în laboratorul de proprietăți fizico-mecanice din secția de beton armat de la INCERC, pe baza cărora s-a elaborat un normativ de proiectare și de alcătuire constructivă a elementelor din beton armat cu oțeluri cu profil periodic.

Oțelurile superioare folosite la noi în țară ca armătură pentru betonul armat obișnuit se deosebesc de oțelurile curent folosite, prin rezistențe mai mari la întindere și la aderență, datorite pe de o parte provenienței lor din oțeluri de bază superioare sau ecruisării și pe de altă parte datorită profilului periodic.

În țara noastră a început în 1957 producția industrială de oțel beton TOR (bare rotunde cu nervuri longitudinale laminate la cald și torsionate ulterior la rece). În figura 1 sînt fotografiate probe pentru aderența la smulgere a barelor din oțel torsionat.

În afară de profilele TOR la noi în țară s-a produs oțel beton PC (bare rotunde cu profil periodic din nervuri longitudinale și transversale, normale între ele, laminate la cald). Pe figura 2 este redată o epruvetă pentru încercarea aderenței la smulgere, armată cu oțel PC.

Date fiind avantajele pe care le prezintă aceste tipuri de oțeluri este de prevăzut o sensibilă extindere a utilizării acestui material. Ca urmare, apare necesitatea de a se studia cu atenție proprietățile betoanelor armate cu asemenea oțeluri.

---

[1] INCERC.

Oțelul torsionat livrat la noi corespunde la două calități : TOR 44 și TOR 57 denumite astfel după rezistența minimă la rupere și provenite respectiv din OL 38 și OL 50. Prin torsionare oțelul se ecruisează, realizîndu-se și o creștere a limitei de curgere cu circa 50% și o sporire a rezistenței la rupere cu circa 15—20%.

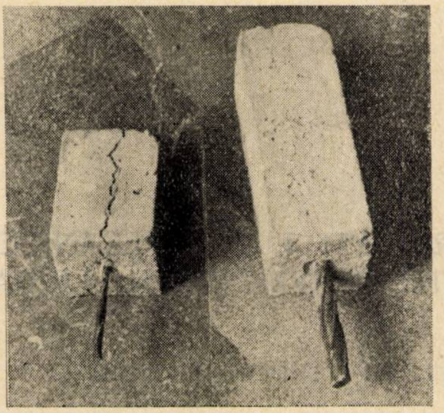


Fig. 1. — Prisme pentru încercarea aderenței la smulgere a barelor din oțel torsionat cu 2 sau 4 nervuri.

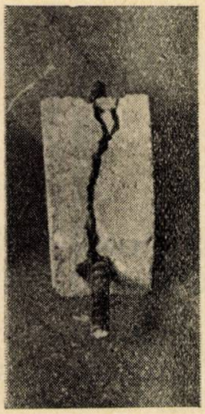


Fig. 2. — Prismă pentru încercarea aderenței la smulgere a barelor din oțel cu profil periodic laminat la cald.

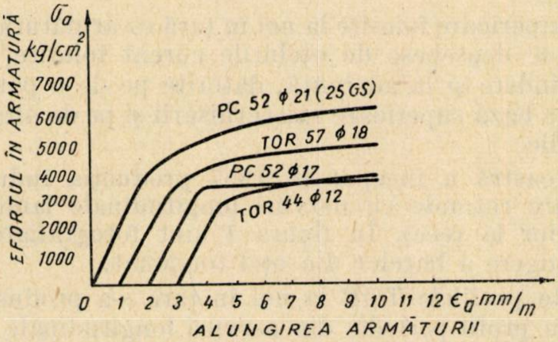


Fig. 3. — Curbe efort-deformație la diferite oțeluri superioare.

Pînă în prezent, livrarea oțelului TOR s-a făcut pe baza normei interne a M.I.G. care prevede livrarea de oțel TOR cu două și patru bavuri de diametre de la 6 la 20 mm cu pasul elicei de 12,5 *d*, alungirea la rupere pe lungime de 10 diametre de 10% și limita minimă de curgere convențională de 35, respectiv 42 kg/mm², corespunzătoare unei alungiri remanente de 0,2% deoarece acest oțel nu prezintă palier de curgere.

Oţelul beton PC se laminează la noi din OL 50, OL × 52 şi din 25 GS, analog oţelurilor sovietice, cu diametre de la 16 la 30 mm, respectînd prevederile normei interne M.I.G. şi anume : limita minimă de curgere 34 kg/mm$^2$, rezistenţa minimă la rupere 52 kg/mm$^2$, alungirea la rupere pe lungime de 10 diametre 18 %.

În figura 3 sînt reprezentate pentru comparaţie cîteva curbe caracteristice ale oţelurilor folosite la încercări. Aceste curbe au fost obţinute prin măsurarea alungirilor cu ajutorul tensometrelor electrice aplicate pe epruvete neprelucrate.

În ceea ce priveşte modulul de elasticitate, oţelurile superioare cu profil periodic nu sînt deosebite de oţelurile obişnuite OL.

## 2. COMPORTAREA BETOANELOR ARMATE CU OŢELURI SUPERIOARE

În trecut, nu s-a putut recurge la oţeluri superioare în betoanele armate, deoarece nu era asigurată o bună conlucrare între armătură şi beton la eforturile mari din armătură. În prezent, se realizează în mod practic, pentru betonul armat obişnuit, conlucrarea armăturii cu betonul, prin sporirea aderenţei datorită profilării suprafeţei armăturii.

Prin utilizarea oţelurilor superioare se admite o rezistenţă sensibil mai mare în armătură şi în beton, fapt care duce la micşorarea dimensiunilor elementelor, la economii de material, manoperă şi transport, la reducerea sarcinilor permanente, la creşterea vitezei de execuţie şi în cele din urmă la reducerea costului construcţiilor.

Cercetările întreprinse, ale căror rezultate sînt prezentate mai jos, au urmărit să se pună în evidenţă modul de comportare sub solicitări de încovoiere sau întindere centrică, a elementelor din beton armate cu oţeluri superioare cu profil periodic.

2.1. *Comportarea la solicitări de încovoiere.* Încercările s-au făcut pe grinzi de secţiune dreptunghiulară, fără armătură ridicată, simplu rezemate şi încărcate cu forţe concentrate la treimea deschiderii. Sarcinile s-au aplicat static cu creşterea în trepte a încărcării, fără cicluri de descărcări, pînă la rupere.

Pentru a se putea compara comportarea la încovoiere a grinzilor cu armătură din bare netede cu aceea a grinzilor armate cu bare cu profil periodic, s-au făcut încercări în paralel pe grinzi echivalente din punctul de vedere al capacităţii portante, avînd acelaşi produs $A_f \sigma_c$, marcă de beton şi dimensiuni.

S-a analizat comportarea grinzilor din punctul de vedere al capacităţii portante, condiţiilor de fisurare, rigidităţii şi al aderenţei armăturilor.

2.1.1. *Capacitatea portantă.* Momentele de rupere experimentale s-au comparat cu momentele recalculate prin metoda la rupere pe baza rezistenţei betonului şi a efortului în armătură, în momentul ruperii.

Caracteristic încercărilor efectuate la INCERC, este determinarea eforturilor în armătură, cunoscînd atît deformaţiile fiecărei bare din elementul încercat la diferite trepte de încărcare şi la rupere, cît şi diagrama efort-deformație stabilită pe epruvete de armătură luate din elementul respectiv.

Însemnînd eroarea relativă a valorii momentului teoretic recalculat, față de momentul de rupere măsurat, prin

$$e = \frac{M_r^{calc} - M_r^{exper}}{M_r^{exper}},$$

s-au trasat curbele de frecvență ale erorilor relative la încercări pe grinzi cu armătură din oțel TOR, PC sau OL reprezentate pe figura 4. După cît se observă erorile relative cele mai probabile sînt în toate cazurile pozitive și au valori apropiate pentru tipurile de oțeluri cercetate. Acest fapt arată că, din punct de vedere al calculului la rupere nu apar deosebiri esențiale între betoanele armate cu armătură obișnuită și cele armate cu oțeluri superioare cu profil periodic.

Pentru a se verifica rezultatele dimensionării după metoda la rupere în cazul grinzilor armate cu profil periodic, la diverse procente de armare și diferite mărci de beton, s-a reprezentat pe graficul din figura 5 *a*, *b*, *c*, gruparea valorilor experimentale prin raport cu diagrama capacității portante relative $\frac{M_r}{bh_0^2 R_i}$, în funcție de înălțimea relativă a axei neutre $\xi = \frac{\mu\sigma_c}{R_i}$.

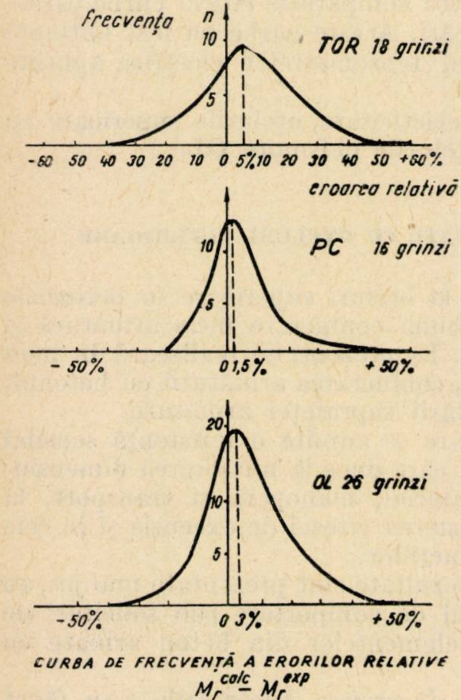


Fig. 4. — Curbele de frecvență ale erorilor relative ale momentelor de rupere.

Pentru încercări, procentele au variat în cazul utilizării oțelului TOR între 0,26—3,2 %, pentru oțelul PC între 0,6—1,5 % și pentru oțelul OL între 0,9—4,4 %, iar mărcile de beton au fost cuprinse între 200 și 400 kg/cm².

Din examinarea diagramelor din figura 5 se observă o mai bună coincidență a valorilor experimentale cu acele teoretice pentru oțelurile cu profil periodic, ceea ce justifică extinderea metodei de calcul la rupere, în cazul betoanelor armate cu oțeluri de acest tip.

Asupra modului de rupere influențează în mod evident procentul de armare. Pe fotografiile din figura 6 și 7 se observă diferența între modul de cedare al unor grinzi armate cu oțel torsionat, prin ruperea armăturii la procent redus de armare (0,26 %) (fig. 6) și prin strivirea betonului în cazul unui procent mare de armare (2,95 %) (fig. 7).

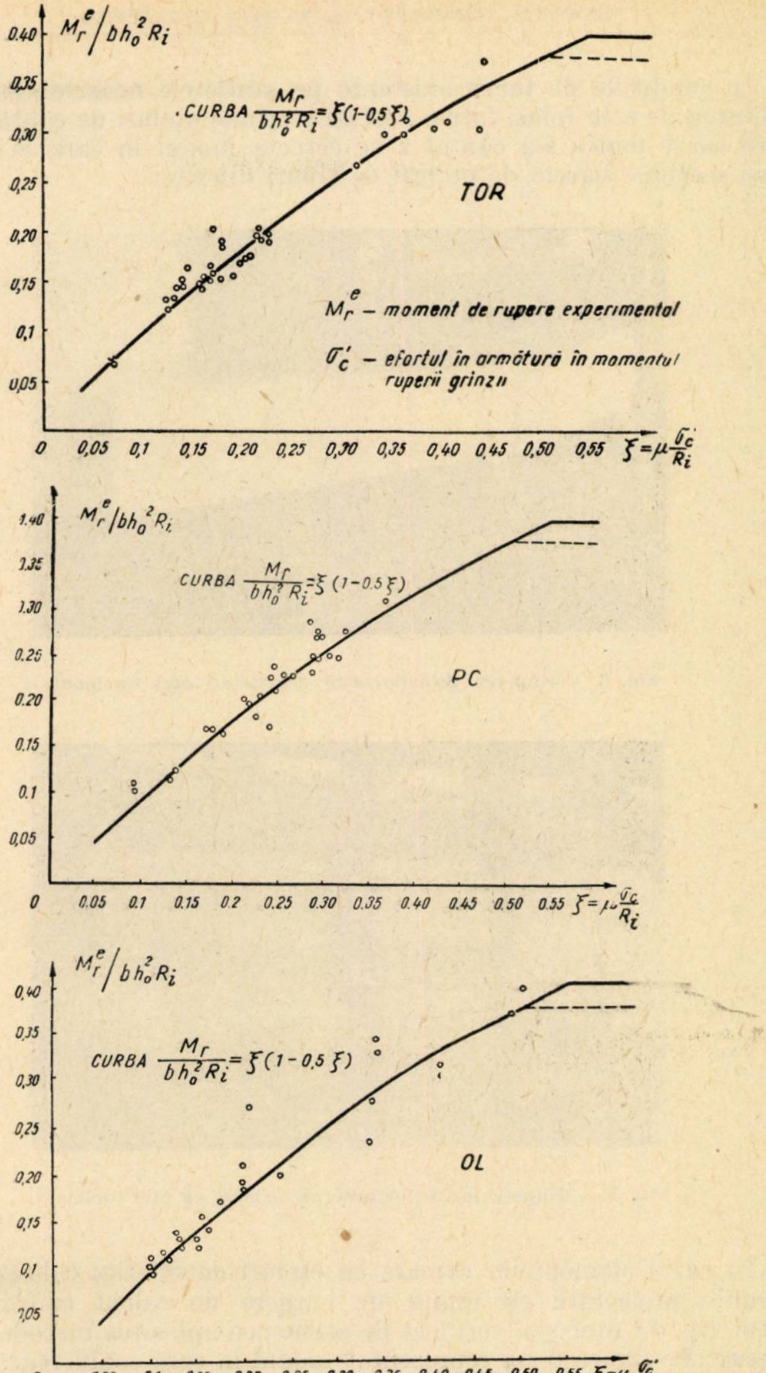


Fig. 5 *a*, *b*, *c*. — Capacitatea portantă relativă a grinzilor încercate armate cu bare TOR, PC sau OL.

În condiţiile de lucru existente pe şantierele noastre apare deseori necesitatea de a se folosi într-o aceeaşi secţiune oţeluri de calităţi diferite. Pentru acest motiv s-a căutat a se cerceta modul în care se încarcă în aceeaşi secţiune barele de oţeluri de tipuri diferite.

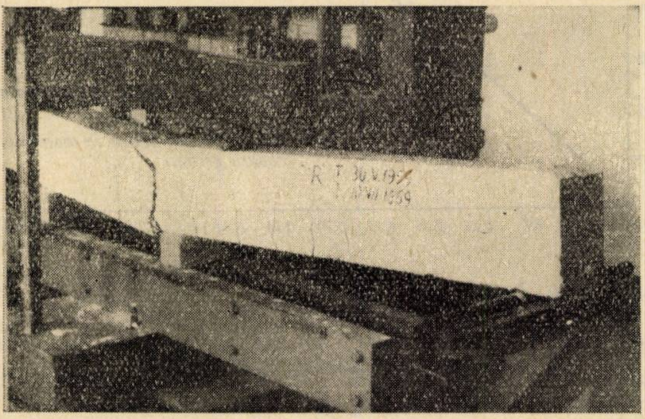


Fig. 6. — Ruperea grinzilor slab armate cu oţel torsionat.

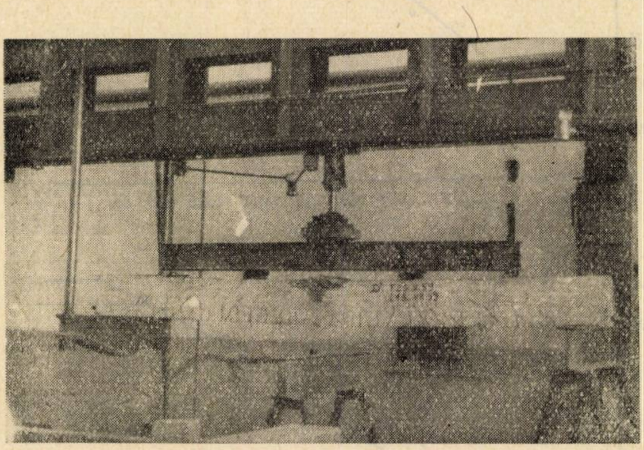


Fig. 7. — Ruperea grinzilor puternic armate cu oţel torsionat.

În cazul elementelor armate cu oţeluri de diferite calităţi şi tipuri de profile proiectate cu limita de curgere de calcul corespunzătoare fiecărui tip de oţel s-a verificat de asemenea aplicarea metodei de calcul la rupere. Pe figura 8 s-a reprezentat modul în care conlucrează diferitele oţeluri în secţiune şi anume : pe curbele caracteristice reprezentate în paralel, s-au unit la fiecare etapă de încărcare alungirile barelor măsurate cu tensometrele electrice. Se observă pe figură că după depăşirea limitei de elasticitate a oțelului de calitate inferioară (din punct de vedere al limitei de curgere cît și al aderenței) alungirile acestuia cresc mai mult fără a apare o supraîncărcare sensibilă, iar după depășirea limitei sale de curgere alungirile nu cresc brusc, ci treptat pe măsura încărcării oțelului superior.

2.1.2. *Fisurarea.* La construcțiile la care există în condițiile de exploatare pericolul de coroziune a armăturii descoperită în dreptul fisurilor, condiția de fisurare de care trebuie să se țină seamă, duce uneori la nefolosirea integrală a capacității de rezistență ridicată a betoanelor cu armătură cu profil periodic.

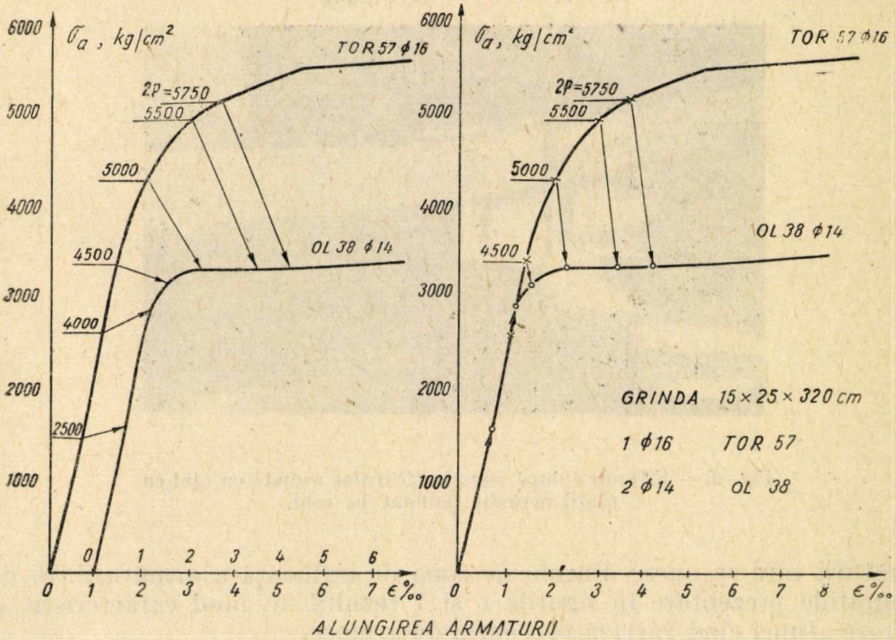


Fig. 8. — Conlucrarea armăturilor de calități diferite în aceeași secțiune.

Din încercări pe grinzi avînd aceeași capacitate portantă și armate cu oțeluri diferite, a rezultat un coeficient de siguranță la fisurare mai dezavantajos pentru oțelurile superioare cu profil periodic decît pentru oțelurile netede. Scăderea sarcinii de fisurare ajunge la 70—80% din sarcina de fisurare pentru betoane armate cu oțeluri obișnuite. Fisurile se deschid relativ la încărcări mici, distanțele între ele și deschiderea lor fiind însă mai mică decît în cazul betoanelor cu oțeluri obișnuite. Distanța între fisuri la betoanele armate cu profil periodic, au fost circa 0,7—0,9 din distanțele observate la betoanele armate cu bare de oțel obișnuit.

La o aceeași deschidere de fisură, spre exemplu de 0,2 mm efortul în armătura cu profil periodic a fost cu 50% mai mare decît efortul în armătura netedă, iar pentru o deschidere de 0,1 mm cu 20%. S-a constatat de asemenea că sub sarcina de exploatare la grinzi cu o aceeași capacitate portantă suma deschiderii fisurilor este sensibil egală, fie că armarea este cu bare profilate, fie că armarea este cu bare rotunde.

Pe figura 9 este arătat aspectul caracteristic al fisurării pentru o grindă armată cu oțel cu profil periodic laminat la cald care dă o bună aderență între armătură și beton. Pe fotografie se văd fisuri dese la nivelul armăturii care se unesc dincolo de zona de influență a armăturii. Și din fotografiile prezentate în figurile 6 și 7 rezultă un mod caracteristic de fisurare atunci cînd variază procentul de armare.

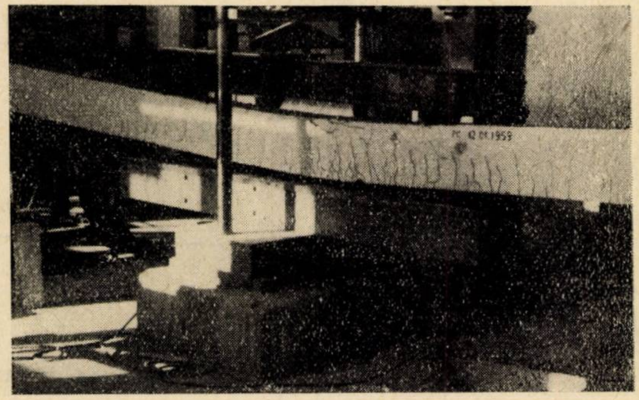


Fig. 9. — Fisurarea după ruperea grinzilor armate cu oțel cu profil periodic laminat la cald.

În încercările de la INCERC, s-a studiat fisurarea din punct de vedere teoretic și experimental în cazul încovoierii pure — urmînd ca în cadrul cercetărilor ce urmează a se efectua în viitor să se extindă studiile și asupra influenței forței tăietoare, a curgerii lente, a încărcării dinamice etc.

Teoria adoptată pentru analiza condițiilor de fisurare are la bază, în general, principiile de calcul admise în N și Tu 123-55 și se încadrează în propunerea pentru calculul fisurării din încovoiere făcută la simpozionul RILEM de la Liège din 1958.

Admițînd o anumită lege de variație a aderenței pe distanța dintre fisuri, se poate calcula această distanță, dacă se consideră că deschiderea fisurii este aproximativ egală cu alungirea medie a armăturii pe porțiunea dintre cele două fisuri. Variația alungirilor și deci și a eforturilor în armătură urmărește în general în lungul grinzii curba de momente ; se observă totuși că apar valori maxime și minime ale alungirilor după cum sînt înregistrate în dreptul fisurilor sau între fisuri. Aceste variații secundare se explică prin faptul că efortul mai mare din dreptul fisurilor se descarcă pe o anumită distanță în beton, datorită aderenței. La distanța $l_f$, la care efortul în beton din zona de influență a armăturii atinge rezistența la întinderea betonului $R_t$, se produce o nouă fisură. Presupunem efortul în beton uniform distribuit pe secțiunea activă a betonului întins $A_{bi}$ cuprinsă în zona de influență a armăturii. În aceste condiții putem obține forța de întindere în beton în momentul fisurării. Egalînd această forță cu forța transmisă prin aderență betonului rezultă distanța între fisuri în momentul fisurării.

La distanțe mari între fisuri cînd diagrama de variație a eforturilor de aderență poate fi asimilată cu un triunghi, coeficientul de formă al acestei diagrame se poate lua egal cu $^1/_2$, iar în cazul fisurilor mai dese admițînd ipoteza unei repartiții parabolice, cu $^2/_3$.

În ceea ce privește secțiunea zonei de influență a armăturii $A_{bi}'$ s-a considerat că aceasta depinde de lățimea secțiunii de beton, acoperirea cu beton, înălțimea axei neutre și în special de raportul dintre aria zonei de influență a fiecărei bare și perimetrul acesteia. Din încercări a rezultat că valoarea acestui raport este invers proporțională cu diametrul barei.

Calculînd distanțele între fisuri în ipotezele arătate mai înainte și comparîndu-le cu valorile obținute prin încercări s-au obținut valori reduse pentru erorile cele mai probabile : $-2{,}5\%$ pentru încercările pe 18 grinzi cu TOR, $+12{,}5\%$ pe 16 grinzi cu PC și $+1{,}5\%$ pe 26 grinzi cu OL 38. Aceste rezultate arată că formulele propuse au o confirmare experimentală, fapt care îndreptățește propunerea de a fi introduse în practica curentă de proiectare a secțiunilor armate cu profile periodice.

Pentru calculul deschiderii fisurilor pe zona de moment constant, s-a admis că deschiderea fisurilor este egală cu alungirea medie a armăturii pe distanța între două fisuri, neglijînd efectele temperaturii, contracției și deformațiile elastice ale betonului.

Notînd cu $\psi$ raportul dintre alungirea medie a armăturii din zona întinsă fisurată și alungirea specifică a armăturii libere, deschiderea fisurii se poate calcula în funcție de acest raport, alungirea armăturii libere și distanța dintre fisuri.

Față de valorile experimentale s-au obținut de asemenea valori reduse ale erorilor celor mai probabile pentru deschiderea de fisură calculată, după cum rezultă : $-6\%$ la încercările pe 18 grinzi cu TOR și $-12\%$ pe 16 grinzi cu PC.

Din încercările efectuate în cadrul INCERC, s-au dedus experimental valorile raportului $\psi$ pe baza alungirilor armăturii măsurate între fisuri și în dreptul fisurilor, în ipoteza că acestea din urmă sînt egale cu alungirile armăturii libere.

În cazul betoanelor cu armături din oțel superior cu profil periodic, au rezultat pentru $\psi$ valori mai reduse decît în cazul armării cu bare netede, datorită conlucrării mai bune cu betonul. Folosind aceste rezultate s-a dedus o expresie teoretică pentru $\psi$ în funcție de efortul în armătură și de procentul de armare ($\alpha = 3\mu n$). Încercările au arătat o bună concordanță a valorilor experimentale cu valorile teoretice după cum rezultă din graficul prezentat pe figura 10. Pentru a aplica calculul la fisurare este necesar să se standardizeze deschiderile limită ale fisurilor pentru diferite condiții de exploatare.

2.1.3. *Rigiditatea.* Economia în consumul de oțel la folosirea oțelurilor cu profil periodic, provine din faptul că pentru grinzi echivalente din punct de vedere al capacității portante, raportul dintre secțiunea armăturii din oțel superior şi din oțel moale ar fi invers proporțional cu raportul limitelor de curgere ale acestor oțeluri. Astfel, se ajunge în situația ca grinzile armate cu oțeluri superioare avînd secțiunea armăturii mai mică şi eforturile unitare respectiv alungirile corespunzătoare la sarcinile de exploatare, mai mari decît în cazul oțelului obişnuit, să devină mult mai flexibile. În aceste situații construcțiile care trebuie să îndeplinească anumite condiții de rigiditate trebuie verificate în ceea ce priveşte săgețile efective ale elementelor supuse la încovoiere.

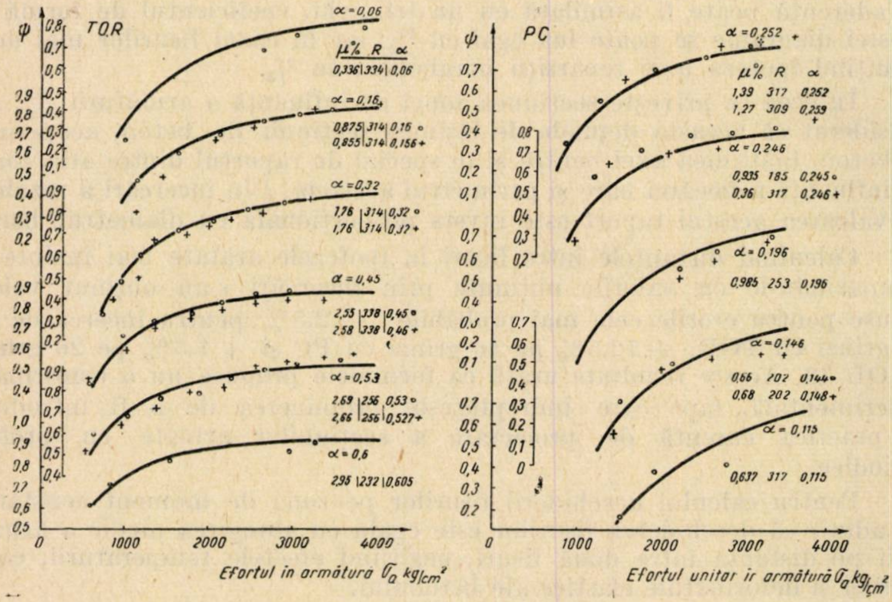


Fig. 10. — Variația coeficientului $\psi = \frac{\varepsilon_{am}}{\varepsilon_a}$ în funcție de efortul în armătură.

Din rezultatele încercărilor efectuate s-au observat pentru grinzi de egală capacitate portantă, la aceleaşi trepte de încărcare, săgeți mai mari cu 30—50 % în cazul armăturii torsionate, şi cu 10—30 % în cazul armăturii cu profil periodic laminată la cald, față de săgețile grinzilor armate cu bare netede.

Pe baza încercărilor efectuate pentru grinzile de secțiune dreptunghiulare armate cu oțeluri superioare cu procente de armare obişnuite s-a putut trece la un calcul teoretic al săgeții la care s-au adoptat ipotezele formulate de prof. V. I. Murașev, admise și în N și Tu 123-55. Spre deosebire de calculul rigidității după prescripțiile sovietice s-au introdus valori ale lui $\psi$ distincte pentru TOR și PC determinate așa cum s-a arătat în paragraful precedent. Erorile medii pătratice ale săgeților astfel calculate față de săgețile determinate prin încercări, au fost de 10,2 % în cazul armării cu TOR, de 26,9 % în cazul armării cu PC și de 10,9 % în cazul grinzilor armate cu bare de secțiune patrată torsionată (după încercări făcute în străinătate) valori destul de reduse față de rezultatele obținute folosind alte formule de calcul.

2.1.4. *Aderența în cazul încovoierii.* Pe lîngă influența pe care o are asupra fisurării și rigidității, aderența influențează și asupra transmiterii eforturilor de la armătură la beton în zonele de ancorare a extremităților barelor supuse sau nu și la acțiunea forțelor tăietoare. De asemenea, importanța aderenței apare la îmbinarea între două bare constituind prin petrecerea lor o aceeași armătură.

Pentru a pune în evidență modul în care influențează aderența, s-a studiat lungimea de ancorare a armăturii întinse din grinzi cu oțel cu profil periodic, atît în zona reazemelor cît și la întreruperea barelor în cîmp. Lungimea necesară de petrecere a fost examinată în cazul înnădirii barelor prin suprapunerea în plan vertical, fără altă legătură, în zona de moment constant. Lungimea de ancorare sau de petrecere s-a considerat suficientă, dacă la cedarea probei s-a putut înregistra curgerea armăturii și nu distrugerea aderenței prin alunecarea armăturii în beton sau prin plesnirea stratului de acoperire.

Din variația alungirii armăturilor cu profil periodic în lungul grinzii, în cazul lungimilor suficiente de ancorare, se observă că deasupra reazemelor nu s-au înregistrat alungiri, ceea ce dovedește că întreg efortul din armătură pînă la reazem s-a transmis betonului prin aderență, neînregistrîndu-se alunecări ale capetelor libere ale extremităților barelor ieșite din beton.

În cazul barelor înnădite prin petrecere se observă că efortul în armătură prezintă un maximum în secțiunea imediat înaintea terminării petrecerii. În această secțiune lucrează în mod defavorabil o singură bară și, în cazul unei lungimi de petrecere suficientă, se produce cedarea prin curgerea acestei bare de armare.

Prevederea de ciocuri la o lungime de petrecere scurtă de 25 d a fost echivalentă cu o sporire a lungimii de petrecere de 20 d, după cum rezultă din compararea cu grinzi armate cu bare torsionate fără ciocuri la petrecere.

În mod indirect aderența influențează asupra eforturilor produse din încovoiere în armătură și în beton, din cauză că o aderență insuficientă are ca urmare alunecarea armăturii ceea ce duce și la o schimbare a capacității portante a grinzii. Astfel, în cazul încercării unei grinzi cu bare torsionate întrerupte în cîmp se poate observa pe figura 11 cum, după alunecarea unei bare insuficient ancorate, alungirile acesteia au rămas aproape neschimbate cu toate că încărcarea a continuat să crească și celelalte bare au ajuns să se rupă în momentul cedării grinzii desigur la o încărcare mai mică decît aceea corespunzătoare dimensiunilor grinzii, mărcii betonului și procentului de armare.

Pentru calculul lungimilor de ancorare, în stadiul actual al încercărilor, s-a admis o formulă simplificatoare în funcție de limita de curgere a armăturii, de marca betonului, de prezența ciocurilor, de suprafața

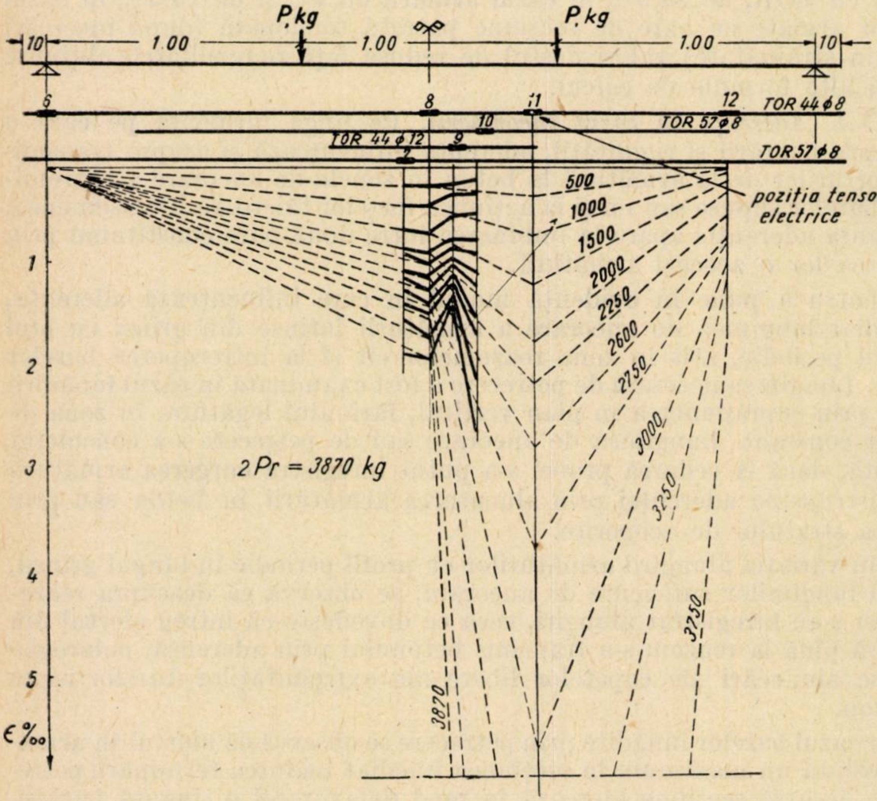


Fig. 11. — Variația alungirilor în lungul barelor de armătură la grinzi cu bare întrerupte în cîmp.

profilată a armăturii și de un coeficient de corecție prin care se ține seama de influența altor factori.

Valorile acestui coeficient de corecție s-au determinat experimental, admițîndu-se ipoteza simplificatoare a unei distribuții uniforme (deși în realitate la barele cu profil periodic aderența variază mai mult sau mai puțin linear), pe baza încercărilor făcute pe probele de smulgere (fig. 1 și 2) și pe grinzi cu bare înnădite prin petrecere. O concluzie similară s-a obținut prin încercări de determinarea aderenței prin încovoiere (fig. 12).

La aceste probe efortul în armătură s-a stabilit pe baza deformațiilor măsurate pe porțiunile de bară descoperite, delimitîndu-se astfel lungimile de ancorare dinspre reazem. În tabela de mai jos se dau valorile coeficientului care arată influenţa altor factori deduse prin încercări, în comparaţie cu valorile propuse în normativul provizoriu.

2.2. *Întinderea centrică.* În legătură cu folosirea oţelurilor superioare la elemente de beton armat supuse la întindere centrică s-au făcut încercări pentru a se stabili comportarea tiranţilor armaţi cu TOR, PC sau OL, folosindu-se prisme armate cu o singură bară. S-au observat ca şi la grinzile încovoiate, aspectul şi evoluţia fisurilor pentru diferite trepte de încărcare. Pe figura 13 se poate compara aspectul fisurilor în faza de rupere pentru tiranţi armaţi cu bare rotunde şi pentru tiranţi armaţi cu bare cu profil periodic laminat la cald. În primul caz (*a*) s-a produs o singură fisură care

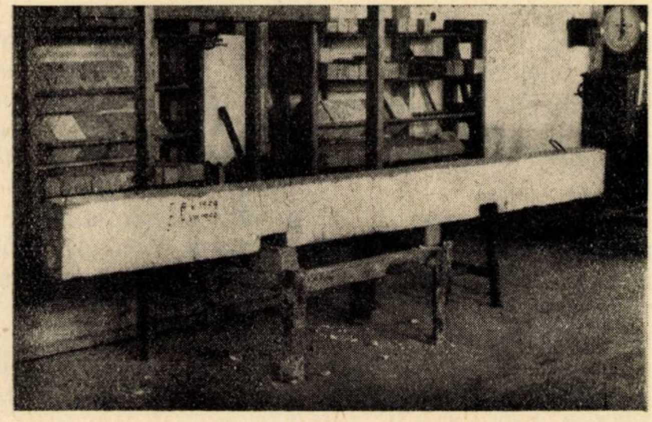
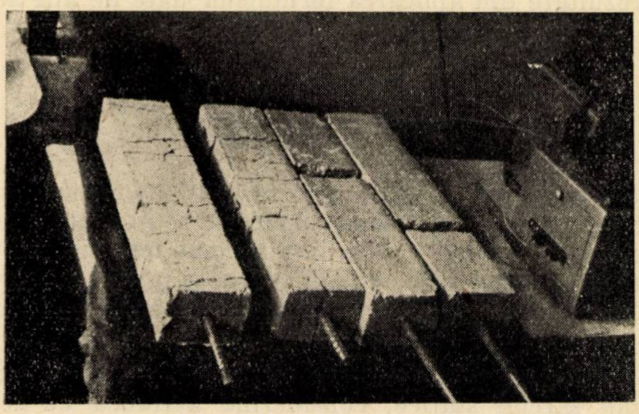


Fig. 12. — Grinzi pentru încercarea aderenţei din încovoiere şi forţe tăietoare.



(b) (a)

Fig. 13. — Aspectul fisurării la tiranţi armaţi cu oţel beton obişnuit sau cu profil periodic laminat la cald.

s-a dezvoltat puternic prin epuizarea slabei aderențe a oțelului neted și prin micșorarea secțiunii barei la eforturi ridicate, fapt care a accentuat alunecarea barei în beton. În cazul al doilea (*b*) al tiranților armați cu oțel PC, au apărut fisuri dese transversale care au avansat pe măsura încărcării cu ramificații în T în lungul barei datorită plesnirii stratului de acoperire.

În cazul întinderii centrice la calculul distanței între fisuri, s-a admis ca și în cazul încovoierii variația lineară a aderenței pe distanța între fisuri. De asemenea, s-a luat în considerare eficiența sporită a eforturilor de aderență, datorită perimetrului eficace al barelor cu profil periodic mult mai avantajos pentru încleștarea în beton față de perimetrul barelor cu suprafață netedă.

În cazul întinderii centrice la calculul distanței între fisuri s-au stabilit pe aceleași criterii admise și în cazul încovoierii formulele de calcul a distanței între fisuri și a măririi fisurilor. Din examinarea rezultatelor experimentale rezultă că erorile relative între valorile calculate și cele determinate prin măsurători variază între $-12\%$ și $+6\%$.

Pentru calculul deschiderii fisurilor s-a avut în vedere alungirea medie a betonului între fisuri, admițînd-o în mod acoperitor egală cu $0{,}2\,‰$ și considerîndu-se $\psi = 1$.

Erorile relative rezultate prin raport cu datele experimentale au variat în acest caz între $-20\%$ și $+35\%$, aceste valori fiind mai reduse decît acelea rezultate din aplicarea formulelor date de alți autori în literatură.

## 3. CONCLUZII

Cercetările ce se efectuează în cadrul INCERC pentru studiul betoanelor armate cu oțeluri superioare urmează a fi continuate. În etapa actuală, pe baza materialului prezentat succint mai sus, se pot formula următoarele concluzii care s-au avut în vedere și pentru elaborarea normativului de calcul aplicabil elementelor din beton armate cu oțeluri superioare :

1) Din confruntarea datelor teoretice cu rezultatele experimentale rezultă că, sub sarcini statice, considerînd acțiunea de scurtă durată calculul la rupere în vigoare în țara noastră dă rezultate satisfăcătoare pentru grinzile armate cu bare cu profil periodic. Ecarturile față de valorile teoretice sînt de același ordin de mărime ca și acelea înregistrate pentru oțelurile obișnuite.

2) Încercările au confirmat că, pentru grinzile armate cu oțeluri superioare cu profil periodic este necesară verificarea rigidității și fisurării la sarcina de exploatare, pentru a se putea folosi cît mai deplin caracteristicile fizico-mecanice avantajoase ale acestor oțeluri.

3) Limitele de curgere de calcul, așa cum rezultă din cercetările statistice pe oțeluri, pot fi folosite numai la acele construcții care res-

pectă condițiile de rigiditate și de deschidere maximă a fisurilor. Pentru a putea folosi mai economic oțelul cu o limită de curgere mai ridicată este necesar să se adopte forme de secțiuni cu momente de inerție mari, procente de armare mici, mărci ridicate de beton.

Este necesar de asemenea să se limiteze deschiderea maximă a fisurii ce se poate admite la diferite construcții și condiții de exploatare. În funcție de această deschidere și de factorii care o influențează mai mult, cum ar fi : procentul de armare, repartiția, diametrul și profilul armăturilor și marca betonului, se va putea stabili un criteriu practic de apreciere a cazurilor la care se impune verificarea la fisurare.

4) În ceea ce privește lungimile de ancorare și de petrecere în cazul oțelurilor superioare spre deosebire de oțelurile obișnuite este nevoie să se prevadă lungimi de ancorare și de petrecere nu numai în funcție de diametrul armăturii, ci și de calitatea oțelului și a betonului.

5) Pentru a se obține date necesare trecerii la o formă superioară de dimensionare a secțiunilor de beton armate cu profile periodice și anume pentru a se trece în acest sector la calculul la stări limită, trebuie ca studiile viitoare să pună în evidență modul de lucru al armăturilor siuperioare cu și fără palier de curgere, în scopul stabilirii valorilor coeficenților condițiilor de lucru în cazul oțelurilor noastre.

*Tabelă*

**Lungimea de ancorare** $l_a = c\frac{\sigma_c}{R}d$

| Oțelul | Diametrul d | Valorile coeficientului c | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Din încercări de : | | | | din normativ |
| | | I Aderență din smulgere | II Aderență din smulgere | Aderență din încovoiere | Pe grinzi cu petreceri | |
| TOR | 8 | 2 | 2 | — | 1,91 ;1,75 ; 2,6 ; 1,94 | 2,5 |
| | 8 cu cioc | — | — | — | 1,04 | 1,5 |
| | 12 | 3 ; 2 | 1,9 ; 2,3 | 1,36 ; 1,85 ; 1,81 | 3,5 *) | 2,5 |
| | 18 | 3 | 2 | — | 2,38 ; 2,28 | — |
| | 20 | — | — | 2,7 | — | — |
| | 20 cu cioc | — | — | 1,2 ; 1,6 | — | 1,5 |
| PC | 17 | 2 | 1,7 | — | 2,96 ; 2,43 | 3 |
| | 21 | — | — | 1,3 ; 1,27 ; 1,9 | 3,02 | 3 |
| | 25 | — | 3,1 | — | 2,08 ; 3,20 | 3 |

*) Două petreceri.

6) Studiile viitoare vor arăta dacă prin suprapunerea efectului de oboseală sau de curgere lentă se mai aplică reducerea secțiunilor armăturilor superioare, exact invers proporțional cu creşterea limitelor de curgere rezultată pe baza capacității portante echivalente.

*Primită la redacție la 25 ianuarie 1960; o nouă versiune la 25 februarie 1961.*

# ОБ ОДНОМ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКОМ СВОЙСТВЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОНОВ, АРМИРОВАННЫХ ВЫСОКОКАЧЕСТВЕННЫМИ СТАЛЯМИ

## РЕЗЮМЕ

Описываются типы высококачественных сталей, применяемых для армирования, обычно используемых в РНР бетонов и приводятся свойства этих сталей.

Испытания балок со стальной арматурой периодического профиля, проведенные в лаборатории INCERC (Научно-исследовательский строительно-экономический институт) Бухарест, подтверждают то, что кроме расчета на разрыв необходимо также проверить жесткость и трещинообразование железобетонов с арматурой из таких сталей.

Приводятся и обосновываются принципы расчета жесткости, трещинообразования и анкерирования, предложенные в проекте норм для использования высококачественных сталей периодического профиля.

Проведенные лабораторные проверки выявили соответствие между теоретическими и экспериментальными значениями.

## ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Призмы для испытания прилипания выдергиванию скрученных стальных стержней с двумя или четырьмя ребрами.

Рис. 2. — Призмы для испытания прилипания выдергиванию стальных стержней периодического профиля, полученного горячей прокаткой.

Рис. 3. — Кривые напряжение-деформация для различных высококачественных сталей.

Рис. 4. — Кривые частоты относительных погрешностей моментов разрыва.

Рис. 5 *a*, *b*, *c*. — Относительная несущая способность испытанных балок, армированных стержнями TOR, PC или OL.

Рис. 6. — Разрыв балок, слабо армированных скрученной сталью.

Рис. 7. — Разрыв балок, сильно армированных скрученной сталью.

Рис. 8. — Совместная работа арматур разных качеств в одном и том же сечении.

Рис. 9. — Трещинообразование после разрыва балок, армированных сталью периодического профиля, полученного горячей прокаткой.

Рис. 10. — Изменение коэффициента $\psi=\frac{\varepsilon_{am}}{\varepsilon_a}$ в зависимости от усилия в арматуре.

Рис. 11. — Изменение удлинений вдоль арматурных стержней у балок с прерванными стержнями в поле.

Рис. 12. — Балки для испытания на применение от изгиба и срезывающей силы.

Рис. 13. — Картина трещинообразования распорок, армированных обыкновенной арматурной сталью или сталью периодического профиля, полученного горячей прокаткой.

# SUR CERTAINES PROPRIÉTÉS PHYSICO-MÉCANIQUES DES BÉTONS ARMÉS D'ACIERS À HAUTE RÉSISTANCE

## RÉSUMÉ

Les auteurs présentent les types d'aciers à haute résistance utilisés pour les ouvrages en bétons armés dans la République Populaire Roumaine, tout en indiquant les propriétés de ces aciers.

Les essais des poutres en béton armées de barres profilées, effectués au laboratoire de l'I.N.C.E.R.C. (Institut de Recherches pour Construction et Economie des Constructions), confirment la nécessité de vérifier la rigidité et la formation des fissures des éléments fléchis armés de tels aciers, en même temps que l'application du calcul à la rupture.

Les auteurs indiquent et démontrent les principes sur lesquels sont fondés les méthodes de calcul de la rigidité, de la fissuration et de l'ancrage, proposés par le projet de prescriptions pour l'emploi des aciers profilés à haute résistance.

Les vérifications faites au laboratoire ont prouvé la correspondance entre les valeurs théoriques et les résultats des essais.

## EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Eprouvettes prismatiques pour l'essai d'adhérence à l'arrachement des barres d'acier TOR à 2 ou 4 nervures.

Fig. 2. — Eprouvette prismatique pour l'essai d'adhérence à l'arrachement des barres crénelées.

Fig. 3. — Diagrammes d'allongement de divers aciers à haute résistance.

Fig. 4. — Courbes de fréquence des erreurs relatives des moments de rupture.

Fig. 5 *a*, *b*, *c*. — Le moment réduit en fonction du pourcentage réduit pour des poutres armées de barres en acier TOR, crénelé ou lisse.

Fig. 6. — Mode de rupture des poutres à faibles pourcentages d'acier TOR.

Fig. 7. — Mode de rupture des poutres à forts pourcentages d'acier TOR.

Fig. 8. — Comportement de divers types d'armatures contenues dans une même section.

Fig. 9. — Aspect de la fissuration des poutres rompues, armées de barres crénelées.

Fig. 10. — Variation du coefficient $\psi = \frac{\varepsilon_{am}}{\varepsilon_a}$ en fonction des contraintes dans l'acier.

Fig. 11. — Variation des allongements le long des barres d'armatures, dans les poutres à barres interrompues.

Fig. 12. — Poutres d'essai d'adhérence sollicitées par moment fléchissant et effort tranchant.

Fig. 13. — Aspect de la fissuration des tirants armés d'acier-béton ordinaire ou d'acier crénelé.

## BIBLIOGRAFIE

1. MURAȘOV V. I., Rezistența la fisurare, rigiditatea și rezistența betonului armat. Mostroizdat. Moscova, 1950.
2. * * * Simpozion asupra aderenței și formării fisurilor în betonul armat. Stockholm, 1957 (Vol. I, II, III).
3. * * * Normativ pentru utilizarea oțelului cu profil periodic. 03.15.60. Bul. CSCAS *5*. martie (1960).
4. AVACOV A., Oțeluri cu profil periodic întinse la rece și folosirea lor la betonul armat și precomprimat. Al II-lea congres internațional pentru construcții-montaj. Dresda, 1957.
5. NEMIROVSCHI I. M. și NICHITIN N. V., Despre coeficientul $\psi$ necesar în calculul rigidității elementelor de beton armat. Beton i jelezobeton nr. 2 1958.
6. * * * Simpozion despre metodele de proiectare a construcțiilor, Moscova, 1958.
7. * * * Norme și condiții tehnice pentru proiectarea elementelor de construcții din beton și beton armat (N și TU 123—155). Comitetul de Stat pentru Construcții al Cons. Miniștri U.R.S.S.
8. * * * Simpozion despre oțeluri speciale pentru beton armat și beton precomprimat, Liège, 1958.

# STUDII

## ELASTICITATE—PLASTICITATE—REZISTENŢA MATERIALELOR

# PROPRIETĂŢI STATISTICE ALE CAPACITĂŢII PORTANTE A STRUCTURILOR STATIC NEDETERMINATE

DE

H. SANDI [1]

## 1. INTRODUCERE

Obiectul lucrării este o formulare a problemei coeficientului de omogenitate pentru structurile de rezistenţă static nedeterminate ideal elastoplastice. Această formulare permite o evaluare, mai riguroasă decît cea efectuată pînă în prezent, a siguranţei structurii.

Definiţia coeficientului de omogenitate şi modul în care el apare în metodica de dimensionare a elementelor de rezistenţă, pot fi urmărite cu uşurinţă pe un caz simplu, expus pentru a se distinge mai uşor noţiunile şi notaţiile din dezvoltările ulterioare.

Fie consola de secţiune constantă din figura 1 de deschidere $L$, acţionată de sarcina $P^\circ$, al cărei moment limită în secţiunea de încastrare are valoarea $X$. Presupunînd că sarcina variază proporţional cu un coeficient de supraîncărcare, $\nu$, ($P = \nu P^\circ$) condiţia ca această consolă să nu ajungă în stadiul limită de pierdere a capacităţii portante revine la relaţia

$$\nu < \frac{X}{P^\circ L} = aX; \qquad a = \frac{1}{P^\circ L}. \qquad (1)$$

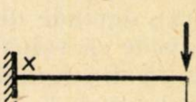


Fig. 1

Valoarea limită $\bar{\nu}$ a coeficientului de supraîncărcare $\bar{\nu}$, care corespunde sarcinii de rupere $P^r$, este dată de egalitatea

$$\bar{\nu} = aX; \quad P^r = \bar{\nu} P^\circ. \qquad (2)$$

În general, momentul limită $X$ al unei secţiuni nu poate fi cunoscut exact, deoarece calitatea materialului şi forma geometrică a secţiunii au un caracter de incertitudine, neputînd fi determinate precis pentru elementul de rezistență studiat. Rezultă necesitatea de a se considera mărimea $X$ ca o variabilă aleatoare. Cu privire la mărimile $P^\circ$ și $L$ se va presupune, pentru simplitate, că sînt precis determinate. În aceste condiții, coeficientul de supraîncărcare limită, $\bar{\nu}$, este și el o variabilă aleatoare, proporțională cu $X$ (vezi relația (2)).

---

[1] INCERC (Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor).

Problema siguranței consolei se pune în acest caz în modul următor : să se determine valoarea admisibilă $\bar{\nu}_\varepsilon$ a coeficientului $\nu$, care asigură o probabilitate suficient de mare, egală cu $1 - \varepsilon$, de satisfacere a relației (1). În scopul determinării valorii $\bar{\nu}_\varepsilon$ este necesară cunoașterea funcției de repartiție $F(X)$ a variabilei aleatoare $X$, sau a densității de repartiție $\rho(X)$ a acestei variabile. Cu ajutorul acesteia, se determină valoarea medie $M(X)$, deviația standard $\sigma(X)$ și coeficientul de variație $c(X)$, ale variabilei aleatoare $X$ prin relațiile

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X\, dF(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X\, \rho(X)\, dX.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} [X - M(X)]^2 .\, dF(X)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} [X - M(X)]^2\, \rho(X)\, dX},$$

$$c(X) = \frac{\sigma(X)}{M(X)}. \qquad (3)$$

Valoarea $X_\varepsilon$ a variabilei $X$ care corespunde unei probabilități suficient de mici, $\varepsilon$, de satisfacere a relației $X < X_\varepsilon$, deci soluția ecuației $F(X_\varepsilon) = \varepsilon$, poate fi exprimată cu ajutorul mărimilor statistice din (3), sub forma

$$X_\varepsilon = M(X) - \gamma_\varepsilon(X)\,\sigma(X) = M(X)\,[1 - \gamma_\varepsilon(X)\,c(X)] = k_\varepsilon(X)\,M(X), \qquad (4)$$

unde $k_\varepsilon(X) = 1 - \gamma_\varepsilon(X)\,c(X)$.

Numărul de deviații standard, $\gamma_\varepsilon(X)$, care asigură satisfacerea relației (4), depinde de expresia funcției de repartiție $F(X)$.

Se vede că valoarea admisibilă a momentului din secțiune, egală cu $X_\varepsilon$, rezultă din înmulțirea valorii medii $M(X)$ a variabilei $X$ cu coeficientul subunitar $k_\varepsilon(X)$, numit coeficient de omogenitate.

Valoarea admisibilă $\bar{\nu}_\varepsilon$ a coeficientului $\nu$ va fi deci dată de expresia

$$\bar{\nu}_\varepsilon = a\, k_\varepsilon(X)\, M(X) = k_\varepsilon(\bar{\nu})\, M(\bar{\nu});\ k_\varepsilon(\bar{\nu}) = k_\varepsilon(X). \qquad (5)$$

În acest caz coeficienții de omogenitate ai variabilelor $X$ și $\bar{\nu}$ sînt egali.

În cele de mai sus a fost prezentată metodica de dimensionare a unui element de construcție simplu, pe baza unei scheme semiprobabilistice, conisiderînd drept variabilă aleatoare numai caracteristica de rezistență a structurii, nu și celelalte elemente. Din aceste considerații rezultă că, în evaluarea statistică a caracteristicii de rezistență $X$ a structurii intervin în principiu valoarea medie $M(X)$ și coeficientul de omogenitate $k_\varepsilon(X)$ ale acestei mărimi.

Întotdeauna, în dimensionarea pe baze statistice a unei structuri intervine pentru caracteristica de rezistență a structurii o problemă de felul celei prezentate mai sus.

În cazul cînd se admite ca stadiu limită atingerea limitei de curgere în punctul cel mai solicitat, problema apare pentru efortul unitar extrem din secțiunea periculoasă.

În cazul cînd se admite ca stadiu limită atingerea efortului limită al unei secțiuni (admițînd redistribuția plastică pe secțiune), problema apare pentru efortul limită al secțiunii respective.

În cazul cînd se admite ca stadiu limită intrarea în faza de mecanism a unei părți a structurii (admițînd redistribuția plastică pe întinderea întregii structuri), problema apare pentru capacitatea portantă a părții structurii ajunse în faza de mecanism.

Aplicarea consecventă a principiilor de dimensionare probabilistică, în spiritul teoriei stărilor limită, cere introducerea în calcule de dimensionare a valorii medii și coeficientului de omogenitate ale uneia din cele trei mărimi enumerate, efort unitar limită, efort limită al secțiunii, sau capacitate portantă a structurii, după cum proprietățile fizice ale structurii fac ca una din aceste mărimi să fie caracteristică pentru starea limită.

Rezultă necesitatea ca, dacă se cunosc proprietățile statistice ale caracteristicii de rezistență a materialului de construcție obținute din încercările pe serii de epruvete, să se calculeze de aici valoarea medie și coeficientul de omogenitate pentru acea mărime din cele trei enumerate mai sus, care este caracteristică pentru intrarea structurii în stadiul limită.

În lucrare se expune calculul acestor valori pentru capacitatea portantă a structurii alcătuite din material ideal elastoplastic, pe baza valorilor respective, presupuse cunoscute, pentru secțiunile critice.

## 2. PROPRIETĂȚILE STATISTICE ALE CAPACITĂȚII PORTANTE A STRUCTURII

În cele de mai jos se va studia comportarea în stadiul limită a unei structuri ideal elastoplastice (în sensul că se poate accepta că relația dintre deplasarea relativă și efortul dintr-o secțiune critică respectă diagrama lui Prandtl, iar redistribuția eforturilor pe întinderea structurii este totală). În aceste condiții, sînt caracteristice pentru capacitatea portantă a structurii eforturile limită $X_i$ $(i = 1 \ldots n)$ din secțiunile critice. Avînd în vedere imposibilitatea cunoașterii exacte apriori a valorilor $X_i$, se va presupune că aceste mărimi sînt variabile aleatoare. Capacitatea portantă a structurii este o funcție de mărimile $X_i$ și, ca atare, va avea și ea un caracter aleator.

În cele de mai jos se vor determina caracteristicile statistice ale capacității portante pe baza caracteristicilor statistice ale ansamblului celor $n$ variabile aleatoare $X_i$.

Se va presupune că structura considerată este încărcată de un sistem de $m$ sarcini, $P_k$ $(k = 1 \ldots m)$, variind proporțional cu un parametru $\nu$

$$P_k = \nu \overset{\circ}{P}_k \cdot \qquad (6)$$

În faza de mecanism plastic, cînd se neglijează deformarea elastică a structurii, atît deplasările $\Delta_k$ prin care sarcinile $P_k$ produc lucru mecanic, cît și deplasările relative ale secțiunilor critice, $\theta_i$, sînt funcții de un singur parametru, $\mu$. Valoarea limită a sarcinilor $P_k$, $P_k^r$ (corespunzătoare valorii $\bar{\nu}$ a coeficientului de supraîncărcare $\nu$) se determină (neconsiderînd efecte de ordinul II) din ecuația energetică

$$\sum_k^{1,m} P_k^r \frac{\partial \Delta_k}{\partial \mu}\bigg|_{\mu=0} = \sum_i^{1,n} X_i \frac{\partial \theta_i}{\partial \mu}\bigg|_{\mu=0}. \qquad (7)$$

În locul ecuației (7) se poate scrie o formulă care dă valoarea limită $\bar{\nu}$,

$$\bar{\nu} = \sum_i^{1,n} a_i X_i\,; \qquad a_i = \frac{1}{\sum_k^{1,m} P_k^0 \frac{\partial \Delta_k}{\partial \mu}\Big|_{\mu=0}} \cdot \frac{\partial \theta_i}{\partial \mu}\bigg|_{\mu=0}. \qquad (8)$$

Pentru motive de simplitate se va presupune, ca și la punctul 1, că mărimile $a_i$ sînt determinate, iar mărimile $X_i$ sînt aleatoare.

Considerarea izolată a cîmpurilor de probabilitate corespunzătoare fiecărei variabile aleatoare $X_i$, conduce la definirea funcțiilor de repartiție $F_i(X_i)$ și de aici a valorilor medii $M_i$, deviațiilor standard $\sigma_i$ și coeficienților de variație $c_i$. În spațiul produs $\{X_i\}$, funcțiile $F_i(X_i)$ joacă rolul de funcții de repartiție marginale.

În vederea studiului variabilei $\bar{\nu}$ ar trebui calculată o probabilitate în spațiul produs al spațiilor asociate variabilelor $X_i$. Practic, este suficientă cunoașterea valorilor medii și tensorului de corelație pentru aceste variabile, pentru a se determina pe baza lor valoarea medie și deviația standard ale mărimii $\bar{\nu}$, în loc de a se calcula funcția de repartiție a variabilei $\bar{\nu}$. Dacă se notează cu $\rho(X_1 \ldots X_n)$ densitatea de repartiție în spațiul $\{X_i\}$, atunci valoarea medie, deviația standard și coeficientul de variație ale lui $\bar{\nu}$ vor avea, respectiv, expresiile

$$M(\bar{\nu}) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i^{1,n} a_i X_i \rho(X_1, \ldots X_n)\, dX_1 \ldots dX_n =$$

$$= \sum_i^{1,n} a_i \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} X_i \rho(X_1, \ldots X_n)\, dX_1 \ldots dX_n = \sum_i^{1,n} a_i M_i,$$

$$\sigma(\bar{\nu}) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_i^{1,n} a_i (X_i - M_i)\right]^2 \rho(X_1, \ldots X_n)\, dX_1 \ldots dX_n} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i,j}^{1,n} a_i a_j \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} (X_i - M_i)(X_j - M_j) \rho(X_1, \ldots X_n)\, dX_1 \ldots dX_n} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i,j}^{1,n} a_i a_j m_{ij}} = \sqrt{\sum_i^{1,n} a_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i<j}^{1,n} a_i a_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j}\,,$$

unde

$$m_{ii} = \sigma_i^2 \,; \; m_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j \,; \; |\rho_{ij}| \leqslant 1,$$

$$c(\bar{\nu}) = \frac{\sigma(\bar{\nu})}{M(\bar{\nu})} = \frac{\sqrt{\sum\limits_{i}^{1,n} a_i^2\sigma_i^2 + 2\sum\limits_{i<j}^{1,n} a_i a_j \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j}}{\sum\limits_{i}^{1,n} a_i M_i} = \tag{9}$$

$$= \frac{\sqrt{\sum\limits_{i}^{1,n} a_i^2 c_i^2 M_i^2 + 2\sum\limits_{i<j}^{1,n} a_i a_j \rho_{ij} c_i c_j M_i M_j}}{\sum\limits_{i}^{1,n} a_i M_i}.$$

Se vede că expresia valorii medii $M(\bar{\nu})$ este o formă liniară cu coeficienții $a_i$ de valorile medii $M_i$ și că în expresia deviației standard $\sigma(\bar{\nu})$ intervin pe lîngă deviațiile standard $\sigma_i$ și coeficienții de corelație $\rho_{ij}$ ai variabilelor $X_i$.

Dacă se determină valoarea admisibilă $\bar{\nu}_\varepsilon$ prin condiția ca să existe o probabilitate egală cu $1 - \varepsilon$ ca structura să reziste, deci se adoptă valoarea dată de ecuația $F(\bar{\nu}_\varepsilon) = \varepsilon$ această valoare se poate exprima cu ajutorul valorii medii $M(\bar{\nu})$ și al unui coeficient de omogenitate, $k_\varepsilon(\bar{\nu})$, ca și în formula (5), cu observația că de data aceasta coeficientul de omogenitate $k_\varepsilon(\bar{\nu})$ nu mai este egal cu acela al unei variabile aleatoare $X_i$, ci este dat de formula

$$k_\varepsilon(\bar{\nu}) = 1 - \gamma_\varepsilon(\bar{\nu}) \cdot c(\bar{\nu}), \tag{10}$$

unde coeficientul $c(\bar{\nu})$ se determină din relațiile (9), iar numărul de deviații standard, $\gamma_\varepsilon(\bar{\nu})$, se determină pe baza expresiei funcției de repartiție $F(\bar{\nu})$.

## 3. DISCUȚIE ASUPRA COEFICIENTULUI DE OMOGENITATE AL STRUCTURII

În evaluarea capacității portante a structurii apar deci drept caracteristici statistice factorii formulei (5), adică valoarea medie $M(\bar{\nu})$ și coeficientul de omogenitate $k_\varepsilon(\bar{\nu})$.

Coeficientul de omogenitate $k_\varepsilon(\bar{\nu})$ este o proprietate a întregii structuri, fiind determinat de caracteristicile statistice ale ansamblului eforturilor limită din secțiunile critice.

Pentru a se compara coeficientul de omogenitate al structurii cu coeficienții de omogenitate ai secțiunilor, se va face ipoteza că toți coeficienții $\gamma_\varepsilon(X_i)$ sînt egali între ei și egali cu $\gamma_\varepsilon(\bar{\nu})$, că toți coeficienții de variație $c_i$ sînt egali între ei, că variabilele aleatoare $X_i$ sînt necorelate și că mărimile $a_i M_i$ sînt egale între ele. Rezultă din relațiile (9) expresia coeficientului $c(\bar{\nu})$

$$c(\bar{\nu}) = \frac{1}{\sqrt{n}} c_i, \tag{11}$$

care arată că variabilitatea coeficientului $\bar{\nu}$ este mult mai redusă decît aceea a variabilelor $X_i$. Pentru a se evalua efectul relației (11) asupra coeficientului de omogenitate, este suficient să se observe că, în ipotezele de mai sus, există relația

$$\frac{1-k_\varepsilon(\bar{\nu})}{1-k_\varepsilon(X_i)}=\frac{1}{\sqrt{n}}, \tag{12}$$

deci, spre exemplu în cazul existenței a patru secțiuni plastificate (vezi fig. 2), dacă coeficientul de omogenitate al secțiunii este egal cu 0,6, atunci coeficientul de omogenitate al structurii este egal cu 0,8, fapt care pune în evidență existența unor mari rezerve de siguranță. Cu alte cuvinte, structura are față de secțiune un spor de omogenitate exprimat prin funcția, întotdeauna supraunitară, $\frac{k_\varepsilon(\bar{\nu})}{k_\varepsilon(X_i)}$.

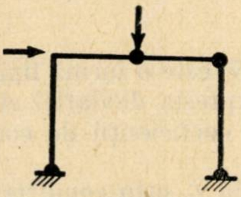


Fig. 2

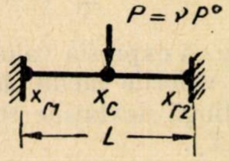


Fig. 3

Exustența unor coeficienți de corelație $\rho_{ij}$ pozitivi reduce sporul de omogenitate al structurii față de secțiune, putîndu-l reduce în cazul limită $\rho_{ij}=1$ la unitate (datorită tendinței de apariție simultană a alterărilor în toate secțiunile), comparativ cu cazul cînd variabilele $X_i$ sînt necorelate. În schimb, existența unor coeficienți de corelație negativi ridică sporul de omogenitate, putînd aduce în cazul limită coeficientul $k_\varepsilon(\bar{\nu})$ la unitate (datorită tendinței de compensare a alterărilor din secțiunile plastificate).

Această tendință de îmbunătățire a omogenității este unul din factorii care explică de ce unele construcții executate din materiale cu omogenitate foarte slabă nu dau totuși loc la accidente.

Un alt exemplu care ilustrează considerațiile de mai sus este acela al grinzii dublu încastrate din figura 3. Coeficientul de supraîncărcare limită este dat de expresia

$$\bar{\nu}=\frac{X_{r1}+X_{r2}+2X_c}{\frac{P^\circ L}{2}}. \tag{13}$$

Se vor admite următoarele ipoteze în calcul :

1) Coeficienții de variație ai celor trei variabile aleatoare $X_{r1}$, $X_{r2}$ și $X_c$ sînt egali, avînd valoarea $c(X)$ ;

2) Valorile medii ale lui $X_{r1}$ şi $X_{r2}$ sînt ambele egale cu $M_r$ (valoarea medie a lui $X_c$ este egală cu $M_c$);

3) Coeficienţii de corelaţie între $X_{r1}$ şi $X_c$ şi între $X_{r2}$ şi $X_c$ sînt ambii egali cu $\rho_{rc}$ (coeficientul de corelaţie între $X_{r1}$ şi $X_{r2}$ este egal cu $\rho_{rr}$).

În aceste condiţii rezultă din aplicarea relaţiei (9) relaţia

$$\psi = \frac{c(\bar{\nu})}{c(X)} = \frac{\sqrt{2M_r^2(1+\rho_{rr}) + 8\,M_r M_c \rho_{rc} + 4\,M_c^2}}{2(M_r + M_c)}. \tag{14}$$

Dacă se notează $\lambda = \frac{M_r}{M_c}$, se obţine pentru raportul de reducere a variabilităţii, $\psi$, expresia

$$\psi = \frac{c(\bar{\nu})}{c(X)} = \frac{\sqrt{4 + 8\lambda\rho_{rc} + 2\lambda^2(1+\rho_{rr})}}{2(1+\lambda)}.$$

Reprezentînd variaţia lui $\psi$ în planul $(\rho_{rr}, \rho_{rc})$, pentru cîteva valori ale lui $\lambda$, se obţin diagramele din figura 4.

Valorile coeficientului $\psi$ de reducere a variabilităţii indică modul în care omogenitatea grinzii este îmbunătăţită, comparativ cu aceea a secţiunilor.

## 4. CONCLUZII

În limitele ipotezelor admise (toate mărimile care intervin în definirea coeficienţilor $a_i$ din relaţia (8) — forma structurii, poziţia secţiunilor critice, poziţia sarcinilor, valorile $P_k^0$ ale sarcinilor — sînt perfect determinate, structura este ideal elastoplastică, nu se consideră efecte de ordinul II şi numai eforturile limită $X_i$ sînt aleatoare), relaţiile (9) şi (10) de evaluare a omogenităţii structurii sînt întotdeauna valabile. Aplicarea relaţiilor amintite constituie singura cale consecventă de determinare a coeficientului de omogenitate, în vederea dimensionării acestor structuri pe baza concepţiei probabilistice a teoriei stărilor limită.

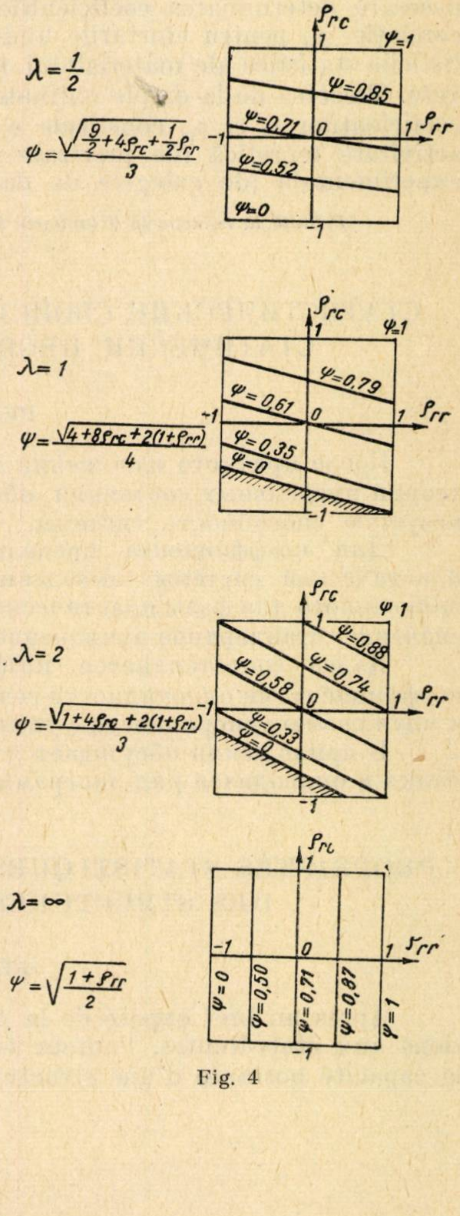


Fig. 4

În realitate forma structurii, poziția articulațiilor plastice, poziția și valorile sarcinilor au și ele un caracter de incertitudine și numai considerarea unui cîmp de probabilitate reprezentativ pentru întreaga complexitate a fenomenului poate să conducă la relații avînd o bază probabilistică completă. În lumina acestor considerații abordarea semiprobabilistică a problemei siguranței structurii, efectuată în lucrare, are un caracter calitativ, punînd în evidență importantul aport pe care poate să-l aibă pentru îmbunătățirea omogenității structurii existența în stadiul limită a mai multor secțiuni plastificate.

Rămînînd în cadrul ipotezelor admise în prezenta lucrare, apare necesară determinarea coeficienților de variație $c_i$ și a coeficienților de corelație $\rho_{ij}$ pentru eforturile limită $X_i$, atunci cînd se cunosc caracteristicile statistice ale materialului, rezultate din serii de încercări pe epruvete. Trecerea de la datele obținute pe serii de epruvete la determinarea coeficienților $c_i$ și $\rho_{ij}$ constituie o problemă dificilă, care cere o largă activitate teoretică (de precizare a modelului matematic de calcul) și experimentală (de culegere de date statistice).

*Primită la redacție la 9 ianuarie 1960; o nouă versiune la 25 februarie 1961*

## СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

### РЕЗЮМЕ

После краткого изложения методики расчета сечений на основе теории предельных состояний, обсуждаются элементы, определяющие несущую способность системы.

Для коэффициента предельной перегрузки идеально упруго-пластической системы (выведенного из энергетического уравнения, написанного для фазы пластического механизма) вычисляются среднее значение, стандартное отклонение и коэффициент изменения.

Далее сопоставляется коэффициент однородности системы с коэффициентами однородности сечений, причем выявляется стремление к улучшению однородности с увеличением числа критических сечений.

В приложении обсуждается случай заделанной по обеим концам балки и приводится ряд диаграмм.

## PROPRIÉTÉS STATISTIQUES DE LA CAPACITÉ PORTANTE DES STRUCTURES HYPERSTATIQUES

### RÉSUMÉ

Après un bref exposé de la méthode de dimensionnement des sections aux états-limites, l’auteur étudie les éléments déterminants pour la capacité portante d’une structure.

Il calcule la moyenne, la déviation standard et le coefficient de variation du coefficient de surcharge limite d'une structure parfaitement élasto-plastique (qu'il déduit de l'équation énergétique établie pour la phase de mécanisme plastique).

Ensuite, il compare le coefficient d'homogénéité de la structure avec les coefficients d'homogénéité des sections et fait ressortir que l'homogénéité tend à s'améliorer lorsque le nombre des sections critiques augmente.

Comme application, l'auteur discute le cas d'une poutre doublement encastrée, pour lequel il présente plusieurs diagrammes.

## BIBLIOGRAFIE

1. V. A. **Baldin**, I. I. **Goldenblat**, V. M. **Kocenov**, M. I. **Pildis**, K. E. **Thal**, *Calculul construcţiilor la stările limită.* ESAC, 1953.
2. O. **Onicescu**, G. **Mihoc** şi colaboratori, *Calculul probabilităţilor şi aplicaţii.* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1956.
3. A. P. **Ржаницин**, *Метод определения допускаемых нагрузок на сооружения.* Сборник Исследовательные работы по инженерным конструкциям, **II**, Стройиздат, Москва, 1949.
4. — *Расчет сооруженийс учетом пластических свойств материалов.* ГИЛСА Москва, 1954.
5. A. R. **Rjanitin**, *Theoretical bases and perspectives of development of design methods of building structures.* Comisia de proiectare inginerească a Consiliului internaţional pentru construcţii, Moscova, 1958.

# STUDII

## UNGERE — FRECARE — UZURĂ

# CALCULUL LAGĂRELOR CU ALUNECARE, FUNCȚIONÎND ÎN REGIM TURBULENT

DE

V. N. CONSTANTINESCU

### 1. CONDIȚII DE APARIȚIE A REGIMULUI DE FUNCȚIONARE TURBULENT

Regimul turbulent apare în funcționarea lagărelor la turații mari, la lagăre de dimensiuni foarte mari sau în cazul utilizării în calitate de lubrifiant a unui lichid cu viscozitate cinematică redusă (de exemplu apa). Trecerea de la regimul laminar de mișcare la cel turbulent este caracterizată printr-o valoare critică pentru numărul Reynolds,

$$\mathcal{R}_e{}^* = \frac{\rho V c}{\mu} \tag{1}$$

în care $\rho$ este densitatea lubrifiantului, $\mu$ viscozitatea sa, $V$ viteza relativă dintre suprafețe, iar $c$ jocul mediu dintre suprafețe (jocul radial în cazul lagărelor circulare).

Pentru lagăre circulare, valoarea numărului Reynolds critic a fost stabilită de Taylor [1]

$$\mathcal{R}_{e_c}^* = \frac{\rho V_{cr} c}{\mu} = \frac{41,1}{\sqrt{\psi}}\,. \tag{2}$$

unde $\psi = \dfrac{c}{r}$ este jocul relativ. Din (2) rezultă că $\mathcal{R}_{e_c} = 1200 - 650$ pentru $\psi = 1^0/_{00} - 4^0/_{00}$. Dependența numărului Reynolds critic de jocul relativ $\psi$ este datorită efectului curburii suprafețelor și al forțelor masice centrifugale în producerea vîrtejurilor și indirect a turbulenței în stratul de lubrifiant. Din (2) se deduce că regimul turbulent apare pentru o turație critică egală cu

$$n_c = 392,7 \frac{\mu}{\rho r^2 \psi^{3/2}} = 392,7 \frac{\nu}{r^2 \psi^{3/2}}, \tag{3}$$

unde cu $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ s-a notat viscozitatea cinematică a lubrifiantului. După cum se vede turaţia critică este mai joasă cînd $\nu$ scade şi cînd $r$ şi $\psi$ cresc. Pentru a fixa ideile să considerăm un lagăr lubrificat cu apă ($\nu \cong 10^{-6}$ m²/s) avînd $r = 3$ cm şi $\psi = 3^0/_{00}$. În aceste condiţii rezultă din (3) $n_c = 2\,650$ rot/min. Dacă s-ar fi utilizat un ulei fluid, de exemplu uleiul STAS 302 ($\nu \sim 9 \times 10^{-6}$ m²/s) turaţia critică devine egală cu $n_c = 24\,000$ rot/min.

Valorile de mai sus dau ordinul de mărime al turaţiilor de la care apare regimul turbulent în stratul de lubrifiant. Rezultă astfel că acest regim va apare mai rar în cazul obişnuit al lagărelor lubrificate cu uleiuri. În schimb, regimul turbulent este aproape cu neputinţă de evitat în cazul lagărelor din mase plastice, pentru care se iau jocuri relative mari ($\psi = 3 - 5^0/_{00}$) iar lubrifiantul deseori utilizat este apa.

În cazul lagărelor axiale, cercetările experimentale efectuate de Abramowitz [2] şi Wilcock [3], au arătat că se poate considera că regimul turbulent apare pentru un număr Reynolds critic

$$\mathcal{R}e_c^\star = \frac{\rho V_{cr} h_m}{\mu} \cong 1\,000, \tag{4}$$

unde $h_m$ este grosimea medie a stratului de lubrifiant. Din această relaţie se deduce viteza critică

$$V_{cr} = 1\,000 \frac{\mu}{\rho h_m} = \frac{1\,000\,\nu}{h_m}. \tag{5}$$

De exemplu pentru apă ($\nu = 10^{-6}$ m²/s) şi un joc mediu $h_m = 0{,}1$ mm, $V_c \cong 7$ m/s. În aceleaşi condiţii, pentru uleiul STAS 302 ar rezulta $V_c \cong 63$ m/s.

Formulele (2) — (5) sînt aplicabile numai într-o primă aproximaţie deoarece ele au fost deduse fără să se ţină seama de distribuţia reală a vitezelor în stratul de lubrifiant. De exemplu, pentru lagăre circulare ele sînt aplicabile numai pentru lagăre neîncărcate, care funcţionează cu o excentricitate relativă $\epsilon \cong 0$.

În cazul lagărelor încărcate [4], trebuie să se definească numărul Reynolds în funcţie de viteza medie $v_{1m}$ din stratul de lubrifiant

$$\mathcal{R}e_m = 2\,\frac{\rho v_{1m} h}{\mu}, \tag{6}$$

în care $h$ este grosimea locală a stratului de lubrifiant. Pentru $\epsilon = 0$, $h = c$ şi $v_{1m} = \frac{V}{2}$ astfel încît $\mathcal{R}e_m = \mathcal{R}e^\star$.

Dacă se mai ţine seama că în realitate viscozitatea este variabilă în lungul stratului de lubrifiant după relaţia

$$\mu = \mu_1 \left(\frac{h}{h_1}\right)^q, \tag{7}$$

în care $\mu_1$ este viscozitatea la intrare (unde $h = h_1$) iar $q \geqslant 0$ un parametru care depinde de distribuția temperaturilor în lagăr [5], atunci

$$\mathcal{R}e_m = \frac{h_0}{c}\,\frac{\rho V c}{\mu_1}\left(\frac{h_1}{h}\right)^q = \frac{h_0}{c}\left(\frac{h_1}{h}\right)^q \mathcal{R}e_1^{*};\ \mathcal{R}e_1^{*} = \frac{\rho V c}{\mu_1}, \tag{8}$$

în care $h_0$ este grosimea stratului de lubrifiant în secțiunea unde presiunea are valoarea maximă $\left(\frac{\partial p}{\partial x} = 0,\ v_{1m} = \frac{V}{2}\right)$. Formula de mai sus este valabilă și pentru lagăre axiale, dacă se înlocuiește $c$ cu $h_m$.

Din relația (8) se constată că dacă viscozitatea nu variază cu temperatura (pentru apă de exemplu), $q = 0$ și $\mathcal{R}e_m$ = constant în întreg stratul de lubrifiant, fiind mai mic decît $\mathcal{R}e^{*}$ în raportul $\frac{h_0}{c}$. În consecință regimul turbulent va apare cu atît mai tîrziu cu cît excentricitatea lagărului este mai mare.

Fie de exemplu un lagăr lubrificat cu apă, avînd $r = 30$ mm, $\psi = 3{,}5\,^0/_{00}$, funcționînd la o turație de 2 500 rot/min cu o excentricitate de $\epsilon = 0{,}5$. Din (2) rezultă $\mathcal{R}e^{*} = 825 > \mathcal{R}e_c^{*} = 700$. În realitate, lagărul funcționează în regim laminar. Într-adevăr, dacă se consideră că maximul presiunilor are loc în același punct ca și pentru un lagăr de alungire infinită, atunci [4], $\frac{h_0}{c} = 2\,\frac{1-\epsilon^2}{2+\epsilon^2} = 0{,}667$ și $\mathcal{R}e_m = 550 < \mathcal{R}e_0^{*}$.

Din contra, regimul turbulent poate apare mai devreme la creșterea excentricității, dacă viscozitatea scade cu temperatura. Astfel din (8), pentru $q > 0$ rezultă că numărul $\mathcal{R}e_m$ crește în lungul stratului de lubrifiant atingînd valoarea maximă în punctul de grosime minimă $h = h_2$,

$$\mathcal{R}e_{m\,\max} = \frac{h_0}{c}\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^q \mathcal{R}e_1^{*}, \tag{9}$$

relație care pentru lagărele circulare se mai scrie

$$\mathcal{R}e_{m\,\max} = \frac{h_0}{c}\left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\right)^q \mathcal{R}e_1^{*}. \tag{10}$$

De exemplu pentru un lagăr avînd $r = 30$ mm, o turație de 5 000 rot/min, $\psi = 3{,}5\,\%_0$, $\epsilon = 0{,}6$, uleiul STAS 302 (temperatura de intrare $t_1 = 60°\mathrm{C}$, $\mu_1 = 0{,}00065\ \mathrm{kgs/m^2}$, regimul termic astfel încît $q = 1$), se deduce, cu $\frac{h_0}{c} = 1 - \epsilon^2$ [4], $\mathcal{R}e_{m\,\max} = (1+\epsilon)^2\,\mathcal{R}e_1^{*} = 610$ în timp ce $\mathcal{R}e_c^{*} = 700$. Regimul de funcționare rămîne în continuare laminar, însă foarte apropiat de punctul de tranziție. În condițiile de mai sus, turația critică este de $n_c = 5\,750$ rot/min, în timp ce după formula (3) ar fi rezultat $n_c = 10\,900$ rot/min, valoare mult mai mare.

Deoarece regimul turbulent este însoțit de o serie de inconveniente și în special de creșterea considerabilă a frecărilor, de multe ori se caută să se evite apariţia lui. Rezultatele de mai sus permit să se deducă principalele măsuri constructive şi funcţionale în vederea acestui scop. Astfel în primul rînd calea cea mai sigură este micşorarea vitezei relative $V$ şi deci a turaţiei. La acelaşi rezultat se ajunge prin micşorarea jocului mediu $c$ sau $h_m$, sau prin micşorarea dimensiunilor lagărului (ca şi micşorarea înclinării suprafeţelor pentru lagărele axiale). La lagărele lubrificate cu apă, regimul turbulent poate fi evitat şi prin mărirea excentricităţii de funcţionare (de exemplu prin scăderea lăţimii lagărului). Un efect asemănător dar de eficienţă mai redusă îl are şi micşorarea debitului de lubrifiant şi în special evitarea umplerii cu lubrifiant a zonei inactive a lagărului. În sfîrşit, numărul Reynolds scade cînd viscozitatea lubrifiantului creşte (de exemplu printr-o răcire a lagărului).

## 2. CALCULUL LAGĂRELOR CIRCULARE

Formulele care dau capacitatea portantă a lagărelor circulare pot fi deduse cu uşurinţă, plecînd de la rezultatele care se obţin în regim laminar, pentru o lege de variaţie a viscozităţii în lungul stratului de lubrifiant de forma (7) cu $q = 1$. Într-adevăr într-o lucrare anterioară [6] s-a arătat că ecuaţia diferenţială a presiunilor devine identică cu aceea obţinută în regim laminar dacă se pune

$$\tilde{z} = \sqrt{\frac{k_3}{k_1}}\, z, \quad \tilde{\lambda} = \sqrt{\frac{k_3}{k_1}}\, \lambda, \quad \left(\lambda = \frac{b}{2r}\right), \quad \tilde{V} = \frac{k_1}{12}\, V, \tag{11}$$

unde $b$ este lăţimea lagărului, $z$, coordonata în sensul lăţimii lagărului, $\lambda$ alungirea, iar

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= 12 + 0{,}53\, \mathrm{R}_1^{*\,0{,}725} (1+\epsilon)^{0{,}725}, \\ k_3 &= 12 + 0{,}296\, \mathrm{R}_1^{*\,0{,}65} (1+\epsilon)^{0{,}65}, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

în care $\mathrm{R}_1^*$ este numărul Reynolds modificat

$$\mathrm{R}_1^* = \sigma^{*2} \mathcal{R}e_1^* = \sigma^{*2} \rho \frac{Vc}{\mu_1}. \tag{13}$$

În această relaţie, cu $\sigma^*$ s-a notat constanta de care depinde legea de variaţie a lungimii de amestec. Pentru mişcările obişnuite din mecanica fluidelor, $\sigma^* = 0{,}4$. În condiţiile lubrificaţiei, deoarece grosimea $h$ a stratului de lubrifiant are valori foarte reduse, este probabil [6], [7] ca legea menţionată să fie modificată în sensul scăderii valorii constantei $\sigma^*$. Mai departe se va arăta că se poate lua aproximativ

$$\sigma^* \cong 0{,}3. \tag{14}$$

În aceste condiţii, notînd cu $\zeta$ coeficientul de încărcare al lagărului (inversul numărului Sommerfeld) :

$$\zeta = \frac{P\psi^2}{2\mu_1 \omega b r}, \tag{15}$$

în care $P$ este sarcina, iar $\omega$ turația, acest coeficient este egal cu

$$\zeta(\epsilon,\ \lambda) = \frac{k_1}{12}\,\tilde{\zeta}(\epsilon,\ \tilde{\lambda}), \tag{16}$$

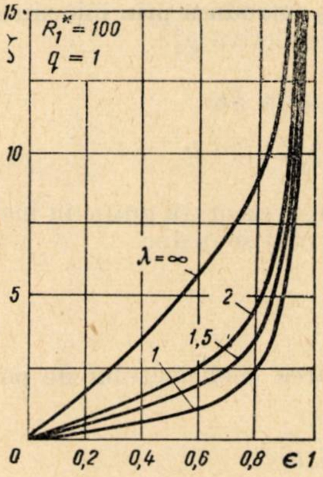


Fig. 1

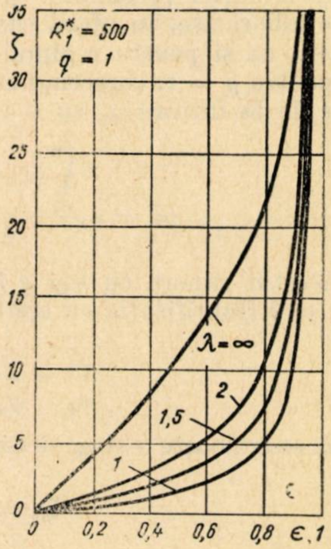


Fig. 2

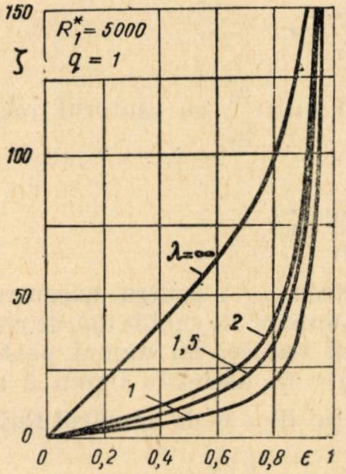


Fig. 3

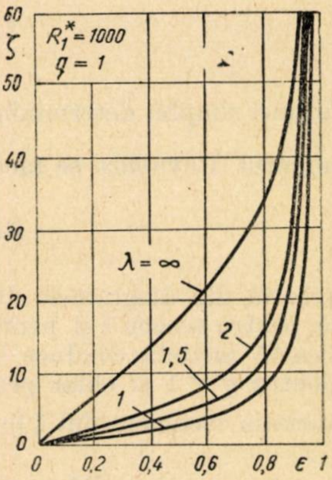


Fig. 4

în care $\overline{\zeta}$ este coeficientul $\zeta$ pentru regimul laminar, la aceeași excentricitate $\epsilon$, dar pentru o alungire $\tilde{\lambda}$ mai redusă, dată de formula (11). Luînd pentru $\overline{\zeta}$ valorile date în lucrarea [5], în figurile 1—4, s-a reprezentat variația coeficientului $\zeta$ în funcție de $\epsilon$ pentru diferite alungiri $\lambda$ și numere Reynolds $\overset{*}{R}_1$. Se constată creșterea apreciabilă a coeficientului $\zeta$ cu numărul Reynolds.

Pentru alte valori $q$ în afară de valoarea $q = 1$ considerată, determinarea distribuției presiunilor și a coeficientului $\zeta$ conduce la calcule extrem de laborioase, în afara cazurilor extreme $\lambda = \infty$ sau $\lambda \to 0$. Din fericire însă, ca și pentru regimul laminar [5], se pot utiliza rezultatele obținute pentru $q = 1$, corectînd eroarea introdusă prin înlocuirea viscozității reale de la intrare $\mu_1$ cu o valoare fictivă $\mu_1'$:

$$\mu_1' = \mu_1 \frac{\int_0^\pi (1 + \epsilon \cos \theta)^q \, d\theta}{\pi (1 + \epsilon)^{q-1}}, \tag{17}$$

variația acestui raport cu $\epsilon$ și $q$ fiind reprezentată grafic în lucrarea [5]. Pentru $q = 0$ (lubrificația cu apă), din (17) se deduce

$$\frac{\mu_1'}{\mu_1} = \frac{\mu_1'}{\mu_m} = 1 + \epsilon. \tag{18}$$

Dacă se cunoaște $\epsilon$ și $q$, determinarea coeficientului de portanță $\zeta_{1q}$

$$\zeta_{1q} = \frac{P\psi^2}{2\mu_1' \omega b r}, \tag{19}$$

sau a coeficientului $\zeta_q$ (15):

$$\zeta_q = \frac{\mu_1'}{\mu_1} \zeta_{1q} \tag{20}$$

se face atunci simplu, determinînd mai întîi $\frac{\mu_1'}{\mu_1}$ cu ajutorul relației (18). Apoi numărul Reynolds se modifică

$$\overset{*}{R}_{1q} = \frac{\mu_1}{\mu_1'} \overset{*}{R}_1 \tag{21}$$

iar $\zeta_{1q}$ rezultă din diagramele din figurile 1—4 pentru excentricitatea $\epsilon$ prescrisă, pentru același $\lambda$ și pentru un număr Reynolds dat de relația (21).

Această metodă conduce la erori reduse, nu numai pentru $q > 1$ dar și pentru $q < 1$ și chiar pentru $q = 0$. Astfel în figura 5 s-a reprezentat variația coeficientului $\zeta$ în funcție de $\epsilon$ și de numărul Reynolds $R^\star$

$$R^\star = \sigma^{\star 2} \mathcal{R}e^\star = \sigma^\star \frac{\rho V c}{\mu_m} \tag{22}$$

în cazul viscozității constante ($q = 0$) pentru $\lambda = \infty$. Pe această diagramă, s-au trasat atît curbele corecte [4] cît și cele aproximative care se deduc prin metoda de mai sus. După cum se vede diferențele sînt reduse.

Același rezultat se obține și pentru cazul lagărelor de alungire redusă [6]. Astfel în figurile 6 și 7 s-a reprezentat variația coeficientului $\zeta/\lambda^2$, în funcție de $\epsilon$ pentru $q = 0$, $q = 1$, și pentru diferite numere Reynolds $R^*$, respectiv $R_1^*$. Pe diagrama din figura 6 s-au reprezentat și curbele $\frac{\zeta}{\lambda^2}$ obținute prin metoda aproximativă de mai sus. Se constată că erorile la determinarea excentricității rămîn sub 10%, diferențe de același ordin de mărime cu aproximațiile introduse prin considerarea alungirii $\lambda \rightarrow 0$.

Unghiul $\theta^*$ dintre direcția sarcinii și linia centrelor, depinde puțin de parametrul $q$, după cum se constată din figura 8 în care s-a trasat $\theta^*(\epsilon)$ pentru $\lambda = \infty$. Aceste valori pot fi luate în calcule pentru orice alungire, deoarece experimental [8] se constată că în regim turbulent alungirea are o influență redusă asupra mărimii unghiului $\theta^*$. Diagrama din figura 9 confirmă acest fapt ca

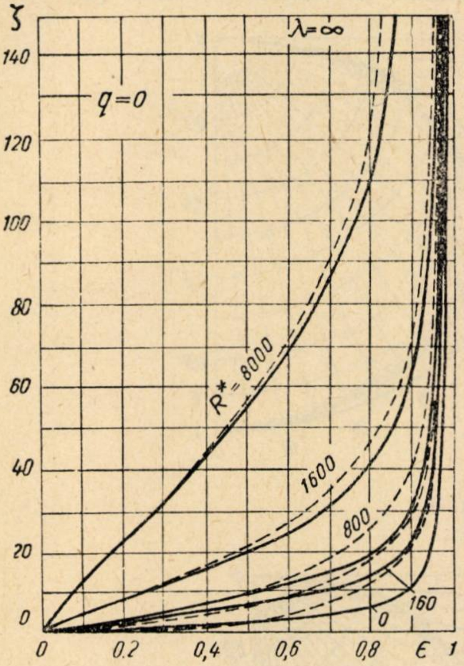


Fig. 5

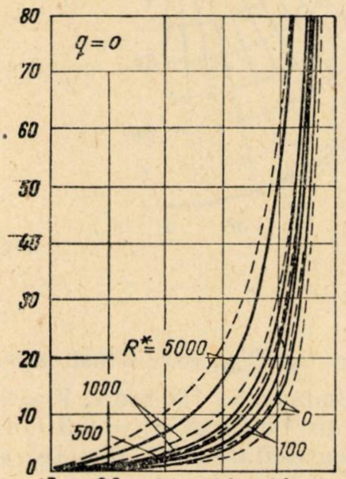


Fig. 6

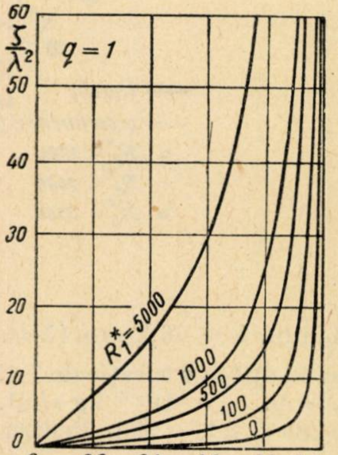


Fig. 7

şi concordanţa bună care se obţine între datele teoretice de mai sus şi cele experimentale.

Aceeaşi concordanţă se obţine şi pentru capacitatea portantă. Fie de exemplu lagărul experimental utilizat de Smith şi Fuller [8] avînd

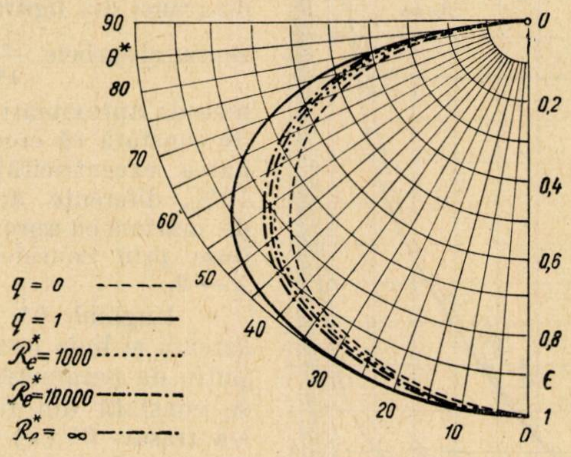


Fig. 8

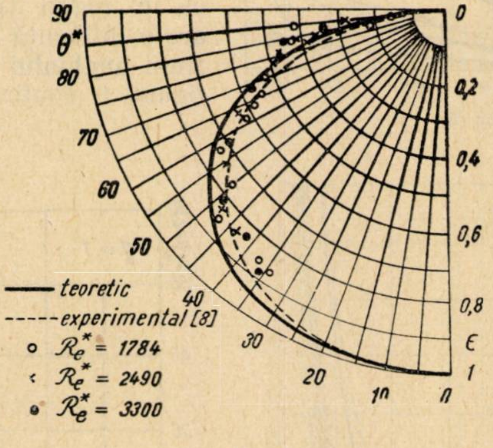


Fig. 9

$r = 38{,}1$ mm, $b = 76{,}2$ mm ($\lambda = 1$) $\psi = 2{,}93^0/_{00}$, care a fost experimentat lubrificat cu apă la o turaţie de 7 450 rot/min ($\omega = 780$ rad/s, $V = 29{,}6$ m/s). Luînd $q = 0$, $\mu_m = 10^{-4}$ kg s/m$^2$, $\nu = 10^{-6}$ m$^2$/s şi $\sigma^\star = 0{,}3$ (14) rezultă $\mathcal{R}_e{}^\star = 3\,280$ şi $\mathrm{R}^\star = 295$. Pentru o excentricitate dată, din (18) se deduce $\dfrac{\mu_1'}{\mu_m}$ şi deci $\mu_1'$. Apoi formula (21) dă $\overset{\star}{R}_{1q}$ iar din diagramele din figurile 1—4 se găsește $\zeta_{1q}$. În sfîrșit, formula (19) permite calculul încărcării $P$. Rezultatele calculelor sînt trecute în tabela 1.

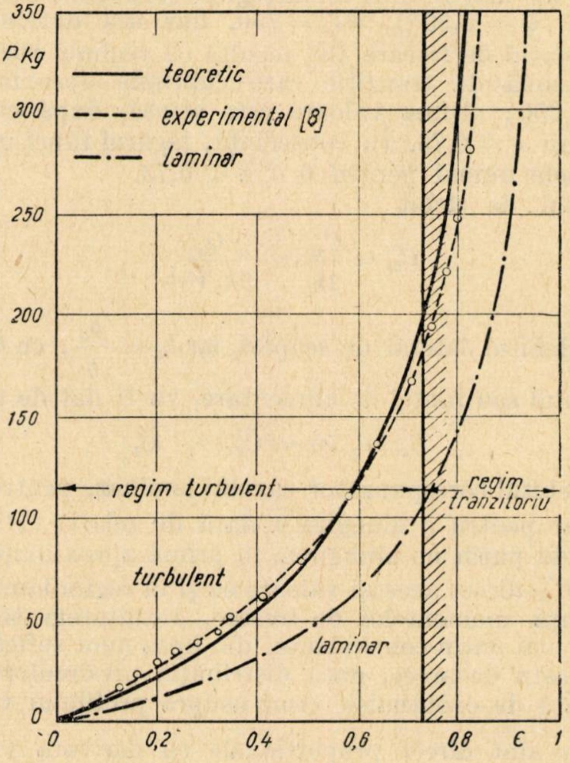


Fig. 10

*Tabela 1*

| $\epsilon$ | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mu_1'/\mu_m$ | 1 | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 |
| $\mu_1' \times 10$ | 1 | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 |
| $R_{1q}^*$ | 295 | 244 | 210 | 184 | 164 |
| $\zeta_{1q}$ | 0 | 0,3 | 0,7 | 1,4 | 3,2 |
| $P$ (kg) | 0 | 19 | 51 | 117 | 301 |
| $P$ (kg) experimental [8] | 0 | 28 | 60 | 115 | 250 |
| $h_0/c$ | 1 | 0,956 | 0,776 | 0,562 | 0,273 |
| $\mathcal{R}e_m$ | 3 280 | 3 140 | 2 540 | 1 780 | 900 |

În același tabel s-au trecut și valorile numărului Reynolds $\mathcal{R}e_m$ (8). Variația sarcinii $P$ este prezentată în figura 10. Se constată o bună concordanță cu rezultatele experimentale obținute de Smith și Fuller [8].

La excentricități mari valorile teoretice devin mai mari decît cele experimentale și încep să se depărteze de acestea, fapt explicabil deoarece regimul de mișcare nu mai rămîne în întregime turbulent. Într-adevăr din (2) rezultă pentru $\psi = 2{,}93\,\%$, $\mathcal{R}e^*_c = 750$, dar din datele experimentale privind coeficientul de frecare [8] rezultă că regimul turbulent se stabilește după o zonă de tranziție care cuprinde aproximativ domeniul $\mathcal{R}e^* = 750 - 1\,250$; ultima valoare este atinsă, după cum se constată din tabel pentru $\epsilon = 0{,}73$. În consecință, lagărul funcționează în regim complet turbulent numai pentru $0 < \epsilon < 0{,}73$.

Coeficientul de debit

$$C^*_{qs} = \frac{C_{qs}}{2k_t} = \frac{Q_s}{2k_b V c b} \tag{23}$$

unde $Q_s$ este debitul lateral de scăpări, iar $k_b = \frac{b_i}{b}$, cu $b_i$ diametrul sau lățimea orificiului sau fantei de alimentare, va fi dat de relația

$$C^*_{qs}(\epsilon,\ \lambda) = \tilde{C}^*_{qs}(\epsilon,\ \tilde{\lambda}), \tag{24}$$

unde $C^*_{qs}$ este debitul corespunzător cazului laminar, pentru aceeași excentricitate $\epsilon$, dar pentru o alungire $\tilde{\lambda}$ dată de relația (11). Deoarece $C^*_{qs}$ variază destul de puțin cu alungirea, în primă aproximație se poate considera pentru $C^*_{qs}$ direct aceeași valoare ca și în regim laminar [5].

În privința momentelor de frecare, rezultatele teoretice care se pot obține sînt mai puțin concludente, din lipsa unor suficiente date experimentale. Aceasta deoarece, dacă distribuția presiunilor este destul de puțin influențată de eventualele erori asupra profilului vitezelor, forțele de frecare, care sînt direct proporționale cu derivata vitezei $\frac{\partial u}{\partial y}$ după normala la suprafețe pot fi influențate de aceste erori.

Într-o primă aproximație, se pot obține indicații utilizînd valorile teoretice [4] și experimentale [8] obținute pentru lagărele neîncărcate. Astfel în figura 11 s-a reprezentat variația coeficientului $C_f$

$$C_f = \frac{\tau}{\frac{\rho}{2} V^2} \tag{25}$$

unde $\tau$ este tensiunea de frecare, în funcție de numărul Reynolds $\mathcal{R}e^*$. Această variație, dedusă experimental, este egală cu [8]

$$C_f = \frac{0{,}078}{\mathcal{R}e^{*\,0{,}43}}, \tag{26}$$

iar teoretic [4]

$$C_f = \frac{0{,}05}{\mathcal{R}e^{*\,0.389}}. \tag{27}$$

Definind atunci coeficientul de moment

$$C_m = \frac{M\,\psi}{\pi\,\mu_1\,\omega b r^2} \tag{28}$$

unde $M$ este momentul de frecare pe fus, din compararea cu relația (25) se deduce

$$C_m = C_f\,\mathcal{R}e^{*}. \tag{29}$$

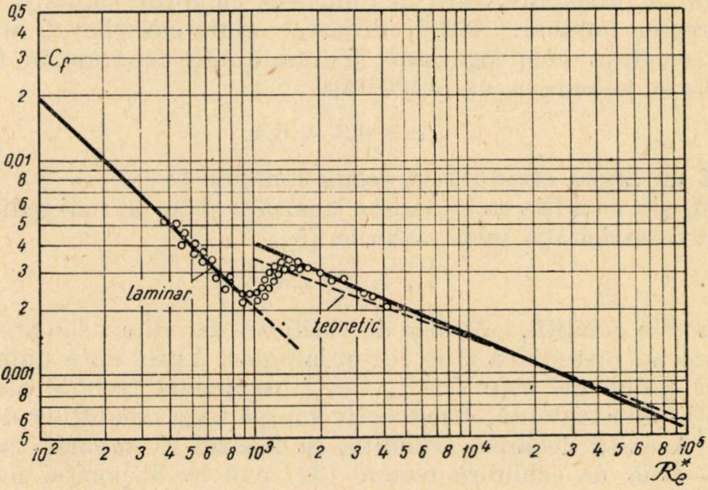


Fig. 11

Raportul dintre momentul de frecare, sau puterea $W$ consumată prin frecări în regim turbulent, față de aceea corespunzătoare în regim laminar, va fi dată, ținînd seama de (26), (29), de relația

$$k_p = \frac{C_{ft}}{C_{fl}} = \frac{C_{mt}}{C_{ml}} = \frac{M_t}{M_l} = \frac{W_t}{W_l} = 0{,}039\,\mathcal{R}e^{*\,0{,}57}, \tag{30}$$

sau teoretic, ținînd seama de relația (27)

$$k_p = 0{,}05\,\mathcal{R}e^{*\,0{,}611}. \tag{31}$$

Se poate deci aprecia momentul de frecare în regim turbulent amplificînd valoarea obținută în regim laminar cu factorul $k_p$ de mai sus. Procedeul poate fi extins în primă aproximație și pentru $\epsilon > 0$, iar acoperitor, se poate pune în relația (30) sau (31) $\mathcal{R}e_1^{*}$ în loc de $\mathcal{R}e^{*}$.

Cunoscînd momentul de frecare și debitul de lubrifiant, regimul termic al lagărului poate fi calculat urmînd aceeași metodă ca și în lucrarea [5]. Astfel, dacă se consideră acoperitor că întreaga căldură produsă este evacuată numai prin debitul de lubrifiant, temperatura maximă $t_2$ care se produce în secțiunea minimă $h = h_2$ se poate calcula din relația

$$\frac{C_m}{\zeta \lambda C^{\star}_{qs}} = \frac{4\, J\, \gamma\, c_v\, k_b\, r^2}{\pi P} (t_2 - t_1), \tag{32}$$

unde $J = 427$ kgm/kcal este echivalentul mecanic al caloriei, $\gamma$ este greutatea specifică iar $c_v$ căldura specifică a lubrifiantului.

Relațiile de mai sus permit calculul lagărelor circulare funcționînd în regim turbulent. Mai mult, se pot determina și o serie de condiții de optim pentru proiectare, care în fond sînt cu totul similare celor obținute în regim laminar. Astfel, deoarece alura curbelor $\zeta$ este cu totul similară, condiția unei siguranțe și durabilități maxime în funcționare conduce la o valoare a excentricității

$$\epsilon = 0{,}3 - 0{,}4, \tag{33}$$

apropiată de aceea obținută în regim laminar [5].

În sfîrșit, condiția ca încălzirea lagărului să fie cît mai redusă impune alegerea excentricității între valorile [5]

$$\epsilon = 0{,}7 - 0{,}8. \tag{34}$$

În aceste condiții, calculele de verificare sau dimensionare se conduc urmînd aceeași metodă ca și în regim laminar. Astfel dacă numărul necunoscutelor problemei este $i > 2$, $i - 2$ parametri trebuie aleși pe alte considerații (de rezistență, constructiv sau pe baza condițiilor de optim de mai sus). Aceasta deoarece condiția ca lagărul să suporte sarcina dată (15) și ecuația de echilibru termic (32) pun la dispoziție numai două ecuații. Calculele se efectuează prin încercări, estimînd una din necunoscute și determinînd pe a doua.

În sfîrșit parametrul $q$ se determină în funcție de viscozitățile extreme $\mu_1$ și $\mu_2$ și de excentricitate, cu ajutorul relației

$$q = \frac{\ln \dfrac{\mu_1}{\mu_2}}{\ln \dfrac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}}. \tag{35}$$

*Exemplul numeric a.* Fie un lagăr cu $P = 22$ kg, turația 5 000 rot/min ($\omega = 524$ rad/s), $r = 30$ mm, $b = 60$ mm ($\lambda = 1$), $\psi = 4^0/_{00}$ ($c = 0{,}12$ mm), $t_1 = 20°\mathrm{C}$, lubrifiantul utilizat fiind apa. Orificiul de alimentare $b_i = 6$ mm $\left(k_b = \dfrac{b_i}{b} = 0{,}0833\right)$. Necunoscutele problemei sînt deci grosimea minimă, $h_2$ și temperatura $t_2$.

Cu $\sigma^\star = 0{,}3$, rezultă

$$\mathcal{R}e^{\star}_1 = \frac{\rho V c}{\mu_1} = \frac{\rho V c}{\mu_m} = \mathcal{R}e^{\star} = 1\,860, \ \mathrm{R}^{\star}_1 = 168. \qquad (36$$

Se poate lua conform celor spuse $q = 0$. În acest caz calculul grosimii $h_2$ se poate face complet separat de calculul temperaturii $t_2$.

Estimăm $\epsilon = 0{,}6$. Din (18) rezultă atunci $\mu_1' = 1{,}6\,\mu_1 = 1{,}6 \times 10^{-4}$ kgs/m şi $(\mathrm{R}_1^*)_{q=0} = 105$ (21). Din figura 1 rezultă $\zeta_{1q} = 1{,}2$ iar din formula (19)

$$P = \frac{2\omega\mu_1' br\zeta_{1q}}{\psi^2} = \frac{2 \times 524 \times 1{,}6 \times 10^{-4} \times 0{,}06 \times 0{,}03 \times 1{,}2}{16 \times 10^{-6}} = 22{,}1 \text{ kg}, \quad (37)$$

faţă de 22 kg cît este valoarea dată a sarcinii. În consecinţă, se poate admite $\epsilon = 0{,}6$ şi

$$h_2 = c\,(1 - \epsilon) = 0{,}12 \times 0{,}4 = 0{,}048 \text{ mm}. \quad (38)$$

Pentru regim laminar, cu $q = 0$, $\lambda = 1$ şi $\epsilon = 0{,}6$ rezultă [5] $C_m = 1{,}4$ iar din formula (30) pentru $\mathcal{R}e^* = 1\,860$ rezultă $k_p = 3$.

În consecinţă,

$$C_m = (C_m)_{\text{laminar}}\; k_p = 1{,}4 \times 3 = 4{,}2. \quad (39)$$

În acelaşi timp din lucrarea [5] se deduce $C_{qs}^* = 0{,}55$ şi deci $C_{qs} = 2k_b\,C_{qs}^* = 0{,}0916$. Formula (32) dă atunci

$$t_2 - t_1 = \frac{C_{m1}}{\zeta\lambda C_{qs}}\,\frac{\pi P}{2J\gamma c_v r^2} = \frac{4{,}2}{1{,}2 \times 1 \times 0{,}0916}\,\frac{\pi \times 22}{2 \times 427 \times 1\,000 \times 1 \times 0{,}03^2} = 4\,^\circ\mathrm{C} \quad (40)$$

iar puterea consumată $W = M_1\Omega \cong 0{,}1\;kW$ de 3 ori mai mare faţă de regimul laminar corespunzător.

*Exemplul numeric b.* Fie un lagăr avînd $P = 130$ kg, $r = 30$ mm turaţia 20 000 rot/min ($\omega = 2\,092$ rad/s), ulei STAS 302, $t_1 = 60\,^\circ\mathrm{C}$ ($\mu_1 = 0{,}00065$ kgs/m$^2$), $t_2 = 120\,^\circ\mathrm{C}$ ($\mu_2 = 0{,}000195$ kgs/m$^2$), $\gamma = 920$ kg/m$^3$, $C_v = 0{,}5$ kcal/kg °C. Se dă de asemenea $h_2 = 0{,}075$ mm.

Necunoscutele problemei sînt în acest caz jocul $c$, lăţimea $b$ şi dimensiunile orificiului de alimentare ($k_b$) pentru asigurarea regimului termic impus. Avînd trei necunoscute se poate alege un parametru. Fie astfel $\epsilon = 0{,}3$ (33). Atunci

$$c = \frac{h_2}{1 - \epsilon} = \frac{0{,}075}{0{,}7} = 0{,}107 \text{ mm}\,;\quad \psi = 3{,}5\,^0/_{00}. \quad (41)$$

În aceste condiţii, din (35) rezultă $q = 1{,}94 \cong 2$, iar din formula (17) $\dfrac{\mu_1'}{\mu_1} = 0{,}8$. Cu $\sigma^* = 0{,}3$ se deduce

$$\mathcal{R}e_1^* = \frac{\rho V c}{\mu_1} = 954\,;\quad \mathrm{R}_1^* = 76 \quad (42)$$

iar pentru $\frac{\mu_1'}{\mu_1} = 0{,}8$ rezultă $\mathrm{R}_{1q}^* = \frac{\mu_1}{\mu_1'}\mathrm{R}_1^* = 95$. Din formula (19) rezultă apoi

$$b\zeta_{1q} = \frac{P\psi^2}{2\mu_1'\,\omega r} = \frac{130\times 3{,}5^2\times 10^{-6}}{2\times 0{,}8\times 0{,}00065\times 2092\times 0{,}03} = 0{,}024. \qquad (43)$$

Din figura 1 se deduce că pentru $\epsilon = 0{,}3$ şi $\mathrm{R}_{1q}^* = 95 \cong 100$, produsul $b\zeta_{1q}$ are valoarea 0,024 pentru aproximativ

$$\lambda = 1,\ b = 60\ \mathrm{mm},\ \zeta_{1q} = 0{,}4. \qquad (44)$$

Apoi din [5] rezultă $C_m = 1{,}6$ iar din (30), pentru $\mathcal{R}e_1^* = 954$ se obţine $k_p = 2$. Deci

$$C_m = (C_m)_{\mathrm{laminar}}\ k_p = 3{,}2. \qquad (45)$$

În sfîrşit [5] pentru $\lambda = 1$ şi $\epsilon = 0{,}3$ rezultă $C_{qs}^* = 0{,}24$, iar din formula (32)

$$\begin{aligned} k_b &= \frac{1}{2}\left(\frac{C_{m1}}{\zeta\lambda C_{qs}^*}\right)\frac{\pi P}{2J\gamma c_v r^2(t_2 - t_1)} = \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{3{,}2}{0{,}4\times 1\times 0{,}24}\cdot\frac{\pi\times 130}{2\times 427\times 920\times 0{,}5\cdot 0{,}03^2\times 60} = 0{,}32, \end{aligned} \qquad (46)$$

de unde se obţine lăţimea fantei de alimentare

$$b_i = k_b b = 0{,}32\times 60 = 19\ \mathrm{mm}. \qquad (47$$

Puterea consumată prin frecări rezultă apreciabilă

$$\begin{aligned} W &= \frac{0{,}736}{75}\,\omega M = \frac{0{,}736}{75}\,\frac{\pi\mu_1'\omega^2 r^2 b C_m}{\psi} = \\ &= \frac{0{,}736}{75}\,\frac{\pi\times 0{,}8\times 0{,}00065\times 2092^2\times 0{,}03^2\times 0{,}06\times 3{,}2}{3{,}5\times 10^{-3}} = 3{,}45\,\mathrm{kW}, \end{aligned} \qquad (48)$$

de două ori mai mare decît în regim laminar.

Într-un mod asemănător, se pot rezolva prin încercări şi alte cazuri care pot interveni în calculele de dimensionare sau verificare a funcţionării lagărelor circulare în regim turbulent.

*Primită la redacţie la 16 decembrie 1960*

# РАСЧЕТ ПОДШИПНИКОВ СКОЛЬЖЕНИЯ, РАБОТАЮЩИХ В ТУРБУЛЕНТНОМ РЕЖИМЕ

## РЕЗЮМЕ

На основании результатов, полученных в предыдущих работах, представляется метод расчета и проектирования круглых подшипников, работающих в турбулентном режиме. Результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными, полученными Смисом и Фюллером [8].

# LE CALCUL DES PALIERS LISSES FONCTIONNANT EN RÉGIME TURBULENT

## RÉSUMÉ

En utilisant les résultats obtenus dans des travaux précédents, on présente une méthode pour le calcul des paliers lisses fonctionnant en régime turbulent. Les résultats sont en bonne concordance avec les données expérimentales obtenues par Smith et Fuller [8].

## BIBLIOGRAFIE

1 G. I. Taylor, *Stability of a Viscous Liquid Contained between Two Rotating Cylinders.* Phil. Trans., Series A, **223**, 289 (1923).

2. S. Abramowitz, *Turbulence in a Tilting Pad Thrust Bearing.* Trans. ASME, **78**, 6, (1956).

3. D. F. Wilcock, E. R., Rooser, *Bearing Design and Applications.* Mc Graw-Hill Book, **10**, N.Y. (1957).

4. V. N. Constantinescu, *Studiul lubrificației bidimensionale în regim turbulent.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, *1*, 139 (1958).

5. N. Tipei, V. N. Constantinescu, Al. Nica, *Calculul lagărelor cu alunecare.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **XI**, *6* (1960).

6. V. N. Constantinescu, *Considerații asupra lubrificației tridimensionale în regim turbulent.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, *4*, 1093 (1959).

7. V. N. Constantinescu, *On the Turbulent Lubrication.* Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, 1958.

8. M. I. Smith, D. D. Fuller, *Journal Bearings Operations at Superlaminar Speeds.* Trans. ASME, **78**, 469 (1956).

# STUDII

## TEORIA MECANISMELOR

# ASUPRA MECANISMELOR FORMATE DIN LANȚURI CINEMATICE DE DIFERITE FAMILII

DE

N. I. MANOLESCU *)

### § 1. ISTORIC

Studiul funcționării mecanismelor și găsirea criteriilor de clasificare a lor în scopul stabilirii unor principii de sinteză, au preocupat și preocupă în gradul cel mai înalt pe cercetătorii din întreaga lume tehnică.

Pe primul plan se situează în mod incontestabil savanții ruși și sovietici, care au adîncit problema structurală a mecanismelor reușind să stabilească criterii cuprinzătoare.

Începînd cu L. P. Assur care a stabilit celebra clasificare a mecanismelor plane articulate și terminînd cu Baranov, știința rusă și sovietică a pus la dispoziția cercetătorilor căile spre care se pot îndrepta cercetările, în scopul alegerii celor mai potrivite criterii de clasificare.

La noi în țară s-au făcut studii [2] care au condus la o clasificare a lanțurilor cinematice închise cu cuple uniformizate în funcție de numărul de elemente, de contururi închise și de grade de mobilitate stabilite pentru fiecare familie $f = 0 \ldots 5$ (în lucrarea menționată $m = 6 \ldots 1$).

Această clasificare cuprinde toate grupele (lanțurile) cinematice închise cu cuple uniformizate. Ea trebuie de aceea dezvoltată pentru a se ajunge la grupele și lanțurile reale, prin extragerea de elemente și transformarea cuplelor uniformizate în cuple de diferite clase.

Pentru aceasta, considerăm că clasificarea clasică a mecanismelor în familii sau identificarea grupelor assurice sau lanțurilor de diferite familii aflate în structura unui mecanism este metoda care poate rezolva problemele de analiză sau indica un drum spre sinteză.

Metoda ce se recomandă este ca grupele assurice (adică lanțurile cu $M_f = 0$) sau lanțurile ($M_f > 0$) ce se identifică, să aibă toate același

---

*) Facultatea de transporturi, Institutul politehnic, București.

grad de mobilitate, evitîndu-se cazurile $M_f < 0$ (de fapt aceste cazuri nu pot exista, deoarece porţiunea din mecanism unde s-ar găsi asemenea lanţ ar fi rigidă).

## PARTEA I

## § 2. GRUPELE ASSURICE SIMPLE ŞI COMPLEXE DE DIFERITE FAMILII

Se convine ca să se dea denumirea de grupă assurică simplă sau lanţ simplu acelora care nu au în structura lor elemente legate cu mai mult de două cuple cinematice.

Deoarece grupa assurică are gradul de mobilitate $M_f$ egal cu zero, formula structurală a ei va fi :

$$M_f = (6 - f)n' - \sum_{m=f+1}^{5} (m - f)\, C'_m = 0, \tag{1}$$

determinată de V. V. Dobrovolski pentru cazul general al familiei $f$.

Aici

$n'$ — numărul elementelor (interioare şi exterioare) ale grupei ;

$C'_m$ — numărul cuplelor cinematice de clasa $m$ (atît cele interioare cît şi cele exterioare).

Prin particularizarea lui $f = 0 \ldots 4$ şi determinarea lui $n'$ în funcţie de $C'_m$ se determină 5 ecuaţii, care rezolvate în numere întregi şi pozitive permit alcătuirea a 5 tabele de grupe assurice aparţinînd familiilor $f = 0$, 1, 2, 3 şi 4.

Astfel :

— pentru $f = 0$ (familia zero, a mecanismelor spaţiale) avem :

$$n' = \frac{1}{6}(5c'_5 + 4c'_4 + 3c'_3 + 2c'_2 + c'_1) \tag{2}$$

şi tabela 1 ;

— pentru $f = 1$ (familia 1) avem :

$$n' = \frac{1}{5}(4c'_5 + 3c'_4 + 2c'_3 + c'_2) \tag{3}$$

şi tabela 2 ;

— pentru $f = 2$ (familia 2) avem :

$$n' = \frac{1}{4}(3c'_5 + 2c'_4 + c'_3) \tag{4}$$

şi tabela 3 ;

— pentru $f = 3$ (familia 3 a mecanismelor sferice şi plane) avem :

$$n' = \frac{1}{3}(2c'_5 + c'_4) \tag{5}$$

şi tabela 4 ;

— pentru $f = 4$ (familia 4 a mecanismelor plane cu pană sau șurub) avem :

$$n' = \frac{1}{2} c_5' \qquad (6)$$

și tabela 5.

*Tabela 1*

**Grupele assurice simple și complexe de familia zero**

$(f = 0)$ ; $n' = \frac{1}{6}\left(5c_5' + 4c_4' + 3c_3' + 2c_2' + c_1'\right)$

| Nr. de ord. | Numărul cuplelor cinematice ale grupei assurice | | | | | Nr. de elemente ale grupei assurice $n'$ | Caracteristica grupei assurice |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $c_5'$ | $c_4'$ | $c_3'$ | $c_2'$ | $c_1'$ | | |
| 1 | 6 | — | — | — | — | 5 | grupă assurică simplă cu cuple uniformizate |
| 2 | 4 | 1 | — | — | — | 4 | grupe assurice simple |
| 3 | 3 | — | 1 | — | — | 3 | |
| 4 | 2 | — | — | 1 | — | 2 | |
| 5 | 1 | — | — | — | 1 | 1 | |
| 6 | 2 | 2 | — | — | — | 3 | |
| 7 | 1 | 1 | 1 | — | — | 2 | |
| 8 | — | 1 | — | 1 | — | 1 | |
| 9 | — | 3 | — | — | — | 2 | grupe assurice simple cu cuple uniformizate |
| 10 | — | — | 2 | — | — | 1 | |
| 11 | — | 6 | — | — | — | 4 | grupe assurice complexe cu cuple uniformizate |
| 12 | — | — | 6 | — | — | 3 | |
| 13 | — | — | — | 6 | — | 2 | |
| 14 | — | — | — | — | 6 | 1 | |
| 15 | — | — | 4 | — | — | 2 | |

*Tabela 2*

**Grupele assurice simple și complexe de familia întîi**

$(f = 1)$ ; $n' = \frac{1}{5}\left(4c_5' + 3c_4' + 2c_3' + c_2'\right)$

| Nr. de ord. | Numărul cuplelor cinematice ale grupei assurice | | | | Nr. de elemente ale grupei assurice $n'$ | Caracteristica grupei assurice |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $c_5'$ | $c_4'$ | $c_3'$ | $c_2'$ | | |
| 1 | 5 | — | — | — | 4 | grupă assurică simplă cu cuple uniformizate |

*tabela 2 (urmare)*

| Nr. de ordine | Numărul cuplelor cinematice ale grupei assurice | | | | Nr. de elemente ale grupei assurice $n'$ | Caracteristica grupei assurice |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $c'_5$ | $c'_4$ | $c'_3$ | $c'_2$ | | |
| 2 | 3 | 1 | — | — | 3 | grupe assurice simple |
| 3 | 2 | — | 1 | — | 2 | |
| 4 | 1 | 2 | — | — | 2 | |
| 5 | 1 | — | — | 1 | 1 | |
| 6 | — | 1 | 1 | — | 1 | |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | grupe assurice complexe |
| 8 | 1 | — | 3 | — | 2 | |
| 9 | — | 5 | — | — | 3 | grupe assurice complexe cu cuple uniformizate |
| 10 | — | — | 5 | — | 2 | |
| 11 | — | — | — | 5 | 1 | |

*Tabela 3*

**Grupele assurice simple și complexe de familia a doua**

$(f = 2)$ ; $n' = \frac{1}{4}\left(3c'_5 + 2c'_4 + c'_3\right)$

| Nr. de ord. | Numărul cuplelor cinematice ale grupei assurice | | | Nr. de elemente ale grupei $n'$ | Caracteristica grupei assurice |
|---|---|---|---|---|---|
| | $c'_5$ | $c'_4$ | $c'_3$ | | |
| 1 | 4 | — | — | 3 | grupă assurică simplă cu cuple uniformizate |
| 2 | 2 | 1 | — | 2 | grupe assurice simple |
| 3 | 1 | — | 1 | 1 | |
| 4 | — | 2 | — | 1 | grupă assurică simplă, cu cuple uniformizate |
| 5 | — | 4 | — | 2 | grupe assurice complexe cu cuple uniformizate |
| 6 | — | — | 4 | 1 | |

*Tabela 4*

**Grupele assurice simple și complexe de familia a treia**

$(f = 3)$ ; $n' = \frac{1}{3}\left(2c'_5 + c'_4\right)$

| Nr. de ord. | Numărul cuplelor cinematice ale grupei assurice | | Nr. de elemente ale grupei assurice $n'$ | Caracteristica grupei assurice |
|---|---|---|---|---|
| | $c'_5$ | $c'_4$ | | |
| 1 | 3 | — | 2 | grupa assurică simplă cu cuple uniformizate (diada) |
| 2 | 1 | 1 | 1 | grupă assurică simplă |

*tabela 4 (urmare)*

| Nr. de ord. | Numărul cuplelor cinematice ale grupei assurice | | Nr. de elemente ale grupei assurice $n'$ | Caracteristica grupei assurice |
|---|---|---|---|---|
| | $c_5'$ | $c_4'$ | | |
| 3 | — | 3 | 1 | grupă assurică complexă cu cuple uniformizate |
| 4 | 3 | — | 2 | |
| 5 | 6 | — | 4 | |
| 6 | 9 | — | 6 | |
| | etc. | | | grupe assurice complexe cu cuple uniformizate |
| | 2 | 2 | 2 | |
| | 1 | 4 | 2 | |
| | | etc. | | grupe assurice complexe |

*Tabela 5*

**Grupele assurice simple şi complexe de familia a patra**

$(f = 4)$; $n' = \frac{1}{2} c_5'$

| Nr. de ord. | Numărul cuplelor şi elementelor grupelor assurice | | Caracteristica grupei assurice |
|---|---|---|---|
| | $c_5'$ | $n'$ | |
| 1 | 2 | 1 | |
| 2 | 4 | 2 | grupe assurice simple cu cuple uniformizate |
| 3 | 6 | 3 | |
| 4 | 8 | 4 | |
| 5 | 10 | 5 | |
| 6 | etc. | etc. | grupe assurice complexe cu cuple uniformizate |

În fiecare tabelă s-au aranjat grupele assurice simple cu şi fără cuple uniformizate, precum şi cele complexe, de asemenea cu şi fără cuple uniformizate.

Cele 5 tabele nu dau o clasificare a grupelor şi mecanismelor care să cuprindă totalitatea lor. De altfel nici nu este necesar acest lucru deoarece clasificarea o rezolvă înseşi formulele (2) ... (6).

Evident că din punctul de vedere al sintezei, adică al formării de mecanisme prin adăugarea la un mecanism de bază (de familia a 5-a) de grupe luate din aceste tabele problema este mult mai complicată.

Complicaţia provine din faptul că, clasificarea grupelor trebuie dusă mai departe în subfamilii ¹), care să permită stabilirea criteriilor de legare a unei grupe dintr-o subfamilie cu o grupă din altă subfamilie în funcţie de mişcările comune pe care le au elementele de legătură.

---

¹) Noţiune dată de ing. V. Manafu.

Pentru problema de analiză care se propune a fi rezolvată aici, nu este deocamdată necesară această clasificare, avînd în vedere scopul de identificare a grupelor deja legate în mecanism și nu legarea lor în vederea creării unui mecanism nou.

## § 3. ECHIVALAREA CUPLELOR CINEMATICE

3.1. Din analizarea grupelor cinematice assurice înscrise în tabelele 1 ... 5 se poate trage o concluzie de o însemnătate deosebită în analiza structurală a mecanismelor și anume :

*Într-o grupă assurică de orice familie, se poate înlocui o cuplă de o clasă superioară printr-un lanț cinematic format din elemente și cuple cinematice de clase inferioare, astfel încît grupa nou rezultată să fie tot assurică.*

Prin această metodă, *orice grupă assurică poate fi transformată în grupă assurică cu cuple uniformizate* (de aceeași clasă).

Pentru demonstrarea acestei afirmații se va lua de exemplu tabela 1 a grupelor assurice de familia $f = 0$.

Din compararea rîndurilor 1 și 2 se vede că o cuplă de clasa a IV-a este echivalentă cu 2 cuple de clasa a V-a plus un element.

Din compararea rîndurilor 3 și 1 se vede că o cuplă de clasa a III-a este echivalentă cu 3 cuple de clasa a V-a plus 2 elemente etc.

Aceleași concluzii se pot trage pentru orice cuplă cinematică din orice tabel de grupe assurice, de familii mai mici decît clasa cuplei ($f < m$).

Pe baza acestor concluzii s-a alcătuit tabela 6, din care se poate găsi

*Tabela 6*

**Echivalarea cuplelor cinematice (după tabela 1 a familiei $f = 0$)**

| Nr. de ord. | Clasa cuplei înlocuite | Lanțul echivalent cu cupla înlocuită (lanț înlocuitor) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Clasa și numărul cuplelor | | | | Nr. elementelor |
| | $m$ | $c_5$ | $c_4$ | $c_3$ | $c_2$ | $n$ |
| 1 | 1 | 5 | — | — | — | 4 |
| 2 | | 3 | 1 | — | — | 3 |
| 3 | | 2 | — | 1 | — | 2 |
| 4 | | 1 | — | — | 1 | 1 |
| 5 | | — | 1 | 1 | — | 1 |
| 6 | 2 | 4 | — | — | — | 1 |
| 7 | | — | 2 | — | — | 1 |
| 8 | 3 | 3 | — | — | — | 2 |
| 9 | 4 | 2 | — | — | — | 1 |
| 10 | 5 | 1 | — | — | — | — |

Aceste echivalări rezultă din orice grupă assurică simplă de diferite familii.

imediat lanţul cinematic de înlocuire cu care este echivalentă cupla înlocuită.

Evident că clasa cuplei înlocuite este inferioară claselor cuplelor din lanţul de înlocuire.

Este recomandabilă utilizarea acestei tabele, care ne permite imediat rezolvarea problemei de alcătuire a lanţurilor cinematice cu cuple uniformizate sau pentru simplificarea construcţiei unui lanţ cinematic.

3.2. Modul de alcătuire a tabelei permite şi stabilirea formulei generale de echivalare.

Vom scrie, pentru acesta, formula structurală a unei grupe assurice de familia $f$ care are în structura ei :

— *a*) în primul caz : $n'$ elemente şi $c'_m$ cuple cinematice de aceeaşi clasă $m$;

— *b*) în al doilea caz : $n''$ elemente, $c''_m$ cuple cinematice de clasa $m$ şi o singură cuplă cinematică de clasa $m_1$.

În cazul *a*) formula structurală a grupei assurice este :

$$(6-f)n'-(m-f)c'_m=0; \tag{a}$$

în cazul *b*) va fi :

$$(6-f)n''-(m-f)c''_m-(m_1-f)=0. \tag{b}$$

Dacă se scade (b) din (*a*) şi se notează

$n'-n''=n$; $c'_m-c''_m=c_m$ se obţine

$$(6-f)n-(m-f)c_m=-(m_1-f). \tag{7}$$

De aici rezultă [1]) :

$$c_m=\frac{6-f}{m-f}n+\frac{m_1-f}{m-f}. \tag{8}$$

Pentru cazul lanţurilor simple (în care nici un element nu are mai mult de două cuple cinematice) avem

$$n=c_m-1, \tag{9}$$

astfel că din (8) şi (9) rezultă succesiv :

$$c_m=\frac{6-m_1}{6-m};\ n=\frac{m-m_1}{6-m}. \tag{10}$$

Dacă de exemplu se alege :

$m_1=4$ clasa cuplei înlocuite,

$m=5$ clasa cuplei înlocuitoare,

atunci din formulele (10) se obţine :

$$c_m=c_5=2 \text{ şi } n=1$$

ceea ce rezultă şi din rîndul 9 al tabelei 6.

---

[1]) Această formulă a fost găsită pe baza altui raţionament şi de autorii lucrării menţionate mai înainte [2].

Din formulele (10) rezultă că în *cazul lanţurilor cinematice simple assurice sau neassurice, echivalarea cuplelor cinematice nu depinde de familia lanţului sau grupei.*

Acest lucru nu mai este valabil în cazul lanţurilor complexe (lanţ cu elemente care au mai mult de două cuple cinematice), după cum uşor se constată din analizarea formulei (8).

Trebuie totuşi să precizăm că în practică nu vom utiliza niciodată formula (8) ci formulele (10) deoarece la echivalare se va căuta întotdeauna ca lanţul înlocuitor să fie cît mai simplu, deci cu cît mai puţine cuple şi elemente.

Echivalarea cuplelor cinematice prin lanţuri înlocuitoare permite transformarea mecanismului într-un mecanism cu cuple uniformizate şi uşurează determinarea familiei şi a gradului de mobilitate.

Se va vedea mai departe că şi la mecanismele cu cuple uniformizate există cazuri cînd acestea nu se încadrează într-o familie anumită.

## § 4. DETERMINAREA NUMĂRULUI DE ELEMENTE ŞI CUPLE CINEMATICE CARE SE POT EXTRAGE DINTR-O GRUPĂ ASSURICĂ DE O FAMILIE $f'$ PENTRU A O TRANSPORTA ÎN ALTĂ GRUPĂ DE FAMILIE $f'' > f'$

4.1. Se va porni în acest scop de la formula structurală a grupei assurice de familiile $f''$ respectiv $f'$ cu cuple cinematice uniformizate de clasa $m > f'' > f'$.

Avem astfel :

$$(6 - f')n' - (m - f')c'_m = 0,$$

$$(6 - f'')n'' - (m - f'')c''_m = 0.$$

De aici prin scădere rezultă :

$$6(n' - n'') - m(c'_m - c''_m) = f'(n' - c'_m) - f''(n'' - c''_m). \qquad (11)$$

Dacă se pune ca şi mai înainte :

$$n' - n'' = n\,; \quad c'_m - c''_m = c_m$$

şi ştiind că în cazul lanţurilor simple avem relaţia (9) (deoarece în acest caz $n' > n''$ şi $c'_m > c''_m$) rezultă

$$n' = c'_m - 1 \text{ şi } n'' = c''_m - 1$$

şi formula (11) devine :

$$6n - mc_m = f'' - f'. \qquad (12)$$

Formula (12) dă relaţia dintre numărul $n$ de elemente şi $c_m$ de cuple cinematice care se pot extrage dintr-un lanţ simplu de familie $f'$ pentru a-l transforma într-un lanţ de familie $f'' > f'$.

Din (12) rezultă

$$c_m = \frac{6\,n + f' - f''}{m}. \tag{13}$$

Pentru diferite valori ale lui $f'$, $f''$ și $m$ se obțin în tabela 7 valorile cele mai mici ale lui $n$ și $c_m$ care pot fi extrase dintr-un lanț cinematic de familie $f'$ pentru a-l transforma într-un lanț cinematic de familie $f'' > f'$.

*Tabela 7*

**Numărul cuplelor și elementelor cinematice care se pot extrage dintr-o grupă assurică simplă de familie $f'$ pentru a o transforma într-o grupă assurică simplă aparținînd unei familii $f'' > f'$**

| $f'$ familia grupei assurice inițiale | $m$ clasa cuplei cinematice | $f''$ = familia în care se transformă grupa assurică | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | |
| | | Nr. de elemente și cuple cinematice extrase din grupa assurică inițială | | | | | | | |
| | | $n$ | $c_m$ | $n$ | $c_m$ | $n$ | $c_m$ | $n$ | $c_m$ |
| 0 | 5 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| | 4 | — | — | 1 | 1 | — | — | | |
| | 3 | — | — | — | — | | | | |
| | 2 | — | — | | | | | | |
| | 1 | | | | | | | | |
| 1 | 5 | | | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| | 4 | | | — | — | 1 | 1 | | |
| | 3 | | | — | — | | | | |
| | 2 | | | | | | | | |
| 2 | 5 | | | | | 1 | 1 | 2 | 2 |
| | 4 | | | | | — | — | | |
| | 3 | | | | | | | | |
| 3 | 5 | | | | | | | 1 | 1 |
| | 4 | | | | | | | | |

4.2. Astfel pentru $f' = 0$ formula (13) devine

$$c_m = \frac{6\,n - f''}{m} \qquad \begin{matrix} m = 2 \ldots 5, \\ f'' = 1 \ldots 4, \end{matrix} \tag{14}$$

care ne dă relația dintre numărul cuplelor cinematice de clasa $m$ și numărul elementelor $n$ extrase dintr-o grupă assurică simplă de familia zero, pentru a o transforma în grupă assurică de familia $f''$.

Cu alte cuvinte, din formula (14) rezultă încă 4 formule de legătură după familia grupei finale $f''$ (1, 2, 3, 4).

Astfel :

pentru $f'' = 1$ formula (14) devine

$$c_m = \frac{6\,n - 1}{m} \text{ unde } m = 5, 4, 3, 2\,; \tag{15}$$

pentru $f'' = 2$

$$c_m = \frac{6n-2}{m} \text{ unde } m = 5, 4, 3\,; \tag{16}$$

pentru $f'' = 3$

$$c_m = \frac{6n-3}{m} \text{ unde } m = 5{,}4\,; \tag{17}$$

pentru $f'' = 4$

$$c_m = \frac{6n-4}{m} \text{ unde } m = 5. \tag{18}$$

Trebuie precizat că $f'' = 5$ nu poate fi luat în considerație, deoarece nu pot exista grupe cinematice cu cuple de aceeași clasă cu familia din care fac parte.

4.3. Pentru $f' = 1$, (13) devine

$$c_m = \frac{6n+1-f''}{m}, \tag{19}$$

de unde făcînd $f'' = 2$, 3, 4, rezultă

$$\left.\begin{aligned} &\text{pentru } f'' = 2\\ &\qquad c_m = \frac{6n-1}{m} \text{ unde } m = 3, 4, 5\,;\\ &\text{pentru } f'' = 3\\ &\qquad c_m = \frac{6n-2}{m} \text{ unde } m = 4, 5\,;\\ &\text{pentru } f'' = 4\\ &\qquad c_m = \frac{6n-3}{m} \text{ unde } m = 5. \end{aligned}\right\} \tag{19'}$$

4.4. Pentru $f' = 2$, (13) devine

$$c_m = \frac{6n+2-f''}{m}. \tag{20}$$

Dacă aici se face $f'' = 3{,}4$ se obține

pentru $f'' = 3$

$$c_m = \frac{6n-1}{m} \text{ unde } m = 4, 5\,;$$

pentru $f'' = 4$

$$c_m = \frac{6n-2}{m} \text{ unde } m = 5. \tag{20'}$$

4.5. În sfîrșit, pentru $f' = 3$ formula (13) devine

$$c_m = \frac{6n + 3 - f''}{m}, \tag{21}$$

Formula (21) este valabilă numai pentru $f'' = 4$ și $m = 5$. Astfel că ea devine:

$$\text{pentru } f'' = 4\,;\; c_m = \frac{6\,n - 1}{m} \text{ unde } m = 5\cdot \tag{21'}$$

În tabela 7 s-au trecut toate soluțiile realizabile în practică ale ecuațiilor (13) ... (21').

Se constată că există posibilități relativ reduse de trecere a unei grupe assurice simple dintr-o familie $f'$ în altă familie $f''$ unde $f'' > f'$.

4.6. *Observații.* *a*) Ceea ce este important de reținut este că elementele și cuplele cinematice din tabela 7 pot fi extrase din orice grupă assurică simplă dintr-o familie $f'$ (indiferent dacă are sau nu cuplele uniformizate) și se va obține grupa corespunzătoare de familie $f'' > f'$.

Astfel spre exemplu dacă vrem să transformăm grupa cinematică de familia $f = 0$ cu numărul de ordine 6 al tabelei 1($c_5' = 2$, $c_4' = 2$ și $n' = 3$) într-o grupă assurică de familia $f'' = 2$, vor trebui extrase conform tabelei 7 rîndul 1 col. 5 și 6, două elemente și două cuple de clasa $m = 5$ ($n = 2$, $c_5 = 2$).

Rezultă o grupă assurică simplă cu cuple uniformizate $c_4'' = 2$; $n'' = 1$ aflată în tabela 3 în rîndul 4.

*b*) A doua observație care trebuie făcută este că transformarea unei grupe sau a unui lanț dintr-o familie $f'$ în alta $f''$ prin *rigidizarea* anumitor cuple este în fond echivalentă cu *extragerea* din structura lui a unui număr de elemente și cuple cinematice conform tabelei 7. Această operație se poate face oricărui lanț cinematic sau grupă assurică simplă, numărul de cuple care trebuie rigidizate fiind egal cu $c_m$ dat de formulele (13) ... (21').

*c*) În sfîrșit o a treia observație se referă la problema inversă: la adăugarea de cuple și elemente unui lanț sau grupă assurică de o familie $f'$ pentru a-l transforma într-o familie $f'' < f'$.

Pentru aceasta nu este suficient ca numărul de elemente și cuple cinematice de adăugat să satisfacă formulele (13) ... (21) sau să se încadreze în tabela 7 ci și condiția esențială de a permite și lărgi posibilitatea de mișcări existente ale grupei de transformat și nu de a răpi eventual și libertățile de mișcare pe care le are, sau invers: să-i adauge alte grade de mobilitate, transformînd grupa în lanț de aceeași familie.

Aici apare noțiunea de subfamilie care trebuie avută în vedere cînd se adaugă elementele și cuplele cinematice din tabela 7. Această problemă este — după cum s-a mai menționat — în rezolvare în continuare.

În concluzie, tabelele 1 ... 7 permit cercetătorului analizarea structurală și cinematică a oricărui mecanism.

## PARTEA A II-a

## § 5. DETERMINAREA FAMILIEI „$f$" A MECANISMULUI

5.1. *Metoda tabelară.* După fixarea criteriilor de identificare a grupelor cinematice de diferite familii se va trece acum la determinarea familiei $f$ a unui mecanism.

Determinarea familiei mecanismului este foarte importantă, deoarece fără aceasta nu este posibilă aplicarea corectă a formulei structurale (1) a lui V. V. Dobrovolski.

Se arată mai jos metoda *tabelară*, care constă în a identifica mișcările pe care le are fiecare element al unui mecanism în raport cu un sistem de axe fixe în spațiu. Sistemul de axe fixe se alege astfel încît să fie posibilă identificarea mișcărilor elementelor în raport și cu un sistem paralel cu cel fix.

Să luăm pentru aceasta cunoscutul mecanism al balanței (fig. 1) după V. V. Dobrovolski.

Se întocmește tabela din figură scriind mișcările posibile ale fiecărui element în ordinea legării lor în lanț cinematic.

Elementele de la 1 pînă la 5 închizînd lanțul simplu prin elementul 8 (baza sau batiul) arată prin mișcările ce le are, că există posibilitatea transmiterii mișcării de la un element la celălalt, fără să existe posibilitatea imobilizării vreunuia din ele. Astfel drumul săgeților continue arată și gradul de mobilitate al mecanismului.

Din tabelă se constată că tuturor elementelor le lipsește o mișcare: posibilitatea de rotire în jurul axei $y(\omega_y = 0)$.

În consecință mecanismul este de familia $f = 1$ și este compus din două lanțuri cinematice simple (1, 2, 3, 4, 5, 8) și (1, 2, 3, 6, 7, 8).

Atît din tabelă cît și din formula (1) rezultă $M_1 = 1$.

În adevăr din formula (1) pentru $f = 1$ rezultă

$$M_1 = 5\,n - \sum_{n=2}^{5} (m - 1)\,C_m,$$

sau

$$M_1 = 5\,n - 4\,c_5 = 5 \cdot 5 - 4 \cdot 6 = 1$$

(s-au eliminat din calcul elementele pasive, de exemplu 6, 7).

Din tabelă, urmărind după săgeată modul de transmitere a mișcării se ajunge de la elementul 1 pînă la elementul 5 printr-o săgeată continuă.

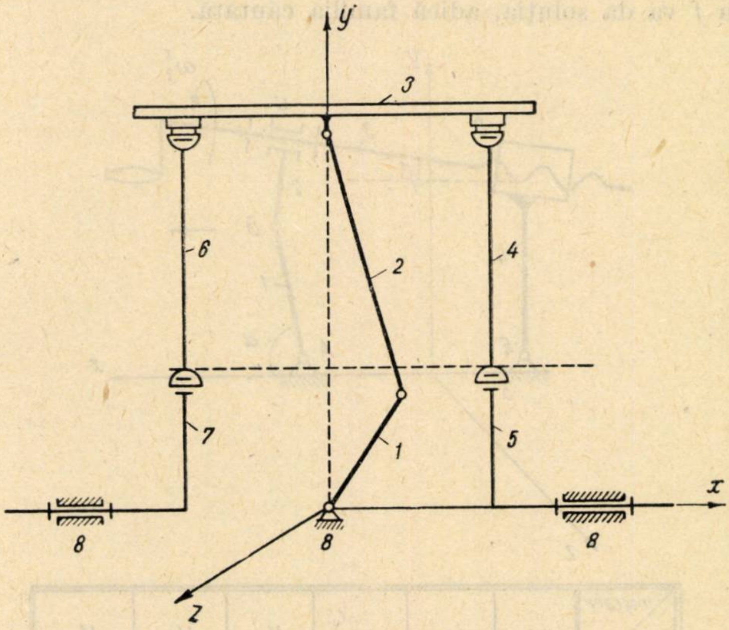
Se va lua ca al doilea exemplu mecanismul pentru reglat înălțimea la plugul de tractor (fig. 2).

După întocmirea tabelei din figură se constată imediat că $\omega_y = 0$ și $v_z = 0$ deci $f = 2$.

Gradul de mobilitate

$$M_2 = 4\,n - 3\,c_5 = 4 \cdot 4 - 3 \cdot 5 = 1.$$

Urmărind ordinea săgeţilor din tabelă se constată de asemenea că elementul conducător este elementul 3 de la care se poate porni cu trasarea săgeţilor.



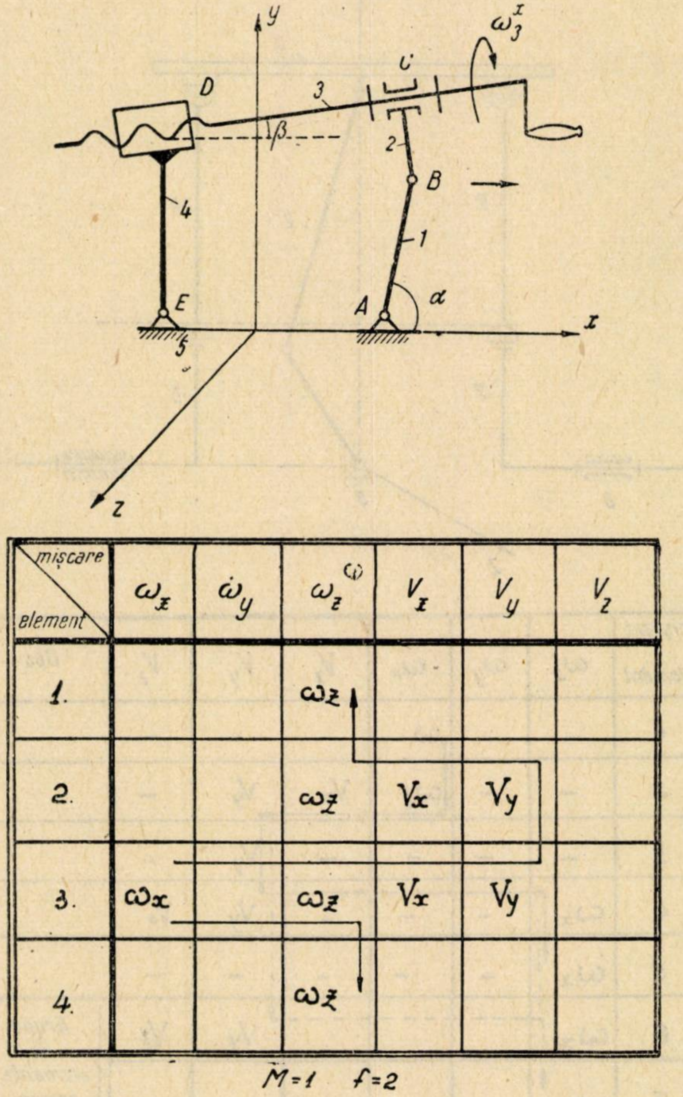
| mişcare / element | $\omega_x$ | $\omega_y$ | $\omega_z$ | $V_x$ | $V_y$ | $V_z$ | Obs |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | – | – | $\omega$ | – | – | – | |
| 2 | – | – | $\omega_z$ | $V_x$ | $V_y$ | – | |
| 3 | – | – | – | – | $V_y$ | – | |
| 4 | $\omega_x$ | – | – | – | $V_y$ | $V_z$ | |
| 5 | $\omega_x$ | – | – | – | – | – | |
| 6 | $\omega_x$ | | | | $V_y$ | $V_z$ | Grupa de elemente pasive |
| 7 | $\omega_x$ | | | | | | |

Fig. 1

5.2. *Metoda analitică pentru aflarea lui f.* Formula (1) se poate aplica în acest caz atunci cînd se cunoaşte $M_f$ (gradul de mobilitate).

Eliminînd elementele pasive și cuplele corespunzătoare acestora se determină $n$ și $\sum c_m$.

Singura necunoscută fiind în acest caz $f$, rezolvarea ecuației (1) în raport cu $f$ va da soluția, adică familia căutată.



| mișcare / element | $\omega_x$ | $\omega_y$ | $\omega_z$ | $V_x$ | $V_y$ | $V_z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | | | $\omega_z$ | | | |
| 2. | | | $\omega_z$ | $V_x$ | $V_y$ | |
| 3. | $\omega_x$ | | $\omega_z$ | $V_x$ | $V_y$ | |
| 4. | | | $\omega_z$ | | | |

$M=1$ $f=2$

Fig. 2

Ca exemplu se va aplica această metodă la mecanismul din figura 1, unde se constată că $M_f = 1$, astfel că formula (1) devine

$$1 = (6 - f)\,n - (5 - f)\,c_5,$$

unde

$$n = 5 \text{ şi } c_5 = 6 \text{ astfel că :}$$

$$(6 - f)5 - (5 - f)\cdot 4 = 1 \text{ de unde rezultă } f = 1.$$

În cazul mecanismului din figura 2 formula 1 devine

$$(6 - f)n - (5 - f)c_5 = 1,$$

unde

$$n = 4\,; c_5 = 5 \text{ astfel că se obţine } f = 2.$$

5.3. *Concluzii.* Cercetătorul poate folosi oricare din cele două metode, după caz.

Prima este mai avantajoasă, deoarece nu obligă pe cercetător la o examinare prealabilă a mecanismului, spre a-i determina prin metode geometrice gradul de mobilitate $M_f$ şi nici de a identifica în prealabil şi elementele pasive.

A doua are însă avantajul că o dată identificat gradul de mobilitate $M_f$, dă posibilitate ca să se constate pe cale analitică familia $f$ şi — ceea ce se va vedea mai departe — dacă mecanismul în ansamblu se poate încadra într-o singură familie, ştiut fiind că există numeroase mecanisme care nu se încadrează într-o singură familie.

## PARTEA A III-a

# MECANISME CARE NU SE ÎNCADREAZĂ ÎNTR-O SINGURĂ FAMILIE

### § 6. IDENTIFICAREA GRUPELOR DIN CARE ESTE COMPUS UN MECANISM CARE NU SE ÎNCADREAZĂ ÎN NICI O FAMILIE

6.1. *Aplicarea metodei analitice pentru aflarea familiei „f”.* Se ia pentru exemplificare mecanismul din figura 3 care transformă mişcarea de rotaţie dintr-un plan în alt plan în speţă perpendicular pe cel iniţial.

Din examinarea tabelei rezultă că mecanismul este de familia $f = 2$ şi are gradul de mobilitate $M_2 = 1$, obţinut din urmărirea sensului săgeţii transmiterii mişcării.

Dacă acum se aplică formula structurală (1) pentru cazul $f = 2$ rezultă

$M_2 = 4\ n - 3\,c_5 = 4.6 - 3.8 = 0$ ceea ce nu corespunde cu realitatea.

Calculînd pe $f$ din (1) cu metoda analitică rezultă

$$(6 - f)n - (5 - f)c_5 = 1 \text{ sau}$$

$$(6 - f)6 - (5 - f)8 = 1 \text{ de unde}$$

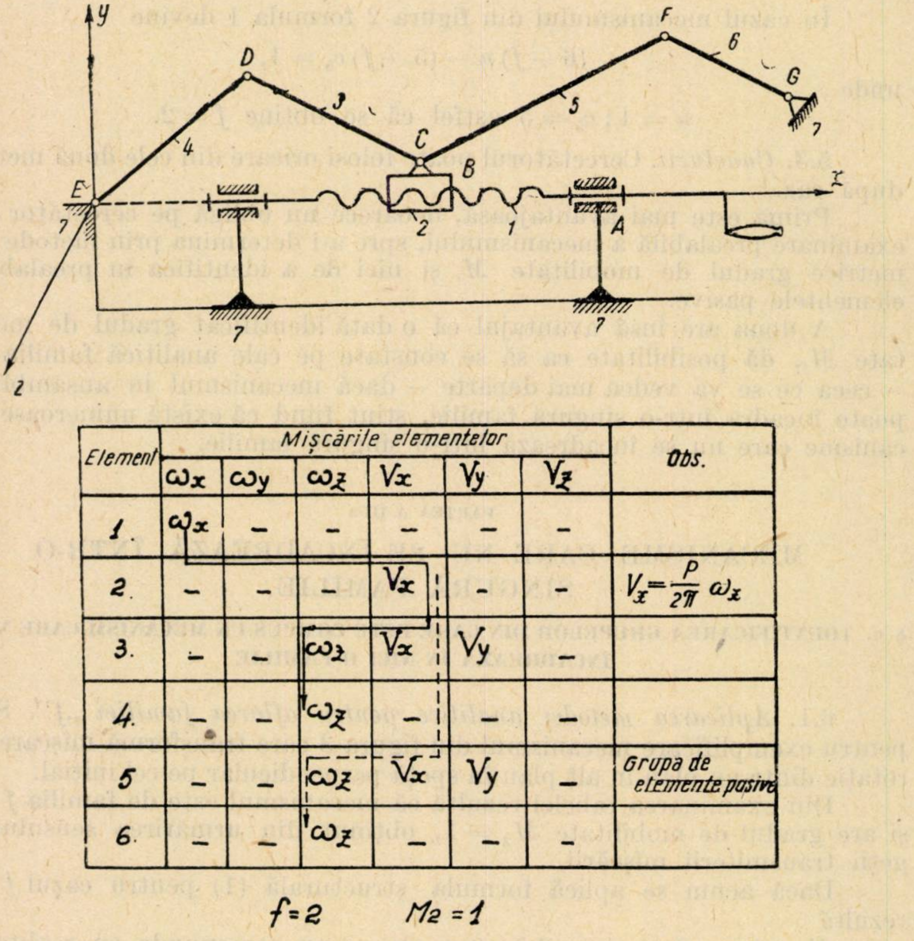
$$f = 2{,}5.$$

În concluzie mecanismul nu se încadrează în nici o familie.

Explicaţia acestei neconcordanţe provine din faptul că în structura mecanismului apare o grupă assurică de familia 3 cu caracter de elemente pasive.

Această grupă poate fi fie diada (3, 4), fie diada (5, 6).

Un alt exemplu de mecanism care nu se încadrează în nici o familie este cunoscuta presă prin fricțiune, a cărei schemă cinematică și tabelă de mișcări este dată în figura 4.



| Element | Mișcările elementelor | | | | | | Obs. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\omega_x$ | $\omega_y$ | $\omega_z$ | $V_x$ | $V_y$ | $V_z$ | |
| 1. | $\omega_x$ | – | – | – | – | – | |
| 2. | – | – | – | $V_x$ | – | – | $V_x = \frac{P}{2\pi}\omega_x$ |
| 3. | – | – | $\omega_z$ | $V_x$ | $V_y$ | – | |
| 4. | – | – | $\omega_z$ | – | – | – | |
| 5 | – | – | $\omega_z$ | $V_x$ | $V_y$ | – | Grupa de elemente pasive |
| 6. | – | – | $\omega_z$ | – | – | – | |

$f=2$ $M_2=1$

Fig. 3

Din examinarea tabelei rezultă că mecanismul este de familia $f = 3$ și cu $M_3 = 1$ dedus din urmărirea sensului săgeților transmiterii mișcării.

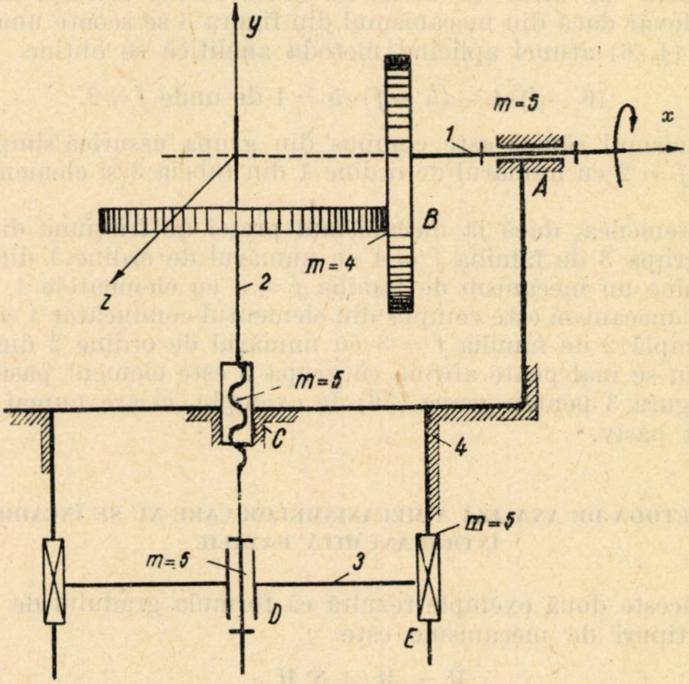
Aplicînd însă formula (1) corespunzătoare lui $f = 3$ se obține $M_3 = 3\,n - 2\,c_5 - c_4 = 3.3 - 2.4 - 1.1 = 0$ ceea ce ca și în primul caz nu corespunde realității.

Calculînd pe $f$ din (1) știind că $M = 1$ se obține

$$(6-f)\cdot 3 - (5-f)\cdot 4 - (4-f)\cdot 1 = 1 \text{ de unde}$$

$$f = 3{,}5.$$

Deci nici acest mecanism nu poate fi încadrat în nici una din familiile de mecanisme ale lui V. V. Dobrovolski.



| Element | Mișcările elementelor | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\omega_x$ | $\omega_y$ | $\omega_z$ | $V_x$ | $V_y$ | $V_z$ | |
| 1 | $\omega_x$ | – | – | – | – | – | |
| 2 | – | $\omega_y$ | – | – | $V_y$ | – | $V_y = \frac{p}{2\pi}\omega_y$ |
| 3 | | | | | $V_y$ | | |

Fig. 4

În tabela mișcărilor din figura 4 s-au trecut în coloane și mișcările punctului de contact al cuplei cinematice care permite transmiterea mișcării de la un element la celălalt.

6.2. *Explicația neconcordanței dintre cele două metode de determinare a familiei mecanismelor.* Dacă examinăm cu atenție ambele mecanisme analizate constatăm — după cum s-a și arătat — că în structura lor *se găsesc* *grupe cinematice assurice de familii diferite, grupe care în cazul de față au caracterul de elemente pasive,* deoarece permit transmiterea mișcărilor de la un element la altul și astfel nu introduc noi condiții de legătură.

În adevăr dacă din mecanismul din figura 3 se scoate una din diade (3, 4) sau (4, 6) atunci aplicînd metoda analitică se obține

$$(6 - f)\cdot 4 - (5 - f)\cdot 5 = 1 \text{ de unde } f = 2.$$

Mecanismul rămas este compus din grupa assurică simplă (2, 3, 4) de familia $f = 2$ cu numărul de ordine 1 din tabela 3 și elementul conducător 1.

De asemenea, dacă la mecanismul presei de fricțiune din figura 4 se scoate grupa 3 de familia $f = 4$ cu numărul de ordine 1 din tabela 5, atunci rămîne un mecanism de familia $f = 3$ cu elementele 1 și 2.

Acest mecanism este compus din elementul conducător 1 și din grupa assurică simplă 2 de familia $f = 3$ cu numărul de ordine 2 din tabela 4. Aici însă nu se mai poate afirma că grupa 3 este element pasiv așa cum apare în figura 3 pentru grupa (56) de exemplu, ci are numai caracterul de element pasiv.

## § 7. METODA DE ANALIZĂ A MECANISMELOR CARE NU SE ÎNCADREAZĂ ÎNTR-O ANUMITĂ FAMILIE

Din aceste două exemple rezultă că formula gradului de mobilitate a acestor tipuri de mecanisme este

$$M = M_f + \Sigma M_{gf'} \tag{22}$$

unde

$M_f$ — gradul de mobilitate al mecanismului de familia $f$ rămas după scoaterea grupelor assurice de alte familii decît $f$, fie că aceste grupe au sau nu caracter de elemente pasive.

$\Sigma M_{gf'}$ — suma gradelor de mobilitate ale grupelor cinematice de diferite familii sumă care :

— este egală cu zero în cazul grupelor assurice ;

— este diferită de zero și pozitivă pentru grupele neassurice.

7.1. *Cazul cînd grupa assurică trebuie să aibă caracterul de elemente pasive.* La mecanismul din figura 3 grupa (5.6) sau (3.4) de cl. II ord. 2 de familia a 3-a este formată din elemente pasive.

Se aplică acestui mecanism formula (22) și se obține :

$$M = M_2 + M_{g3} = (4.4 - 3.5) + (3.2 - 2.3) = 1.$$

La mecanismul din figura 4 aplicarea formulei (22) dă

$$M = M_3 + M_{g4} = (3.2 - 2.2 - 1.1) + (2.1 - 1.2) = 1.$$

Se observă că în aceste două cazuri $f < f'$ și legarea unei grupe de o familie $f'$ mai mare decît $f$ a mecanismului inițial a fost posibilă (după cum uşor se poate observa din tabelele figurilor 3 şi 4) datorită faptului că elementele grupei posedă mişcări existente în mecanismul iniţial de familia $f$.

Astfel din tabela figurii 3 se observă că elementul 5 care se leagă de elementele 2 şi 3 (prin cupla cinematică dublă c) posedă pe $\omega_z$, $v_x$ şi $v_y$ ale elementului 3 iar elementul 6 pe $\omega_z$ al elementului 4.

De asemenea, din tabela figurii 4 se observă că elementul 3 care se leagă de 2 prin cupla $D$ posedă mişcarea $v_y$ a acestuia.

*Formula (22) impune astfel ca la toate mecanismele să se analizeze mai întîi găsirea elementelor pasive cum şi a grupelor de diferite familii cu caracter de elemente pasive pentru ca după identificarea lor să se aplice formula (22).*

7. 2. *Cazul cînd grupele assurice nu mai au caracterul de elemente pasive.* Pentru a putea generaliza această formulă va trebui să analizăm ce se întîmplă cu mecanismele formate din grupe de familii diferite ale căror elemente nu mai au caracterul de elemente pasive.

*a*) Să luăm pentru aceasta mecanismul din figura 5.

Acesta după cum se vede este un mecanism iniţial de familia $f = 4$ (1, 2) lungit cu o grupă assurică (3, 4) de familia $f' = 3$ de clasa II ord. 2 (diadă).

Din tabela gradelor de libertate ale elementelor, mecanismul apare de $f' = 3$.

Dacă se aplică formula Dobrovolski (1) se găseşte că:

$$M = 3n - 2c_5 = 3.4 - 2.6 = 0.$$

Elementele pasive nu mai apar aici în mod evident, deoarece din mişcarea de translaţie $v_y$ a elementului conducător 1 s-a creat cea de rotaţie $\omega_z$ a elementului 4, deci o mişcare pe care nu o avea elementul iniţial de familia $f = 4$.

Formula mobilităţii din (22) devine deci:

$$M = M_4 + M_{g3} = (2n - c_5) + (3n' - 2c_5') =$$

$$= (2.2 - 3) + (3.2 - 2.3) = 1 + 0 = 1.$$

Aici se vede că $f > f'$ $(4 > 3)$.

Un alt exemplu este mecanismul din figura 6 format dintr-un mecanism iniţial de familia $f = 4$ (1, 2) lungit cu o grupă assurică de familia $f' = 2$ (3, 4, 5) din tabela 3 cu numărul de ordine 1, căruia aplicîndu-i formula (22) se obţine

$$M = M_4 + M_{g2} = (2n - c_5) + (4n' = -3c_5') =$$

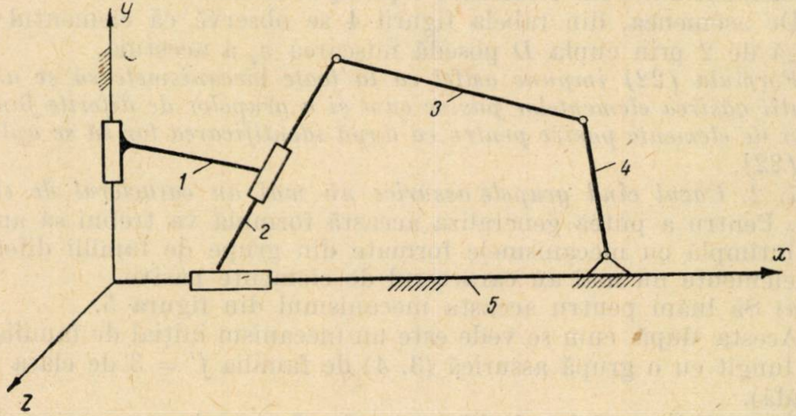
$$= (2.2 - 3) + (4.3 - 3.4) = 1 + 0 = 1,$$

unde de asemenea

$$f > f' (4 > 2).$$

*b*) Dacă se ia mecanismul din figura 7 compus din mecanismul inițial de familia $f = 3$ (1, 2, 3) lungit cu o grupă assurică (4) de familia $f = 4$ și se întocmește tabela gradelor de libertate se vede că rezultă $f = 3$.

Din examinarea atentă însă a modului de legare a elementelor 3 și 4 și a acestuia din urmă cu batiul se vede că este o diferență esențială



| Element | Mișcare | | | | | | Obs. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\omega_x$ | $\omega_y$ | $\omega_z$ | $V_x$ | $V_y$ | $V_z$ | |
| 1 | | | | | $V_y$ | | Mecanism de $f=4$ |
| 2 | | | | $V_x$ | | | |
| 3 | | | $\omega_z$ | $V_x$ | $V_y$ | | Grupă assurică de $f=3$ |
| 4 | | | $\omega_z$ | | | | |

$$M = M_4 + M_{g3} = 1$$

Fig. 5

între acesta și mecanismul presei cu fricțiune din figura 4. În figura 7 elementele 3 și 4 se rigidizează reciproc prin cuplele *D* și *F*, deoarece mișcarea pe care o posedă elementul 3($\omega_z$) împiedică mișcările elementului 4 ($v_x$, $v_y$) și invers.

Dacă se aplică formula (22) fără a se ține seama de cele de mai sus rezultă :

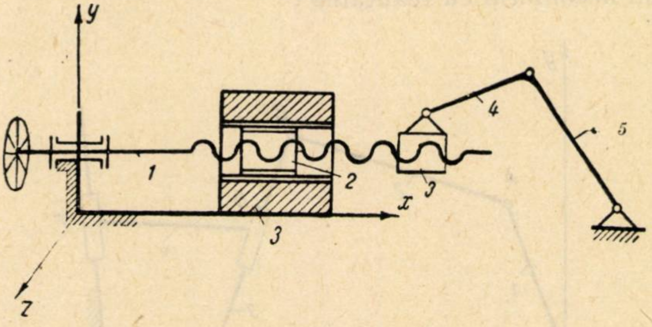
$$M = M_3 + M_{g4} = (3.3 - 2.4) + (2.1 - 1.2) = 1$$

deci un rezultat ireal.

Acest rezultat este explicabil, deoarece $f < f'$ singura posibilitate care poate duce la cazuri ca cel de mai sus, afară de cazul elementelor pasive.

Pentru aceasta, formula generală a gradului de mobilitate al unui mecanism se poate scrie:

$$M = M_f + \sum M_{gf'},$$
$$f \geqslant f'. \qquad (23)$$



| Element | Mișcările elementelor | | | | | | Obs. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\omega_x$ | $\omega_y$ | $\omega_z$ | $V_x$ | $V_y$ | $V_z$ | |
| 1 | $\omega_x$ | – | – | – | – | – | Mecanism de familia<br>$f=4$ |
| 2 | $\omega_x$ | – | – | $\frac{p}{2\pi}\omega_x$ | – | – | |
| 3 | – | – | – | $V_x$ | – | – | Grupă assurică de familia<br>$f=2$ |
| 4 | – | – | $\omega_z$ | $V_x$ | $V_y$ | – | |
| 5 | – | – | $\omega_z$ | – | – | – | |

$$M = M_4 + M_{g_3} = 1$$

Fig. 6

Această formulă *elimină în consecință posibilitatea analizării greșite a unui mecanism prin pornirea de la un mecanism inițial de o familie f mai mică decît a grupelor care-l amplifică.*

Formula (23) *obligă la identificarea elementelor și grupelor cu caracter de elemente pasive de familii diferite de a mecanismului inițial.*

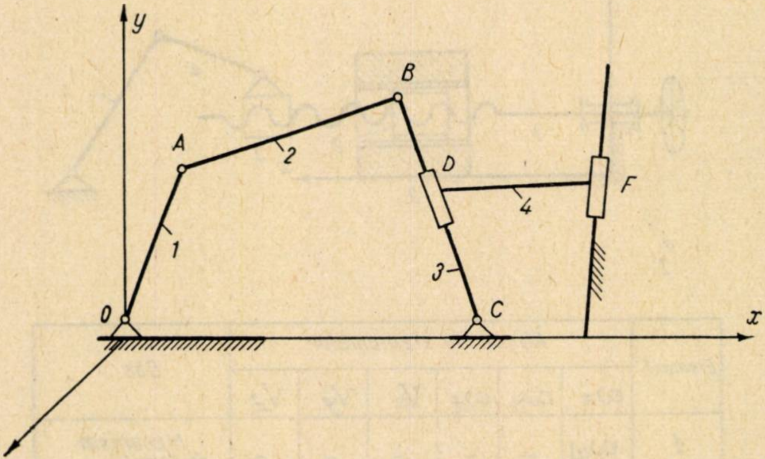
Ca ultimă aplicație a formulei (23) se va lua mecanismul mașinii de cusut talpa din figura 8 (vezi „Cinematica mecanismelor'' apărută în Ed. tehnică, 1959).

Din tabela gradelor de libertate rezultă că mecanismul în ansamblu apare de familia $f = 0$.

Dacă se aplică formula (1) rezultă :

$$M_0 = 6n - 5c_5 - 4c_4 - 3c_3 - 2c_2 - c_1 = 6.7 - 5.5 - 4.5 - 3.1 - 0 - - 0 = -6,$$

deci cu totul neconform cu realitatea !

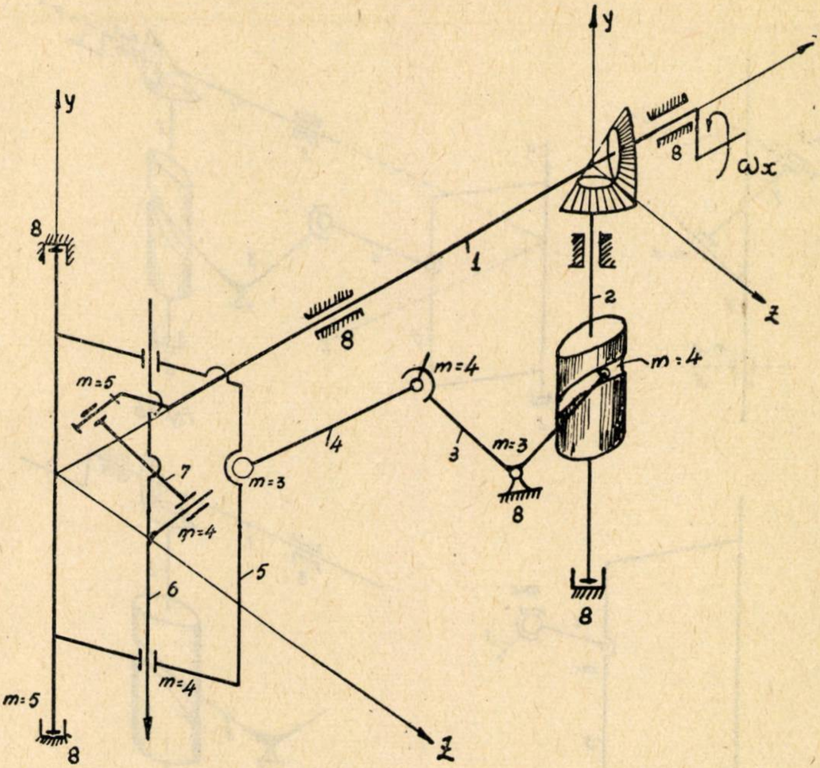


| Element | Mişcările elementelor | | | | | | Obs. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\omega_x$ | $\omega_y$ | $\omega_z$ | $V_x$ | $V_y$ | $V_z$ | |
| 1 | - | - | $\omega_z$ | - | - | - | Mecanism de familia f = 3 |
| 2 | - | - | $\omega_z$ | $V_x$ | $V_y$ | - | |
| 3 | - | - | $\omega_z$ | - | - | - | |
| 4 | - | - | - | - | $V_y$ | - | Grupă assurică de familia f = 4 |

$$M = M_3 + M_{g4} = 0 \qquad (4 > 3)$$

Fig. 7

De asemenea, nici aici nu mai este posibil de a se interpreta rezultatul prin existența de elemente pasive ca în cazul mecanismelor din figurile 1 și 2.


y
y
ωx
8
8
8
1
2
z
z
8
m=5
m=4
m=4
7
m=4
4
3
m=3
m=3
8
5
6
m=4
m=5
8
8

| Element | Mişcările elementelor | | | | | | Obs. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\omega_x$ | $\omega_y$ | $\omega_z$ | $V_x$ | $V_y$ | $V_z$ | |
| 1 | $\omega_x$ | – | – | – | – | – | Mecanism de familia<br>$f=3$ |
| 2 | – | $\omega_y$ | – | – | – | – | |
| 3 | – | – | $\omega_z$ | – | – | - | |
| 4 | $\omega_x$ | $\omega_y$ | $\omega_z$ | $V_x$ | $V_y$ | $V_z$ | Grupă assurică de familia<br>$f=0$ |
| 5 | – | $\omega_y$ | – | - | – | - | |
| 6 | - | $\omega_y$ | – | – | $V_y$ | - | Grupă assurică de familia<br>$f=1$ |
| 7 | $\omega_x$ | – | – | – | $V_y$ | $V_z$ | |

$$M = M_3 + M_{g_0} + M_{g_1} = 1$$

Fig. 8 *a*

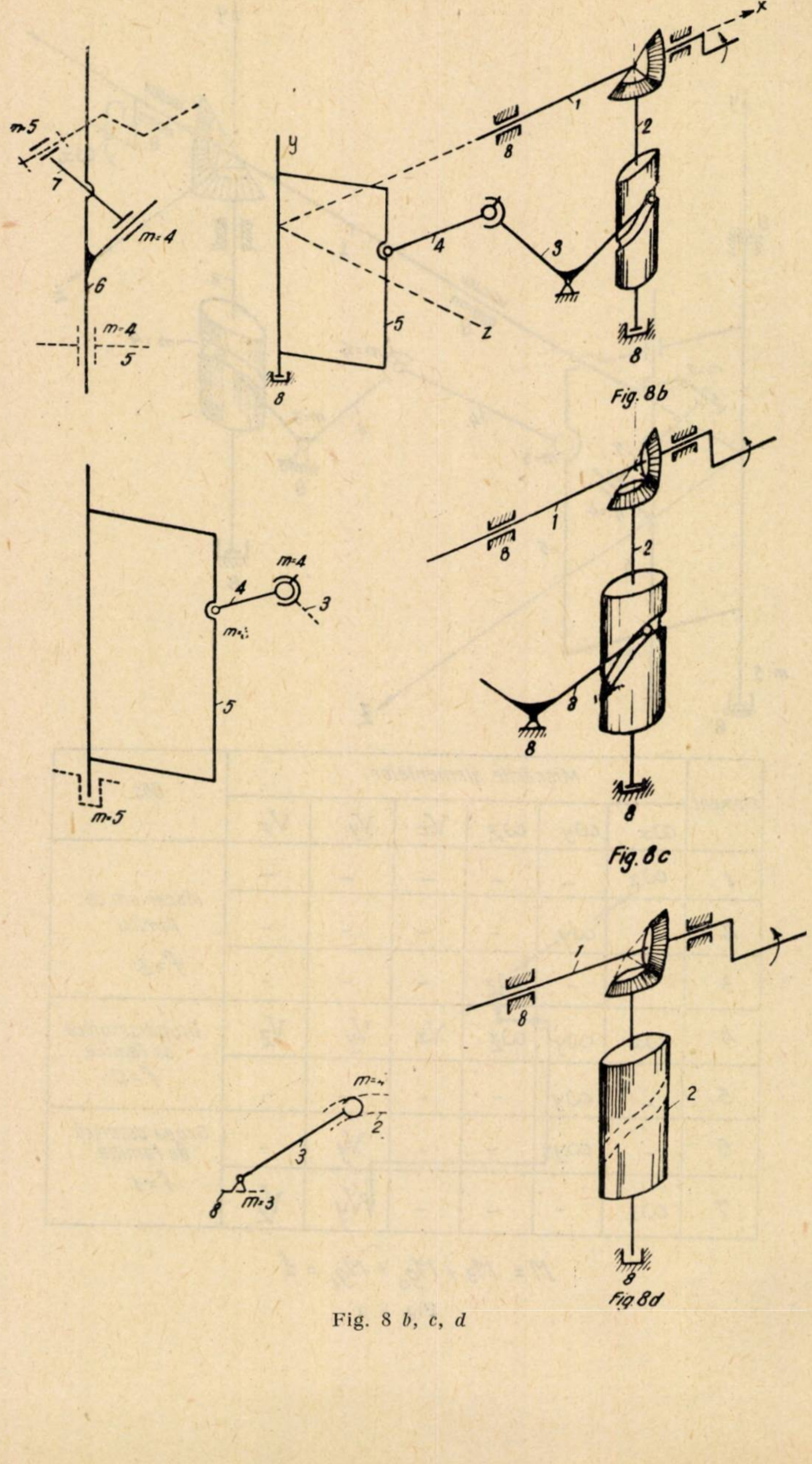

m=5
m=4
m=4
y
z
x
Fig. 8b
m=4
m=5
Fig. 8c
m=4
m=3
Fig 8d

Fig. 8 *b*, *c*, *d*

Dacă se caută familia mecanismului cu ajutorul metodei analitice din formula (1) rezultă :

$$1 = (6 - f)\,n - (5 - f)\,c_5 - (4 - f)\,c_4 - (3 - f)\,c_3 = (6 - f)\cdot 7 - (5 - f)\cdot 5 - (4 - f)\cdot 5 - (3 - f).1,$$

de unde $f = \frac{7}{4}\cdot$

*Aceste rezultate impun deci aplicarea formulei* (*23*).

Se procedează astfel la identificarea grupelor assurice de diferite familii, folosind tabelele 1—5.

Astfel se identifică :

1) grupa de familie $f' = 1$ din tabela 2 poz. 5 cu

$$n' = 2\,;\ c_5' = 1\,;\ c_4' = 2\,;$$

2) grupa de familie $f' = 0$ din tabela 1 poz. 7 cu

$$n' = 2\,;\ c_5' = 1\,;\ c_4' = 1\,;\ c_3' = 1\,;$$

3) grupa de familie $f' = 3$ din tabela 4 poz. 2 cu

$$n' = 1\,;\ c_5' = 1\,;\ c_4' = 1.$$

După extragerea grupei $f' = 1$ rămîne mecanismul din figura 8 *b* unde cadrul 5 se vede că primeşte mişcarea prin elementele 2, 3, 4.

După extragerea grupei de $f' = 0$ rămîne mecanismul din figura 8 *c* de familia $f = 3$ compus din grupa de familia $f' = 3$ şi mecanismul iniţial din figura 8 *d*.

Aplicînd formula (23) acestui mecanism avem :

$$M = M_f + \Sigma M_{gf'}\ (f \geqslant f') =$$

$$= M_3 + M_{g1} + M_{g0} = M_3,$$

de unde

$$M_3 = 3\,n - 2\,c_5 - c_4 = 3.3 - 2.3 - 2 = 1.$$

Din aceste exemple caracteristice considerăm că este posibil să se scoată în evidenţă însemnătatea formulei (23) şi a tabelelor 1—5 precum şi a metodelor tabelară şi analitică pentru analizarea unui mecanism oricît de complicat ar fi şi care nu se încadrează în nici o familie.

*Primită la redacţie la 1 februarie 1960*

# О МЕХАНИЗМАХ, СОСТАВЛЕННЫХ ИЗ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ РАЗЛИЧНЫХ СЕМЕЙСТВ

## РЕЗЮМЕ

Излагаются различные методы нахождения семейства механизма, основанные либо на свободах движения, отнятых от звеньев до их связи в кинематическую цепь (метод табулирования), либо на формуле

В. В. Добровольского, когда предварительно известна степень подвижности (аналитический метод).

Эти методы справедливы, когда в структуре исследуемого механизма находятся только ассуровые группы одного и того же семейства „$f$”.

Приводятся несколько примеров механизмов, откуда следует, что формула степени подвижности механизмов, установленная В. В. Добровольским, неприменима.

Этим методом показывается, что существуют еще механизмы, у которых ассуровые группы уже не имеют характера пассивных звеньев, причем уточняется способ соединения звеньев и их последовательности, так чтобы механизм не становился жестким полностью или частично.

Применяя вышеуказанные принципы, устанавливается структурная формула степени подвижности механизма

$$M = M_f + \sum M_{gf},$$
$$f \geqslant f',$$

где $M$ — степень подвижности механизма, составленного из кинематических цепей различных семейств;

$M_f$ — степень подвижности основного механизма семейства $f$, остающегося после устранения из механизма групп или цепей различных семейств;

$\sum M_{gf}$ — сумма всех степеней подвижности групп или кинематических цепей различных семейств (в случае ассуровых групп $\sum M_{gf'}=0$).

## ÜBER GETRIEBE AUS KINEMATISCHEN KETTEN VERSCHIEDENER FAMILIEN

### ZUSAMMENFASSUNG

Es werden verschiedene Methoden zur Bestimmung der Familie eines Getriebes gezeigt, die sich entweder auf die Freiheitsgrade, die den Gliedern vor dem Eintritt in die kinematische Kette entzogen wurden (Tabellenmethode) oder aber — wenn der Beweglichkeitsgrad im voraus bekannt ist, — auf die von W. W. Dobrowolski aufgestellte Formel (analytische Methode) stützen.

Diese Methoden sind anwendbar, wenn das betreffende Getriebe nur aus Assurgruppen der gleichen Familie $f$ besteht.

Es werden einige Beispiele von Getrieben gegeben, für welche die Dobrowolskische Formel des Bewegungsgrades der Getriebe nicht anwendbar ist.

Mit Hilfe dieser Methode wird dann gezeigt, daß es Getriebe gibt, bei denen die Assurgruppen nicht mehr den Charakter passiver Glieder haben und bei dieser Gelegenheit festgelegt, wie die Glieder in ihrer Folge

verbunden sein müssen, damit das Getriebe nicht völlig oder teilweise starr wird.

Auf Grund der obigen Prinzipien wird die Strukturformel für den Beweglichkeitsgrad des Getriebes aufgestellt:

$$M = M_f + \sum M_{gf'}.$$
$$f \geqslant f'$$

wo $M$ — der Beweglichkeitsgrad des aus kinematischen Ketten verschiedener Familien bestehenden Getriebes,

$M_f$ — der Beweglichkeitsgrad des zur Familie $f$ gehörenden Grundgetriebes, der nach Entfernung der Gruppen oder Ketten verschiedener Familien aus dem Getriebe verbleibt,

$\sum M_{gf'}$ — die Summe aller Beweglichkeitsgrade der Gruppen oder kinematischen Ketten verschiedener Familien (im Falle der Assurgruppen $\sum M_{gf'} = 0$) bedeuten.

## BIBLIOGRAFIE

1. ARTOBOLESCHI I. I., *Teoria mecanismelor şi maşinilor*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1956.
2. BOGDAN R., BUGAEVSCHI E., PELECUDI C., *Contribuții la clasificarea mecanismelor spațiale*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *8*, 407 (1957).
3. БРУЕВИЧ Н. Г., *Пространственные механизмы с пассивными связями*. Журнал ,,Вестник инженеров и техников'', *5* (1937).
4. ДИМЕНТБЕРГ Ф. М., *Общий метод исследования конечных перемещений пространственных механизмов и некоторые случаи пассивных связей*. Труды семинара по теории машин и механизмов. Вып. 17. Изд. АН СССР, 1948.
5. ДОБРОВОЛЬСКИЙ В. В., *К вопросу о пассивных связях*. Журнал ,,Вестник машиностроения'', *10* (1947).
6. — *Теория механизмов*. Машгиз, 1953.
7. КОБРИНСКИЙ А. Е., *О кинетостатическом расчете механизмов с пассивными связями с учетом зазоров*. Труды семинара по теории машин и механизмов. Вып. 20. Изд-во АН СССР, 1948.
8. КОЖЕВНИКОВ С. Н., *Теория механизмов и машин*. Машгиз, 1954.
9. КУЗМИН Г. Л., *Пассивные связи механизмов*. Lucrările Institutului inginerilor din transportul feroviar ,,I. V. Stalin'', Москва, *97* (1958).
10. MANOLESCU I. N., *Teoria mecanismelor şi a maşinilor*. **I**, Litografia ICF, 1956.
11. MANAFU V., *Metoda legării mecanismelor de familii diferite*. Litografia ICF, 1956.
12. ТАЙНОВ А. И., *Основы теории структуры механизмов*, Минск, 1959.

# STUDII

## TEORIA MECANISMELOR

# RAPORTUL DE TRANSMISIE ÎN MECANISME CU CAME CU MAI MULTE ELEMENTE

DE

K. HAIN[1]

### INTRODUCERE

Mecanismul simplu cu came, cu trei elemente (fig. 1) nu este în măsură să îndeplinească orice condiții de mișcare. Nu este posibil să se prescrie diagrama de deplasare pentru ciclul întreg al mișcării, cînd atît elementul cu came cît și tachetul cu rolă descriu cursa completă. Se poate prescrie cu aproximație legea de deplasare pentru un unghi de rotație de 180°, iar pentru rest rezultă o diagramă a mișcării în funcție de aceasta [1].

Cama, într-un astfel de caz, trebuie construită în forma unei curbe, numai pe partea activă a conturului său, deoarece rola este acționată alternativ numai pe această porțiune [2]. Mecanismul cu came cu 3 elemente este, de exemplu, în măsură să dea tachetului cu rola o mișcare întreruptă, adică o mișcare plană cu opriri. În acest caz durata opririi este limitată deoarece aici, ca de altfel la toate problemele de mecanisme, posibilitățile unui mecanism cu transmisie neuniformă depind de numărul său de elemente.

Mecanismele cu came, cu mai multe elemente, sînt în măsură să îndeplinească condiții mult superioare mecanismului simplu cu 3 elemente. Este de notat însă că astfel de probleme pentru mecanisme cu came cu mai multe elemente aproape că nu figurează în literatura de specialitate. Din această cauză, în lucrarea de față vom face unele cercetări privitoare la raportul de transmisie. După cum se știe, acesta este caracterizat ca raportul între viteza unghiulară a elementului conducător și aceea a elementului condus. Este totodată raportul variațiilor elementare ale unghiurilor.

---

[1] Institut für landtechnische Grundlagenforschung der Forschungsanstalt für Landwirtschaft, Braunschweig-Völkenrode.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM * KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Raportul de transmisie poate fi definit, în mod simplu, cu mijloace geometrice (fig. 1). Elementul conducător *2* se rotește în jurul articulației bazei sale *12*, iar pîrghia cu role *3* în jurul articulației bazei *13*. Aceste articulații, considerate în cele ce urmează drept poli de rotație, sînt definite de elementele *1* și *2*, respectiv *1* și *3*, articulate în aceste puncte. Indicii diferiți ai celor doi poli duc la polul al treilea *23*, aflat pe aceeași dreaptă polară. În cele ce urmează nu vom considera rola însăși ca element al mecanismului, deoarece avem aceleași condiții de mișcare, chiar dacă rola este legată fix de pîrghia ei.

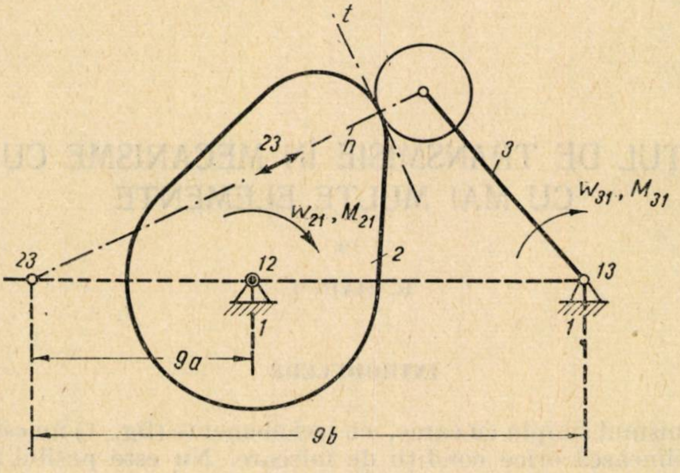


Fig. 1

Distanța polului *23* la articulațiile de bază ale elementelor care trebuie raportate una la alta, determină raportul de transmisie [3]

$$i = \frac{\omega_{21}}{\omega_{31}} = \frac{q_b}{q_a}$$

adică vitezele unghiulare $\omega$ sînt invers proporționale cu momentele de rotație $M$, așa că vom scrie

$$i = \frac{M_{31}}{M_{21}} = \frac{q_b}{q_a}.$$

Momentul de rotație $M_{31}$ este în măsură să exercite același efect în mecanism ca și momentul de rotație $M_{21}$. Dacă vrem ca în polul *13* să apară un moment de rotație care să echilibreze momentul $M_{21}$, atunci acesta trebuie să fie egal cu $M_{31}$, însă de sens opus.

Dacă polul relativ *23* este situat în exteriorul polilor *12* și *13*, atunci mișcările momentane ale celor două elemente *2* și *3* sînt de același sens. Dacă polul *23* se află între *12* și *13*, atunci ambele elemente se declanșează în sensuri opuse.

Polul relativ *23* rezultă ca intersecția celor două drepte polare *12—13* ⟷ și *23*. Cea din urmă este caracterizată ca normală, deci ca perpendiculară pe tangenta *t* în punctul de contact dintre camă și rolă.

### DETERMINAREA RAPORTULUI DE TRANSMISIE PRIN CONFIGURAȚIA POLULUI

Dacă considerăm normala în fiecare punct de contact între camă și rolă ca dreaptă polară, putem determina imediat oricare pol relativ și prin aceasta și oricare raport de transmisie în mecanismele cu came cu mai multe elemente, după ce în prealabil am fixat și ceilalți poli auxiliari.

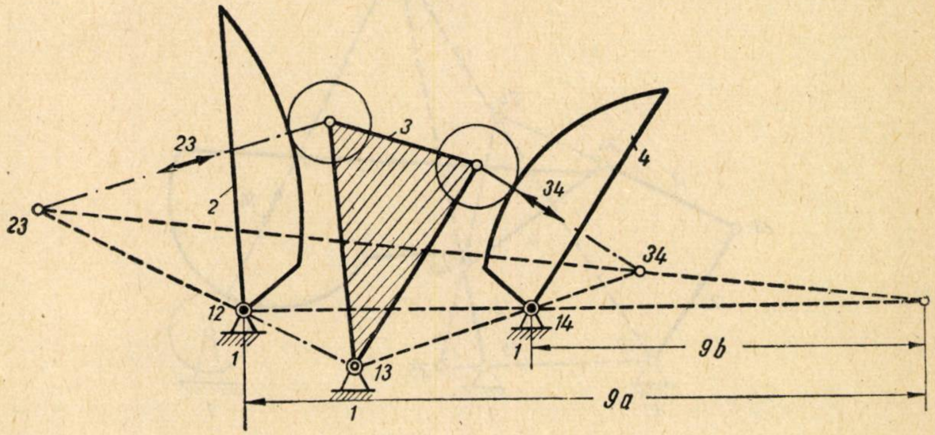


Fig. 2

În figura 2 este arătat un astfel de exemplu. Fie determinat raportul de transmisie între elementele *2* și *4* legate în suport.

Deoarece ambele sînt legate de elementul *1* al suportului prin polii *12* și *14*, indicii diferiți duc la polul relativ *24*, care cu distanțele sale $q_a$ și $q_b$ determină raportul de transmisie în modul indicat mai sus. Stabilim următoarea schemă polară :

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{24} \\ \hline 12 & 14 \\ 23 & 34 \end{array}$$

adică combinăm cifrele *2* și *4* ale polului relativ care trebuie determinat, în fiecare linie cu cîte una din celelalte cifre ale elementelor din mecanism. În linia superioară am combinat cifrele *2* și *4* cu *1*, în linia de jos cifrele *2* și *4* cu *3*. Fiecare linie dă însă o dreaptă polară, care trece prin polii aflați pe ea, iar pe toate aceste drepte polare trebuie să se găsească polul căutat *24*.

Polii liniei superioare sînt articulațiile de bază *12* și *14*, iar polii *23* și *34* din linia de jos trebuie mai întîi determinați cu ajutorul următoarelor scheme :

$$\begin{array}{c}\underline{\quad 23 \quad}\\ 12 \quad 13\\ \longleftrightarrow\\ 23\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{c}\underline{\quad 34 \quad}\\ 13 \quad 14\\ \longleftrightarrow\\ 34\end{array}$$

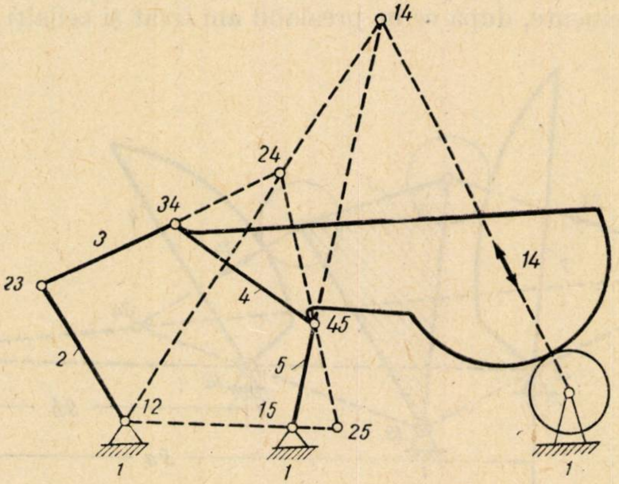


Fig. 3

aici au fost folosite deci direct normalele profilelor camelor ca drepte polare, regulă ce se va întrebuința și în cele ce urmează.

În figura 3 este reprezentat un mecanism cu came cu 5 elemente și un reazăm profilat. Normala *14* la suprafețele de contact între cama *4* și suportul profilat *1* (cu care ne putem imagina, după cum am spus mai sus, că este legată rola) este o dreaptă polară. Trebuie determinat raportul de transmisie între cele două pîrghii *2* și *5*, adică poziția polului relativ *25*.

$$\begin{array}{c}\underline{25}\\ \underline{12} \quad \underline{15}\\ \underline{23} \quad \underline{35}\\ \underline{24} \quad \underline{45}\end{array}$$

Polii subliniați cu linii pline sînt cunoscuți imediat ca articulații. Polul *24* subliniat cu o linie întreruptă vom încerca să-l determinăm din schema corespunzătoare, pentru a obține astfel în schema pentru *25* două drepte polare a căror intersecție să ducă la polul căutat *25*

$$\begin{array}{ccc} & \underline{24} & \\ \underline{12} & & \underline{14} \\ \underline{23} & & \underline{34} \\ 25 & & \underline{45} \end{array}$$

Şi aici este dată numai dreapta polară *23—34* şi vom încerca să determinăm mai întîi polul *14*

$$\begin{array}{ccc} & \underline{14} & \\ \underline{15} & & \underline{45} \\ & \overleftrightarrow{14} & \end{array}$$

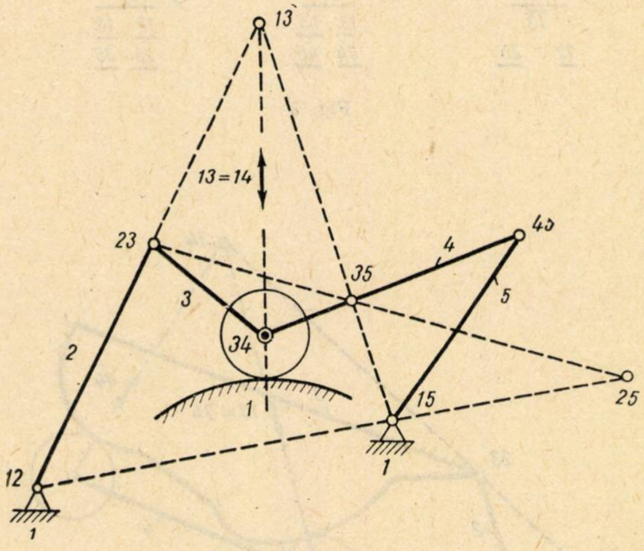


Fig. 4

Acest lucru este posibil cu ajutorul normalei *14* şi al dreptei polare *15—45*, de unde se determină polul *24* ca intersecție între *12—14* şi *23—34*, şi după aceea, în sfîrşit, şi polul *25* ca intersecție între *12—15* şi *24—45*. Polul *25* se află în figura *3*, în exteriorul lui *12* şi *15* : elementele *2* şi *5* se deplasează deci momentan în acelaşi sens, viteza unghiulară a elementului *2* fiind mai mică (în proporție inversă) a distanței sale la *25* decît aceea a elementului *5* cu distanța *15* la *25*.

În figura 4, rola este aşezată într-o *articulație dublă*, şi anume în articulația *34* a celor două elemente *3* şi *4*. Putem presupune că două

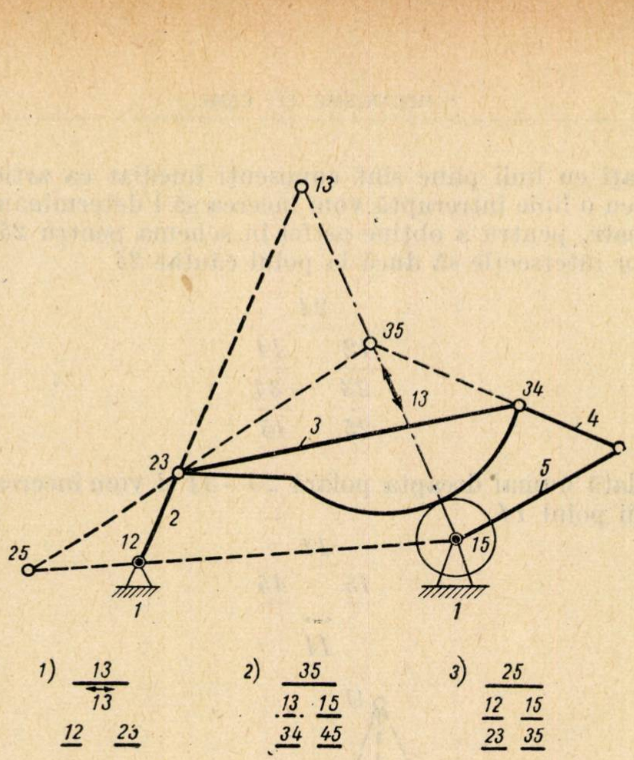

1) 13
12 23
2) 35
13 15
34 45
3) 25
12 15
23 35

Fig. 5

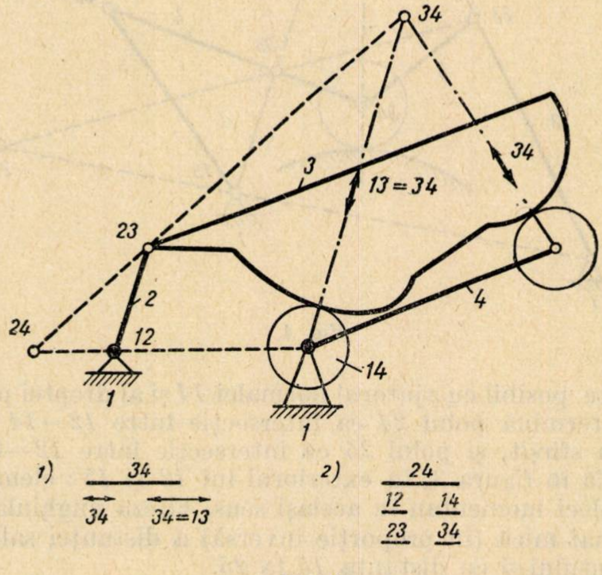

13=34
1) 34
34 34=13
2) 24
12 14
23 34

Fig. 6

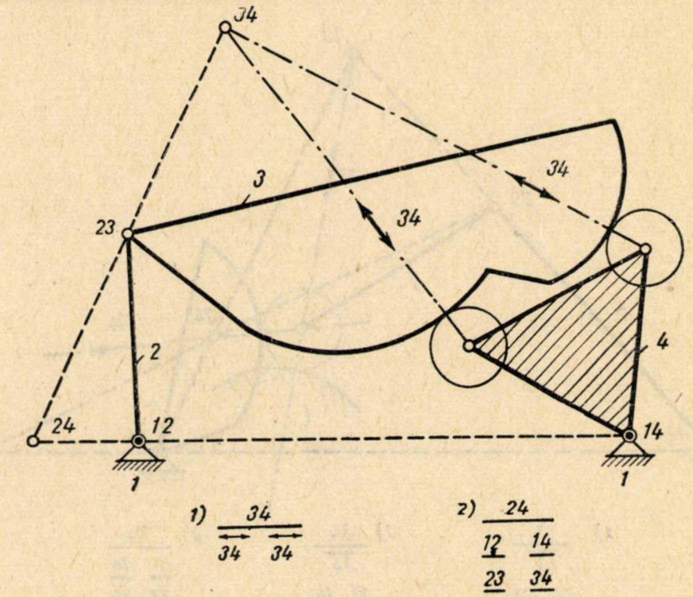

1) 34
34 34
2) 24
12 14
23 34

Fig. 7

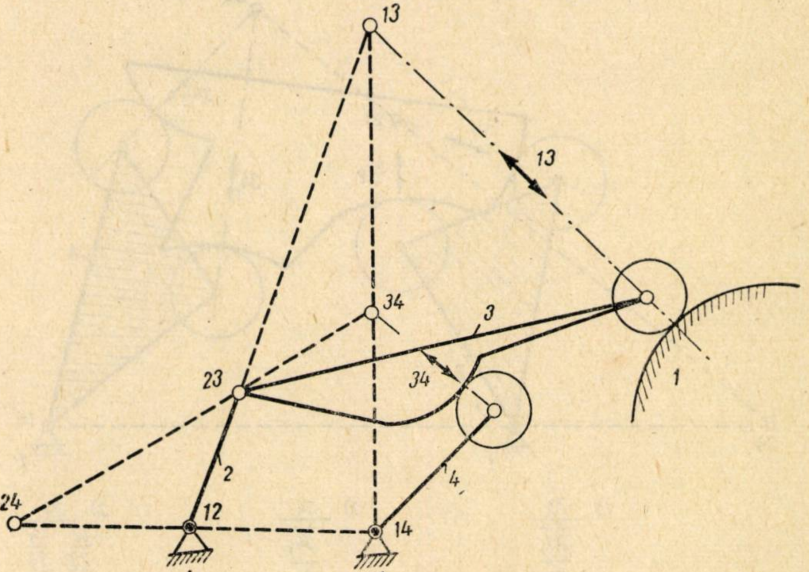


Fig. 8

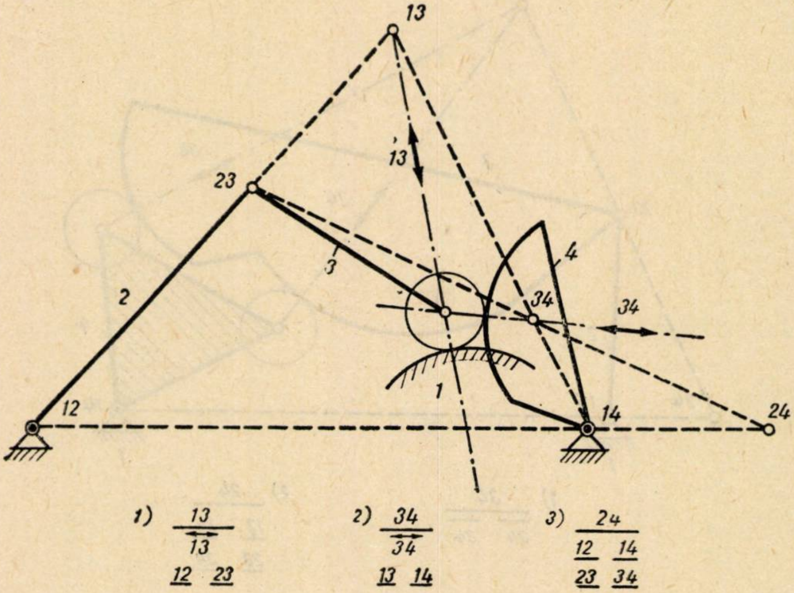

1) 13 / 13 / 12 23
2) 34 / 34 / 13 14
3) 24 / 12 14 / 23 34

Fig. 9

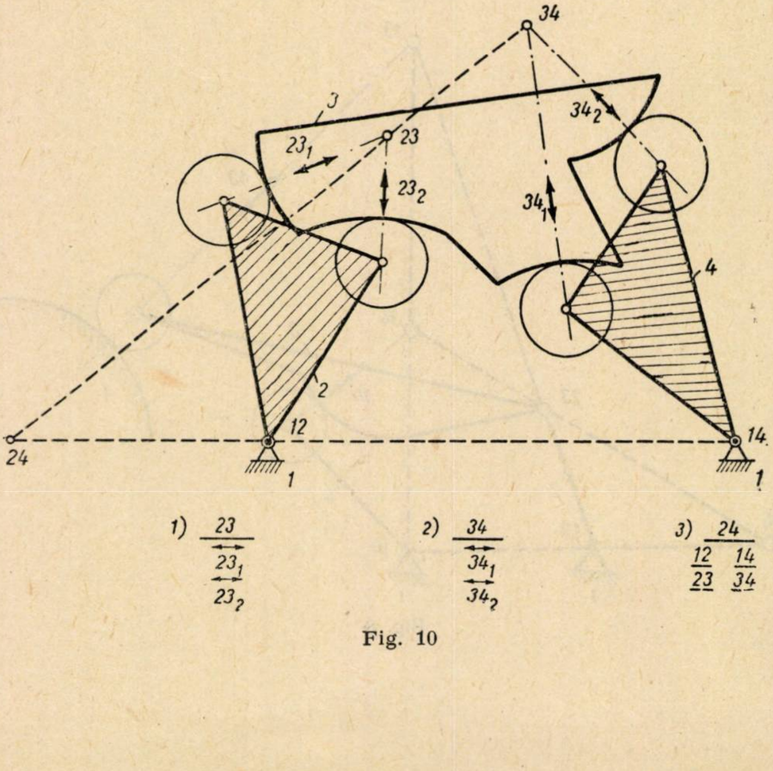

34
3
34₂
23₁
23
23₂
34₁
4
2
12
24
1
14
1
1) 23 / 23₁ / 23₂
2) 34 / 34₁ / 34₂
3) 24 / 12 14 / 23 34

Fig. 10

role de aceeaşi mărime, independente una de alta, sînt legate cu *3* respectiv *4*. În felul acesta, şi normala comună reprezintă totodată cele două drepte polare *13* şi *14*. Dacă este de determinat, în figura 4, raportul de transmisie între elementele *2* şi *5* şi deci şi polul relativ *25*, putem mai înainte să determinăm polii *13* şi *35* ca poli intermediari, după următoarea schemă :

$$\begin{array}{lcclcclcc}
1) & \multicolumn{2}{c}{\underline{13}} & 2) & \multicolumn{2}{c}{\underline{35}} & 3) & \multicolumn{2}{c}{\underline{25}} \\
 & \multicolumn{2}{c}{\longleftrightarrow} & & & & & & \\
 & \multicolumn{2}{c}{13} & & \underline{13} & \underline{15} & & \underline{12} & \underline{15} \\
 & \underline{12} & \underline{23} & & \underline{34} & \underline{45} & & \underline{23} & \underline{35}
\end{array}$$

În mecanismele din figurile 5—10 raportul de transmisie se determină analog ca pînă acum. Figurile sînt însoţite de tabele pentru determinarea polilor, astfel încît de aici se poate vedea modul lor de construcţie. Elementul conducător şi cel condus sînt următoarele :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Fig. 5 | Elementul | conducător | *2*, | Elementul | condus | *5* |
| Fig. 6 | ” | ” | *2*, | ” | ” | *4* |
| Fig. 7 | ” | ” | *2* | ” | ” | *4* |
| Fig. 8 | ” | ” | *2*, | ” | ” | *4* |
| Fig. 9 | ” | ” | *2*, | ” | ” | *4* |
| Fig. 10 | ” | ” | *2*, | ” | ” | *4* |

## RAPORTUL DE TRANSMISIE ÎN MECANISMELE CU CAME „CU ÎNTOARCERE“

În aşa-numitele mecanisme cu came cu întoarcere, raportul de transmisie se determină într-o formă puţin diferită. Astfel de mecanisme sînt caracterizate prin aceea că elementul conducător şi cel condus sînt aşezate în acelaşi punct al suportului. În mecanismul din figura 11, elementul conducător *2* este aşezat în acelaşi punct al suportului *12*=*15*=*25* ca şi elementul condus *5*. Avînd în vedere că în această articulaţie dublă se întîlnesc elementele *1*, *2* şi *5*, este indicată notaţia triplă cu numere duble. Pînă acum, aceşti trei poli au reprezentat dreapta polară pentru determinarea raportului de transmisie. Deoarece aceştia coincid într-un punct, este necesară o altă metodă [4]. Transmisia mişcării are loc de la elementul *2* la elementul *3* şi prin intermediul elementului *4* înapoi la elementul *5*. Polul *13* poate servi acum pentru acest caz şi cazuri analoge, ca pol intermediar. Cifra *3* a acestui pol, care aparţine elementului aşezat în *13*, trebuie să fie combinată cu cifrele elementului conducător şi al elementului condus, de unde rezultă ceilalţi poli *23* şi *35*, care urmează a fi determinaţi. Polul *23* rezultă din normala polară *23* şi din dreapta polară *12—13*, iar polul *35* rezultă din dreptele polare *13—15* şi *34—45* (de remarcat că cifrele inegale din aceste combinări trebuie să dea, de fiecare dată, polul *35*). Acum luăm în *13*, adică în polul intermediar ales, o dreaptă oarecare de lungime arbitrară $u$, unim capătul ei cu *23* şi *35* şi obţinem pe paralela la dreapta $u$ prin *12=15=25* segmentele $y$ şi $x$. Raportul de transmisie în *2* şi *5* este atunci

$$i = \frac{\omega_{21}}{\omega_{51}} = \frac{y}{x},$$

sau, după cum rezultă din rapoartele geometrice

$$i = \frac{y}{x} = \frac{(13-35)\cdot(13-23)}{(13-35)\cdot(12-23)}.$$

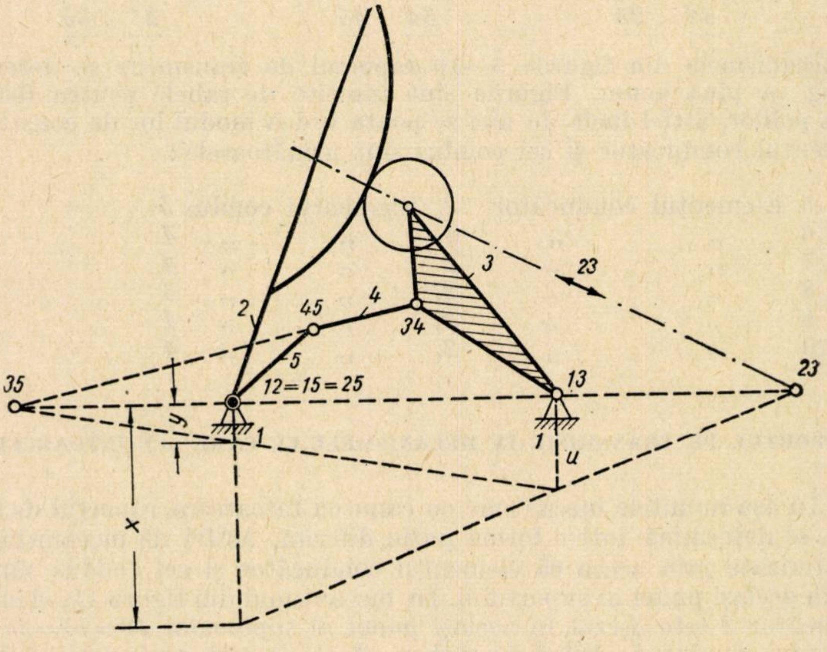


Fig. 11

Valorile din paranteze reprezintă segmentele respective dintre polii notaţi cu cifre duble.

Regula de calcul pentru astfel de mecanisme „cu întoarcere” poate fi formulată după cum urmează :

Transmiterea mişcării între elementele aşezate într-o articulaţie dublă are loc prin intermediul unui al treilea element, legat la suport, într-un punct care se foloseşte ca pol intermediar pentru segmentul $u$. Drept poli auxiliari se folosesc polii relativi între elementul conducător şi elementul intermediar, precum şi între elementul condus şi acelaşi element intermediar. Aceşti noi poli intermediari se folosesc pentru obţinerea razelor $x$ şi $y$. Vitezele unghiulare ale elementului conducător şi elementului condus sînt atunci invers proporţionale faţă de valorile lui $x$

şi *y*, determinate de polul intermediar respectiv. Dacă segmentele *x* şi *y* se află de aceeaşi parte faţă de dreapta suport, atunci raportul de transmisie este pozitiv: elementul conducător şi elementul condus se deplasează în acelaşi sens. Dacă *x* şi *y* se află pe părţi diferite, atunci există deplasări în sensuri contrarii ale elementului conducător şi cel condus.

După aceste reguli, vom studia acum şi mecanismul din figura 12, presupunînd că în articulaţia dublă *12=14=24* sînt aşezate elementul conducător *2* şi elementul condus *4* şi vom determina raportul de transmisie dintre aceste elemente. Mişcarea de la *2—4* are loc prin elementul

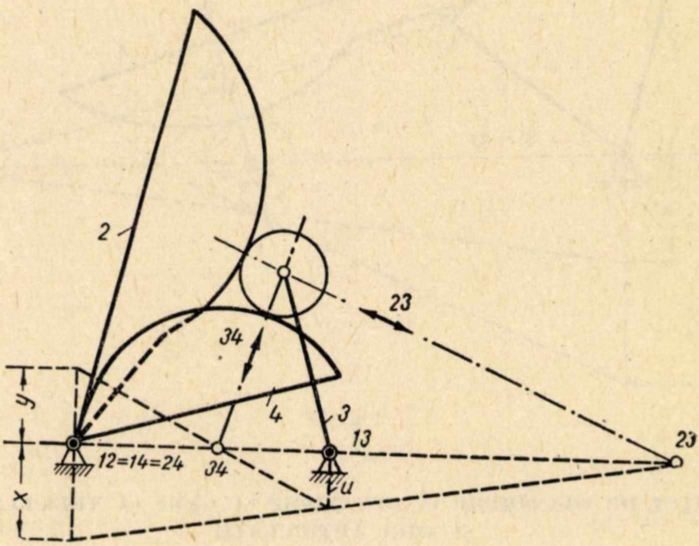


Fig. 12

intermediar *3*, legat la suportul *1*, a cărui articulaţie *13* se foloseşte ca pol intermediar. În afară de aceasta ne mai trebuie şi polii *23* şi *34*, care rezultă din *2* si *4* cu *3*. Polul *23* se găseşte ca intersecţie a dreptei *12—13* cu normala polară $\overleftrightarrow{23}$, iar polul *34* din intersecţia dreptei *14—13* cu normala polară $\overleftrightarrow{34}$. Cu ajutorul segmentului arbitrar *u* în *13* găsim pe paralela la *u* prin *12=14=24* segmentele *y* şi *x*, care determină imediat raportul de transmisie.

Această metodă pentru mecanisme *cu întoarcere* trebuie puţin modificată, dacă nu există un element intermediar pentru transmiterea mişcării (fig. 13), ci numai o rolă legată la suportul *1* şi care, după constatările de pînă acum, poate fi considerată ca fixă faţă de suport, fără ca deplasările să se schimbe. Aici folosim normala polară *14* ca dreaptă auxiliară, luînd pe acesta un punct oarecare *H*. Apoi, se determină polul *24* între elementul condus *5* și elementul *4*, în modul indicat în figură (*45* există imediat ca articulație între *4* și *5*,) și se unesc acești poli cu *H*. De aici rezultă intersecțiile *X* și *Y* pe dreapta prin *12*=*15*=*25*, care dau, ca și mai înainte împreună cu segmentul arbitrar *u*, segmentele *y* și *x*, ce determină raportul de transmisie.

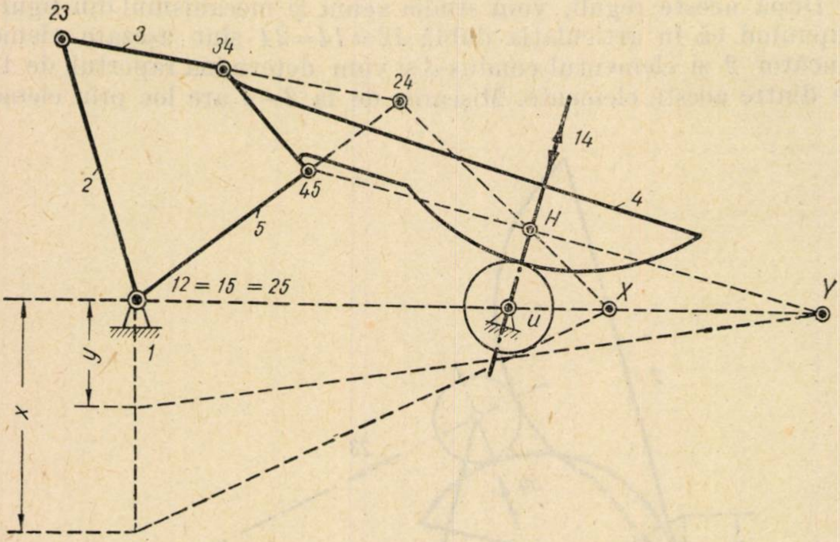


Fig. 13

## RAPORTUL DE TRANSMISIE ÎN MECANISME CU CAME CU TREI ELEMENTE ȘI TREI ARTICULAȚII

În figurile 14 și 15 sînt reprezentate mecanisme cu came simple cu trei articulații, foarte interesante, și care pînă acum nu au fost cercetate. Pe o curbă fixă se mișcă o rolă care este în contact cu două elemente profilate mobile. Pentru uzul practic vom așeza pe axa rolei trei role independente una de alta, de diametru egal sau diferit. Unul din cele două elemente profilate mobile va avea, în sensul perpendicular pe planul figurii, două nervuri așa încît al doilea corp mobil să atingă rola între acestea; astfel axa rolei este bine rezemată.

În figura 14 se determină raportul de transmisie între elementele *2* și *3*. Deoarece ambele elemente sînt legate în punctele *12* și *13* la suport, polul relativ necesar pentru raportul de transmisie rezultă din cifrele inegale, respectiv chiar din cifrele elementelor *2* și *3*, adică *23*. Aceasta trebuie determinat. Se duce mai întîi, prin centrul rolei, normala *s* la curba *1*, fixă față de suport. Pe aceasta se ia un punct oarecare *S*, care se unește cu *12* și *13*. Aceste drepte intersectează normalele prin centrul rolei la elementele *2* și *3*, în punctele *2s* și *3s*, iar dreapta *2s*—*3s* este întîlnită de dreapta *12*—*13* în polul căutat *23*.

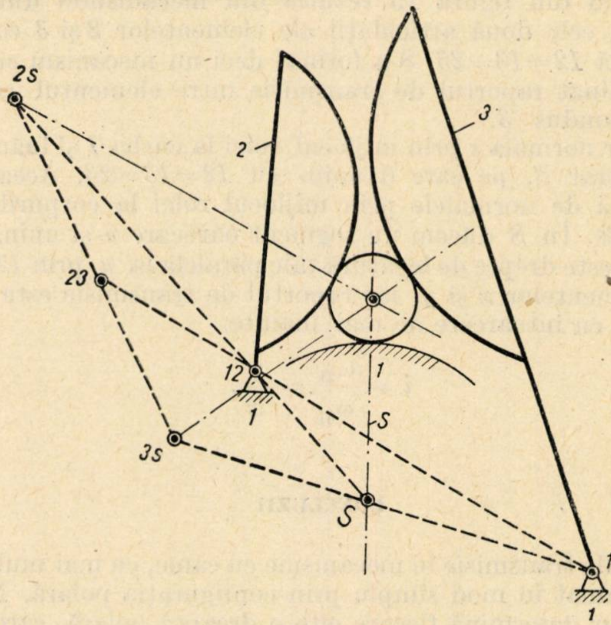

2s
2
3
23
12
1
1
S
3s
S
13
1

Fig. 14

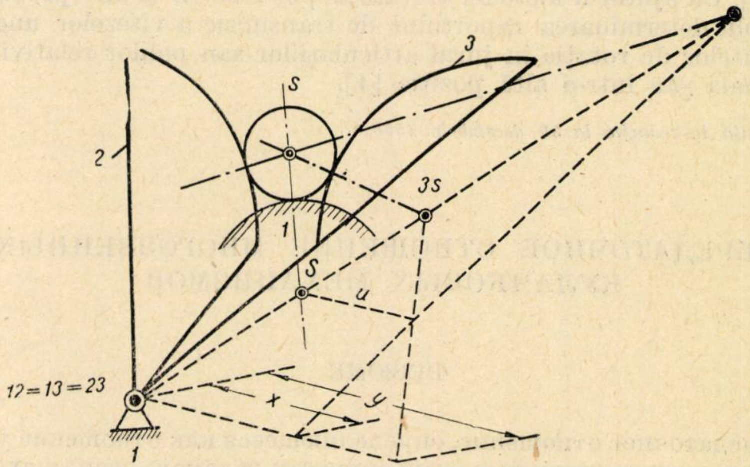

2s
3
S
2
3s
1
S
u
12=13=23
x
y
1

Fig. 15

Mecanismul din figura 15 rezultă din mecanismul din figura 14, cu diferența că cele două articulații ale elementelor *2* și *3* coincid într-o articulație dublă *12=13=23*. S-a format deci un mecanism *cu întoarcere*. Trebuie determinat raportul de transmisie între elementul conducător *2* și elementul condus *3*.

Ducem iar normala *s* prin mijlocul rolei la curba *1* și luăm pe aceasta un punct arbitrar *S*, pe care îl unim cu *12=13=23*. Această dreaptă este intersectată de normalele prin mijlocul rolei la corpurile *2* și *3*, în punctele *2s* și *3s*. În *S* ducem un segment oarecare *u* și unim capătul lui cu *2s* și *3s*. Aceste drepte de legătură taie paralela la *u* prin *12 = 13 = 23* la capetele segmentelor *x* și *y*, iar raportul de transmisie este și aici ca și la mecanismele cu întoarcere de mai înainte.

$$i = \frac{\omega_{21}}{\omega_{31}} = \frac{y}{x}.$$

## CONCLUZII

Raportul de transmisie în mecanisme cu came, cu mai multe elemente, poate fi determinat în mod simplu prin configurația polară. Normalele la profilele camelor determină fiecare cîte o dreaptă polară, care este caracterizată la mecanismele cu manivele și, de asemenea, la mecanismele cu came în toate celelalte cazuri prin polii relativi sau prin articulațiile de rotire și respectiv prin cuplele de translație.

Exemplele arătate sînt luate dintr-o sistematizare a mecanismelor cu came, în care sînt cuprinse toate mecanismele cu came cu una, două sau trei articulații, dacă acestea se deduc din lanțurile normale cu șase elemente [5]. Cu ajutorul metodei arătate se pot rezolva și alte probleme, ca de exemplu determinarea raportului de transmisie a vitezelor unghiulare și momentelor de rotație în jurul articulațiilor sau polilor relativi situați în diagonală sau într-o altă poziție [4].

*Primită la redacție la 30 decembrie 1960*

## ПЕРЕДАТОЧНОЕ ОТНОШЕНИЕ МНОГОЗВЕННЫХ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ

### РЕЗЮМЕ

Передаточное отношение, определяющееся как отношение угловой скорости ведущего звена к угловой скорости ведомого звена механизма, можно изобразить геометрически простыми средствами. Как и в случае шатунных механизмов здесь можно пользоваться относитель-

ными полюсами для изображения передаточного числа. Новым здесь является то, что каждая нормаль к кривой кулачка представляет собой полярную прямую, так что хорошо известная полярная конфигурация может здесь найти свое применение. Для ,,возвратных'' кулачковых механизмов, то есть тех, ведущий и ведомый звенья которых имеют общую шарнирную точку, можно пользоваться методами, применяемыми автором в одной из предыдущих работ.

## DAS ÜBERSETZUNGSVERHÄLTNIS IN MEHRGLIEDRIGEN KURVENGETRIEBEN

### ZUSAMMENFASSUNG

Das Übersetzungsverhältnis, definiert als das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeit des Antriebsgliedes eines Getriebes zur Winkelgeschwindigkeit des Abtriebsgliedes kann in mehrgliedrigen Kurvengetrieben mit einfachen Mitteln auf geometrischem Wege dargestellt werden. In ähnlicher Weise wie bei Kurbelgetrieben kann man auch hier die Relativpole zur Darstellung des Übersetzungsverhältnisses benutzen. Als neuartig ist zu beachten, daß durch jede Kurven-Normale je eine Polgerade dargestellt wird, so daß die allgemein bekannte Polkonfiguration verwendet werden kann. Für rückkehrende Kurvengetriebe, das sind solche Getriebe, bei denen Antriebsglied und Abtriebsglied im gleichen Gelenkpunkt gelagert sind, können Verfahren, wie sie vom Verfasser in einer früheren Arbeit benutzt wurden, zur Anwendung kommen.

### BIBLIOGRAFIE

1. K. Hain, *Angewandte Getriebelehre.* Hannover, 1952.
2. G. Kiper, *Einfache Kurvengetriebe.* VDI-Forschungsheft, 461, Düsseldorf, 38/40, (1957).
3. K. Hain, *Das Übersetzungsverhältnis in periodischen Getrieben von Landmaschinen.* Landtechnische Forschung, *3*, *4*, 97/108 (1953).
4. *Das Übersetzungsverhältnis in Räderkurbelgetrieben.* Werkstatt und Betrieb, **87**, *10*, 622/628 (1954).
5. — *Systematik mehrgliedriger Kurvengetriebe und deren Anwendungsmöglichkeiten.* Maschinenbautechnik (erscheint in Kürze).

имеет подходящих для изображения передаточного числа. Подобно этому [illegible] то, что нашли нормали, к кривой кулачка при [illegible] толкателе, так что хорошо известная полюсная конфигурация может здесь найти свое применение. Для качающихся кулачковых механизмов, то есть тех, ведущий и ведомый звенья которых имеют только шарнирную точку, можно пользоваться методами [illegible] автором в одной из предыдущих работ.

# DAS ÜBERSETZUNGSVERHÄLTNIS IN MEHRGLIEDRIGEN KURVENGETRIEBEN

## ZUSAMMENFASSUNG

Das Übersetzungsverhältnis, definiert als das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeit des Antriebgliedes eines Getriebes zur Winkelgeschwindigkeit des Abtriebsgliedes kann in mehrgliedrigen Kurvengetrieben mit einfachen Mitteln auf geometrischem Wege dargestellt werden. In ähnlicher Weise wie bei Kurbelgetrieben kann man auch hier die Polkonfiguration zur Darstellung des Übersetzungsverhältnisses benutzen. Als neuartig ist zu beachten, daß durch jede Kurven-Normale je eine Polgerade dargestellt wird, so daß die allgemein bekannte Polkonfiguration verwendet werden kann. Für rückkehrende Kurvengetriebe, das sind solche Getriebe, bei denen Antriebsglied und Abtriebsglied im gleichen Gelenk gelagert sind, können Verfahren, wie sie vom Verfasser in einer früheren Arbeit benutzt wurden, zur Anwendung kommen.

## BIBLIOGRAPHIE

1. K. HAIN, Angewandte Getriebelehre, Hannover, 1952.
2. [illegible], Ebene Kurvengetriebe, VDI-Forschungsheft 441, Düsseldorf, [illegible] (1957).
3. K. HAIN, Das Übersetzungsverhältnis in gelenkigen Getrieben und Landmaschinen, Landtechnische Forschung, 4, 4, 115 (1954).
4. —, Übersetzungsverhältnis in Kurvengetrieben, Werkstatt und Betrieb, 86, 10, 523-528 (1953).
5. —, Systematik zwangläufiger Getriebe und deren Anwendungsmöglichkeiten, Maschinenbautechnik (erscheint in Kürze).

## SCURGERI PRIN MEDII POROASE

# ASUPRA UNEI PROBLEME DE SCURGERE PRINTR-UN MEDIU POROS FISURAT

DE

T. OROVEANU

1. *Introducere.* Vom considera în cele ce urmează scurgerea unui lichid incompresibil printr-un mediu poros a cărui permeabilitate este funcţie de o singură variabilă spaţială. Ne vom referi la cazul mişcării plane şi orizontale, în care efectul forţelor gravitaţionale este absent. Dacă admitem că legea lui Darcy este valabilă, iar permeabilitatea $k$ este funcţie de $x_2$, presiunea satisface ecuaţia diferenţială

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}+\frac{1}{k}\,\frac{dk}{dx_2}\,\frac{\partial p}{\partial x_2}=0. \tag{1}$$

Pentru soluţii particulare de forma

$$p_n = X_{1n}(x_1)\, X_{2n}(x_2), \tag{2}$$

ecuaţia (1) se scrie

$$X_{2n}\,\frac{d^2 X_{1n}}{dx_1^2}+X_{1n}\,\frac{d^2 X_{2n}}{dx_2^2}+\frac{1}{k}\,\frac{dk}{dx_2}\,X_{1n}\frac{dX_{2n}}{dx_2}=0, \tag{3}$$

iar după cîteva calcule simple ajungem la ecuaţiile

$$\frac{d^2 X_{1n}}{dx_1^2}+n^2\, X_{1n}=0 \tag{4}$$

şi

$$\frac{d^2 X_{2n}}{dx_2^2}+\frac{1}{k}\,\frac{dk}{dx_2}\,\frac{dX_{2n}}{dx_2}-n^2 X_{2n}=0, \tag{5}$$

$n^2$ fiind constanta de separare.

Se constată imediat că prima dintre aceste ecuații are soluția

$$X_{1n} = C_{1n} \cos nx_1 + C_{2n} \sin nx_1, \tag{6}$$

în timp ce pentru rezolvarea celei de-a doua este necesar să facem unele considerații asupra permeabilității. Vom presupune astfel că funcția $k(x_2)$ este analitică în tot intervalul de variație al lui $x_2$ considerat ¹) și nu se anulează în nici un punct al acestuia. Ajungem în acest fel la concluzia că funcția

$$f(x_2) = \frac{1}{k} \frac{dk}{dx_2} = \frac{d(\log k)}{dx_2} \tag{7}$$

este analitică și poate fi dezvoltată în serie întreagă

$$f(x_2) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s x_2^s. \tag{8}$$

Ecuația (5) se scrie deci

$$\frac{d^2X_{2n}}{dx_2^2} + \sum_{s=0}^{\infty} a_s x_2^s \frac{dX_{2n}}{dx_2} - n^2X_{2n} = 0 \tag{9}$$

și, după cum se știe, admite soluții sub forma unei serii de puteri

$$X_{2n} = \sum_{q=0}^{\infty} c_q x_2^q. \tag{10}$$

Coeficienții $c_q$ se determină cu ușurință dacă înlocuim în (9) funcția $X_{2n}$ cu expresia precedentă, ceea ce ne dă

$$\sum_{q=2}^{\infty} q(q-1) c_q x_2^{q-2} + \sum_{s=0}^{\infty} a_s x^s \sum_{q=1}^{\infty} q c_q x_2^{q-1} - n^2 \sum_{q=0}^{\infty} c_q x_2^q = 0. \tag{11}$$

Deoarece coeficienții tuturor puterilor lui $x_2$ trebuie să fie nuli, obținem, prin anularea coeficientului lui $x_2^q$, relația de recurență

$$(q+1)(q+2) c_{q+2} + \sum_{t=0}^{q} (q+1-t) a_t c_{q+1-t} - n^2 c_q = 0. \tag{12}$$

Se observă că pentru $q = 0$ această relație devine

$$2c_2 + a_0 c_1 - n^2 c_0 = 0 \tag{13}$$

și conține doi coeficienți arbitrari și anume $c_0$ și $c_1$, care joacă rolul constantelor de integrare. O dată fixate valorile acestora, (13) ne permite să calculăm pe $c_2$ și apoi, aplicînd succesiv relația (12) găsim valorile celorlalți coeficienți.

---

¹) Evident, acest interval se precizează pentru fiecare problemă în parte.

Putem lua astfel $c_0 = 1$ şi $c_1 = 0$, obţinînd o soluţie pe care o notăm cu $X_{2n}^{(1)}$ sau $c_0 = 0$ şi $c_1 = 1$, soluţia corespunzătoare fiind $X_{2n}^{(2)}$.

Integrala generală a ecuaţiei (9) este deci

$$X_{2n} = C_{3n} X_{2n}^{(1)} + C_{4n} X_{2n}^{(2)} \tag{14}$$

şi se observă imediat că, datorită modului în care au fost determinate soluţiile $X_{2n}^{(1)}$ şi $X_{2n}^{(2)}$, satisfac condiţiile

$$X_{2n}\Big|_{x_2=0} = C_{3n}, \quad \frac{dX_{2n}}{dx_2}\Big|_{x_2=0} = C_{4n}, \tag{15}$$

fapt de care vom face uz mai departe.

Dacă raza de convergenţă a seriei (8) este $R$, se poate demonstra că soluţiile de forma (10) sînt convergente pentru $|x_2| < R$.

Prin urmare, soluţia ecuaţiei (1) obţinută prin separarea variabilelor, este

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} [(A_n \cos n x_1 + B_n \sin nx_1) X_{2n}^{(1)} + (C_n \cos nx_1 + D_n \sin n x_1) X_{2n}^{(2)}], \tag{16}$$

constantele $A_n$, $B_n$, $C_n$, $D_n$ fiind legate prin relaţii simple de cele introduse mai înainte.

2. *Scurgerea printr-un mediu poros fisurat.* Vom aplica rezultatele găsite mai sus la studiul unei probleme care a fost considerată de M. Muskat [1] pentru un mediu poros omogen. Se ştie că în calcare sau dolomite pot apărea fisuri a căror prezenţă afectează în mod esenţial fenomenul de scurgere. Pentru tratarea problemei vom adopta, cu mici modificări, schema propusă de autorul citat şi anume vom presupune că mediul poros, în secţiune orizontală, are forma unui dreptunghi cu lungimea $2\,\xi_1^{(0)}$ şi lăţimea $2\,\xi_2^{(0)}$ şi că există o singură fisură, de lungime $2\,\xi_1^{(0)}$ şi de lăţime $b$, care îl împarte în două părţi egale. Vom admite de asemenea că mişcarea este plană şi că numai fisura se află în comunicare cu gaura de sondă. În ceea ce priveşte permeabilitatea $k^{(2)}$ a mediului poros, aceasta este considerată ca funcţie pară de $\xi_2$. În această reprezentare idealizată, există simetrie atît în raport cu $\xi_1 = 0$ cît şi cu $\xi_2 = 0$, astfel încît este suficient să ne limităm la un singur cadran al planului $\Omega\,\xi_1\,\xi_2$ care este secţiunea orizontală a sistemului (fig. 1).

În prealabil, vom observa că noul sistem de coordonate $\Omega\xi_1\xi_2$ este legat de $Ox_1x_2$ prin relaţiile

$$x_1 = \xi_1, \qquad x_2 = \xi_2 - \xi_2^{(0)} \tag{17}$$

astfel că ecuaţiile (4) şi (5) îşi păstrează forma, aşa cum se poate uşor constata. Singura deosebire faţă de calculele precedente constă în faptul că seriile (8) și (10) vor conține în loc de $x_2$ diferența $\xi_2 - \xi_2^{(0)}$[1]. Aceasta atrage după sine o ușoară modificare în condițiile (15) care devin

$$X_{2n}\Big|_{\xi_2=\xi_2^{(0)}} = C_{3n}, \qquad \frac{dX_{2n}}{d\xi_2}\Big|_{\xi_2=\xi_2^{(0)}} = C_{4n}. \tag{18}$$

Trecînd la rezolvarea problemei, ne vom ocupa în primul rînd de scurgerea în fisură. Deoarece lățimea $b$ a acesteia este foarte mică, se știe că presiunea este funcție armonică, iar fisura este echivalentă cu un mediu poros de permeabilitate $k^{(1)} = \frac{b^2}{12}$. Dacă notăm cu $p^{(1)}$ funcția armonică ce reprezintă presiunea în fisură, aceasta trebuie să satisfacă următoarele condiții

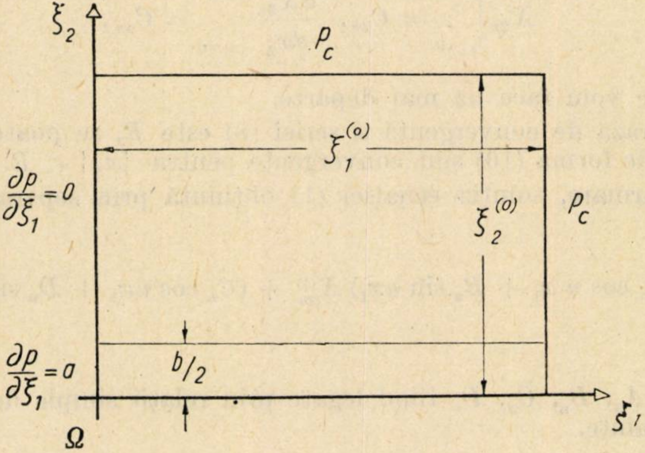


Fig. 1

$$\begin{gathered} \xi_1 = \xi_1^{(0)},\ p^{(1)} = p_c;\quad \xi_1 = 0,\ \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi_1} = a; \\ \xi_2 = 0,\ \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi_2} = 0, \end{gathered} \tag{19}$$

$a$ fiind o constantă.

Prima dintre aceste condiții arată că la extremități, acolo unde fisura atinge conturul de alimentare, presiunea trebuie să aibă valoarea constantă $p_c$. A doua condiție revine la admiterea unui debit constant la sondă și datorită lățimii mici a fisurii poate fi considerată echivalentă cu condiția fizicește reală ca presiunea să fie constantă. În sfîrșit, a treia condiție își datorește forma faptului că sistemul este simetric în raport cu axa $\xi_2 = 0$.

---

[1] Dezvoltările în serie sînt valabile pentru $0 \leqslant \xi_2 \leqslant \xi_2^{(0)}$.

Soluția ecuației lui Laplace care îndeplinește condițiile (19) este [1]

$$p^{(1)} = p_c + a\,(\xi_1 - \xi_1^{(0)}) + \sum_{\lambda=1,3,5,\dots} M_\lambda \cos\frac{\pi\lambda\xi_1}{2\,\xi_1^{(0)}}\,\mathrm{ch}\,\frac{\pi\lambda\xi_2}{2\,\xi_1^{(0)}}. \tag{20}$$

În ceea ce privește presiunea în mediul poros propriu-zis, pe care o vom nota cu $p^{(2)}$, condițiile la limite care trebuie satisfăcute sînt

$$\begin{gathered} \xi_1 = \xi_1^{(0)},\ p^{(2)} = p_c;\quad \xi_1 = 0,\ \frac{\partial p^{(2)}}{\partial \xi_1} = 0; \\ \xi_2 = \xi_2^{(0)},\ p^{(2)} = p_c. \end{gathered} \tag{21}$$

Prima și a treia condiție arată că presiunea pe conturul de alimentare este constantă și egală cu $p_c$, în timp ce a doua condiție provine din ipoteza că mediul poros nu comunică direct cu sonda.

Dacă ne referim la forma soluției generale (16) și ținem seama și de rezultatul precedent (20), se constată că prima condiție (21) nu poate fi îndeplinită decît atunci cînd

$$B_n = 0,\quad D_n = 0, \tag{22}$$

pentru orice $n$. De asemenea, în conformitate cu (18), a treia condiție (21) nu se realizează decît dacă luăm în considerare numai soluția $X_{2n}^{(2)}$, respectiv avem

$$A_n = 0 \tag{23}$$

pentru orice $n$.

În felul acesta, ajungem la soluția

$$p^{(2)} = p_c + \sum_{\lambda=1,3,5,\dots} C_\lambda X_{2\lambda}^{(2)} \cos\frac{\pi\lambda\xi_1}{2\,\xi_1^{(0)}}, \tag{24}$$

care satisface și a doua condiție (21). Se observă că valorile proprii ale constantei de separare, pentru problema la limită studiată sînt $n = \dfrac{\pi\lambda}{2\,\xi_1^{(0)}}$ $(\lambda = 1, 3, 5, \dots)$.

Au mai rămas nedeterminate constantele $M_\lambda$ și $C_\lambda$ care pot fi găsite cu ușurință utilizînd condițiile la frontiera dintre mediul poros si fisură. Astfel egalitatea presiunii ne dă

$$\xi_2 = \frac{b}{2},\quad p^{(1)} = p^{(2)} \tag{25}$$

respectiv

$$\begin{aligned} a\,(\xi_1 - \xi_1^{(0)}) + \sum_{\lambda=1,3,5,\dots} M_\lambda\,\mathrm{ch}\,\frac{\pi\lambda b}{4\,\xi_1^{(0)}} \cos\frac{\pi\lambda\xi_1}{2\,\xi_1^{(0)}} = \\ = \sum_{\lambda=1,3,5,\dots} C_\lambda \left(X_{2\lambda}^{(2)}\right)_{\xi_2=\frac{b}{2}} \cos\frac{\pi\lambda\xi_1}{2\,\xi_1^{(0)}}, \end{aligned} \tag{26}$$

iar dacă fisura este asimilată cu un mediu poros omogen de permeabilitate $k^{(1)}$ condiția de egalitate a componentelor normale ale vitezei de filtrare se scrie

$$\left(k^{(1)}\,\frac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi_2}\right)_{\xi_2=\frac{b}{2}} = \left(k^{(2)}\,\frac{\partial p^{(2)}}{\partial \xi_2}\right)_{\xi_2=\frac{b}{2}} \tag{27}$$

sau

$$\begin{gathered} k^{(1)} \sum_{\lambda=1,3,5,\dots} M_\lambda\,\frac{\pi\lambda}{2\,\xi_1^{(0)}}\,\operatorname{sh}\frac{\pi\lambda b}{4\,\xi_1^{(0)}}\,\cos\frac{\pi\lambda\xi_1}{2\,\xi_1^{(0)}} = \\ = \left(k^{(2)}\right)_{\xi_2=\frac{b}{2}} \sum_{\lambda=1,3,5,\dots} C_\lambda \left(\frac{dX_{2\lambda}^{(2)}}{d\xi_2}\right)_{\xi_2=\frac{b}{2}} \cos\frac{\pi\lambda\xi_1}{2\,\xi_1^{(0)}}. \end{gathered} \tag{28}$$

Deoarece avem

$$a\,(\xi_1-\xi_1^{(0)}) = -\frac{8a\,\xi_1^{(0)}}{\pi^2}\sum_{\lambda=1,3,5,\dots}\frac{1}{\lambda^2}\cos\frac{\pi\lambda\xi_1}{2\,\xi_1^{(0)}}, \tag{29}$$

rezultă pentru determinarea constantelor sistemul

$$\begin{aligned} &M_\lambda\,\operatorname{ch}\frac{\pi\lambda b}{4\,\xi_1^{(0)}} - C_\lambda\,(X_{2\lambda}^{(2)})_{\xi_2=\frac{b}{2}} = \frac{8a\,\xi_1^{(0)}}{\pi^2\lambda^2}, \\ &M_\lambda\;k^{(1)}\,\frac{\pi\lambda}{2\,\xi_1^{(0)}}\,\operatorname{sh}\frac{\pi\lambda b}{4\,\xi_1^{(0)}} - C_\lambda\left(k^{(2)}\,\frac{dX_{2\lambda}^{(2)}}{d\xi_2}\right)_{\xi_2=\frac{b}{2}} = 0, \end{aligned} \tag{30}$$

din care deducem

$$M_\lambda = \frac{\dfrac{8a\,\xi_1^{(0)}}{\pi^2\lambda^2}\left(k^{(2)}\,\dfrac{dX_{2\lambda}^{(2)}}{d\xi_2}\right)_{\xi_2=\frac{b}{2}}}{\left(k^{(2)}\,\dfrac{dX_{2\lambda}^{(2)}}{d\xi_2}\right)_{\xi_2=\frac{b}{2}}\operatorname{ch}\dfrac{\pi\lambda b}{4\,\xi_1^{(0)}} - \left(X_{2\lambda}^{(2)}\right)_{\xi_2=\frac{b}{2}} k^{(1)}\,\dfrac{\pi\lambda}{2\,\xi_1^{(0)}}\,\operatorname{sh}\dfrac{\pi\lambda b}{4\,\xi_1^{(0)}}} \tag{31}$$

şi

$$C_\lambda = \frac{k^{(1)}\,\dfrac{4a}{\pi\lambda}\,\operatorname{sh}\dfrac{\pi\lambda b}{4\,\xi_1^{(0)}}}{\left(k^{(2)}\,\dfrac{dX_{2\lambda}^{(2)}}{d\xi_2}\right)_{\xi_2=\frac{b}{2}}\operatorname{ch}\dfrac{\pi\lambda b}{4\,\xi_1^{(0)}} - \left(X_{2\lambda}^{(2)}\right)_{\xi_2=\frac{b}{2}} k^{(1)}\,\dfrac{\pi\lambda}{2\,\xi_1^{(0)}}\,\operatorname{sh}\dfrac{\pi\lambda b}{4\,\xi_1^{(0)}}}. \tag{32}$$

Presiunea la sondă ($\xi_1 = 0$) are expresia

$$p^{(1)}(0,\,\xi_2) = p_c - a\,\xi_1^{(0)} + \sum_{\lambda=1,3,5,\dots} M_\lambda\,\operatorname{ch}\frac{\pi\lambda\xi_2}{2\,\xi_1^{(0)}}, \tag{33}$$

iar dacă punem $\xi_2 = \dfrac{b}{2}$, condiția (25) ne dă

$$p^{(1)}\left(0,\,\frac{b}{2}\right) = p^{(2)}\left(0,\,\frac{b}{2}\right). \tag{34}$$

Notînd cu $p_s$ această valoare a presiunii, găsim cu ajutorul formulei (24)

$$p_s = p_c + \sum_{\lambda=1,3,5,\ldots} C_\lambda \left(X_{2\lambda}^{(2)}\right)_{\xi_2=\frac{b}{2}} \tag{35}$$

şi în felul acesta putem scrie pentru presiunea diferenţială expresia

$$p_c - p_s = -\sum_{\lambda=1,3,5,\ldots} C_\lambda \left(X_{2\lambda}^{(2)}\right)_{\xi_2=\frac{b}{2}}\,. \tag{36}$$

Dacă facem uz de (32), după cîteva calcule simple găsim

$$p_c - p_s = \frac{8a\,\xi_1^{(0)}}{\pi^2} \sum_{\lambda=1,3,5,\ldots} \frac{1}{\lambda^2\left[1-\frac{2\,\xi_1^{(0)}}{\pi\lambda}\left(\frac{k^{(2)}}{k^{(1)}}\,\frac{1}{X_{2\lambda}^{(2)}}\,\frac{dX_{2\lambda}^{(2)}}{d\xi_2}\right)_{\xi_2=\frac{b}{2}}\coth\frac{\pi\lambda b}{4\,\xi_1^{(0)}}\right]}, \tag{37}$$

iar debitul întregului sistem, pe unitatea de grosime a stratului lui este, în valoare absolută

$$Q = 2\,\frac{k^{(1)}}{\mu}\,ba \tag{38}$$

sau, dacă înlocuim pe $a$ din (37)

$$Q = \frac{\pi^2 k^{(1)} b\,(p_c - p_s)}{4\mu\,\xi_1^{(0)} \sum\limits_{\lambda=1,3,5,\ldots} \frac{1}{\lambda^2\left[1-\frac{2\,\xi_1^{(0)}}{\pi\lambda}\left(\frac{k^{(2)}}{k^{(1)}}\,\frac{1}{X_{2\lambda}^{(2)}}\,\frac{dX_{2\lambda}^{(2)}}{d\xi_2}\right)_{\xi_2=\frac{b}{2}}\coth\frac{\pi\lambda b}{4\,\xi_1^{(0)}}\right]}}\,. \tag{39}$$

Prin urmare, atunci cînd diferenţa de presiune dintre conturul de alimentare şi sondă este dată, formula precedentă permite să se calculeze debitul.

*Primită la redacţie la 16 februarie 1961*

## ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕЧЕНИЯ В ТРЕЩИНОВАТОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

### РЕЗЮМЕ

В работе обобщается известный результат в связи с течением несжимаемой жидкости через трещиноватую пористою среду [1], полагая при этом, что существует одномерное изменение проницаемости. Задача решается методом разделения переменных, причем получаются формулы для дифференциального давления и для расхода.

# SUR UN PROBLÈME D'ÉCOULEMENT DANS UN MILIEU POREUX PRÉSENTANT DES FISSURES

## RÉSUMÉ

Ce travail a pour but la généralisation d'un résultat connu concernant l'écoulement d'un liquide incompressible dans un milieu poreux présentant des fissures [1]. En admettant que la perméabilité est fonction d'une seule variable, l'auteur trouve la solution du problème en appliquant la méthode de la séparation des variables. De cette manière, il trouve des formules pour la pression différentielle et pour le débit.

## BIBLIOGRAFIE

1. M. MUSKAT, *The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media.* McGraw-Hill Book Company, New York and London, 1937, 417–420.

# ASUPRA UTILIZĂRII PLĂCUȚELOR MINERALO-CERAMICE ROMÎNEȘTI ENC

DE

M. P. POPOV, E.D. DECIU și I. MITRICĂ

Utilizarea materialelor mineralo-ceramice la construcția sculelor așchietoare, reține în momentul de față atenția a numeroase institute și laboratoare de cercetări din diferite state. Această problemă prezintă interes și pentru țara noastră, deoarece :

— plăcuțele mineralo-ceramice permit atingerea unor viteze de așchiere mari ;

— suprafețele prelucrate cu plăcuțe mineralo-ceramice au o calitate superioară ;

— aceste plăcuțe se pretează cel mai bine la operațiile de finisare și semifinisare, operații care în viitorul apropiat vor reprezenta cel mai mare volum de prelucrări ca urmare a acțiunii generale de reducere a adaosurilor de prelucrare ;

— prin introducerea plăcuțelor mineralo-ceramice în industrie, va fi posibilă reducerea consumului de plăcuțe din carburi metalice, care au un preț de cost mai ridicat.

Plăcuțele mineralo-ceramice se caracterizează printr-o duritate mare, care se menține și la temperaturi ridicate. Alte caracteristici ale lor sînt : rezistența mare la compresiune și rezistențe suficient de scăzute la încovoiere și la șocuri. Plăcuțele mineralo-ceramice sînt, în general, fragile și casante. Aceste proprietăți se reflectă în posibilitățile lor de utilizare și în forma sculelor. Materialele ceramice au inerție chimică mare și ca atare nu este posibilă formarea în timpul așchierii a vîrfului aderent.

La Institutul de mecanică aplicată „Traian Vuia'' s-au făcut experiențe de așchiere cu plăcuțe mineralo-ceramice tip ENC elaborate în cadrul Institutului de cercetări în construcție și economia construcțiilor (INCERC). S-a utilizat plăcuța de tipul $ENC_1$ caracterizată prin aceea că posedă un singur vîrf activ și are unghiul de atac principal $\varkappa = 45°$ și plăcuța de tipul $ENC_5$ cu două vîrfuri active și cu unghiul $\varkappa = 90°$. Plăcuțele au fost fixate în cuțite cu prindere mecanică în suporți construiți după forma plăcuțelor. În figura 1 sînt prezentate aceste cuțite, atît montate, cît și demontate, alături de plăcuțele respective.

Toate plăcuțele experimentate au vîrful racordat cu $r \approx 0,5$ mm și nu au avut fațetă pe muchia așchietoare.

S-a urmărit stabilirea proprietăților așchietoare ale plăcuțelor ENC făcînd experiențele pe oțelurile OL 50, OL 60 și OL 70 (STAS 500-49).

Metodologia experimentării a fost aceeași ca și în cazul plăcuțelor din carburi metalice [4], [5], [6], cu care s-au făcut în permanență comparații. Amintim că s-a urmărit evoluția uzurii în timp și s-a admis drept criteriu atingerea uzurii pe fața de așezare secundară $\delta_{\alpha_1} = 1$ mm.

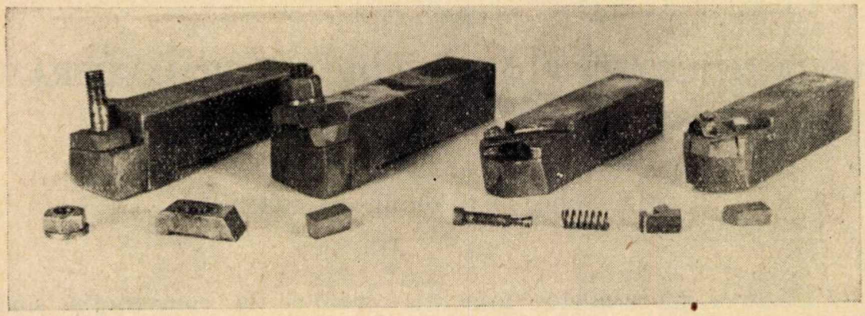


Fig. 1. — Cuțite cu prinderea mecanică pentru plăcuțele $ENC_1$ și $ENC_5$.

Prima problemă ridicată de plăcuțele mineralo-ceramice a fost cea a ascuțirii lor. Datorită durității și fragilității lor mari, apar complicații în comparație cu ascuțirea plăcuțelor din carburi metalice. În lucrările efectuate s-a dat atenție ascuțirii, căutîndu-se o soluție optimă. Astfel s-a ajuns la concluzia că și în cazul plăcuțelor mineralo-ceramice ascuțirea se face din trei operații și anume : o ascuțire de degroșare, o ascuțire de finisare și o lepuire.

În cadrul operațiilor efectuate, ascuțirea plăcuței s-a oprit la operația de finisare pe pietre oală din carbură de siliciu, duritate Ib, granulație 180. În cursul ascuțirii s-a utilizat răcirea cu emulsie.

Pentru micșorarea consumului de abrazive și reducerea cantității de căldură produsă în cursul ascuțirii, a fost necesară scăderea vitezei periferice a pietrei, în comparație cu cea utilizată curent pentru plăcuțele din carburi metalice. Astfel viteza la care s-a lucrat în condiții bune a fost $v \approx 100$ m/min.

Este cunoscut că, în general, calitatea suprafețelor ascuțite ale sculelor joacă un rol de seamă asupra durabilității acestora. În cazul plăcuțelor mineralo-ceramice această influență este mult accentuată, orice asperitate a muchiei așchietoare ducînd la o accelerare a evoluției uzurii. Trebuie acordată o atenție deosebită calității suprafețelor active ascuțite ale sculelor armate cu plăcuțe mineralo-ceramice, pentru a obține o durabilitate mare a acestora.

Studiul calităţilor aşchietoare ale plăcuţelor mineralo-ceramice s-a făcut după aceeaşi metodică ca şi în cazul altor materiale de scule şi anume s-au urmărit parametrii aşchierii pe grupe [2], [3], [4], [5], [6]. Prima grupă studiată a fost cea a parametrilor geometrici. Ca observaţie generală a acestei părţi din studiu se reţine faptul că fenomenele aşchierii sînt analoge ca şi în cazul utilizării altor materiale de scule [2]. Astfel, s-a constatat că ansamblul fenomenelor de deformări plastice şi elastice ce se produc în cursul desprinderii aşchierii au loc în condiţiile cele mai favorabile, adică a evoluţiei celei mai lente a uzurii, în cazul ascuţirii cuţitului la geometria optimă.

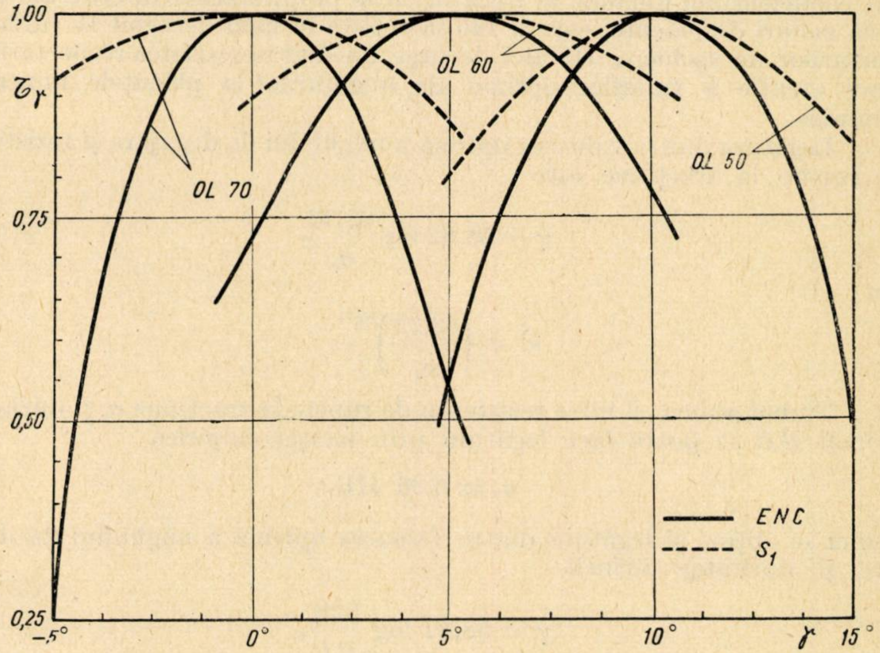


Fig. 2. — Variaţia coeficientului $\tau_\gamma$ în funcţie de unghiul $\gamma$ la oţelurile OL 50, OL 60 şi OL 70.

Rezultatele cercetărilor privind unghiul de degajare sînt date în figura 2, în funcţie de coeficientul adimensional de corecţie al durabilităţii $\tau_\gamma$.

Analizînd rezultatele din figura 2 se constată următoarele :

— Valorile $\gamma_{opt}$ depind de proprietăţile mecanice ale oţelurilor studiate.

— Valorile optime sînt aceleaşi în cazul utilizării plăcuţelor mineralo-ceramice ENC şi a plăcuţelor din carburi metalice $S_1$. Acest fenomen se datoreşte faptului că cele două tipuri de plăcuţe au durităţi apropiate (ENC are HRC $= 65-74$ şi $S_1$ are HRC $= 70-78$). Ca urmare a acestei constatări se poate trage concluzia că natura materialelor de sculă, cînd au durități apropiate, nu influențează asupra valorilor optime ale parametrilor geometrici. Explicația acestui fenomen a fost dată în alte lucrări [2], bazîndu-se pe urmărirea deformațiilor ce se produc în cursul desprinderii așchierii.

— Curbele $\tau_\gamma$ ($\gamma$) sînt diferite pentru plăcuțele ceramice și cele din carburi metalice și anume pantele curbelor pentru plăcuțele ENC sînt mai pronunțate, adică o aceeași abatere de la unghiul optim la plăcuțele ENC conduce la o cădere mai mare a durabilității. Aceasta se datorește atît coeficientului dinamic al frecării, cît și proprietăților diferite ale celor două genuri de plăcuțe, care le fac să reziste în mod deosebit la variațiile eforturilor de așchiere. De aici decurge imediat necesitatea respectării cu mare atenție a valorilor optime ale unghiurilor la plăcuțele mineralo-ceramice.

Legătura dintre valoarea optimă a unghiului de degajare și rezistența de rupere la tracțiune este

$$\gamma = 58{,}82 \log \frac{82{,}22}{\sigma_r}, \tag{1}$$

sau

$$e^\gamma = \left(\frac{82{,}22}{\sigma_r}\right)^{25{,}54}. \tag{2}$$

Ținînd seama că între rezistența de rupere la tracțiune $\sigma_r$ și duritatea Brinell *HB* se poate face legătura prin relația empirică

$$\sigma_r \approx 0{,}36 \text{ HB}, \tag{3}$$

atunci se obține și legătura dintre valoarea optimă a unghiului de degajare și duritatea Brinell

$$\gamma = 58{,}82 \log \frac{228}{HB}, \tag{4}$$

sau

$$e^\gamma = \left(\frac{228}{HB}\right)^{25{,}54}. \tag{5}$$

Pentru unghiurile de așezare principal $\alpha$, așezare secundar $\alpha_1$ și atac secundar $\varkappa_1$ situația se prezintă la fel ca și în cazul plăcuțelor din carburi metalice [4], adică valorile lor optime sînt practic invariabile cu proprietățile mecanice ale oțelurilor prelucrate. Aceste valori sînt egale cu cele obținute la plăcuțele din carburi metalice și anume

$$\alpha = 11^\circ;\ \alpha_1 = 15^\circ;\ \varkappa_1 = 10^\circ. \tag{6}$$

Unghiul de atac principal $\varkappa$ prezintă, de asemenea, aspecte comune între plăcuțele mineralo-ceramice și cele din carburi metalice. O dată cu creșterea unghiului $\varkappa$ scade durabilitatea cuțitului. În figura 3 se prezintă rezultatele obținute pe OL 50.

Din figura 3 se reține că pentru valoarea $\varkappa = 90°$, adică pentru plăcuța ENC$_5$, durabilitatea scade cu aproximativ 60% față de cea corespunzătoare unghiului $\varkappa = 45°$, adică atît cît are plăcuța ENC$_1$. Această variație a durabilității atrage după sine o scădere cu aproximativ 20—25% a vitezelor de așchiere a plăcuței ENC$_5$ față de plăcuța ENC$_1$.

După ce a fost studiată grupa parametrilor geometrici și s-au stabilit valorile lor optime, s-a studiat în continuare grupa parametrilor regimului de așchiere, care sînt viteza de așchiere, avansul și adîncimea de așchiere. Studiul acestor parametri a început prin urmărirea legăturilor dintre parametrii regimului de așchiere și durabilitate, iar în continuare s-au studiat cîteva aspecte ale relațiilor celor mai interesante între parametrii regimului de așchiere.

Urmărindu-se legăturile dintre durabilitate și avans și dintre durabilitate și adîncimea de tăiere, se constată o evoluție continuă a fenomenelor [3].

Reprezentînd datele care dau legătura dintre viteza de așchiere și durabilitate, se găsește aceeași situație ca și în cazul plăcuțelor din carburi metalice. Curbele experimentale pot fi reprezentate prin relația cunoscută

$$vT^n = C_1. \tag{7}$$

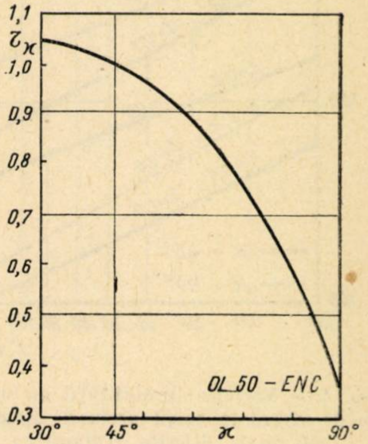


Fig. 3.— Variația coeficientului $\tau_\varkappa$ în funcție de unghiul $\varkappa$ în cazul așchierii oțelului OL 50.

Repetînd aceleași observații și raționamente ca și în cazul plăcuțelor din carburi metalice [4], se reține că în coordonate logaritmice curbele obținute la diferite regimuri, în domeniul $T = 50—120$ minute pot fi liniarizate și considerate cu suficient de bună aproximație ca paralele între ele. De aici se desprinde concluzia că constanta $C_1$ poate fi considerată independentă de viteză, iar exponentul $n$ se poate considera că nu depinde de viteză, avans și adîncimea de așchiere și ca atare se calculează ca medie a valorilor rezultate la diferite regimuri.

În cazul plăcuțelor mineralo-ceramice se remarcă o împrăștiere mai mare a punctelor experimentale, în comparație cu plăcuțele din carburi metalice.

În figura 4 sînt prezentate rezultatele experimentale pentru oțelul OL 50. Se remarcă în această figură o confirmare a celor afirmate mai înainte, referitoare la scăderea vitezii de așchiere pentru o aceeași durabilitate, cînd se utilizează unghiul de atac principal $\varkappa = 90°$ în locul valorii $\varkappa = 45°$.

Valorile exponentului $n$ determinate ca medie la mai multe regimuri sînt date în tabela 1.

Pe baza rezultatelor din tabela 1 se poate calcula o valoare unică $n_{\text{MED}}$ reprezentînd media tuturor valorilor experimentale, care este utilă în calculul coeficienților de corecție ai vitezei. Această valoare este

$$n_{\text{MED}} = 0{,}25. \tag{8}$$

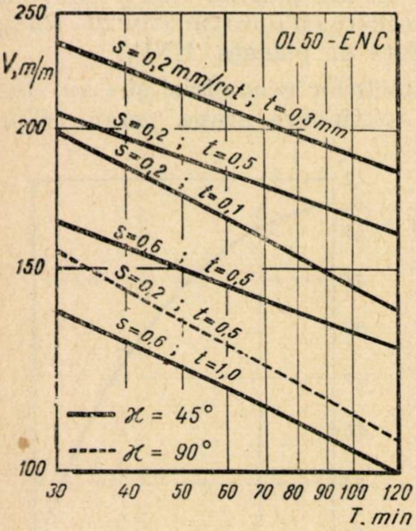


Fig. 4. — Variația durabilității în funcție de viteză în cazul așchierii oțelului OL 50 la diferite regimuri.

*Tabela 1*

| Oțelul | OL 50 | OL 60 | OL 70 |
|---|---|---|---|
| *n* | 0,217 | 0,331 | 0,201 |

Urmărind în continuare relațiile ce există între parametrii regimului de așchiere, s-a studiat viteza economică de așchiere. Așa după cum s-a mai arătat și în altă lucrare [3] și în cazul plăcuțelor mineralo-ceramice poate fi utilizată cu succes formula consacrată pentru carburi metalice

$$v_T = \frac{C}{t^x\, s^y} K, \tag{9}$$

unde s-au stabilit notațiile cunoscute

$v_T$ — viteza economică de așchiere, pentru o durabilitate $T$ minute, m/min;
$C$ — constantă funcție de materialul prelucrat;
$K$ — coeficient global de corecție al vitezei;
$t$ — adîncimea de tăiere, mm;
$s$ — avansul, mm/rot;
$x$, $y$ — exponenți funcție de material.

Interpretînd rezultatele experimentale, s-a ajuns la concluzia similară cu cea din cazul plăcuțelor din carburi metalice [5], că se poate alege pentru constanta din formula (8) valoarea

$$C = 100. \tag{10}$$

Făcînd experiențe pentru domeniul $s = 0{,}1-0{,}8$ m/rot și $t = 0{,}1-3$ mm s-a constatat, în general, o împrăștiere suficient de mare a rezultatelor.

În această situație nu au fost luate în considerație nici rezultatele slabe datorită accidentelor și nici performanțele deosebite, punîndu-se accentul pe valorile medii.

Interpretînd rezultatele referitoare la exponenții $x$ și $y$, a căror valori sînt date în tabela 2, s-a ajuns la concluzia că ei depind de proprietățile mecanice ale oțelurilor așchiate.

*Tabela 2*

| Oțelul | OL 50 | OL 60 | OL 70 |
|---|---|---|---|
| $\sigma_r$(kgf/mm$^2$) | 56,0 | 66,6 | 83,4 |
| $x$ | 0,18 | 0,17 | 0,30 |
| $y$ | 0,27 | 0,26 | 0,27 |

Ținînd seama de împrăștierea rezultatelor experimentale, pentru simplificare, în domeniul sus-amintit, se poate lucra cu valorile medii ale acestor exponenți

$$\left.\begin{aligned} x_{\text{med}} &= 0{,}22 \\ y_{\text{med}} &= 0{,}27 \end{aligned}\right\}. \tag{11}$$

Din cauza utilizării valorilor medii vor apare desigur abateri. Aceste abateri vor fi maxime în cazul oțelurilor cu rezistență de rupere mare, prelucrate cu adîncimi de așchiere mari.

Coeficientul global de corecție al vitezei are expresia

$$K = K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot K_T \cdot K_m \cdot K_\gamma \cdot K_\alpha \cdot K_{\alpha 1} \cdot K_\varkappa \cdot K_{\varkappa 1} \cdot K_\lambda \tag{12}$$

unde s-au utilizat notațiile cunoscute [3], [5].

Influența proprietăților mecanice ale oțelurilor prelucrate este dată de coeficientul de corecție $K_1$. Valorile experimentale obținute pentru acest coeficient sînt date în tabela 3.

*Tabela 3*

| Oțelul | OL 50 | OL 60 | OL 70 |
|---|---|---|---|
| $\sigma_r$(kgf/mm$^2$) | 56,0 | 66,6 | 83,4 |
| $K_1$ | 1,080 | 0,931 | 0,766 |

Relația obținută prin interpolare, care dă variația coeficientului de corecție $K_1$ în funcție de rezistența de rupere la tracțiune, pentru $55 < \sigma_r < 85$ kgf/mm$^2$, este

$$K_1 = 1{,}5 \cdot 10^{-4}\, \sigma_r^2 - 3{,}25 \cdot 10^{-2}\, \sigma_r + 2{,}43. \tag{13}$$

Cu ajutorul formulei (9), utilizînd datele numerice date de relațiile (10), (11) și (13) se poate calcula viteza economică, atunci cînd toți ceilalți coeficienți de corecție ai vitezii au valoarea 1. De asemenea, în același caz poate fi construită o nomogramă asemănătoare cu cea din cazul plăcuțelor din carburi metalice [5], cu care să se poată determina rapid viteza economică de așchiere în funcție de avans, adîncimea de așchiere și rezistența de rupere la tracțiune a oțelului de prelucrat.

În continuare, vor fi analizați coeficienții de corecție mai importanți. Astfel coeficientul de corecție al vitezei în funcție de durabilitatea economică aleasă, cînd se alege drept etalon durabilitatea de 60 minute, se definește

$$K_T = \left(\frac{60}{T}\right)^n. \tag{14}$$

Utilizînd relația (8), valorile coeficientului $K_T$ sînt date în tabela 4.

*Tabela 4*

| $T$ (min) | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $K_T$ | 1,05 | 1 | 0,96 | 0,93 | 0,90 | 0,88 | 0,86 | 0,84 |

Coeficienții $K_i$ de corecție ai vitezei în funcție de parametrii geometrici se calculează cu relația de tipul

$$K_i = (\tau_i)^n \tag{15}$$

și ei modifică viteza de așchiere cînd se utilizează pentru parametrii geometrici alte valori decît cele optime și se urmărește totuși menținerea durabilității economice.

Coeficientul $K_m$ de corecție al vitezei în funcție de materialul plăcuței permite un interesant studiu comparativ între plăcuțele ceramice ENC și plăcuțele din carburi metalice $S_1$, dacă se utilizează relația de definiție

$$K_m = \frac{v_{60\,\mathrm{ENC}}}{v_{60\,S_1}} \tag{16}$$

cînd $v_{60\,\mathrm{ENC}}$ și $v_{60\,S_1}$ se referă la același $s$ și $t$.

Pentru calculul relației (16) trebuie amintit că în cazul plăcuțelor din carburi metalice $S_1$ s-a obținut [5]

$$\begin{aligned} C &= 100, \\ x_{\mathrm{med}} &= 0{,}15, \\ y_{\mathrm{med}} &= 0{,}43. \end{aligned} \tag{17}$$

În domeniul $55 < \sigma_r < 85$ kgf/mm², coeficientul în cazul plăcuţelor $S_1$ poate fi pus şi sub o formă similară celei obţinută pentru plăcuţele mineralo-ceramice, şi anume

$$K_1 = 7{,}5.10^{-4}\,\sigma_r^2 - 12{,}15 \cdot 10^{-2}\,\sigma_r + 5{,}76. \tag{18}$$

Amintim că rezultatele pentru plăcuţele $S_1$ au fost obţinute cu cuţite care nu aveau vîrful racordat.

Înlocuind în formula (16) vitezele economice $v_{60}$ date de relaţia (9) şi utilizînd datele furnizate de relaţiile (10), (11), (13), (17) şi (18), se obţine formula generală

$$K_m = \frac{0{,}015\ \sigma_r^2 - 3{,}25\ \sigma_r + 243}{0{,}075\ \sigma_r^2 - 12{,}15\ \sigma_r + 576}\, s^{0{,}09} \left(\frac{s}{t}\right)^{0{,}07}. \tag{19}$$

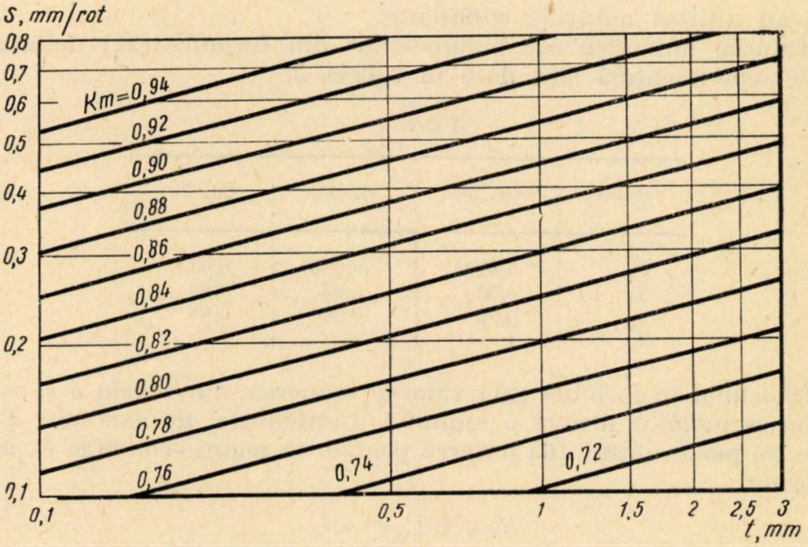


Fig. 5. — Comparaţie făcută cu ajutorul relaţiei (16) între vitezele economice de aşchiere a oţelului OL 60 cu plăcuţele $S_1$ şi $ENC_1$.

Din analiza formulei (19) reiese că în domeniul $s = 0{,}1 - 0{,}8$ mm/rot şi $t = 0{,}1 - 3$ mm, coeficientul $K_m < 1$, adică performanţele plăcuţelor $S_1$ sînt superioare celor obţinute cu plăcuţele ENC. Această analiză poate fi făcută mai clar de exemplu pe oţelul OL 60. În acest caz pentru plăcuţa $S_1$ s-a obţinut: $K_1 = 0{,}984$; $x = 0{,}14$; $y = 0{,}38$; iar pentru plăcuţa $ENC_1$ s-a obţinut: $K_1 = 0{,}931$; $x = 0{,}17$; $y = 0{,}26$. În aceste condiţii coeficientul $K_m$ are expresia

$$K_m = 0{,}947\, \frac{s^{0{,}12}}{t^{0{,}03}}. \tag{20}$$

Relaţia (20) este reprezentată grafic în figura 5.

Vitezele obţinute cu plăcuţele ENC în domeniul studiat sînt comparabile cu cele obţinute cu plăcuţele $S_2$, T14K8, $S_3$, T5K10 etc.

În cazul plăcuţelor mineralo-ceramice coeficientul de corecţie $K_3$, care ţine seama de modul de ascuţire, are o pondere deosebită. Astfel în cazul lepuirii plăcuţelor şi executării unei faţete pe muchia principală aşchietoare, coeficientul $K_3$ are valori supraunitare, viteza de aşchiere fiind sensibil mărită. Cu ajutorul coeficientului $K_3$ se pot transforma rapid datele referitoare la viteza economică, prezentate în lucrarea de faţă, în cazul cînd se ajunge la generalizarea unei tehnici avansate de ascuţire.

În continuarea studiului au fost urmărite relaţiile dintre parametrii regimului de aşchiere şi puterea necesară efecturării aşchierii. Legătura este dată de aceeaşi formulă ca şi în cazul plăcuţelor din carburi metalice [3], [6]

$$N = C_2 t^{x_1} s^{y_1} v^z , \tag{21}$$

unde s-au utilizat notaţiile cunoscute.

Valorile numerice ale parametrilor din formula (21) determinate pe cale experimentală sînt date în tabela 5.

*Tabela 5*

| Oţelul | OL 50 | OL 60 | OL 70 |
|---|---|---|---|
| $C_2$ | 0,0293 | 0,0387 | 0,0387 |
| $x_1$ | 0,76 | 0,93 | 0,89 |
| $y_1$ | 0,79 | 0,96 | 0,84 |
| $z$ | 1 | 1 | 1 |

Înlocuind în formula (21) valorile numerice din tabela 5 şi valorile vitezelor economice pentru o anumită durabilitate, de exemplu $T = 60$ minute, se poate obţine [6] puterea pentru un regim economic exprimată sub forma

$$N_{v60} = C_3 t^{x_2} s^{y_2}. \tag{22}$$

Valorile parametrilor din formula (22) sînt date în tabela 6 pentru oţelurile experimentate.

*Tabela 6*

| Oţelul | OL 50 | OL 60 | OL 70 |
|---|---|---|---|
| $C_3$ | 3,61 | 3,58 | 2,96 |
| $x_2$ | 0,58 | 0,76 | 0,59 |
| $y_2$ | 0,72 | 0,70 | 0,57 |

Ca o concluzie a lucrării de faţă se desprinde importanţa ce trebuie acordată plăcuţelor mineralo-ceramice care reprezintă un material de scule cu mari perspective. La ora actuală domeniul lor de utilizare este încă limitat faţă de cel al plăcuţelor din carburi metalice, fiind mai puţin rezistente la vibrații, șocuri și concentrări locale de eforturi. Tocmai în aceste direcții trebuie îndreptate eforturile creatoare ale cercetătorilor constructori de materiale mineralo-ceramice. De asemenea, cercetările lor trebuie să contribuie la perfecționarea acelor proprietăți care duc la ridicarea vitezelor economice de așchiere ale plăcuțelor mineralo-ceramice.

Ca posibilitate de utilizare este de reținut atenția ce trebuie acordată ascuțirii plăcuțelor mineralo-ceramice la valorile optime ale parametrilor geometrici și faptul că ele se supun acelorași legi ale așchierii ca și plăcuțele din carburi metalice. Asigurîndu-se prin ascuțire o calitate superioară suprafețelor active ale plăcuțelor mineralo-ceramice, executîndu-se fațetă pe muchia așchietoare principală înclinată sub unghiul

$$\gamma_f = 10^\circ \tag{23}$$

cuțitele armate cu aceste plăcuțe pot atinge performanțe similare cu cele din carburi metalice la prelucrările de finisare și semifinisare, unde sînt eliminate șocurile și vibrațiile.

*Primită la redacție la 12 ianuarie 1961*

## О ПРИМЕНЕНИИ РУМЫНСКИХ МИНЕРАЛО-КЕРАМИЧЕСКИХ ПЛАСТИНОК ENC

### РЕЗЮМЕ

В работе приводятся результаты исследований, проведенные с румынскими минерало-керамическими пластинками ENC, применяемыми при резании некоторых углеродистых сталей. Опыты были произведены со сталями OL 50, OL 60 и OL 70 (STAS 500-49).

Устанавливаются оптимальные значения геометрических параметров и экономические режимы в зависимости от механических свойств обрабатываемых сталей. Также изучаются поправочные коэффициенты экономической скорости резания.

В последней части работы рассматривается необходимая для резания мощность.

Работа преследует цель выявить возможности применения минерало-керамических пластинок ENC по сравнению с пластинками из твердых сплавов.

### ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Резцы с механическим закреплением для пластинок $ENC_1$ и $ENC_5$.

Рис. 2. — Изменение коэффициента $\tau_\gamma$ в зависимости от угла $\gamma$ для сталей OL 50, OL 60 и OL 70.

Рис. 3. — Изменение коэффициента $\tau_\varkappa$ в зависимости от угла $\varkappa$ при резании стали OL 50.

Рис. 4. — Изменение стойкости в зависимости от скорости при резании стали OL 50 в различных режимах.

Рис. 5. — Сравнение при помощи соотношения (16) экономических скоростей резания стали OL 60 пластинками $S_1$ и $ENC_1$.

# ON THE USE OF RUMANIAN ENC CERAMIC TIPS

## ABSTRACT

This paper presents the results of the investigations carried out with Rumanian ENC ceramic tips for cutting several carbon steels. The tests were made with OL 50, OL 60 and OL 70 steels (STAS 500-49).

The optimum values of the geometric parameters and the economic cutting regimes are established, which are then related with the mechanical properties of machined steels. The correction coefficients of the economic cutting speed are also investigated.

Finally, the necessary cutting power is analysed.

The paper aims at establishing the possibility of using ENC ceramic tips as compared to sintered-carbide tips.

## CAPTIONS

Fig. 1. — Cutting tools with mechanically attached $ENC_1$ and $ENC_5$ tips.

Fig. 2. — Variation of the coefficient $\tau_\gamma$ against the angle $\gamma$ for OL 50, OL 60 and OL 70 steels.

Fig. 3. — Variation of the coefficient $\tau_\varkappa$ against the angle $\varkappa$ for the OL 50 steel.

Fig. 4. — Variation of tool life against speed for the OL 50 carbon steel for various cutting regimes.

Fig. 5. — Comparison made with the aid of relation (16) between the economic speeds of the OL 60 steel with $S_1$ and $ENC_1$ tips.

## BIBLIOGRAFIE

1. A. I. ISAEV, N. N. ZOREV, L. K. KUCIMA, *Aşchierea metalelor cu scule armate cu plăci mineralo-ceramice*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1954.
2. M. POPOV, I. MITRICĂ, E. DECIU, *Studiu comparativ al parametrilor geometrici ai cuţitelor de strung armate cu plăcuţe mineralo-ceramice şi din carburi metalice.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *4*, 1077 (1958).
3. — *Asupra regimurilor optime de aşchiere cu cuţite de strung armate cu plăcuţe mineralo-ceramice şi din carburi metalice.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **X**, *1*, 219 (1959).
4. — *Rezistenţa la uzură a sculei în funcţie de parametrii geometrici ai acesteia.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **XI**, *4*, 983 (1960).
5. — *Parametrii regimului de aşchiere la oţelurile carbon obişnuite.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **XI** *5*, 1219 (1960).
6. — *Studiul puterii necesare aşchierii oţelurilor carbon obişnuite.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **XI**, *6*, 1481 (1960).

# POSIBILITĂȚI DE CLASIFICARE A TIPURILOR DE SOL ȘI DE DETERMINARE A EFECTELOR LUCRĂRILOR CU AJUTORUL UNOR MĂRIMI FIZICO-MECANICE. II[1]

DE

C. I. FLORESCU, N. BĂJESCU[2], I. ALEXANDRESCU[3] și M. VASILESCU[4]

În prima parte a lucrării, s-au prezentat rezultatele unor măsurători penetrometrice prin care s-a încercat punerea în evidență a variațiilor fizico-mecanice ale solului. Aceste măsurători arată variații ale stărilor fizico-mecanice ale solului în funcție de adîncime, modul de lucru și de caracteristicile generale meteorologice ale anilor în care s-au executat măsurătorile.

Pe baza aparaturii și a metodicii folosite, se întrevede posibilitatea elaborării unor metode de măsură aplicabile în scopuri practice, cum ar fi cunoașterea stărilor fizico-mecanice ale solului în vederea conducerii acestor stări spre mărirea producției.

În această parte a lucrării se prezintă rezultatele unor măsurători penetrometrice prin care s-a încercat punerea în evidență a comportării fizico-mecanice a unui sol asupra căruia s-au executat lucrări foarte energice, așa cum este desfundatul solului în vederea plantării viței de vie.

Pentru aceasta, pe o parcelă uniformă macroscopic s-a executat o desfundare a terenului pînă la 90 cm adîncime, constituind varianta $P_{\mathrm{I}}$ și o desfundare pînă la 60 cm, constituind varianta $P_{\mathrm{II}}$. După plantarea lor prin metode clasice cu viță de vie, s-a delimitat pe $P_{\mathrm{I}}$ și $P_{\mathrm{II}}$ cîte o porțiune pe care nu s-au executat lucrările solului obișnuite în plantațiile de vii, ci numai lucrările care se adresează plantei propriu-zise.

---

[1] Prima parte a lucrării a fost publicată în ,,Studii și cercetări de mecanică aplicată", **XI**, *5* (1960).

[2] I.C.A.R.

[3] I.C.H.V.

[4] Ministerul Agriculturii.

Porţiunea delimitată din parcela $P_{I}$ s-a notat în cele ce urmează cu $P_{IM}$, iar porţiunea corespunzătoare parcelei $P_{II}$ s-a notat în cele ce urmează cu $P_{IIM}$.

Pe parcelele $P_{I}$ şi $P_{II}$ măsurătorile penetrometrice s-au executat tot în două grupaje a cîte 10 măsurători fiecare grupaj, ca şi la măsurătorile expuse în prima parte a lucrării, iar pe $P_{IM}$ şi $P_{IIM}$, din cauza dimensiunilor mai reduse, s-a executat numai un grupaj. Rezultatele prezentate în această parte a lucrării reprezintă prelucrarea a peste 25 000 valori înregistrate. Pentru exemplificarea metodei de calcul utilizate, precum şi pentru ilustrarea volumului mare de măsurători ce s-a făcut se dau la sfîrşitul articolului doar valorile înregistrate şi prelucrate de pe $P_{I}$ şi $P_{II}$, situaţia iniţială din 1958, aceste valori reprezentînd doar 2 % din totalul valorilor înregistrate şi prelucrate.

Lucrările agricole aplicate, în general, unor astfel de culturi au fost sistematizate din punct de vedere fizico-mecanic şi simbolizate în tabela 1 din partea I a lucrării.

La tabela 1 se mai adaugă şi următoarele lucrări; defrişat via şi desfundat — simbol *A*, pichetat şi plantat viţa — simbol *B*.

Măsurătorile s-au executat cu penetrograful tip IMA II, iar penetrogramele au fost prelucrate prin aceeaşi metodă *M* (*Z*, *N*) ca şi în lucrarea anterioară.

Datele asupra umidităţii solului pe parcelele $P_{I}$, $P_{II}$, $P_{IM}$ şi $P_{IIM}$ sînt redate în tabela 2.

*Tabela 2*

**Dinamica apei din sol**

| Data | Adîncimea în cm | Varianta | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $P_{I}$ | $P_{IM}$ | $P_{IIM}$ | $P_{II}$ |
| | | *1958* | | | |
| 8.V | 0—10 | 24,5 | 24,8 | 26,1 | 24,1 |
| | 10—20 | 23,6 | 24,4 | 25,5 | 24,1 |
| | 20—30 | 23,4 | 23,0 | 24,2 | 23,0 |
| | 30—40 | 23,0 | 22,3 | 24,1 | 22,3 |
| | 40—50 | 22,6 | 21,7 | 23,0 | 21,7 |
| | 50—60 | 21,7 | 21,6 | 22,0 | 20,5 |
| 2.VII | 0—10 | 21,8 | 22,9 | 23,1 | 22,1 |
| | 10—20 | 21,6 | 21,8 | 22,1 | 21,2 |
| | 20—30 | 20,6 | 21,6 | 22,0 | 21,6 |
| | 30—40 | 19,1 | 21,2 | 20,1 | 20,0 |
| | 40—50 | 19,0 | 20,0 | 19,6 | 19,0 |
| | 50—60 | 17,6 | 19,0 | 18,9 | 19,0 |
| 14.VIII | 0—10 | 16,1 | 19,4 | 16,3 | 17,3 |
| | 10—20 | 19,5 | 19,7 | 16,3 | 18,4 |
| | 20—30 | 21,5 | 22,0 | 18,5 | 19,0 |
| | 30—40 | 20,1 | 20,4 | 17,3 | 19,5 |
| | 40—50 | 18,9 | 17,7 | 16,6 | 17,8 |
| | 50—60 | 17,4 | 16,6 | 16,2 | 16,6 |

*Tabela 2 (continuare)*

| Data | Adîncimea în cm | Varianta | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $P_I$ | $P_{IM}$ | $P_{IIM}$ | $P_{II}$ |
| 3.X | 0–10 | 12,7 | 11,8 | 13,0 | 12,9 |
| | 10–20 | 14,0 | 12,6 | 14,4 | 14,0 |
| | 20–30 | 13,3 | 14,2 | 15,2 | 13,5 |
| | 30–40 | 12,9 | 12,7 | 12,9 | 12,4 |
| | 40–50 | 11,9 | 11,9 | 12,7 | 11,9 |
| | 50–60 | 10,9 | 11,2 | 11,4 | 10,8 |
| 20.XI | 0–10 | 20,7 | 18,5 | 20,0 | 19,6 |
| | 10–20 | 22,0 | 18,35 | 21,5 | 19,4 |
| | 20–30 | 22,0 | 19,6 | 21,3 | 19,6 |
| | 30–40 | 23,2 | 18,35 | 23,2 | 19,4 |
| | 40–50 | 20,4 | 17,7 | 20,7 | 19,5 |
| | 50–60 | 19,8 | 17,26 | 16,1 | 18,4 |
| | | | *1959* | | |
| 1.III | 0–10 | 22,5 | 23,0 | 23,2 | 23,1 |
| | 10–20 | 22,8 | 23,2 | 23,1 | 21,6 |
| | 20–30 | 22,3 | 23,2 | 21,6 | 22,0 |
| | 30–40 | 21,7 | 22,5 | 22,0 | 22,0 |
| | 40–50 | 21,1 | 22,1 | 21,8 | 21,1 |
| | 50–60 | 20,5 | 21,1 | 20,6 | 20,0 |
| 15.VIII | 0–10 | 15,1 | 8,3 | 9,0 | 13,6 |
| | 10–20 | 18,5 | 12,3 | 11,9 | 14,6 |
| | 20–30 | 20,7 | 13,8 | 11,8 | 18,2 |
| | 30–40 | 23,5 | 12,8 | 10,8 | 18,3 |
| | 40–50 | 23,2 | 19,5 | 13,8 | 19,5 |
| | 50–60 | 21,3 | 16,9 | 15,4 | 21,0 |
| 30.X | 0–10 | 16,9 | 16,1 | 17,3 | 18,3 |
| | 10–20 | 16,4 | 17,3 | 17,3 | 18,9 |
| | 20–30 | 18,3 | 16,1 | 17,3 | 15,0 |
| | 30–40 | 17,8 | 17,3 | 17,2 | 14,0 |
| | 40–50 | 18,5 | 17,3 | 17,5 | 13,9 |
| | 50–60 | 17,4 | 16,3 | 17,3 | 13,9 |

În figura 1 (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*) se prezintă variația rezistenței la penetrare a solului pe varianta $P_I$ în 1958, iar în figura 5 (*a*, *b*, *c*) în anul 1959. În figura 2 (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*) se prezintă situația de pe varianta $P_{II}$ în 1958 iar în figura 6 (*a*, *b*, *c*) în 1959. În figura 3 (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*) și în figura 4 (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*) se prezintă situația din 1958 de pe $P_{IM}$ respectiv $P_{IIM}$, iar situația din 1959 este redată în figura 7 (*a*, *b*, *c*,) respectiv figura 8 (*a*, *b*, *c*).

În anul 1958 măsurătorile rezistenței la penetrare a solului pe $P_I$ și $P_{II}$ s-au executat în șirul lucrărilor culturale în următoarea ordine : $A$ (terminat în martie) — $B$ (28.IV) — $Kp$ (8.V) — $A_1$ (13.V) — $A_4$ (14.V) —$A_6$ (15.V) — $A_3$ (31.V) — $A_2 + A_3$ (13.VI) — $A_2$ (18.VI) — $A_2$ (26.VI) —$A_3$ (28.VI) — $Kp$ (2.VII) — $A_2$ (7.VII) — $A_3$ (10.VII) — $A_2$ (21.VII) —$A_3$ (22.VII) — $A_2 + A_3$ (4.VIII) — $Kp$ (14.VIII) — $B_9$ (26.VIII) — —$A_2$ (3.IX) — $Kp$ (3.X) — $B_{14} + A_0$ (19.XI) — $Kp$ (20.XI). Pe $P_{IM}$ și

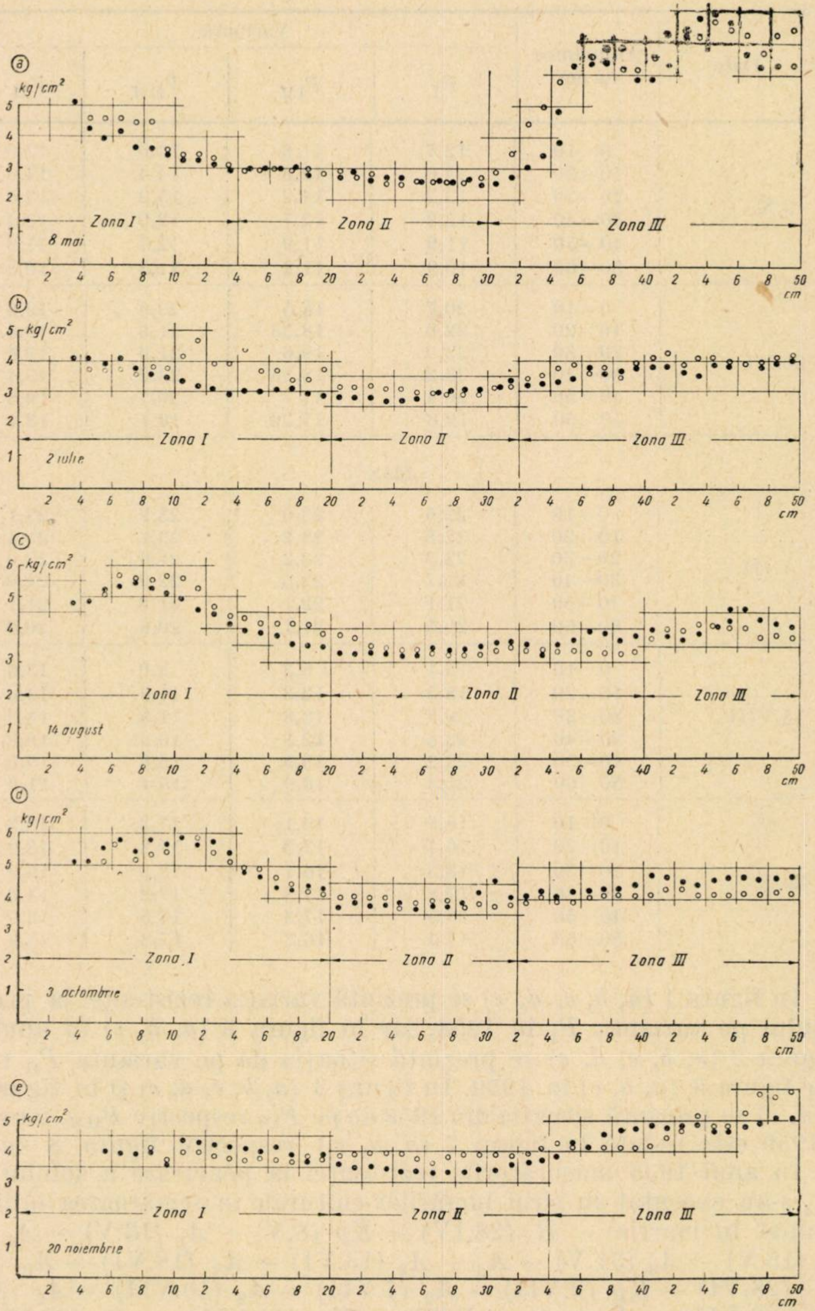

a
kg/cm²
5
4
3
2
1
Zona I
Zona II
Zona III
8 mai
2 4 6 8 10 2 4 6 8 20 2 4 6 8 30 2 4 6 8 40 2 4 6 8 50
cm
b
kg/cm²
Zona I
Zona II
Zona III
2 iulie
c
6
kg/cm²
Zona I
Zona II
Zona III
14 august
d
kg/cm²
Zona I
Zona II
Zona III
3 octombrie
e
kg/cm²
Zona I
Zona II
Zona III
20 noiembrie

Fig. 1 *a*, *b*, *c*, *d*, *e*

$P_{IIM}$ s-au executat doar : de trei ori plivitul manual și ciupitul și stropitul.

În anul 1959 s-a căutat să se mențină aceeași ordine a lucrărilor ; rezistența la penetrare s-a măsurat însă numai de trei ori.

Alurele curbelor obținute pe cele două grupaje sînt în general asemănătoare, de unde rezultă încă o dată eficacitatea metodei de măsură utilizată.

Considerînd alurele curbelor rezistenței la penetrare, constatăm că starea inițială a solului desfundat la 90 cm și la 60 cm (fig. 1 *a*, 2 *a*, 3 *a*, 4 *a*), pînă la adîncimea de 50 cm, cuprinsă în măsurătorile noastre, prezintă o bună asemănare. Această asemănare se menține, în general, pe $P_I$ și $P_{II}$ și la celelalte măsurători făcute de-a lungul întregului an 1958 (cu unele excepții). Situația inițială a anului 1959 este diferită de aceea a anului precedent, așa după cum se arată în figurile 5*a*, 6*a*, 7*a*, 8*a*. Dar între $P_I$ și $P_{II}$ continuă să rămînă aceeași bună asemănare a alurei curbelor, sesizată și în 1958.

Datorită acestei asemănări în alurele curbelor obținute, domeniul de variație al rezultatelor măsurătorilor este cu mult mai restrîns decît cel semnalat la măsurătorile ce au făcut obiectul primei părți a acestei lucrări.

Considerînd cu o aproximație de $\pm$ 0,5 kg/cm$^2$ (în unele cazuri mai mică) s-au înregistrat următoarele aspecte ale variației pe verticală ale rezistențelor la penetrare. Pe $P_I$ situația inițială a anului 1958 (fig. 1 *a*) are următorul aspect : de la 0 cm la 14 cm adîncime rezistența la penetrare scade continuu de la 5 kg/cm$^2$ la 3 kg/cm$^2$ ; de la 14 cm la 30 cm variația este cuprinsă între 3 și 2,5 kg/cm$^2$, iar de la 30 cm la 50 cm adîncime se înregistrează o creștere puternică între 30–36 cm de la 2,5 la 8 kg/cm$^2$.

Pe $P_{II}$ (fig. 2 *a*) în același timp se constată o alură asemănătoare a curbei rezistenței la penetrare : de la 0 cm la 20 cm scade de la 5,5 la 3 kg/cm$^2$ ; între 20 cm și 31 cm variază între 2,5 și 3 kg/cm$^2$ ; iar de la 31 la 50 cm adîncime se constată aceeași formă de creștere de la 3 la 8,5 kg/cm$^2$.

Pe $P_{IM}$ și $P_{IIM}$ (fig. 3*a* și 4*a*) curbele rezistenței la penetrare redau aceleași aspecte : de la 0 cm la 15 cm o scădere de la 4 la 3 kg/cm$^2$ ; de la 15 la 30 cm oscilează puțin în jurul a 3 kg/cm$^2$ ; iar de la 30 la 50 cm crește după aceeași formă ca și pe $P_I$ și $P_{II}$, de la 3 la 8 kg/cm$^2$.

La măsurătoarea următoare (fig. 1 *b*, 2 *b*, 3 *b*, 4 *b*) se constată pe toate parcelele dispariția zonei de mare rezistență dintre 30 și 50 cm adîncime semnalată la prima măsurătoare.

Rezistența la penetrare este mult mai uniformă, înregistrînd următoarele valori : de la 0 cm la circa 20 cm o variație între 3 și 4 kg/cm$^2$ ; între 20 cm și 30 cm $P_I$ are valori în jurul a 3 kg/cm$^2$, iar $P_{II}$, $P_{IM}$ și $P_{IIM}$ sub 3 kg/cm$^2$ ; de la 30 la 50 cm variația fiind cuprinsă pe toate parcelele între 3 și 4 kg/cm$^2$.

În a treia măsurătoare (fig. 1 *c*, 2 *c*, 3 *c*, 4 *c*) se evidențiază o creștere a rezistenței la penetrare în partea de la suprafață. În aceeași parte se profilează un maxim de rezistență în jurul a 10 cm adîncime pe $P_I$ (fig. 1 *c*) între 5 și 6 kg/cm$^2$, descrescînd la 20 cm adîncime între 3,5–4 kg/cm$^2$.

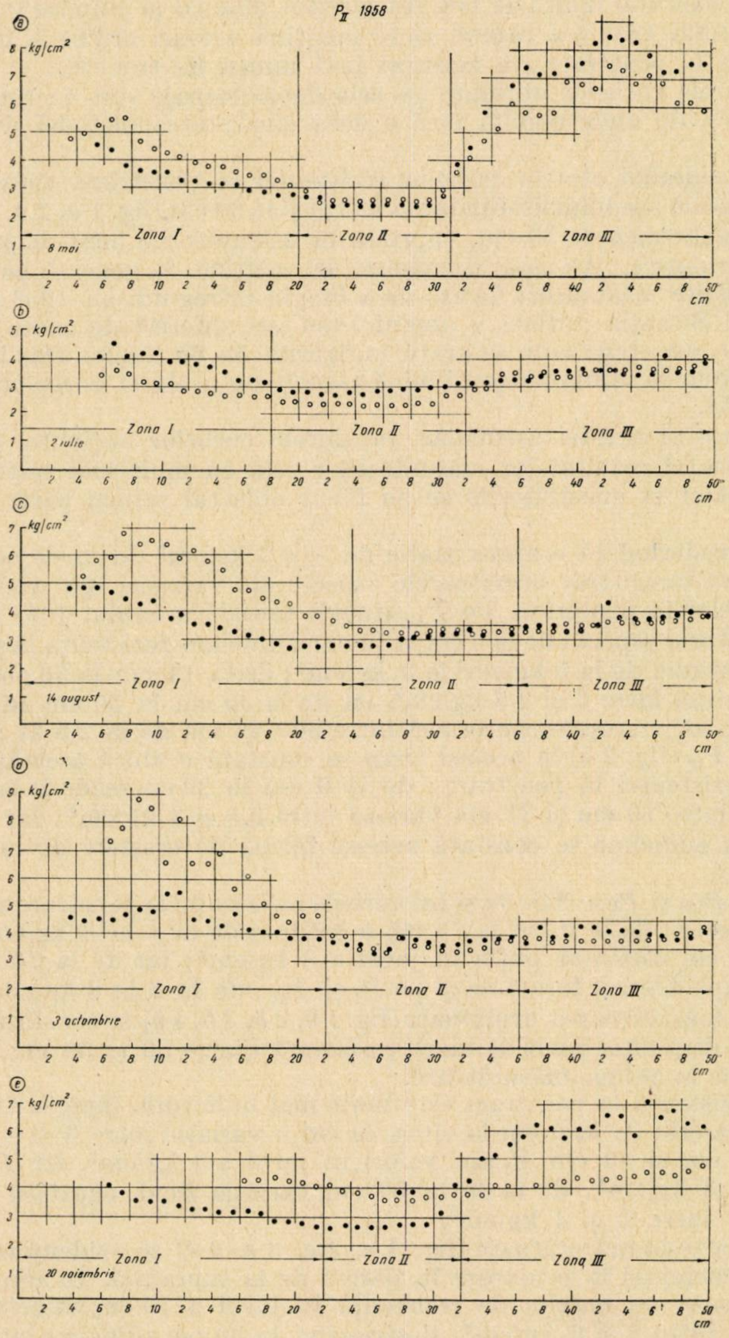

P_II 1958
a
b
c
d
e
kg/cm²
Zona I
Zona II
Zona III
8 mai
2 iulie
14 august
3 octombrie
20 noiembrie
2 4 6 8 10 2 4 6 8 20 2 4 6 8 30 2 4 6 8 40 2 4 6 8 50
cm

Fig. 2 *a*, *b*, *c*, *d*, *e*

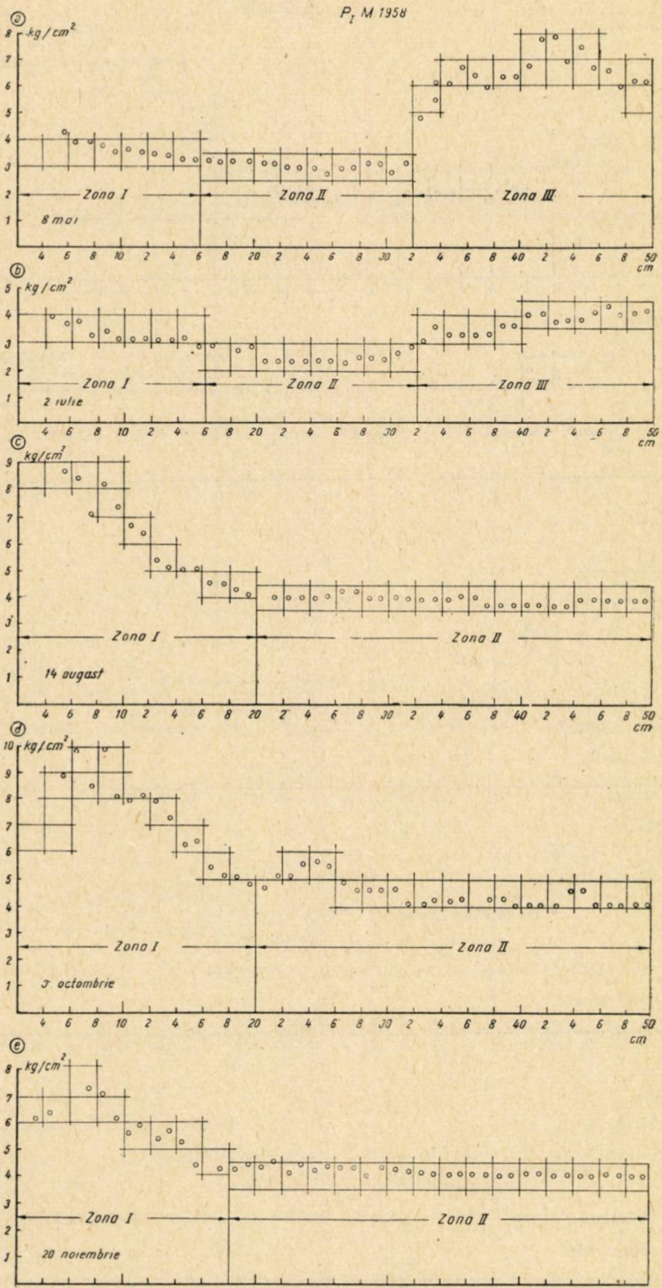

P_I M 1958
a
kg/cm²
Zona I
Zona II
Zona III
8 mai
b
kg/cm²
Zona I
Zona II
Zona III
2 iulie
c
kg/cm²
Zona I
Zona II
14 august
d
kg/cm²
Zona I
Zona II
3 octombrie
e
kg/cm²
Zona I
Zona II
20 noiembrie
4 6 8 10 2 4 6 8 20 2 4 6 8 30 2 4 6 8 40 2 4 6 8 50
cm

Fig. 3 *a*, *b*, *c*, *d*, *e*

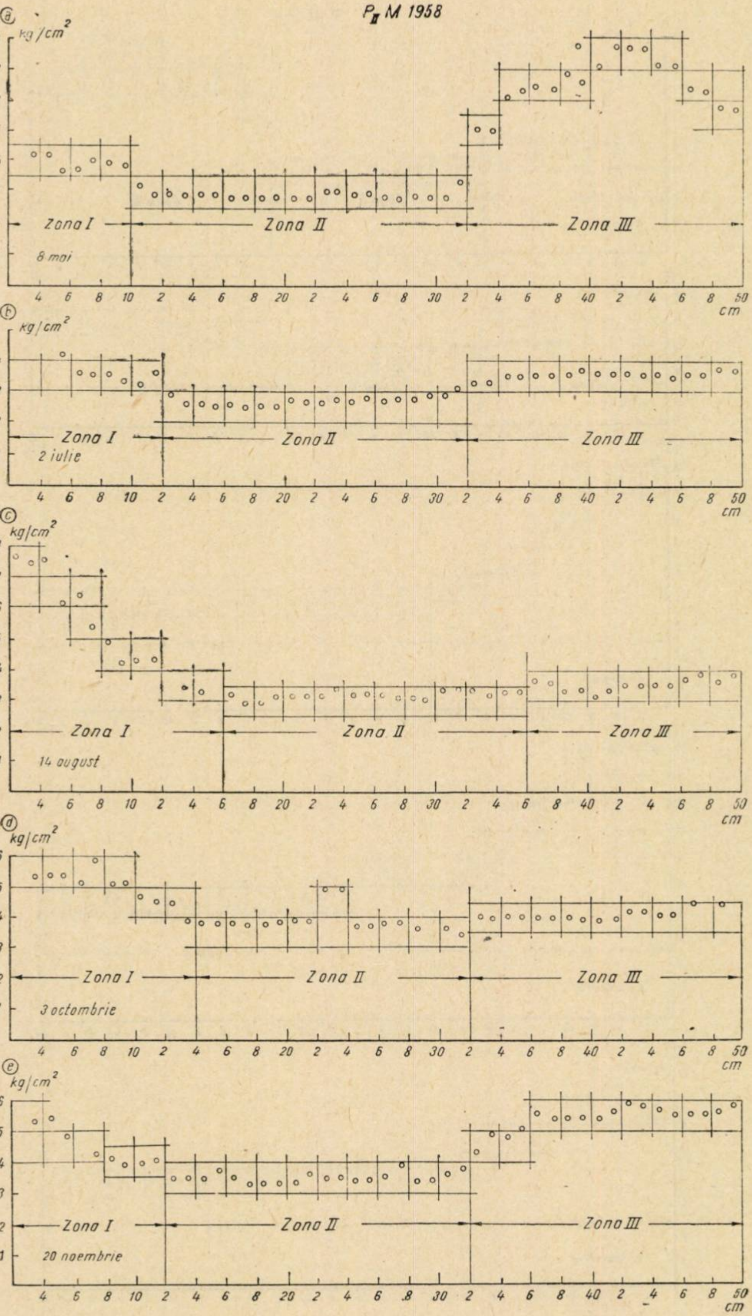

a
P II M 1958
kg/cm²
Zona I
Zona II
Zona III
8 mai
4 6 8 10 2 4 6 8 20 2 4 6 8 30 2 4 6 8 40 2 4 6 8 50
cm
b
kg/cm²
Zona I
Zona II
Zona III
2 iulie
c
kg/cm²
Zona I
Zona II
Zona III
14 august
d
kg/cm²
Zona I
Zona II
Zona III
3 octombrie
e
kg/cm²
Zona I
Zona II
Zona III
20 noembrie

Fig. 4 *a*, *b*, *c*, *d*, *e*

Pe $P_{\mathrm{II}}$ (fig. 2 *c*) cele două grupaje de măsurători au aluri puțin deosebite : unul prezintă un maxim în jurul adîncimii de 10 cm cu valori între 6 și 7 kg/cm$^2$, urmată de o scădere ce ajunge la 24 cm adîncime, la 3,5 kg/cm$^2$. Celălalt grupaj prezintă o descreștere continuă de la suprafață, unde rezistența la penetrare are 5 kg/cm$^2$, pînă la 24 cm adîncime, unde rezistența la penetrare are valoarea de 3 kg/cm$^2$. $P_{\mathrm{I}M}$ (fig. 3 *c*) și $P_{\mathrm{II}M}$ (fig. 4 *c*) prezintă la aceeași dată, în partea de la 0 la 20 cm, o descreștere a rezistenței la penetrare de la 7,5—8,5 kg/cm$^2$ la 3—4 kg/cm$^2$, continuînd a oscila între ultimele valori pînă la adîncimea de 50 cm.

La aceeași dată $P_{\mathrm{I}}$ și $P_{\mathrm{II}}$ prezintă între 20—36 cm adîncime oscilații în jurul rezistențelor de 3 și 4 kg/cm$^2$, iar de la 26 la 50 cm o creștere a rezistenței la penetrare în jurul a 4,5 kg/cm$^2$.

Măsurătorile următoare (3.X) redau o suprapunere a valorilor celor două grupaje pentru cea mai mare parte din $P_{\mathrm{I}}$ (fig. 1 *d*). Aceeași suprapunere a rezultatelor se observă la $P_{\mathrm{II}}$ (fig. 2 *d*) între 22 și 50 cm adîncime. Această comportare se manifestă și la măsurătoarea precedentă (14.VIII).

Ultimele măsurători ale anului 1958 (20.XI) au redat următoarele aspecte ale rezistenței la penetrare : pe $P_{\mathrm{I}}$ (fig. 1 *e*) de la 0 la 20 cm rezistența la penetrare variază între 4 și 4,5 kg/cm$^2$, între 20—30 cm variază între 3...4 kg/cm$^2$, iar de la 32 la 50 cm crește continuu pînă la 6 kg/cm$^2$.

Pe $P_{\mathrm{II}}$ (fig. 2*e*) primul grupaj de măsurători variază de la suprafață la 50 cm adîncime între 4...5 kg/cm$^2$, cu excepția unei porțiuni între 22...32 cm adîncime, unde scade sub 4 kg/cm$^2$.

Al doilea grupaj prezintă o scădere a rezistenței la penetrare de la 0 la 22 cm, de la 4 la 2,5 kg/cm$^2$; între 22 și 31 cm variază între 2,5...3 kg/cm$^2$, iar de la 32 cm la 50 cm crește pînă la 7 kg/cm$^2$.

$P_{\mathrm{I}M}$ (fig. 3 *e*) prezintă următoarele aspecte : 0—18 cm o descreștere de la 5,5 la 3 kg/cm$^2$; între 18—32 cm o variație între 3 și 4 kg/cm$^2$, iar între 32 și 50 cm valori cuprinse între 4 și 5 kg/cm$^2$.

$P_{\mathrm{II}M}$ (fig. 4 *e*) între 0—18 cm prezintă o formație cu un maximum de rezistență 8 kg/cm$^2$ în jurul adîncimii de 8 cm, descrescînd la 18 cm la 4 kg/cm$^2$; de la această adîncime la 50 cm rezistența la penetrare variază între 4 și 4,5 kg/cm$^2$.

După cum s-a arătat și mai sus, în 1959 se constată o situație inițială și o variație în timp diferită de cea din 1958 (fig. 5, 6, 7, 8). Astfel situația inițială pe $P_{\mathrm{I}}$ (fig. 5 *a*) este următoarea : de la 0—22 cm rezistența la penetrare este cuprinsă între 3—3,5 kg/cm$^2$, de la 22—30 cm coboară sub 3 kg/cm$^2$, iar de la 30—50 cm crește de la 3 kg/cm$^2$ — 4 kg/cm$^2$. Pe $P_{\mathrm{II}}$ (fig. 6 *a*) situația se prezintă astfel : de la 0—24 cm rezistența la penetrare variază în jurul a 3 kg/cm$^2$ cu tendință ca valoarea medie să fie puțin mai mare, între 24—34 cm se constată o foarte mică tendință de scădere a valorii medii, iar de la 34—50 cm rezistența la penetrare este cuprinsă între 3—4 kg/cm$^2$. Pe $P_{\mathrm{I}M}$ și $P_{\mathrm{II}M}$ (fig. 7 *a* și 8 *a*) avem următoarea situație inițială : de la 0—24 cm rezistența la penetrare este puțin peste 3 kg/cm$^2$, între 24—34 cm este sub 3 kg/cm$^2$, iar de la 34—50 cm este cuprinsă între 3—4 kg/cm$^2$.

După cum se vede, atît pe $P_I$ și $P_{II}$ cît și $P_{IM}$ și $P_{IIM}$ măsurătorile făcute la începutul anului 1959 ne arată o situație similară în ceea ce privește rezistența la penetrare.

A doua măsurătoare s-a făcut în mijlocul anului (15 august 1959) cu care ocazie s-a constatat următoarea situație pe $P_I$ (fig. 5 *b*) de la 0—20 cm rezistența la penetrare este cuprinsă între 3,5—4,5 kg/cm², prezentînd o oarecare tendință de maxim în jurul a 16 cm, între 20—30 cm coboară sub 4 kg/cm² iar între 30—50 cm rezistența la penetrare este peste 4 kg/cm², iar unul din grupaje atinge aproape 5 kg/cm². Pe $P_{II}$ (fig. 6 *b*) alura curbei de variație a rezistenței la penetrare este în mare parte asemănătoare cu cea de pe $P_I$, însă are valori puțin mai mari. Astfel între 0—20 cm rezistența la penetrare este cuprinsă între 4—5,5 kg/cm² cu aceeași tendință de a prezenta un maxim ; între 20—30 cm este cuprinsă între 4—4,5 kg/cm², iar între 30—50 cm variază între 4—5 kg/cm².

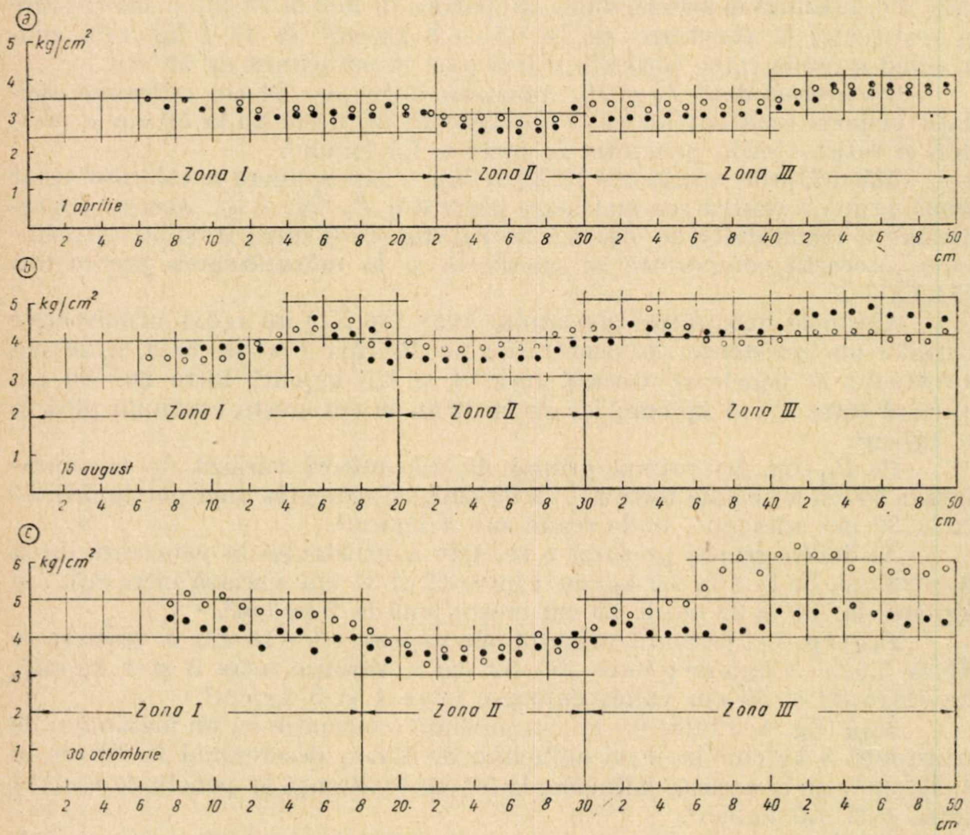


Fig. 5 *a*, *b*, *c*

$P_{IM}$ (fig. 7 *b*) și $P_{IIM}$ (fig. 8 *b*) au aluri asemănătoare între ele, însă diferă foarte mult de $P_I$ și $P_{II}$. Astfel ele prezintă o mare împrăștiere în porțiunea de la 0–20 cm, împrăștiere cuprinsă între 5,5–9 kg/cm² pe $P_{IM}$ și 4,5–6,5 pe $P_{IIM}$. Cu toată această mare împrăștiere se poate observa și în acest caz o tendință de a prezenta un maxim. De la 20 la

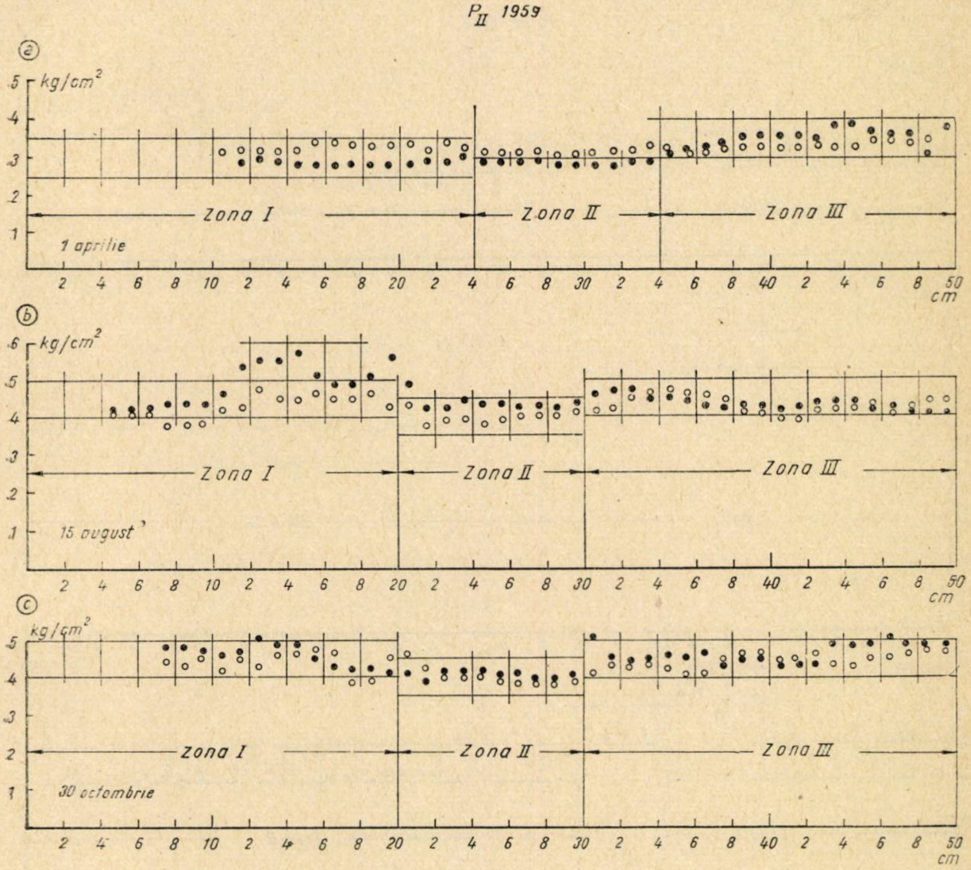


Fig. 6 *a*, *b*, *c*

50 cm pe $P_{IM}$ rezistența la penetrare variază în jurul a 5 kg/cm², iar pe $P_{IIM}$ variază în jurul a 4,5 kg/cm².

Situația de la sfîrșitul anului 1959 se prezintă astfel : pe $P_I$ (fig. 5 *c*) rezistența la penetrare pe prima porțiune pînă la 20 cm are tendința de a scădea de la valoarea de 5 kg/cm², pe care o are aproape de suprafață, pînă la 3,5–4 kg/cm² pe care o are la 20 cm ; între 20 și 30 cm este cuprinsă între 3,5–4 kg/cm², iar de la 30 la 50 cm se constată o tendință de creștere, primul grupaj atingînd valoarea de 6,5 kg/cm², iar la al doilea grupaj este cuprinsă între 4–5 kg/cm². Pe $P_{II}$ (fig. 6 *c*) situația se prezintă astfel : pînă la 20 cm rezistența la penetrare variază între 4—5 kg/cm², între 20—30 cm variază în jurul a 4 kg/cm², iar de la 30—50 cm variază din nou între 4—5 kg/cm².

Și la această dată se constată că pe $P_{IM}$ și pe $P_{IIM}$ variația rezistenței la penetrare prezintă același aspect, însă cu valori diferite. Pe porțiunea pînă la 20 cm pe $P_{IM}$ (fig. 7 $c$) rezistența la penetrare are variații mari și este cuprinsă între 4—6 kg/cm², iar pe $P_{IIM}$ (fig. 8 $c$) are de asemenea variații mari și este cuprinsă între 4—6 kg/cm², iar de la 20 — 50 cm pe $P_{IM}$ între 5—6 kg/cm², iar pe $P_{IIN}$ variază între 4 — 5 kg/cm².

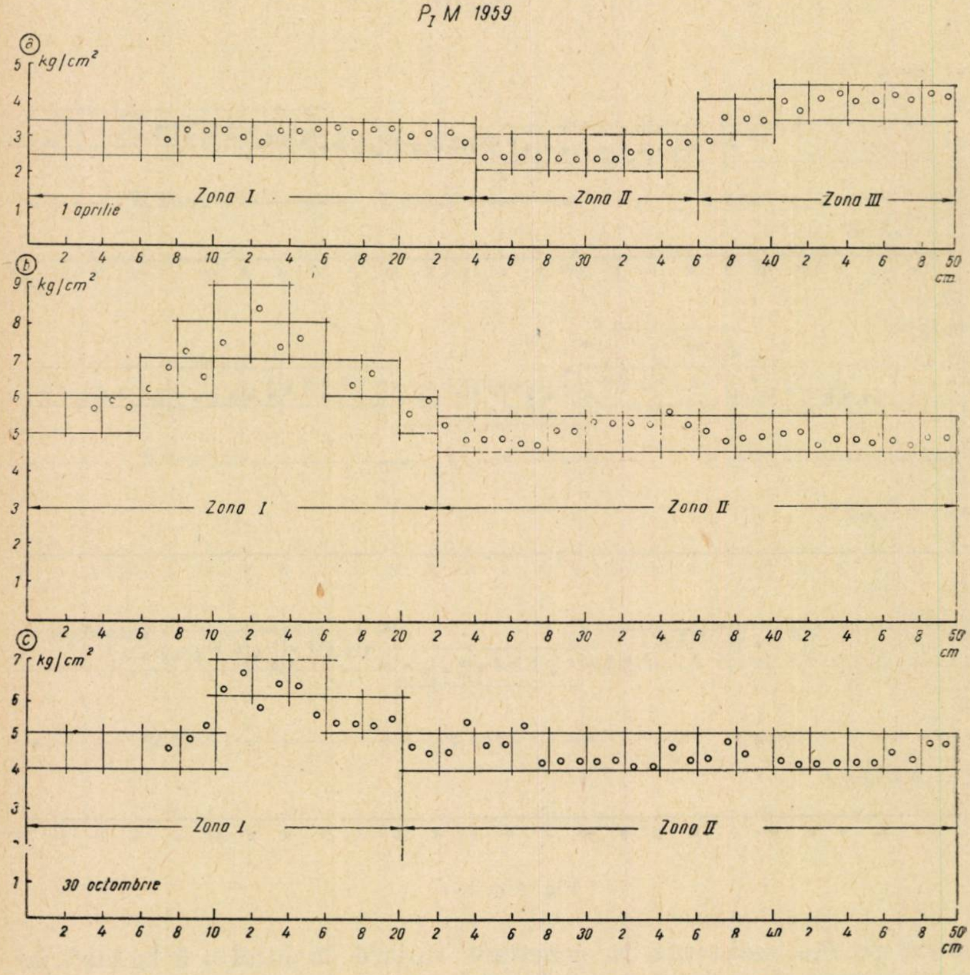


Fig. 7 $a$, $b$, $c$

Din cele prezentate mai sus se pot desprinde următoarele constatări :

— Cu toate că variantele $P_{I}$ şi $P_{II}$ au fost supuse inițial unor lucrări energice ($P_{I}$ desfundat la 90 cm şi $P_{II}$ la 60 cm) la prima măsurătoare făcută în 1958, a variației rezistenței la penetrare pînă la 50 cm, se

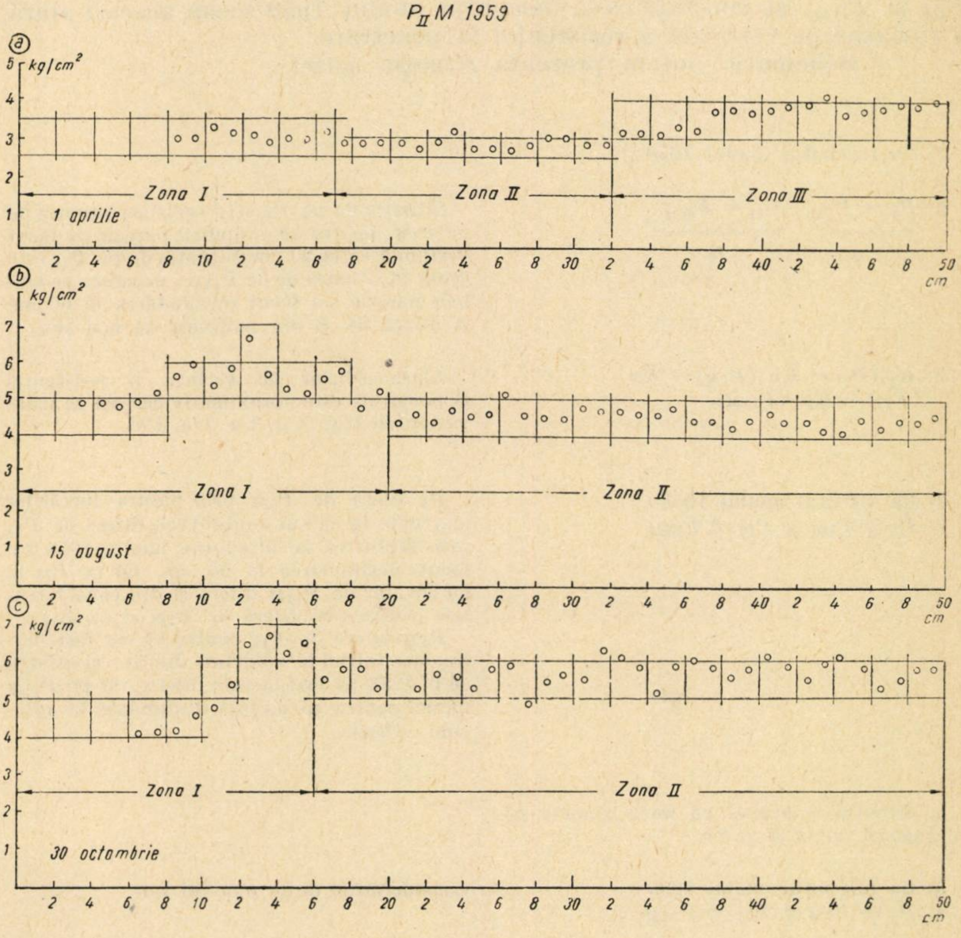


Fig. 8 *a*, *b*, *c*

constată aceeaşi situație pe ambele variante (situație similară prezintă şi $P_{IM}$ şi $P_{IIM}$) (fig. 1 *a*, 2 *a*, 3 *a*, 4 *a*).

— În general (cu foarte mici excepții), alura curbelor de variație a rezistenței la penetrare prezintă acelaşi aspect la cele două grupe de măsurători.

— Pe $P_I$ și $P_{II}$ s-au efectuat lucrări de întreținere a culturilor diferite de cele executate pe $P_{IM}$ și $P_{IIM}$. Măsurătorile penetrometrice făcute pun în evidență această diferență de tratare a culturilor.

— Cu toate că la începutul anului 1958 situația de pe parcelele $P_I$ și $P_{IM}$ diferea foarte mult de situația de pe parcelele $P_{II}$ și $P_{IIM}$ în ceea ce privește lucrările efectuate și cu toate că în timpul anului 1958 pe parcelele $P_I$ și $P_{II}$ s-au efectuat lucrări diferite de lucrările efectuate pe $P_{IM}$ și $P_{IIM}$, se constată că la începutul anului 1959 avem aceeași alură a variației pe verticală a rezistenței la penetrare.

— Schematic putem prezenta situația astfel:

| | |
|---|---|
| 1) La începutul anului 1958: | |
| a. $\underbrace{P_I = P_{IM}}_{A}$ $\underbrace{P_{II} = P_{IIM}}_{B}$ | Situația de pe $P_I$ este egală cu situația de pe $P_{IM}$, pentru că pe ambele parcele s-a făcut desfundarea la 90 cm. Situația de pe $P_{II}$ este egală cu situația de pe $P_{IIM}$, deoarece pe ambele parcele s-a făcut desfundarea la 60 cm. *A* diferă de *B* din motivele de mai sus. |
| b. $Kp\,(P_I) = Kp\,(P_{IM}) = Kp\,(P_{II}) = Kp\,(P_{IIM})$. | Alura curbelor de variație a rezistenței la penetrare este aproximativ aceeași pe toate variantele (fig. 1 *a*, 2 *a*, 3 *a*, 4 *a*). |
| 2) La sfîrșitul anului 1958:<br>a. $P_I \neq P_{IM} \neq P_{II} \neq P_{IIM}$ | $P_I$ diferă de $P_{IM}$ prin natura lucrărilor efectuate în cursul anului 1958, diferă de $P_{II}$ prin faptul că la începutul anului 1958 s-a făcut desfundarea la 90 cm, iar pe $P_{II}$ la 60 cm, iar de $P_{IIM}$ diferă și din considerentele pentru care diferă de $P_{IM}$ și de $P_{II}$.<br>$P_{IM}$ diferă de $P_{II}$ pentru că au fost desfundate inițial la adîncimi diferite și pentru că în 1958 au fost lucrate diferit, iar pe $P_{IIM}$ numai pentru că au fost desfundate la adîncimi diferite. |
| b. Situația complexă cu unele puncte de contigență cu 1 *b* și cu 4 *b*. | |
| 3) La începutul anului 1959:<br>a. $P_I \neq P_{IM} \neq P_{II} \neq P_{IIM}$ | Considerațiile de la punctul 2 a. |
| b. $Kp\,(P_I) = Kp\,(P_{IM}) = Kp\,(P_{II}) = Kp\,(P_{IIM})$ | Alura curbelor de variație a rezistenței la penetrare este similară pe toate variantele (fig. 5 *a*, 6 *a*, 7 *a*, 8 *a*). |
| 4) La sfîrșitul anului 1959:<br>a. $P_I \neq P_{IM} = P_{II} \neq P_{IIM}$ | Considerațiile de la punctul 2 *a* amplificate. |
| b. $Kp\,(P_I) \cong Kp\,(P_{II}) \neq Kp\,(P_{IM}) \cong Kp\,(P_{IIM})$. | În linii mari aceasta este situația la sfîrșitul anului 1959 (fig. 5 *c*, 6 *c*, 7 *c*, 8 *c*). |

**Valori înregistrate la măsurarea rezistenței la penetrare $P_I$ 8 mai 1958**

| *n* nr. de lovituri | Adîncimea de pătrundere [1] a penetrografului în cm, la sondajul | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | |
| | *a*[2] | *b*[3] | *a*[2] | *b*[3] | *a*[2] | *b*[3] | *a*[2] | *b*[3] | *a*[2] | *b*[3] |
| 0 | 4,0 | — | 2,5 | — | 2,9 | — | 2,2 | — | 3,1 | — |
| 1 | 6,8 | 2,8 | 4,8 | 2,3 | 3,8 | 0,9 | 4,2 | 2,0 | 4,8 | 1,7 |
| 2 | 10,9 | 4,1 | 7,8 | 3,0 | 6,3 | 2,5 | 6,5 | 2,3 | 7,3 | 2,5 |
| 3 | 23,8 | 12,8 | 11,2 | 3,4 | 9,0 | 2,7 | 8,8 | 2,3 | 9,4 | 2,6 |
| 4 | 31,0 | 7,2 | 16,3 | 5,1 | 12,7 | 3,7 | 11,0 | 2,7 | 13,0 | 3,1 |
| 5 | 32,3 | 1,5 | 30,8 | 14,5 | 18,3 | 5,6 | 14,0 | 3,0 | 17,2 | 4,2 |
| 6 | 33,0 | 1,1 | 33,0 | 2,2 | 31,0 | 12,7 | 17,8 | 3,3 | 22,0 | 4,8 |
| 7 | 34,5 | 0,9 | 34,5 | 1,5 | 32,9 | 1,9 | 22,2 | 4,4 | 33,0 | 11,0 |
| 8 | 35,2 | 0,7 | 35,5 | 1,0 | 34,1 | 1,2 | 29,8 | 7,7 | 35,6 | 2,6 |
| 9 | 36,0 | 0,8 | 36,6 | 1,1 | 35,1 | 1,0 | 32,3 | 2,5 | 37,4 | 1,8 |
| 10 | 36,6 | 0,6 | 37,6 | 1,0 | 36,0 | 0,9 | 33,6 | 1,3 | 39,3 | 1,9 |
| 11 | 37,3 | 0,7 | 38,5 | 0,9 | 37,2 | 1,2 | 34,7 | 1,1 | 41,0 | 1,7 |
| 12 | 38,0 | 0,7 | 39,5 | 1,0 | 37,8 | 0,6 | 35,5 | 0,8 | 42,4 | 1,4 |
| 13 | 38,8 | 0,8 | 40,2 | 0,7 | 38,5 | 0,7 | 36,2 | 0,7 | 43,7 | 1,3 |
| 14 | 39,6 | 0,8 | 41,0 | 0,8 | 39,5 | 1,0 | 36,9 | 0,7 | 44,9 | 1,2 |
| 15 | 40,2 | 0,6 | 41,7 | 0,7 | 40,3 | 0,8 | 37,7 | 0,8 | 46,2 | 1,3 |
| 16 | 40,9 | 0,7 | 42,4 | 0,7 | 41,5 | 0,8 | 38,5 | 0,8 | 48,0 | 1,8 |
| 17 | 41,4 | 0,5 | 43,0 | 0,6 | 41,7 | 0,6 | 39,4 | 0,9 | 49,0 | 1,0 |
| 18 | 42,1 | 0,7 | 43,8 | 0,8 | 43,4 | 1,7 | 40,0 | 0,6 | 52,3 | 3,3 |
| 19 | 42,5 | 0,4 | 44,5 | 0,7 | 43,5 | 0,1 | 40,7 | 0,7 | 54,1 | 1,8 |
| 20 | 43,1 | 0,6 | 45,3 | 0,8 | 44,2 | 0,7 | 41,3 | 0,6 | | |
| 21 | 43,6 | 0,5 | 46,2 | 0,9 | 44,8 | 0,6 | 41,9 | 0,6 | | |
| 22 | 44,0 | 0,4 | 47,0 | 0,8 | 45,5 | 0,7 | 42,5 | 0,6 | | |
| 23 | 44,8 | 0,8 | 47,8 | 0,8 | 46,0 | 0,5 | 43,0 | 0,5 | | |
| 24 | 45,4 | 0,6 | 48,7 | 0,9 | 46,7 | 0,7 | 43,5 | 0,5 | | |
| 25 | 45,9 | 0,5 | 49,9 | 1,2 | 47,4 | 0,7 | 44,3 | 0,8 | | |
| 26 | 46,5 | 0,6 | 50,9 | 1,0 | 48,1 | 0,7 | 45,0 | 0,7 | | |
| 27 | 47,2 | 0,7 | 52,0 | 1,1 | 48,9 | 0,8 | 45,6 | 0,6 | | |
| 28 | 47,8 | 0,6 | 53,0 | 1,0 | 49,7 | 0,8 | 46,2 | 0,6 | | |
| 29 | 48,5 | 0,7 | 53,9 | 0,9 | 50,7 | 1,0 | 47,1 | 0,9 | | |
| 30 | 49,1 | 0,6 | 54,5 | 0,6 | 51,7 | 1,0 | 47,9 | 0,8 | | |
| 31 | 49,9 | 0,8 | | | 52,6 | 0,9 | 48,7 | 0,8 | | |
| 32 | 50,6 | 0,7 | | | 53,6 | 1,0 | 49,5 | 0,8 | | |
| 33 | 51,4 | 0,5 | | | 54,3 | 0,7 | 50,3 | 0,8 | | |
| 34 | 52,3 | 0,9 | | | 51,2 | 0,9 | | | | |
| 35 | 53,0 | 0,7 | | | 52,1 | 0,9 | | | | |
| 36 | | | | | 52,9 | 0,8 | | | | |
| 37 | | | | | 53,7 | 0,8 | | | | |
| 38 | | | | | 54,4 | 0,7 | | | | |

---

[1] Valorile sînt luate după diagramele înregistrate cu penetrograful.

[2] Adîncimea de pătrundere corespunzătoare a *n* lovituri.

[3] Adîncimea de pătrundere corespunzătoare unei lovituri.

*(continuare)*

| *n* nr. de lovituri | Adîncimea de pătrundere [1] a penetrografului în cm, la sondajul | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 6 | | 7 | | 8 | | 9 | | 10 | |
| | *a*[2] | *b*[3] | *a*[2] | *b*[3] | *a*[2] | *b*[2] | *a*[2] | *b*[3] | *a*[2] | *b*[3] |
| 0 | 3,8 | — | 4,8 | — | 3,0 | — | 2,9 | — | 3,3 | |
| 1 | 5,7 | 1,9 | 7,8 | 3,0 | 5,7 | 2,7 | 5,2 | 2,3 | 5,3 | 2,0 |
| 2 | 9,0 | 3,3 | 11,6 | 3,8 | 8,7 | 3,0 | 7,9 | 2,7 | 8,0 | 2,7 |
| 3 | 12,5 | 3,5 | 15,4 | 3,8 | 12,0 | 3,3 | 11,3 | 3,4 | 10,7 | 2,7 |
| 4 | 16,0 | 3,5 | 19,8 | 4,4 | 15,9 | 3,9 | 15,8 | 4,5 | 15,5 | 4,8 |
| 5 | 19,8 | 3,8 | 31,5 | 11,7 | 20,2 | 4,3 | 20,7 | 4,9 | 26,0 | 10,5 |
| 6 | 24,6 | 4,8 | 33,5 | 2,0 | 23,4 | 3,2 | 32,5 | 11,8 | 31,2 | 5,2 |
| 7 | 30,4 | 5,8 | 34,8 | 1,3 | 27,1 | 3,7 | 34,2 | 1,7 | 32,5 | 1,3 |
| 8 | 33,3 | 2,9 | 36,0 | 1,2 | 31,2 | 4,1 | 35,7 | 1,5 | 34,5 | 2,0 |
| 9 | 34,8 | 1,5 | 37,0 | 1,0 | 33,0 | 1,8 | 37,0 | 1,3 | 35,4 | 0,9 |
| 10 | 36,0 | 1,2 | 38,1 | 1,1 | 34,3 | 1,3 | 38,5 | 1,5 | 35,9 | 0,5 |
| 11 | 37,0 | 1,0 | 39,2 | 1,1 | 35,3 | 1,0 | 40,0 | 1,5 | 36,5 | 0,6 |
| 12 | 38,0 | 1,0 | 40,4 | 1,2 | 36,3 | 1,0 | 41,3 | 1,3 | 37,1 | 0,6 |
| 13 | 39,6 | 1,6 | 41,5 | 1,1 | 37,0 | 0,7 | 42,5 | 1,2 | 37,9 | 0,8 |
| 14 | 40,8 | 1,2 | 42,2 | 0,7 | 37,8 | 0,8 | 43,4 | 0,9 | 38,5 | 0,6 |
| 15 | 41,8 | 1,0 | 43,8 | 1,6 | 38,7 | 0,9 | 44,5 | 1,1 | 39,3 | 0,8 |
| 16 | 42,6 | 0,8 | 45,4 | 1,6 | 39,7 | 1,0 | 45,6 | 1,1 | 40,4 | 1,1 |
| 17 | 43,4 | 0,8 | 46,9 | 1,5 | 40,5 | 0,8 | 46,9 | 1,3 | 41,2 | 0,8 |
| 18 | 44,9 | 1,5 | 48,8 | 1,9 | 41,8 | 1,3 | 48,1 | 1,2 | 41,7 | 0,5 |
| 19 | 45,4 | 0,5 | 49,9 | 1,1 | 41,9 | 0,1 | 49,4 | 1,3 | 42,3 | 0,6 |
| 20 | 46,1 | 0,7 | 52,1 | 2,2 | 42,5 | 0,6 | 51,0 | 1,6 | 42,9 | 0,6 |
| 21 | 46,8 | 0,7 | 53,1 | 1,0 | 43,1 | 0,6 | 52,5 | 1,5 | 43,5 | 0,6 |
| 22 | 47,6 | 0,8 | 54,0 | 0,9 | 43,8 | 0,7 | 53,8 | 1,3 | 44,0 | 0,5 |
| 23 | 48,4 | 0,8 | | | 44,4 | 0,6 | 54,7 | 0,9 | 44,5 | 0,5 |
| 24 | 49,1 | 0,7 | | | 45,2 | 0,8 | | | 45,0 | 0,5 |
| 25 | 50,0 | 0,9 | | | 45,9 | 0,7 | | | 45,6 | 0,6 |
| 26 | 50,8 | 0,8 | | | 46,5 | 0,6 | | | 46,1 | 0,5 |
| 27 | 51,7 | 0,9 | | | 47,3 | 0,8 | | | 46,7 | 0,6 |
| 28 | 52,6 | 0,9 | | | 48,0 | 0,7 | | | 47,2 | 0,5 |
| 29 | 53,5 | 0,9 | | | 48,8 | 0,8 | | | 47,8 | 0,6 |
| 30 | 54,2 | 0,9 | | | 49,8 | 1,0 | | | 48,5 | 0,7 |
| 31 | | | | | 50,7 | 0,9 | | | 49,1 | 0,6 |
| 32 | | | | | 51,6 | 0,9 | | | 50,0 | 0,9 |
| 33 | | | | | 52,6 | 1,0 | | | 51,0 | 1,0 |
| 34 | | | | | 53,5 | 0,9 | | | 52,0 | 1,0 |
| 35 | | | | | 54,2 | 0,7 | | | 52,5 | 0,5 |
| 36 | | | | | | | | | 53,2 | 0,7 |
| 37 | | | | | | | | | | |

---

[1] Valorile sînt luate după diagramele înregistrate cu penetrograful.
[2] Adîncimea de pătrundere corespunzătoare a *n* lovituri.
[3] Adîncimea de pătrundere corespunzătoare unei lovituri.

$P_I$

**Situaţia iniţială**

**8 mai 1958**

| Adîncimea cm | Rezistenţa la penetrare 1) kg/cm² corespunzătoare sondajului | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | medie |
| 5 | 4,6 | 5,7 | 7,3 | 4,9 | 6,0 | 4,2 | 2,9 | — | 4,5 | 5,0 | 5,45 |
| 6 | 4,6 | 5,5 | 4,6 | 4,6 | 5,3 | 4,2 | 2,9 | 5,0 | 4,2 | 5,0 | 4,59 |
| 7 | 3,8 | 5,5 | 4,6 | 4,4 | 5,0 | 4,2 | 3,6 | 5,0 | 4,2 | 5,5 | 4,58 |
| 8 | 3,8 | 4,9 | 4,9 | 4,4 | 5,0 | 2,0 | 3,6 | 5,3 | 6,4 | 5,5 | 4,58 |
| 9 | 3,6 | 4,9 | 4,5 | 4,4 | 4,2 | 2,0 | 3,6 | 5,5 | 6,4 | 5,5 | 4,46 |
| 10 | 3,6 | 4,2 | 4,5 | 3,7 | 4,2 | 2,0 | 2,9 | 5,5 | 1,00 | 4,2 | 4,48 |
| 11 | 3,6 | 4,2 | 3,5 | 3,7 | 3,5 | 2,0 | 2,9 | 4,2 | 3,3 | 4,2 | 3,51 |
| 12 | 3,2 | 4,2 | 3,5 | 3,7 | 3,5 | 2,0 | 2,9 | 4,2 | 3,3 | 3,5 | 3,40 |
| 13 | 3,2 | 4,2 | 3,5 | 3,4 | 3,5 | 2,0 | 2,9 | 4,2 | 3,3 | 3,5 | 3,37 |
| 14 | 3,2 | 3,5 | 3,5 | 3,4 | 3,5 | 2,0 | 2,9 | 3,8 | 3,3 | 3,5 | 3,26 |
| 15 | 3,2 | 3,5 | 3,0 | 3,4 | 2,5 | 2,0 | 2,9 | 3,8 | 3,4 | 3,1 | 3,08 |
| 16 | 3,2 | 3,5 | 3,0 | 2,5 | 2,5 | 2,0 | 2,5 | 3,8 | 3,4 | 3,1 | 2,95 |
| 17 | 2,9 | 3,9 | 3,0 | 2,5 | 2,5 | 2,0 | 2,5 | 3,5 | 3,4 | 3,1 | 2,93 |
| 18 | 2,9 | 3,9 | 3,0 | 2,5 | 2,5 | 2,0 | 2,5 | 3,5 | 3,4 | 3,1 | 2,93 |
| 19 | 2,9 | 3,9 | 3,0 | 2,5 | 2,5 | 2,0 | 2,5 | 3,5 | 3,3 | 3,1 | 2,92 |
| 20 | 2,9 | 3,8 | 3,1 | 2,5 | 2,5 | 2,0 | 2,5 | 3,5 | 3,3 | 3,1 | 2,92 |
| 21 | 2,9 | 3,8 | 3,1 | 2,5 | 2,2 | 2,0 | 2,5 | 3,3 | 3,3 | 3,1 | 2,87 |
| 22 | 2,9 | 3,8 | 3,1 | 2,2 | 2,2 | 2,0 | 3,8 | 3,3 | 3,3 | 3,1 | 2,97 |
| 23 | 2,6 | 2,9 | 3,1 | 2,2 | 2,2 | 2,0 | 3,8 | 3,3 | 2,2 | 3,1 | 2,74 |
| 24 | 2,6 | 2,9 | 3,1 | 2,2 | 2,2 | 2,0 | 3,8 | 3,3 | 2,2 | 3,1 | 2,74 |
| 25 | 2,6 | 2,9 | 2,4 | 2,2 | 2,2 | 2,0 | 2,4 | 3,3 | 2,2 | 3,0 | 2,52 |
| 26 | 2,6 | 2,9 | 2,4 | 2,2 | 2,2 | 2,0 | 2,4 | 3,3 | 2,2 | 3,0 | 2,52 |
| 27 | 2,6 | 2,9 | 2,4 | 2,2 | 2,2 | 2,0 | 2,4 | 3,3 | 2,2 | 3,0 | 2,52 |
| 28 | 2,6 | 2,9 | 2,4 | 2,2 | 2,2 | 2,0 | 2,4 | 3,3 | 2,2 | 3,0 | 2,52 |
| 29 | 2,6 | 3,4 | 2,4 | 2,2 | 2,2 | 2,0 | 2,4 | 3,3 | 2,2 | 3,0 | 2,57 |
| 30 | 2,6 | 3,4 | 2,4 | 2,2 | 2,2 | 2,0 | 2,4 | 3,2 | 2,2 | 3,6 | 2,62 |
| 31 | 3,3 | 3,4 | 2,4 | 2,2 | 2,2 | 3,8 | 3,4 | 3,2 | 2,2 | 3,6 | 2,87 |
| 32 | 3,3 | 5,0 | 2,4 | 2,2 | 2,2 | 3,8 | 4,6 | 4,1 | 3,5 | 3,6 | 3,47 |
| 33 | 3,3 | 5,0 | 5,3 | 4,6 | 4,5 | 3,8 | 4,6 | 4,1 | 3,5 | 5,3 | 4,40 |
| 34 | 3,3 | 5,3 | 5,7 | 4,6 | 4,5 | 5,5 | 6,0 | 6,0 | 3,5 | 5,3 | 4,97 |
| 35 | 4,2 | 5,0 | 5,7 | 5,7 | 5,0 | 6,8 | 6,8 | 6,4 | 5,5 | 6,8 | 5,79 |
| 36 | 4,2 | 5,0 | 6,8 | 6,4 | 5,7 | 8,0 | 6,8 | 6,8 | 5,5 | 6,4 | 6,16 |
| 37 | 5,3 | 5,5 | 6,8 | 6,4 | 6,0 | 6,8 | 8,0 | 8,7 | 5,9 | 5,8 | 6,52 |
| 38 | 5,0 | 5,7 | 6,4 | 6,4 | 6,0 | 7,3 | 8,7 | 8,7 | 4,5 | 8,7 | 6,74 |
| 39 | 5,0 | 5,7 | 6,0 | 6,0 | 5,5 | 6,8 | 8,7 | 7,3 | 4,5 | 5,7 | 6,12 |
| 40 | 5,0 | 6,0 | 6,0 | 4,9 | 5,9 | 6,8 | 8,0 | 7,3 | 5,0 | 6,4 | 6,13 |
| 41 | 5,0 | 6,4 | 6,4 | 6,8 | 5,9 | 6,8 | 8,0 | 8,0 | 5,5 | 6,4 | 6,52 |
| 42 | 6,0 | 7,3 | 8,0 | 6,8 | 6,4 | 8,0 | 8,0 | 8,0 | 6,0 | 7,3 | 7,18 |
| 43 | 6,0 | 6,8 | 8,0 | 8,0 | 5,8 | 8,0 | 10,0 | 5,5 | 6,0 | 8,7 | 7,28 |
| 44 | 6,0 | 6,0 | 7,3 | 8,0 | 6,8 | 7,3 | 10,0 | 8,0 | 5,5 | 6,8 | 7,17 |
| 45 | 6,4 | 7,3 | 8,0 | 7,3 | 7,3 | 5,5 | 10,0 | 10,0 | 6,0 | 8,0 | 7,64 |
| 46 | 6,0 | 6,4 | 6,4 | 8,0 | 8,0 | 8,7 | 11,5 | 8,0 | 4,9 | 6,8 | 7,47 |
| 47 | 6,0 | 6,4 | 7,8 | 6,4 | 7,3 | 8,0 | 10,0 | 7,3 | 5,5 | 7,3 | 7,20 |
| 48 | 5,7 | 6,0 | 6,4 | 7,3 | 6,8 | 7,3 | 8,7 | 6,0 | 4,6 | 8,0 | 6,68 |
| 49 | 5,0 | 5,5 | 8,0 | 6,4 | 6,4 | 11,0 | 10,0 | 6,8 | 5,7 | 8,0 | 7,28 |
| 50 | 5,5 | 5,7 | 6,8 | 8,0 | 10,0 | 7,3 | 10,0 | 5,7 | 7,3 | 8,0 | 7,43 |

---

1) Determinată cu ajutorul tabelelor după metoda *M* (*Z N*).

**Valori înregistrate la măsurarea rezistenței la penetrare**

**$P_{II}$ 8 mai 1958**

| n nr. de lovituri | Adîncimea de pătrundere [1]) a penetrografului în cm, la sondajul | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | |
| | a[2]) | b[3]) | a[2]) | b[3]) | a[2]) | b[3]) | a[2]) | b[3]) | a[2]) | b[3]) |
| 0 | 3,5 | — | 2,0 | — | 3,7 | — | 2,8 | — | 3,7 | — |
| 1 | 5,4 | 1,9 | 3,0 | 1,0 | 4,6 | 0,9 | 4,5 | 1,7 | 4,9 | 1,2 |
| 2 | 8,2 | 2,8 | 4,1 | 1,1 | 6,5 | 1,9 | 6,4 | 1,9 | 6,4 | 1,5 |
| 3 | 11,4 | 3,2 | 5,4 | 1,3 | 8,2 | 1,7 | 8,5 | 2,1 | 8,0 | 1,6 |
| 4 | 15,8 | 4,4 | 6,8 | 1,4 | 10,2 | 2,0 | 11,5 | 3,0 | 10,3 | 2,3 |
| 5 | 22,4 | 6,8 | 8,5 | 1,7 | 13,7 | 3,5 | 15,2 | 3,7 | 13,8 | 3,5 |
| 6 | 29,5 | 7,1 | 10,8 | 2,3 | 19,0 | 5,3 | 21,4 | 6,2 | 20,4 | 6,6 |
| 7 | 33,6 | 4,1 | 13,0 | 2,2 | 23,8 | 4,8 | 32,1 | 10,7 | 31,8 | 11,4 |
| 8 | 35,9 | 2,3 | 16,3 | 3,3 | 31,7 | 7,9 | 34,0 | 1,9 | 33,8 | 2,0 |
| 9 | 37,4 | 1,5 | 19,0 | 2,7 | 33,2 | 1,5 | 35,3 | 1,3 | 35,4 | 1,6 |
| 10 | 39,0 | 1,6 | 21,8 | 2,8 | 34,5 | 1,3 | 36,4 | 1,1 | 36,7 | 1,3 |
| 11 | 40,6 | 1,6 | 27,6 | 5,8 | 35,5 | 1,0 | 37,5 | 1,1 | 37,9 | 1,2 |
| 12 | 41,8 | 1,2 | 31,2 | 3,6 | 36,5 | 1,0 | 38,6 | 1,1 | 39,3 | 1,4 |
| 13 | 43,0 | 1,2 | 32,8 | 1,6 | 37,6 | 1,1 | 39,8 | 1,2 | 40,8 | 1,5 |
| 14 | 44,2 | 1,2 | 34,3 | 1,5 | 38,8 | 1,2 | 41,0 | 1,2 | 41,9 | 1,1 |
| 15 | 45,3 | 1,1 | 35,9 | 1,6 | 40,0 | 1,2 | 42,0 | 1,0 | 42,8 | 2,9 |
| 16 | 46,5 | 1,2 | 37,3 | 1,4 | 41,1 | 1,1 | 43,0 | 1,0 | 43,8 | 1,0 |
| 17 | 47,8 | 1,3 | 38,6 | 1,3 | 42,3 | 1,2 | 43,8 | 0,8 | 44,7 | 0,9 |
| 18 | 49,4 | 1,6 | 39,8 | 1,2 | 43,2 | 0,9 | 44,6 | 0,8 | 45,5 | 0,8 |
| 19 | 50,8 | 1,4 | 40,9 | 1,1 | 44,9 | 1,7 | 45,5 | 0,9 | 46,4 | 0,9 |
| 20 | 51,3 | 0,5 | 41,8 | 0,9 | 45,6 | 0,7 | 46,3 | 0,8 | 47,3 | 0,9 |
| 21 | 51,8 | 0,5 | 42,8 | 1,0 | 46,5 | 0,9 | 47,4 | 1,1 | 48,3 | 1,0 |
| 22 | 52,3 | 0,5 | 44,0 | 1,2 | 47,4 | 0,9 | 48,3 | 0,9 | 49,4 | 1,1 |
| 23 | 53,3 | 1,0 | 44,9 | 0,9 | 48,5 | 1,1 | 49,4 | 1,1 | 50,0 | 0,6 |
| 24 | 54,5 | 1,2 | 46,0 | 1,1 | 49,3 | 0,8 | 50,2 | 0,8 | 51,2 | 1,2 |
| 25 | | | 47,1 | 1,1 | 50,0 | 0,7 | 51,2 | 1,0 | 52,3 | 1,1 |
| 26 | | | 48,3 | 1,2 | 51,2 | 1,2 | 52,2 | 1,0 | 53,2 | 0,9 |
| 27 | | | 49,7 | 1,4 | 52,3 | 1,1 | 53,0 | 0,8 | 54,1 | 0,9 |
| 28 | | | 51,0 | 1,3 | 53,3 | 1,0 | 53,9 | 0,9 | | |
| 29 | | | 52,2 | 1,2 | 54,0 | 0,7 | 54,7 | 0,8 | | |

---

[1]) Valorile sînt luate după diagramele înregistrate cu penetrograful.
[2]) Adîncimea de pătrundere corespunzătoare a *n* lovituri.
[3]) Adîncimea de pătrundere corespunzătoare unei lovituri.

*(continuare)*

| *n* nr. de lovituri | Adîncimea de pătrundere 1) a penetrografului în cm, la sondajul | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 6 | | 7 | | 8 | | 9 | | 10 | |
| | *a* 2) | *b* 3) | *a* 2) | *b* 3) | *a* 2) | *b* 3) | *a* 2) | *b* 3) | *a* 2) | *b* 3) |
| 0 | 4,4 | — | 6,0 | — | 3,4 | — | 2,5 | — | 4,4 | — |
| 1 | 6,7 | 2,3 | 9,1 | 3,1 | 5,0 | 1,6 | 4,5 | 2,0 | 6,0 | 1,6 |
| 2 | 30,0 | 23,3 | 14,8 | 5,7 | 6,5 | 1,5 | 6,8 | 2,3 | 7,4 | 1,4 |
| 3 | 32,8 | 2,8 | 21,0 | 6,2 | 7,9 | 1,4 | 7,9 | 1,1 | 8,8 | 1,4 |
| 4 | 34,2 | 1,4 | 23,8 | 2,8 | 10,1 | 2,2 | 9,8 | 1,9 | 11,0 | 2,2 |
| 5 | 35,2 | 1,0 | 30,6 | 6,8 | 12,9 | 2,8 | 10,4 | 0,6 | 14,3 | 3,3 |
| 6 | 36,0 | 0,8 | 32,5 | 1,9 | 16,3 | 3,4 | 14,3 | 3,9 | 19,0 | 4,7 |
| 7 | 37,0 | 1,0 | 33,7 | 1,2 | 20,5 | 4,2 | 18,0 | 3,7 | 24,0 | 5,0 |
| 8 | 37,9 | 0,9 | 34,7 | 1,0 | 24,5 | 4,0 | 22,2 | 4,2 | 29,4 | 5,4 |
| 9 | 38,9 | 1,0 | 35,5 | 0,8 | 29,1 | 4,6 | 30,8 | 8,6 | 32,6 | 3,2 |
| 10 | 39,9 | 1,0 | 36,3 | 0,8 | 31,5 | 4,4 | 34,2 | 3,4 | 34,1 | 1,5 |
| 11 | 40,9 | 1,0 | 37,0 | 0,7 | 32,7 | 1,2 | 35,6 | 1,4 | 35,1 | 1,0 |
| 12 | 41,7 | 0,8 | 37,7 | 0,7 | 33,8 | 1,1 | 37,1 | 1,5 | 36,2 | 1,1 |
| 13 | 42,5 | 0,8 | 38,5 | 0,8 | 34,8 | 1,0 | 39,1 | 2,0 | 37,2 | 1,0 |
| 14 | 43,4 | 0,9 | 39,3 | 0,8 | 35,5 | 0,7 | 40,7 | 1,6 | 37,9 | 0,7 |
| 15 | 44,8 | 1,4 | 40,1 | 0,8 | 36,1 | 0,6 | 42,1 | 1,4 | 39,2 | 1,3 |
| 16 | 45,5 | 0,7 | 40,7 | 0,6 | 36,8 | 0,7 | 43,3 | 1,2 | 40,3 | 1,1 |
| 17 | 46,3 | 0,8 | 41,3 | 0,6 | 37,7 | 0,9 | 44,5 | 1,2 | 41,4 | 1,1 |
| 18 | 47,0 | 0,7 | 41,9 | 0,6 | 38,6 | 0,9 | 45,9 | 1,4 | 42,3 | 0,9 |
| 19 | 47,8 | 0,8 | 42,4 | 0,5 | 39,5 | 0,9 | 47,5 | 1,6 | 43,0 | 0,7 |
| 20 | 48,6 | 0,8 | 43,0 | 0,6 | 40,3 | 0,8 | 49,2 | 1,7 | 44,0 | 1,0 |
| 21 | 49,5 | 0,9 | 43,5 | 0,5 | 41,1 | 0,8 | 50,6 | 1,4 | 44,8 | 0,8 |
| 22 | 50,0 | 0,5 | 44,0 | 0,5 | 42,5 | 1,4 | 52,5 | 1,9 | 45,8 | 1,0 |
| 23 | 50,9 | 0,9 | 44,7 | 0,7 | 43,3 | 0,8 | 53,8 | 1,3 | 46,7 | 0,9 |
| 24 | 51,8 | 0,9 | 45,3 | 0,6 | 43,9 | 0,6 | 54,7 | 0,9 | 47,5 | 0,8 |
| 25 | 52,7 | 0,9 | 45,9 | 0,6 | 44,5 | 0,6 | 55,5 | 0,8 | 48,3 | 0,8 |
| 26 | 53,5 | 0,8 | 46,6 | 0,7 | 45,3 | 0,8 | | | 49,1 | 0,8 |
| 27 | 54,3 | 0,8 | 47,2 | 0,6 | 46,0 | 0,7 | | | 49,9 | 0,8 |
| 28 | 55,0 | 0,7 | 48,4 | 1,2 | 46,8 | 0,8 | | | 50,8 | 0,9 |
| 29 | | | 49,2 | 0,8 | 47,7 | 0,9 | | | 51,7 | 0,9 |
| 30 | | | 49,7 | 0,5 | 40,9 | 1,2 | | | 52,5 | 0,8 |
| 31 | | | 50,6 | 0,9 | 49,9 | 1,0 | | | 53,3 | 0,8 |
| 32 | | | 51,3 | 0,7 | 51,2 | 1,3 | | | 54,0 | 0,7 |
| 33 | | | 52,3 | 1,0 | 52,5 | 1,3 | | | | |
| 34 | | | 53,0 | 0,7 | 53,5 | 1,0 | | | | |
| 35 | | | 53,8 | 0,8 | 54,3 | 0,8 | | | | |
| 36 | | | 54,5 | 0,7 | | | | | | |

---

1) Valorile sînt luate după diagramele înregistrate cu penetrograful.

2) Adîncimea de pătrundere corespunzătoare a *n* lovituri.

3) Adîncimea de pătrundere corespunzătoare unei lovituri.

$P_{II}$

**Situația inițială**

**8 mai 1958**

| Adîncimea cm | Rezistența la penetrare 1) kg/cm² corespunzătoare sondajului | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | media |
| 4 | — | 4,2 | 7,3 | 4,50 | 4,98 | — | — | — | 4,20 | 4,50 | 4,94 |
| 5 | 3,8 | 4,20 | 4,0 | 4,20 | 4,98 | 4,63 | — | — | 4,20 | 4,5 | 4,31 |
| 6 | 3,8 | 3,7 | 4,0 | 4,20 | 4,03 | 4,63 | 3,72 | 3,70 | 3,90 | 3,9 | 3,95 |
| 7 | 3,8 | 3,7 | 3,9 | 4,20 | 4,03 | 3,57 | 3,72 | 3,70 | 3,90 | 3,9 | 3,83 |
| 8 | 3,3 | 3,7 | 3,9 | 4,20 | 4,03 | 3,57 | 3,72 | 3,70 | 3,90 | 3,9 | 3,78 |
| 9 | 3,3 | 3,5 | 3,9 | 3,89 | 3,96 | 3,57 | 3,39 | 3,50 | 3,50 | 3,9 | 3,79 |
| 10 | 3,3 | 3,5 | 3,4 | 3,89 | 3,96 | 3,49 | 3,39 | 3,50 | 3,50 | 3,9 | 3,55 |
| 11 | 3,3 | 3,5 | 3,4 | 3,89 | 3,96 | 3,49 | 3,39 | 3,50 | 3,50 | 3,9 | 3,55 |
| 12 | 2,2 | 3,0 | 3,4 | 3,72 | 3,67 | 3,49 | 3,39 | 3,30 | 3,20 | 3,10 | 3,22 |
| 13 | 2,2 | 3,0 | 3,4 | 3,72 | 3,67 | 3,49 | 3,39 | 3,30 | 3,20 | 3,1 | 3,22 |
| 14 | 2,2 | 3,0 | 3,0 | 3,72 | 3,27 | 3,49 | 3,39 | 3,30 | 3,20 | 3,1 | 3,14 |
| 15 | 2,2 | 3,0 | 3,0 | 3,72 | 3,27 | 3,49 | 3,22 | 3,20 | 3,20 | 3,1 | 3,10 |
| 16 | 2,2 | 3,0 | 3,0 | 3,57 | 3,27 | 3,49 | 3,22 | 3,20 | 3,20 | 3,1 | 3,10 |
| 17 | 2,2 | 2,2 | 3,0 | 3,57 | 3,27 | 3,39 | 3,22 | 3,20 | 3,10 | 2,2 | 2,91 |
| 18 | 2,2 | 2,2 | 3,0 | 3,57 | 3,13 | 3,39 | 3,22 | 3,20 | 3,10 | 2,2 | 2,90 |
| 19 | 2,2 | 2,2 | 2,2 | 3,22 | 3,13 | 3,39 | 3,22 | 3,20 | 3,10 | 2,2 | 2,79 |
| 20 | 2,2 | 2,2 | 2,2 | 3,22 | 3,13 | 3,39 | 3,22 | 3,20 | 3,10 | 2,2 | 2,79 |
| 21 | 2,2 | 2,2 | 2,2 | 3,22 | 3,13 | 3,13 | 2,20 | 3,60 | 3,10 | 2,2 | 2,71 |
| 22 | 2,2 | 2,2 | 2,2 | 3,22 | 3,13 | 3,13 | 2,20 | 3,60 | 2,20 | 2,2 | 2,62 |
| 23 | 2,2 | 2,2 | 2,2 | 2,20 | 2,20 | 3,13 | 2,20 | 3,60 | 2,20 | 2,2 | 2,43 |
| 24 | 2,2 | 2,2 | 2,2 | 2,20 | 2,20 | 3,13 | 2,20 | 3,4 | 2,20 | 2,2 | 2,41 |
| 25 | 2,3 | 2,2 | 2,2 | 2,20 | 2,20 | 2,96 | 2,20 | 3,4 | 2,20 | 2,2 | 2,40 |
| 26 | 2,3 | 2,3 | 2,3 | 2,20 | 2,20 | 2,96 | 2,20 | 3,4 | 2,20 | 2,2 | 2,40 |
| 27 | 2,3 | 2,2 | 2,2 | 2,20 | 2,20 | 2,96 | 2,20 | 3,4 | 2,20 | 3,0 | 2,50 |
| 28 | 2,3 | 2,2 | 2,2 | 2,20 | 2,20 | 2,96 | 2,20 | 3,3 | 2,20 | 3,0 | 2,47 |
| 29 | 2,3 | 2,2 | 2,2 | 2,20 | 2,20 | 2,96 | 2,20 | 3,3 | 2,20 | 3,0 | 2,37 |
| 30 | 2,3 | 2,2 | 2,2 | 4,03 | 2,20 | 2,96 | 2,20 | 3,3 | 2,20 | 3,0 | 2,45 |
| 31 | 2,3 | 2,2 | 2,2 | 3,03 | 2,20 | 3,77 | 2,20 | 3,3 | 2,20 | 3,0 | 2,73 |
| 32 | 5,3 | 4,2 | 4,6 | 4,03 | 2,20 | 3,77 | 2,20 | 4,7 | 2,20 | 5,7 | 3,88 |
| 33 | 6,4 | 4,2 | 6,0 | 5,77 | 2,20 | 3,77 | 4,50 | 4,7 | 2,20 | 4,5 | 4,41 |
| 34 | 7,3 | 5,3 | 6,8 | 6,43 | 3,96 | 5,29 | 4,50 | 5,70 | 4,90 | 7,3 | 5,73 |
| 35 | 8,7 | 6,8 | 7,3 | 8,03 | 3,96 | 6,07 | 5,77 | 6,8 | 5,3 | 11,5 | 7,00 |
| 36 | 8,0 | 6,4 | 6,0 | 8,87 | 3,96 | 6,07 | 6,07 | 6,8 | 5,7 | 10,0 | 6,76 |
| 37 | 8,7 | 6,8 | 10,0 | 8,87 | 4,76 | 6,86 | 6,07 | 8,7 | 5,3 | 8,0 | 7,38 |
| 38 | 8,7 | 7,3 | 8,7 | 8,03 | 4,76 | 6,86 | 6,43 | 8,0 | 5,3 | 8,0 | 7,19 |
| 39 | 8,0 | 6,8 | 8,0 | 8,03 | 4,63 | 5,09 | 6,43 | 7,3 | 5,7 | 11,5 | 7,13 |
| 40 | 8,0 | 8,7 | 10,0 | 7,36 | 4,63 | 6,07 | 6,07 | 6,8 | 6,0 | 11,5 | 7,49 |
| 41 | 10,0 | 8,0 | 4,9 | 7,36 | 4,98 | 6,86 | 6,43 | 8,0 | 7,3 | 11,5 | 7,51 |
| 42 | 8,7 | 10,0 | 8,7 | 10,00 | 4,98 | 8,03 | 8,87 | 5,7 | 6,4 | 11,5 | 8,27 |
| 43 | 11,5 | 8,0 | 10,0 | 8,87 | 5,51 | 8,03 | 5,09 | 10,0 | 6,4 | 11,5 | 8,47 |
| 44 | 8,7 | 8,0 | 11,5 | 5,09 | 5,51 | 11,50 | 5,09 | 10,0 | 5,7 | 11,5 | 8,24 |
| 45 | 13,9 | 7,3 | 8,0 | 8,03 | 5,77 | 8,87 | 5,29 | 10,0 | 6,0 | 10,0 | 8,29 |
| 46 | 10,0 | 8,0 | 8,0 | 8,87 | 6,07 | 8,87 | 4,63 | 8,7 | 5,0 | 10,0 | 7,81 |
| 47 | 8,0 | 7,3 | 6,8 | 10,00 | 5,77 | 8,03 | 4,63 | 10,0 | 5,0 | 7,3 | 7,27 |
| 48 | 10,0 | 6,0 | 6,8 | 10,00 | 4,76 | 8,03 | 6,43 | 8,0 | 5,3 | 7,3 | 7,25 |
| 49 | 11,5 | 6,8 | 7,3 | 8,03 | 6,86 | 8,87 | 6,43 | 6,8 | 5,7 | 8,0 | 7,61 |
| 50 | 10,0 | 6,4 | 8,7 | 8,03 | 6,86 | 8,87 | 4,29 | 7,30 | 7,3 | 8,0 | 7,55 |

---

2) Determinată cu ajutorul tabelelor după metoda *M* (*Z. N*).

*Primită la redacție la 16 februarie 1961*

# ВОЗМОЖНОСТИ КЛАССИФИКАЦИИ ГРУНТОВ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТОВ РАБОТ ПРИ ПОМОЩИ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН. II

## РЕЗЮМЕ

Работа содержит экспериментальные результаты полученные в период 1958—1959 гг. на двух смежных мелких участках земли, разрытых один до 90 см, а другой до 60 см.

На этих участках было выделено по одной площадке, которые обрабатывались в периоды времени, отличные от остальной части участка.

В результате обработки свыше 25 000 зарегистрированных значений представляло развитие во временом и по вертикали сопротивления пенетрации, причем последнее берется в качестве критерия оценки изменения физико-механических состояний грунта.

Даются оценки о влиянии работ на сопротивление пенетрации.

# MÖGLICHKEITEN ZUR KLASSIFIZIERUNG DER BODENARTEN UND ZUR BESTIMMUNG DER BEARBEITUNGSWIRKUNGEN MITTELS PHYSIKALISCH-MECHANISCHER GRÖSSEN. II

## ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit enthält die 1958 und 1959 erzielten Versuchsergebnisse an zwei benachbarten Parzellen, von denen die eine auf 90 cm und die andere auf 60 cm Tiefe umgegraben wurde.

Auf diesen Parzellen wurde je ein Abschnitt abgegrenzt, der von dem Rest der Parzelle zeitlich verschieden bearbeitet wurde.

Als Ergebnis der Auswertung von über 25 000 eingetragenen Werten wird der zeitliche und senkrechte Verlauf des Durchdringungswiderstandes als Kriterium für die Beurteilung der physikalisch-mechanischen Bodenzustände dargelegt.

Zum Schluß wird der Einfluß der durchgeführten Bearbeitung auf den Durchdringungswiderstand beurteilt.

# NOTE

## EFECTELE DINAMICE CORESPUNZĂTOARE ACCELERAȚIILOR DE ORDIN OARECARE

DE

GH. D. MUNTEANU[1]

1. Într-o serie de articole [1], [2], [3], Dumitru Mangeron şi colaboratori au comunicat o serie de teoreme privind distribuția accelerațiilor de ordin oarecare în mişcarea plan-paralelă a sistemelor materiale nedeformabile.

La baza acestor teoreme stau formulele de recurență

$$A_n = \dot{A}_{n-1} + \omega B_{n-1}; \quad B_n = \dot{B}_{n-1} - \omega A_{n-1}, \tag{1}$$

cu $A_0 = 0$ şi $B_0 = \omega$ care dau valorile parametrilor cinematici de ordinul $n$, $A_n$ şi $B_n$ ca o funcție liniară de viteza unghiulară, avînd drept coeficienți parametrii cinematici de ordinul $n-1$.

Plecînd de la aceste rezultate ne-am propus să studiem efectele dinamice corespunzătoare accelerațiilor $n$, în mişcarea plan paralelă a sistemelor materiale nedeformabile.

Calculînd parametrii cinematici (1) pentru accelerațiile de ordinul 1 $(n = 1)$ găsim

$$A_1 = \omega^2 \text{ şi } B_1 = \dot{\omega}$$

şi pentru accelerațiile de ordinul 2

$$A_2 = 3\,\omega\,\dot{\omega} \text{ şi } B_2 = \ddot{\omega} - \omega^3.$$

2. Precizăm că vom considera un sistem material avînd un plan de simetrie, paralel cu planul mişcării.

Vom urmări mişcarea plan-paralelă a sistemului material prin mişcarea planului său de simetrie.

---

[1] Uzinele Ernst Thälmann.

Se cunoaşte relaţia care ne dă cîmpul de acceleraţii de ordinul 1, în mişcarea plan-paralelă

$$\bar{a} = \bar{a}_A + \dot{\omega} \times \bar{r} - \omega^2 \bar{r},$$

în care $A$ reprezintă un punct oarecare de referinţe din planul de simetrie al sistemului material.

Dacă continuăm derivarea în raport cu timpul şi ne oprim la derivata de ordinul $n$, vom găsi cîmpul acceleraţiilor de ordinul $n$, dat de relaţia

$$\bar{a}^{(n)} = \bar{a}_A^{(n)} + B_n [\bar{k} \times \bar{r}] - A_n \bar{r}, \tag{2}$$

în care $\bar{k}$ reprezintă versorul perpendicular pe planul mişcării.

Relaţia (2) ne dă acceleraţiile de un ordin oarecare $n$ ale punctului material $M(\bar{r})$, în funcţie de parametrii cinematici $A_n$ şi $B_n$ daţi prin formulele de recurenţă (1).

Pentru $n = 1$ obţinem cîmpul de acceleraţie de ordinul 1 şi pentru $n = 0$ cîmpul de viteze.

Cîmpul de acceleraţie de ordinul 2 va fi

$$\bar{a}^{(2)} = \bar{a}_A^{(2)} + (\ddot{\omega} - \omega^3) [\bar{k} \times \bar{r}] - 3\, \omega \dot{\omega} \bar{r}.$$

Observînd că relaţia (2) este o ecuaţie vectorială de gradul 1 în $\bar{r}$, va exista deci un punct $P_n$ care la un moment dat $t$ să aibă acceleraţia $\bar{a}^{(n)} = 0$, adică va exista pentru acceleraţia de orice ordin un centru instantaneu.

Înmulţind vectorial la stînga relaţia (2) cu $k$ şi făcînd $\bar{a}^{(n)} = 0$, după transformări simple se obţine vectorul de poziţie $\overrightarrow{AP_n}$ al centrului instantaneu al acceleraţiilor de ordinul $n$, în raport cu punctul de referinţă $A$ prin relaţia:

$$\overline{AP_n} = \frac{B_n [\bar{k} \times \bar{a}_A^{(n)}] + A_n \bar{a}_A^{(n)}}{A_n^2 + B_n^2}, \tag{3}$$

care reprezintă sub formă vectorială formulele (1) date în articolul [3].

Pentru $n = 1$ regăsim vectorul de poziţie al centrului instantaneu al acceleraţiilor de ordinul 1, $P_1$ şi pentru $n = 0$ centrul instantaneu al vitezelor $P_0$.

Poziţia centrului instantaneu al acceleraţiilor de ordinul 2 va fi dat de vectorul de poziţie

$$\overline{AP_2} = \frac{(\ddot{\omega} - \omega^3) [\bar{k} \times \bar{a}_A^{(2)}] + 3\, \omega \dot{\omega} \bar{a}_A^{(2)}}{(\ddot{\omega} - \omega^3)^2 + 9\, \omega^2 \dot{\omega}^2}.$$

Faţă de centrul instantaneu $P_n$, considerat ca pol de referinţă al sistemului material, cîmpul de acceleraţie de ordinul $n$ va fi

$$\bar{a}^{(n)} = B_n [\bar{k} \times \bar{r}] - A_n \bar{r}. \tag{4}$$

3. În fiecare punct material $M$ în jurul căruia considerăm un element de masă $dm$ va lua naştere, datorită mişcării, un efect dinamic infinitezimal $\overline{a}^{(n)}\,dm$, corespunzător acceleraţiilor de ordinul $n$, astfel că la un moment dat vom avea un sistem de astfel de efecte dinamice infinitezimale în fiecare punct al sistemului material.

Despre compunerea acestui sistem, pe care-l vom nota $T^{(n)}$, vrem să ne ocupăm în cele de mai jos.

Coordonatele vectoriale ale sistemului în polul $P_n$, vor fi

$$\overline{R}^{(n)} = \int_D \overline{a}^{(n)}\,dm\,; \quad \overline{M}_{Pn}^{(n)} = \int_D \overline{r} \times a^{(n)}\,dm,$$

aceste integrale fiind definite în domeniul $D$ de existenţă al sistemului material.

Introducînd în integralele de mai sus valoarea (4) a acceleraţiei de ordinul $n$ calculăm pentru coordonatele vectoriale ale sistemului $T^{(n)}$ următoarele valori :

$$\overline{R}^{(n)} = B_n\,[\overline{k} \times \overline{S}_{Pn}] - A_n\,\overline{S}_{Pn}, \tag{5}$$

$$\overline{M}_{Pn}^{(n)} = B_n\,J_{Pn}\,\overline{k}, \tag{6}$$

în care $\overline{S}_{Pn}$ reprezintă momentul static al sistemului material în raport cu rolul $Pn$ şi $J_{Pn}$ reprezintă momentul de inerţie în raport cu un ax perpendicular pe planul mişcării, trecînd prin $P_n$, notat mai departe axul $(\overline{P_n, \overrightarrow{k}})$.

Amintim că momentul static $\overline{S}_{Pn}$ este un vector cooliniar cu $\overline{P_n C}$, care uneşte centrul instantaneu al acceleraţiei de ordinul $n$ cu centrul de masă $C$ al sistemului material.

În relaţiile acestea (5) şi (6) găsim coordonatele vectoriale ale efectelor dinamice, în mişcarea plan-paralelă, în funcţie de aceiaşi parametri cinematici $A_n$ şi $B_n$, daţi de formulele de recurenţă (1).

4. Făcînd produsul scalar al celor două coordonate vectoriale găsim automomentul sistemului $T^{(n)}$.

În cazul nostru

$$\overline{R}^{(n)} \cdot \overline{M}_{Pn}^{(n)} = 0. \tag{7}$$

automomentul este nul, ceea ce înseamnă că în mişcarea plan-paralelă, efectele dinamice de orice ordin $n$, se reduc după axa centrală la o rezultantă unică.

Să determinăm această rezultantă unică prin punctul de intersecţie $(V_n)$ cu dreapta $P_nC$ şi prin direcţia ei faţă de această dreaptă.

Alegem un sistem de axe cu origina în $P_n$, cu axa $P_n$Y trecînd prin $C$, avînd versorul $\overline{j} = \dfrac{\overline{P_nC}}{P_nC}$ şi axa $P_nX$ perpendiculară, cu sensul pozitiv după versorul $\overline{i} = [\overline{j} \times \overline{k}]$.

Vectorul principal (5) al sistemului $T^{(n)}$ se va scrie

$$\overline{R}^{(n)} = \{B_n\,S_{Pn}\,i + A_n\,S_{Pn}\,\overline{j}\}$$

şi ecuaţia axei centrale

$$\bar{r}\times\{B_n S_{Pn}\bar{i} + A_n S_{Pn}\bar{j}\} = -B_n J_{Pn}\bar{k}. \tag{8}$$

Făcînd intersecţia ei cu axa $P_n Y$ găsim

$$P_n V_n = \frac{J_{Pn}}{S_{Pn}}, \tag{9}$$

adică rezultanta taie axa ce uneşte centrul instantaneu $P_n$ cu centrul de masă $C$, la o distanţă care nu depinde de legea mişcării, ci numai de modul de repartizare al masei materiale faţă de axul $(P_n, \bar{k})$.

Să observăm că relaţia (9) reprezintă totodată şi lungimea pendulului matematic echivalent pendulului fizic reprezentat de sistemul material suspendat pe axa $(P_n, \bar{k})$.

Deoarece avem următoarele relaţii evidente :

$$P_n V_n = \frac{J_{Pn}}{S_{Pn}} = \frac{i_C^2 + P_n C^2}{P_n C} = P_n C + \frac{i_c^2}{P_n C}$$

în care $i_c$ reprezintă raza de inerţie a sistemului material faţă de axul $(C, k)$ rezultă pentru orice ordin al efectelor dinamice

$$P_n V_n > P_n C.$$

Direcţia rezultantei în raport cu axa $P_n\ Y$ va fi în funcţie de componentele ei

$$\operatorname{tg}\theta_n = \frac{X_n}{Y_n},$$

sau înlocuind

$$\theta_n = \operatorname{arc\,tg}\frac{B_n}{A_n}, \tag{10}$$

ceea ce arată că direcţia rezultantei depinde numai de legea mişcării şi nu depinde de caracteristicile masice ale sistemului material.

Se ştie că acelaşi unghi $\theta_n$ (10) îl fac şi vectorii acceleraţiei de ordinul $n$ cu raza vectoare dusă din $P_n$.

Putem enunţa următoarele teoreme valabile pentru mişcarea plan paralelă a unui sistem material, avînd plan de simetrie paralel cu planul mişcării :

TEOREMA 1. *Efectele dinamice corespunzătoare acceleraţiilor de ordin oarecare n se reduc după axa centrală* (8) *la o rezultantă unică* (5).

TEOREMA 2. *Rezultanta efectelor dinamice de ordinul n, taie dreapta ce uneşte centrul instantaneu al acceleraţiilor de ordinul n* (*Pn*), *cu centrul de masă* (*C*) *la o distanţă* (9) *egală cu lungimea pendulului matematic, echivalent sistemului material, indiferent de legea mişcării.*

TEOREMA 3. *Direcţia rezultantei efectelor dinamice de ordinul n, depinde de legea mişcării, făcînd cu axa $P_n$ C acelaşi unghi $\theta_n$ pe care vectorii acceleraţiei de ordinul n îl fac cu raza vectoare dusă din $P_n$.*

Pentru $n = 0$, $T^{(0)}$ reprezenta sistemul cantităţilor de mişcare, avînd impulsul şi momentul cinetic dat prin

$$\overline{H} = -\omega S_{P0}\overline{i}, \quad \overline{K}_{P0} = \omega J_{P0}\overline{k},$$

cu $P_0V_0 = \dfrac{J_{P0}}{S_{P0}}$ şi $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$,

în care $P_0$ este centrul instantaneu al vitezelor.

Pentru $n = 1$, afectînd coordonatele vectoriale (5) şi (6) semnul negativ, $T^{(1)}$ va reprezenta sistemul forţelor de inerţie, avînd

$$\overline{R} = \varepsilon S_{P1}\overline{i} + w^2 S_{P1}\overline{j}; \quad \overline{M}_{P1} = -\varepsilon J_{P1}\overline{k}$$

cu $P_1V_1 = \dfrac{J_{P1}}{S_{P1}}$ şi $\theta_1 = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$

în care $P_1$ este centrul instantaneu al acceleraţiilor.

În cazul particular al mişcării plan-paralele cu axă fixă toate centrele *instantanee* se vor găsi în acelaşi punct $P$, pe axa de rotaţie.

În acest caz rezultantele de orice ordin, vor trece toate prin acelaşi punct $V$ dat prin relaţia comună

$$PV = \frac{J_P}{S_P} = P\,C + \frac{i_0^2}{PC}$$

direcţiile variind cu valoare diferită a parametrilor cinematici An şi Bn

*Primită la redacţie la 16 decembrie 1958; o nouă versiune la 10 ianuarie 1960*

# ДИНАМИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ УСКОРЕНИЯМ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

## РЕЗЮМЕ

Зная рекуррентные соотношения для получения ускорений порядка $n$ при плоском движении абсолютно твердого тела, вычисляются векторные координаты динамических эффектов путем приведения системы векторов относительно соответствующего мгновенного полюса.

Исходя из замечания, что автомомент равен нулю, высказываются следующие три теоремы:

ТЕОРЕМА 1. *Соответствующие динамические эффекты произвольного порядка $n$ сводятся вдоль центральной оси к одной составляющей.*

ТЕОРЕМА 2. *Составляющая динамических эффектов порядка $n$ пересекает прямую $P_nC$ на расстоянии от $P_n$, равному длине математического маятника, эквивалентному абсолютно твердому телу, независимо от закона движения.*

ТЕОРЕМА 3. *Направление составляющей динамических эффектов порядка n зависит только от закона движения, составляя с прямой* $P_nC$ *угол* $\theta_n = \operatorname{arc\,tg} \frac{B_n}{A_n}$.

При $n = 0$ и $n = 1$ получаются известные динамические эффекты системы импульсов, соответственно силам инерции (придавая полученным результатам знак минус).

## LES EFFETS DYNAMIQUES CORRESPONDANT À DES ACCÉLÉRATIONS D'UN ORDRE QUELCONQUE

### RÉSUMÉ

En partant des relations de récurrence permettant d'obtenir les accélérations d'ordre $n$ dans le cas du mouvement plan d'un corps rigide, l'auteur calcule les coordonnées vectorielles des effets dynamiques en réduisant le système de vecteurs par rapport au pôle instantané respectif.

En faisant la remarque que l'automoment est nul, il énonce les trois théorèmes suivants:

THÉORÈME 1. *Les effets dynamiques correspondant á un ordre n quelconque se réduisent, suivant l'axe central, à une résultante unique.*

THÉORÈME 2. *La résultante des effets dynamiques d'ordre n coupe la droite* $P_nC$ *à une distance de* $P_n$ *égale à la longueur du pendule mathématique, équivalent au corps rigide, quelle que soit la loi du mouvement.*

THÉORÈME 3. *La direction de la résultante des effets dynamiques d'ordre n ne dépend que de la loi du mouvement et fait, avec la droite* $P_nC$, *l'angle* $\theta_n = \operatorname{arc\,tg} \frac{B_n}{A_n}$.

Lorsque $n = 0$ et $n = 1$, on obtient les effets dynamiques connus du système d'impulsions, respectivement des forces d'inertie (en donnant aux résultats obtenus le signe moins).

### BIBLIOGRAFIE

1. MANGERON D., *Обобщение формулы Сомова об ускорениях высших порядков. Доклады* АН СССР, 102, 1955 стр. 705—706.
2. MANGERON D., CIOBANU GH., BRAIER ALFRED, *Asupra extinderii formulelor lui Somov.* Revista Universității Al. I. Cuza și a Institutului politehnic Iași, *2* 95—100 (1955).
3. MANGERON D., CIOBANU GH., BRAIER ALFRED, *Problema distribuției accelerațiilor de ordin oarecare la mișcarea sistemelor materiale.* Buletinul Institutului politehnic Iași, **II** (VI) *1—2*, 29—33 (1956).
4. ЛОЙЦЯНСКИЙ Л. Т., ЛУРЬЕ А. И., *Курс теоретической механики* **I** и **II**, Москва, 1955.

# —REFERATE ȘTIINȚIFICE ȘI TEHNICE—

# STUDIUL ȘI DETERMINAREA PRINCIPIILOR DE PROIECTARE ALE COMPRESOARELOR ȘI POMPELOR CU MEMBRANE METALICE

DE

MARIUS PECULEA [1]

Avantajul incontestabil al comprimării și vehiculării fluidelor în stare pură și în perfecte condiții de etanșeitate este bine cunoscut tuturor acelora care au proiectat, executat sau exploatat instalații de gaze, vapori sau lichide.

Compresorul sau pompa cu membrană metalică întrunește aceste calități, fiind de construcție capsulată, perfect etanșă — fără presetupă — și cu posibilități de comprimare, respectiv vehiculare în stare pură a fluidelor, fără ca acestea să ajungă în contact cu părțile unse ale mașinii.

Principiul de funcționare al compresorului (acest lucru și toate cele ce vor urma fiind valabile și pentru pompe, urmează ca de aici înainte să se amintească doar unul din agregate, pentru simplificarea textului) constă în deformarea elastică a unei membrane metalice subțiri, care prin oscilația sa produce fenomenul de aspirație și refulare. Acționarea periodică a membranei are loc prin intermediul unui lichid, în general ulei mineral.

Schematizat, un compresor cu membrană este reprezentat în figura 1.

Membrana *1* este fixată între două plăci, prelucrate cu o curbură specială, una conținînd supapele de aspirație *4* și refulare *5*, iar cealaltă mecanismul hidraulic de acționare. Membrana metalică 1 separă astfel spațiul de comprimare *2* față de spațiul de acționare hidraulic *3*.

Prin acțiunea pistonului *9*, antrenat de un mecanism clasic bielă-manivelă, asupra masei de ulei *3*, se imprimă o mișcare oscilantă membranei, care prin deformația ei elastică se va culca alternativ pe cele două suprafețe cu concavități opuse, realizînd astfel aspirația și refularea fluidului.

---

[1] Institutul de fizică atomică, secția Cluj.

Continuu, o pompă de compensaţie *6* va completa uleiul din spaţiul *3* peste un ventil de reţinere *7*, care are rolul de a descărca pompa *6* de acţiunea pistonului *9*. Surplusul de ulei din spaţiul *3* este reîntors în carterul *10* peste ventilul limitator *8*, care pe lîngă rolul de ventil de siguranţă al maşinii, va limita presiunea de refulare a compresorului. Ventilul limitator *8* este prevăzut a fi reglabil din exterior prin intermediul unei roţi manuale.

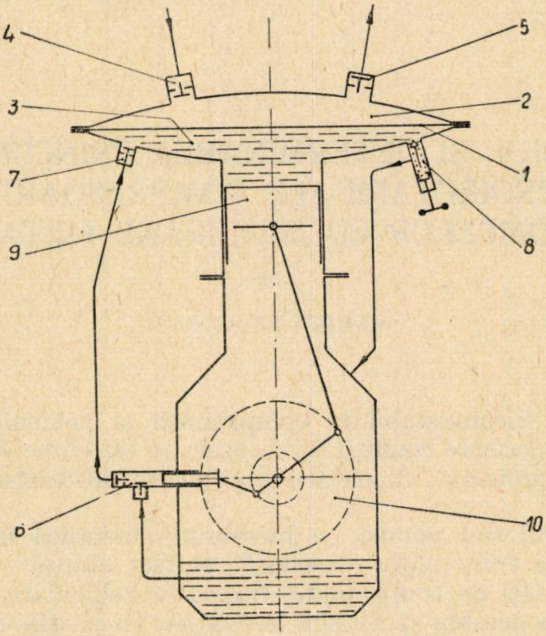


Fig. 1

Realizarea constructivă a unui compresor cu membrană, cu un debit de 3 $m^3/h$ şi 15 atm presiune de refulare este arătată în figura 2.

O pompă cu membrană pentru presiuni mari, 250 atm, cu o capacitate de 200 l/h este prezentată în figura 3, unde se vede şi construcţia ventilului limitator.

În construcţia pompei este de remarcat fixarea membranei între două plăci profilate cu concavităţi opuse, care permit o mult mai uşoară prelucrare a curburii speciale.

Avantajele acestor compresoare şi pompe cu membrane metalice, precum şi domeniile de utilizare cele mai adecvate pentru ele sînt prezentate în lucrarea *Compresoare şi pompe cu membrane metalice — cu utilizare în industria produselor nucleare, industria chimică şi frigorifică*, al aceluiaşi autor.

Lucrarea de faţă se va ocupa în continuare numai de studiul şi problemele speciale de proiectare a compresoarelor şi pompelor cu membrane metalice, stabilind relaţiile de calcul, cu nomogramele respective şi o serie de date rezultate de pe urma măsurătorilor asupra membranelor metalice şi încercării prototipurilor.

În proiectarea acestor compresoare intervin două noi probleme, respectiv dimensionarea membranei metalice în raport cu debitul şi presiunea de lucru şi debitul pompei de compensaţie. Restul proiectării este cel obişnuit pentru compresoare sau pompe cu piston.

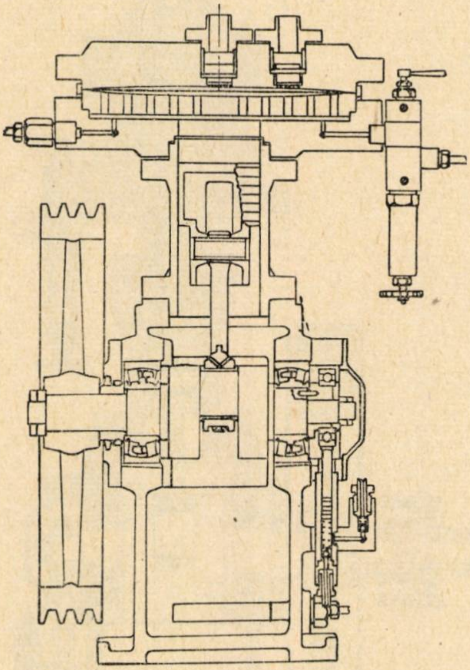


Fig. 2

Pentru determinarea relaţiilor de proiectare privind membrana metalică s-a considerat relaţia

$$\frac{w_0}{\delta} + 0{,}583\left(\frac{w_0}{\delta}\right)^3 = 0{,}176\,\frac{p}{E}\left(\frac{R}{\delta}\right)^4, \qquad (1)$$

unde

$w_0$ = săgeata la centru a membranei,
$\delta$ = grosimea membranei,
$R$ = raza de încastrare a membranei,
$E$ = modulul de elasticitate al materialului membranei,
$p$ = presiunea exterioară ce acţionează asupra membranei.

În figura 4 sînt prezentate mărimile care intră în calculul ce urmează.

Relația (1) a fost obținută de Nadai prin integrarea ecuației fibrei deformate pentru membrană subțire, unde săgeata $w_0$ este mai mare decît grosimea $\delta$, și unde a admis soluția particulară

$$\frac{dw}{dr} = C\left[\frac{r}{R} - \left(\frac{r}{R}\right)^n\right].$$

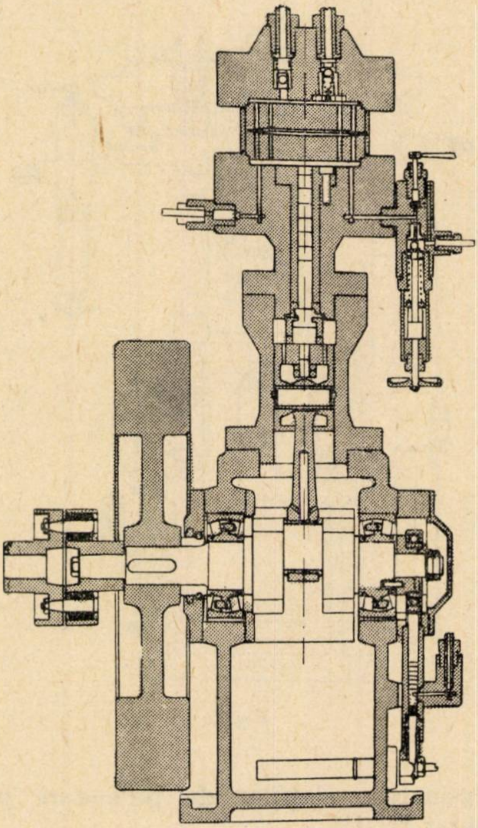


Fig. 3

În aceeași ipoteză autorul de mai sus obține valorile rezistențelor în membrană

$$\sigma_r = 0{,}423\sqrt[3]{\frac{E\cdot p^2\cdot R^2}{\delta^2}} \qquad \text{pt. } r = 0, \tag{2}$$

$$\sigma_r = 0{,}328\sqrt[3]{\frac{E\cdot p^2\cdot R^2}{\delta^2}} \qquad \text{pt. } r = R. \tag{3}$$

Coeficientul lui Poisson a fost considerat peste tot $\nu = 0{,}25$. Rezolvînd ecuaţia (1) în raport cu $w_0$ am obţinut

$$w_0 = \sqrt[3]{0{,}151\,\frac{pR^4}{\delta E}\left[1+\sqrt{1+8{,}2\,\frac{\delta^8E^2}{p^2R^8}}\right]} + \sqrt[3]{0{,}151\,\frac{pR^4}{\delta E}\left[1-\sqrt{1+8{,}2\,\frac{\delta^8E^2}{p^2R^8}}\right]}\,.$$

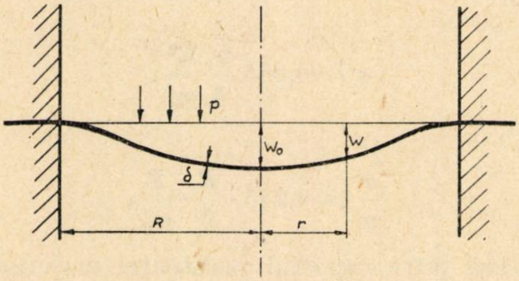


Fig. 4

Raportul $\frac{\delta^8E^2}{p^2R^8}$ pentru valori uzuale de execuţie variază între $10^{-8}$ la $10^{-10}$, deci

$$8{,}2\,\frac{\delta^8E^2}{p^2R^8} \ll 1,$$

respectiv se poate neglija faţă de 1.

De aici rezultă pentru săgeata la centru expresia

$$w_0 = 0{,}671\;R\sqrt[3]{\frac{p\,.\,R}{\delta\,.\,E}}\,. \tag{4}$$

În timpul funcţionării presiunile fluidelor de o parte şi de cealaltă a membranei fiind aproximativ egale în valoare absolută, diferenţa dintre ele fiind presiunea de deformare a membranei aceasta nu reprezintă o mărime caracteristică de proiectare şi ca atare eliminînd valoarea ei între ecuaţiile (2) şi (4) se obţine relaţia de proiectare.

$$\boxed{\frac{w_0}{R} = 1{,}03\sqrt{\frac{\sigma}{E}}\,.} \tag{5}$$

Din expresia (5) rezultă că raportul dintre săgeata la centru a membranei şi raza ei de încastrare este proporţional cu raportul dintre rezistenţa materialului şi modulul lui de elasticitate. Cu alte cuvinte, mărimile geometrice ale membranei sînt legate de cifrele de rezistenţă şi elasticitate a materialului membranei. Atît grosimea membranei cît şi presiunea de deformaţie nu mai au aici nici o influenţă, deoarece la mărirea grosimii membranei va creşte presiunea de deformaţie însă rezistenţa rămîne aceeaşi.

Raportul $\frac{w_0}{R}$ reprezintă o deformație specifică, respectiv echivalent și în membrul din dreapta unde $\frac{\sigma}{E} = \varepsilon$.

Eliminînd modulul de elasticitate $E$ între relațiile (2) și (4) se obține expresia

$$\sigma = 0{,}285 \frac{p \,.\, R^2}{\delta \,.\, w_0},$$

respectiv

$$\frac{\sigma}{p} = 0{,}285 \cdot \frac{R}{\delta} \cdot \frac{R}{w_0}, \tag{6}$$

dîndu-ne o legătură între raportul rezistenței materialului și presiunea de deformație și mărimile geometrice ale membranei.

Pentru determinarea rezistenței în material se va utiliza expresia (2), (5) sau (6) după caz.

Curbura după care urmează să fie prelucrate cele două plăci între care se fixează membrana și urmează să oscileze, trebuie să reprezinte deformația pentru săgeata maximă $w_0$ și raza $R$ de încastrare (vezi fig. 4) a cărei ecuație este

$$w = w_0 \frac{2(z+1)}{z-1} \left[ \frac{\left(\frac{r}{R}\right)^{z+1} - 1}{z+1} - \frac{\left(\frac{r}{R}\right)^{2} - 1}{2} \right] \tag{7}$$

și reprezintă integrarea ecuației $\frac{dw}{dr} = C\left[\frac{r}{R} - \left(\frac{r}{R}\right)^{n}\right]$, respectiv soluția particulară a lui Nadai.

Volumul deplasat prin deformația membranei și care totodată reprezintă volumul teoretic de pompare (volumul cursei) este

$$V_h = \pi \cdot R^2 \cdot w_0 \frac{z+1}{z+3}. \tag{8}$$

În ecuațiile (7) și (8) $z$ este o funcție de $\frac{w_0}{\delta}$ și ține seama de influența grosimii membranei, respectiv

$$z = 4{,}56 \frac{w_0}{\delta} + 0{,}545 \quad \text{pt.} \frac{w_0}{\delta} > 1. \tag{9}$$

Alegerea grosimii membranei este dictată de posibilitatea de etanșare a ei între cele două plăci și de mărimea presiunii de deformare, care trebuie menținută cît mai mică și care impune să se adopte membrane cît mai subțiri.

Orientativ diagrama din figura 5 limitează adoptarea grosimilor membranei în funcție de presiunea maximă de lucru şi de diametrul maxim al orificiilor practicate în cele două plăci, prelucrate cu curbura specială.

Diagrama din figura 5 a fost trasată în urma unor serii de încercări cu membrane metalice din oțel şi aliaje de cupru cu grosimi de 0,1 — 0,5 mm.

Diametrul maxim al orificiilor a fost ales 15 mm, iar cel minim de 4, cu totul excepțional, pentru presiuni mari şi turații lente se pot utiliza orificii pînă la minimum 2 mm diametru.

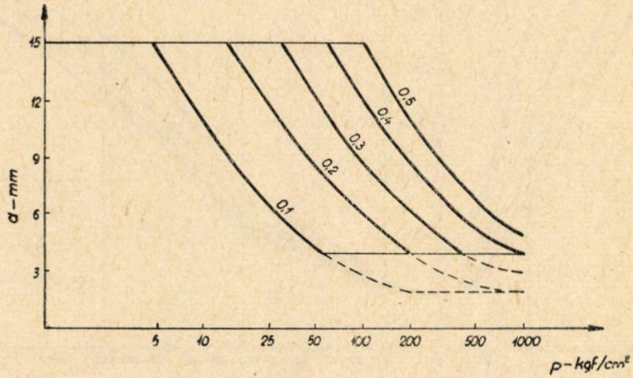


Fig. 5

Domeniul recomandat este cel cuprins sub curbele din figura 5.

Pentru calculele de anteproiectare, cînd se determină o serie de dimensiuni, pentru alegerea celei mai convenabile, s-au întocmit două nomograme luînd în considerație următoarele:

În expresia (8) a volumului teoretic de pompare se introduce coeficientul

$$\mu = \frac{z+1}{z+3}, \tag{10}$$

pe care l-am numit corecție de volum.

Expresia (8) devine

$$V_h = \pi \cdot R^2 \cdot w_0 \cdot \mu,$$

respectiv

$$V_h = \mu \cdot V_h^*, \tag{11}$$

unde

$$V_h^* = \pi \cdot R^2 \cdot w_0 .$$

Cum $\mu$ pentru valorile uzuale ale lui $\frac{w_0}{\delta}$ tinde spre 1 în primă aproximație se poate considera $V_h \approx V_h^*$. Aceasta permite construcția nomogramei din figura 6, unde se obţin direct valorile lui $R$ şi $w_0$ în funcţie de $V_h^*$ pentru diferite valori ale raportului $\frac{\sigma}{E}$. Utilizarea nomogramei reiese din figură.

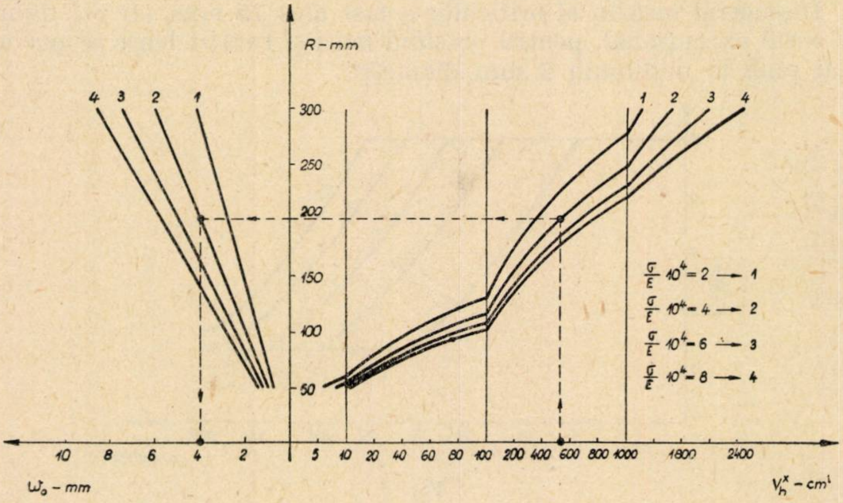


Fig. 6

Valoarea corecţiei de volum se obţine din nomograma din figura 7.

Recapitulînd, mersul proiectării este următorul : pentru debitul dat se calculează $V_h$ admiţîndu-se turaţia, în general cea uzuală pompelor cu piston. Considerînd expresia (11) şi calculînd raportul $\frac{\sigma}{E}$ pentru materialul de membrană ales, nomograma din figura 6 ne permite rapid obţinerea valorilor lui $w_0$ şi $R$. Din nomograma din figura 7 pentru un $\delta$ ales avem şi corecţia respectivă de volum. Pentru dimensiunile finale alese se recomandă calculul analitic.

A doua problemă particulară în proiectarea acestor compresoare o formează debitul pompei de compensaţie. Rolul ei constă în continua înlocuire a fluidului ce comandă oscilaţiile membranei avînd principalul scop de a *culca* complet membrana pe concavitatea superioară, realizînd astfel cel mai mic spaţiu mort în zona de refulare. Acestui lucru i se datoreşte un ridicat randament volumetric al compresoarelor cu membrană.

Debitul pompei de compensaţie formează însumarea a patru debite elementare :

1. Diferenţa dintre debitul membranei propriu-zis şi debitul pistonului prin intermediul căruia este acţionată hidraulic.

2. Pierderile de fluid prin spaţiul dintre piston şi cilindru, care la acţionarea cu ulei formează cea mai indicată metodă de ungere.

Deoarece în general, pistonul se execută fără segmenţi de etanşare, recomandăm relaţia

$$q = 2617 \frac{h^3 \cdot d_m \Delta p}{\mu \cdot l} \text{ cm}^3/\text{s}, \tag{12}$$

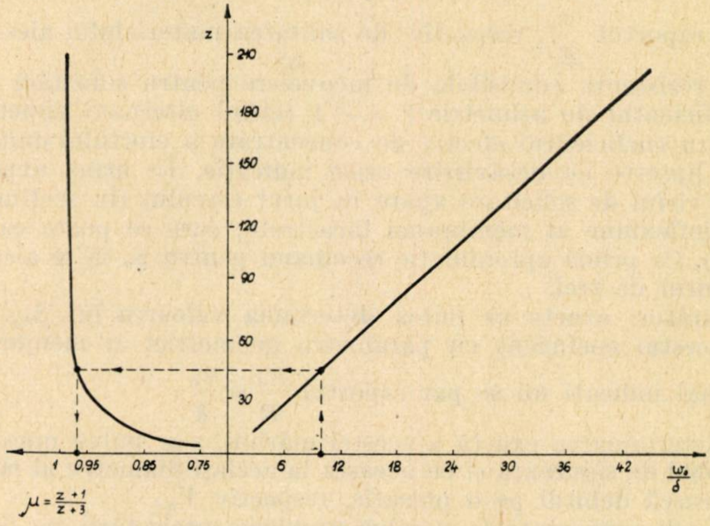


Fig. 7

unde $h$ = jocul inelar în cm,

$d_m$ = diametrul mediu al jocului inelar în cm,

$\Delta p$ = diferenţa de presiune între cele două feţe ale pistonului în kg/cm$^2$,

$\mu$ = viscozitatea fluidului în $\frac{\text{kg} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$,

$l$ = lungimea de etanşare a pistonului în cm.

3. Cantitatea de fluid prerăcit pentru evacuarea prin membrană a căldurii de comprimare (obţinerea unei comprimări izoterme) sau răcirea membranei la pomparea de lichide fierbinţi. Se ia în considerare doar în cazuri speciale pentru a nu mări prea mult pompa de compensaţie.

4. Diferenţa de volum prin comprimarea fluidului, care se ia în considerare de la presiuni mai mari de 100 atm.

În general, debitul pompei de compensaţie formează suma debitelor de la punctele 1 şi 2.

Cînd se consideră necesară răcirea indicată la punctul 3, debitul pompei se consideră doar cel rezultat din acest calcul, debitele de la punctele 1, 2 şi eventual 4 fiind incluse în 3 care şi aşa va prezenta o valoare acoperitoare.

Seria de încercări efectuate în laborator au confirmat valabilitatea formulelor (4), (5) şi (7), unde s-au măsurat presiunile de deformare, raportul $\frac{w_0}{R}$ şi forma curbei deformate a membranei pentru diferite calităţi de material, diferiți diametri de încastrare și grosimi de membrane. Curba din figura 5 se datorește tot unor serii de încercări.

Țin să atrag atenția asupra determinării raportului $\frac{w_0}{R}$ care este funcție de raportul $\frac{\sigma}{E}$, respectiv de calitatea materialului ales. $\sigma$ reprezintă aici rezistența admisibilă de încovoiere pentru solicitări variabile, avînd coeficientul de asimetrie $r = -1$ (ciclul alternant simetric).

Pentru coeficientul efectiv de concentrare a efortului unitar $\beta_\sigma$, în literatură lipsește cu desăvîrșire orice indicație. În urma experiențelor efectuate, vîrful de solicitare apare în jurul cercului (în secțiune, punctelor) de inflexiune al membranei încastrate, care se poate calcula din ecuația (7). Ca primă aproximație recomand pentru $\beta_\sigma$ să se aleagă o valoare în jurul de trei.

Măsurători exacte ar putea determina valoarea lui $\beta_\sigma$, respectiv variația acestui coeficient cu parametrii geometrici ai membranei, din care cei mai indicați mi se par raportul $\frac{w_0}{R}$ și $\frac{w_0}{\delta}$.

Cu determinarea exactă a acestei mărimi, s-ar putea micșora coeficientul global de siguranță și cu aceasta la același diametru al membranei să se mărească debitul pe o pulsație, respectiv $V_h$.

Prin cele prezentate se rezolvă problema proiectării, pe baze științifice, a compresoarelor și pompelor cu membrane metalice, atrăgînd după sine necesitatea studierii și determinării mărimii coeficientului efectiv de concentrare a efortului unitar, în scopul obținerii nu numai a celui mai bun randament termodinamic indicat și volumetric, ci și cea mai rațională exploatare a materialului membranei, în vederea realizării unui debit maxim.

*Primită la redacție la 7 decembrie 1961*

## ИССЛЕДОВАНИЕ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИНЦИПОВ ПРОЕКТИРОВАНИЯ КОМПРЕССОРОВ И НАСОСОВ С МЕТАЛЛИЧЕСКИМИ МЕМБРАНАМИ

### РЕЗЮМЕ

В работе излагаются схематически основные преимущества и способ работы компрессоров и насосов с металлическими мембранами для сжатия и перемещения жидкостей и газов.

Приводятся результаты теоретических и экспериментальных исследований, конкретизированных расчетными формулами и номограммами, необходимыми для проектирования упругих металлических мембран в качестве колебательного элемента.

В заключение обращается внимание на выбор допускаемой прочности мембраны и на появление пика нагружения, последующее изучение которого позволило бы наиболее рациональную эксплуатацию материала мембраны.

# ÉTUDE ET DÉTERMINATION DES PRINCIPES POUR L'ÉLABORATION DES PROJETS DE COMPRESSEURS ET DE POMPES À MEMBRANES MÉTALLIQUES

## RÉSUMÉ

Dans ce travail, l'auteur présente, d'une manière schématique, les principaux avantages, ainsi que le mode de fonctionnement des compresseurs et des pompes à membranes métalliques, utilisés pour comprimer et transporter les gaz et les liquides.

On indique les résultats des recherches théoriques et expérimentales, résumés dans les formules et les nomogrammes de calcul nécessaires à l'élaboration des projets des membranes métalliques élastiques, considérées comme élément oscillant de pompage.

Pour finir, l'auteur insiste sur le choix de la résistance admissible de la membrane et sur l'apparition d'un maximum de sollicitation, dont une étude ultérieure permettrait l'exploitation optimum du matériel de la membrane.

## BIBLIOGRAFIE

1. M. FEUILLEBOIS, *Le Compressor à membrane CORBLIN dans ses multiples applications.* Rev. gén. Froid (1955).
2. * * * *Компрессоры воздушные и газовые* (1954).
3. R. PLANK, *Membrane Compressor Cuts Oil Pollution.* Refrig. Engng. (1958).
4. S. TIMOSHENKO, *Theory of Plates and Shells.* 1940.
5. H. HAUSEN, *Erzeugung sehr tiefer Temperaturen.* 1957.
6. Б. А. КОРНДОРФ, *Техника высоких давлений в химии.* 1952.
7. GH. BUZDUGAN, *Calculul de rezistență la solicitări variabile.* 1955.
8. * * * Manualul inginerului mecanic. I (1959).

# — REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE —

# INSTALAȚIE DE LABORATOR PENTRU MĂSURAREA DEBITELOR ȘI TEMPERATURILOR ULEIULUI LA LAGĂRELE ARBORILOR COTIȚI DE LA MOTOARELE CU ARDERE INTERNĂ

DE

GH. MARIN

## I. GENERALITĂŢI

Realizarea unor calcule mai exacte ale caracteristicilor globale ale lagărelor de sprijin și de bielă de la arborii cotiți ai motoarelor cu ardere internă este mult îngreunată de lipsa unui utilaj adecvat, cu care, pentru cazurile practice, să se poată determina experimental cantitățile de ulei care circulă prin aceste lagăre și temperatura lor.

Analizîndu-se căile care pot duce la o rezolvare judicioasă a acestei probleme s-a ales o soluție care permite măsurarea debitelor de ulei la unele lagăre ale arborilor cotiți, cum și a temperaturilor la intrarea și ieșirea din lagăr, pe calea comodă a măsurătorilor electrice.

Metoda constă în utilizarea unor elemente de măsură pentru debite și pentru temperaturi făcînd parte dintr-o instalație specială, și practicarea unui sistem de canale în arborele cotit cu ajutorul cărora alimentarea cu lubrifiant a lagărelor se face după dorință ; astfel se pot studia și determina direct debitele la un lagăr de sprijin și două lagăre de bielă, celelalte deducîndu-se prin măsurători globale, pe baza asemănărilor constructive.

În figura 1 este arătat montajul folosit pentru măsurarea debitului şi a temperaturilor, care se compune din :
- — elemente de debit şi temperatură ;
- — aparataj electronic ;
- — montajul pentru alimentare cu ulei ;
- — sistem de canale pentru dirijarea uleiului în arborele cotit.

Instalația a fost utilizată în acest caz pentru măsurători la un motor Skoda 1101.

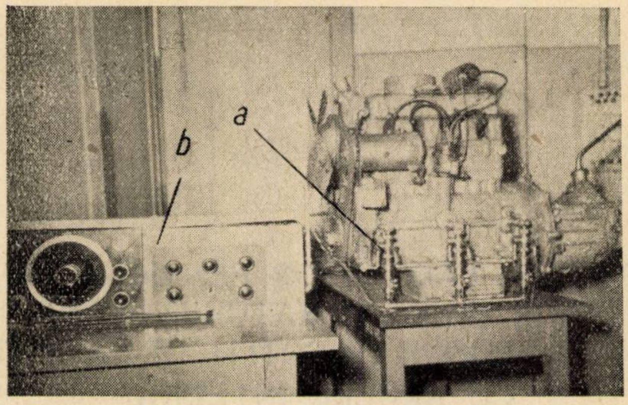


Fig. 1. — Instalație pentru măsurarea debitelor de ulei și a temperaturilor la lagărele arborelui cotit al motoarelor cu explozie :

*a* — instalația de alimentare cu ulei ; *b* — aparatajul electronic.

## II. ELEMENTE PENTRU MĂSURAREA DEBITELOR ȘI A TEMPERATURILOR. PRINCIPIUL DE FUNCȚIONARE ȘI CONSTRUCȚIA LOR

*a*) Elementele pentru măsurarea debitelor de ulei (debitmetre) au o construcție obișnuită : un con așezat în poziție verticală pe un prag, ținut în această poziție de un resort elastic slab.

Pentru a permite trecerea unei cantități de ulei, conul este ridicat de pe prag de presiunea din conductă. Ridicarea conului mobil față de poziția de repaus este o funcție de debit și viscozitate, aceasta din urmă, la rîndul ei, variind cu temperatura. Deplasarea conului conduce la variația unei rezistențe electrice, care poate fi măsurată cu ajutorul aparatajului electronic.

Măsurătorile de debit se fac urmărind simultan variația rezistenței electrice a debitmetrului și valoarea temperaturii uleiului la trecerea prin debitmetru. Valoarea efectivă a debitului de ulei se citește pe o diagramă de etalonare făcută înainte de montare, pentru o gamă acoperitoare de temperaturi, cu uleiul utilizat la motorul respectiv.

Deoarece temperaturile de lucru pot diferi de temperaturile la care s-au ridicat curbele de etalonare, calculul debitului real se face prin interpolare pe curbele respective.

Construcția debitmetrului este prezentată în figura 2 : corpul *1* are un prag pe care se așază etanș, în repaus, conul *2*. Acesta este solidar cu axul *3*, care îi ghidează traseul de deplasare și este slab împins către poziția de repaus de resortul *4*. În capătul inferior al axului *3* este montat, cu filet, piesa izolantă *5*, pe care se fixează cursorul metalic *6*. Rezistența *7* este montată pe suportul izolant *8* și întreaga aparatură se fixează rigid în piesa metalică *9*. Cursorul metalic *6*, deplasîndu-se o dată cu conul *2*, culisează de-a lungul rezistenței *7*, făcînd-o să varieze ca valoare. Piesele *1*, *10* și *11* formează cămașa exterioară a debitmetrului, iar piesele *12* și *13* sînt piese de asamblare. Legătura rezistenței debitmetrului cu exteriorul se face prin intermediul a doi conductori (circuitul *a*, fig. 2), iar presetupa *14* împreună cu garnitura *15* asigură etanșeitatea locului de trecere a conductorilor în exterior.

*b*) Elementele pentru măsurarea temperaturilor folosesc variația rezistenței unui conductor metalic în funcție de temperatură (traductoare termorezistente) [1]. Măsurătorile se fac în raport cu un traductor martor, de aceeași mărime și construcție, așezat într-o cameră de temperatură constantă.

Curbele de etalonare ale traductoarelor pentru temperatură sînt liniare pentru intervalul de temperaturi la care se lucrează în cazul nostru, iar precizia măsurătorilor este de circa 0,2°C.

Astfel de traductoare au fost montate în trei locuri diferite :

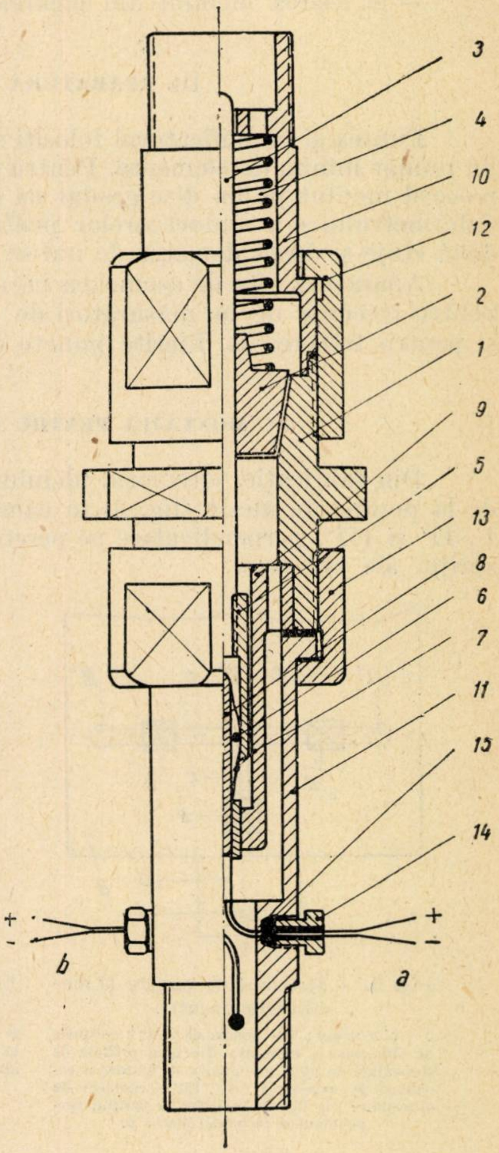


Fig. 2. — Elemente pentru măsurarea debitului de ulei : *a* — circuitul electric pentru debitmetru ; *b* — circuitul electric pentru traductoare de temperatură ;

*1* — corp cu prag de închidere ; *2* — con ; *3* — axul de dirijare a conului ; *4* — resort ; *5* — piesă izolatoare port-cursor ; *6* — cursor ; *7* — rezistență ; *8* — port-rezistență ; *9* — casetă ; *10* și *11* — piese ale corpului exterior ; *12* și *13* — piulițe de fixare ; *14* — presetupă ; *15* — garnitură.

— în fiecare element de debit (circuitul *b*, fig. 2) la mijlocul canalelor de trecere a uleiului ;

---

[1] Gh. Marin, *Aparat pentru măsurat temperaturi*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, *4* (1959).

— în apropierea punctului de trecere a uleiului din canal în lagărul de sprijin, prin intermediul unor tije;

— la ieşirea uleiului din lagărele de sprijin.

## III. APARATURA ELECTRONICĂ

Puntea şi amplificatorul folosiţi sînt de construcţie simplă, reduse la un număr minim de elemente. Pentru reglaj, puntea este prevăzută cu un reocord montat pe un disc gradat cu care se măsoară variaţia rezistenţei debitmetrului şi a traductoarelor pentru temperaturi. Amplificatorul are două etaje şi drept detector de nul se foloseşte un ochi magic.

Aparatura este de asemenea prevăzută cu un sistem de comutatoare pentru trecerea de la măsurători de debit la măsurători de temperatură şi pentru trecerea la diferite puncte de măsură.

## IV. MONTAJUL PENTRU ALIMENTARE CU ULEI

Din fabricaţie, circulaţia uleiului la motorul amintit se face astfel: de la pompa de ulei *b* (fig. 3) în canalele *c* şi apoi cu ajutorul canalelor I′, II′ şi III′, perpendiculare pe peretele blocului motor *a*, la lagărele de sprijin ale arborelui.

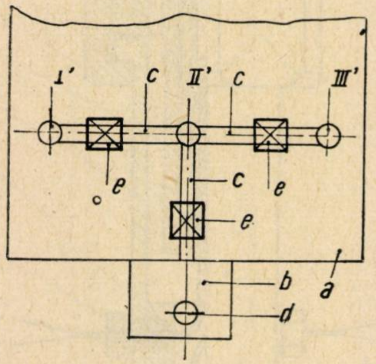


Fig. 3. — Sistemul de ungere şi modificările făcute:

*a* — bloc motor; *b* — pompa de ulei; *c* — canale de circulaţie a uleiului; *d* — noul orificiu de alimentare cu ulei; *e* — puncte de blocare a canalelor de ungere; I′, II′, III′ — canalele de alimentare cu ulei a lagărelor de sprijin, perpendiculare pe blocul motor *a*.

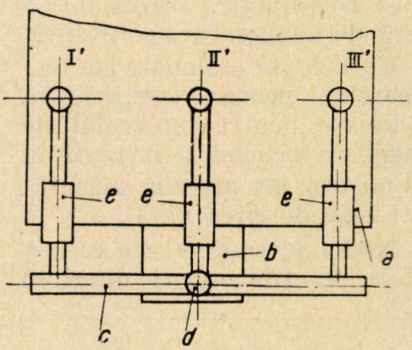


Fig. 4. — Sistemul de ungere după modificare:

*a* — blocul motor; *b* — pompa de ulei; *c* — instalaţia exterioară de ungere; *d* — orificiul modificat pentru alimentare exterioară; *e* — elemente pentru măsurarea debitelor şi a temperaturilor.

Schimbînd direcţia de circulaţie a uleiului din pompă către exteriorul blocului (punctul *d*) şi obturînd canalele *c* în punctele *e* s-au obţinut elementele necesare (sursa de alimentare de la pompa *d*, şi canalele I′, II′ şi III′ corespunzătoare lagărelor de sprijin I, II şi III) pentru a face instalaţia de alimentare cu ulei prin exteriorul motorului.

Instalaţia s-a făcut pornindu-se de la sursa de alimentare *d* cu o conductă cu trei derivaţii pînă în dreptul canalelor I′, II′ şi III′ (fig. 4). Pe cele trei derivaţii s-au montat cîte un element pentru măsurat debitul de ulei *e* şi cîte un robinet cu con pentru controlul circulaţiei uleiului. Legătura dintre circuitele debitmetrelor şi canalele I′, II′ şi III′ s-a făcut cu ajutorul unor tije cu flanşă fixate pe blocul motorului.

În canale s-au mai montat, cu ajutorul unor ţevi subţiri, cîte un traductor pentru măsurat temperaturile în apropierea locului de intrare a uleiului în lagăre.

Ţinînd seamă de faptul că circulaţia uleiului prin instalaţia exterioară conduce la o răcire sub valoarea aceleia din baie, s-au montat pe conductele instalaţiei unele rezistenţe cu ajutorul cărora temperatura uleiului se menţine la valoarea temperaturii din baie, reglajul făcîndu-se cu ajutorul unui reostat.

De remarcat că trecerea instalaţiei de ulei prin exterior crează posibilitatea alimentării cu ulei sub presiuni diferite, prin introducerea unei pompe, fără ca aceasta să mai depindă de turaţia motorului.

## V. SISTEMUL DE CANALE PENTRU DIRIJAREA ULEIULUI ÎN ARBORELE COTIT

Ungerea lagărelor în motorul folosit este realizată din fabricaţie astfel: canalul de alimentare al lagărului de sprijin I alimentează şi un lagăr de bielă, un lagăr al arborelui cu came, iar o bună parte din ulei este dirijată spre filtru ; canalul de alimentare a lagărului de sprijin II alimentează în afara acestuia şi două lagăre de bielă ; canalul de alimentare a lagărului de sprijin III alimentează în afara acestuia un lagăr de bielă, două lagăre ale arborelui cu came şi tacheţii.

Pentru separarea debitelor de la lagărele de sprijin II şi III şi lagărele de bielă 2, 3 şi 4 s-au făcut următoarele modificări :

1. S-a obturat canalul de alimentare cu ulei a lagărelor arborelui cu came şi a tacheţilor, care se alimentau din lagărul de sprijin III, iar alimentarea lor s-a făcut printr-o derivaţie a instalaţiei din spatele elementelor pentru măsurarea debitelor.

2. S-au practicat în arborele cotit canalul suplimentar *a* (fig. 5), făcîndu-se astfel legătura între canalele lagărelor de bielă 3 şi 4, şi găurile de blocare *b*, *c* şi *d*, cu care, prin introducerea unor buloane, se pot obtura canalele *a*, *e* şi *f*.

Datorită acestor modificări, distribuţia lubrifiantului se poate realiza în următoarele variante :

— prin blocarea canalului *a* în punctul *c* şi astuparea orificiilor *b* şi *d*, alimentarea se face normal (distribuţia din fabricaţie) ;

— prin blocarea canalului *f* în punctul *d* şi astuparea fără blocare a orificiilor *b* şi *c* se izolează lagărul de sprijin III, în timp ce lagărul de sprijin II alimentează atît lagărele bielelor 2 şi 3, cît şi 4;

— prin blocarea canalului *e* în punctul *b* şi astuparea fără blocare a orificiilor *c* şi *d*, lagărul de sprijin II alimentează numai lagărul bielei 2, iar lagărul de sprijin III alimentează simultan lagărele bielelor 3 şi 4.

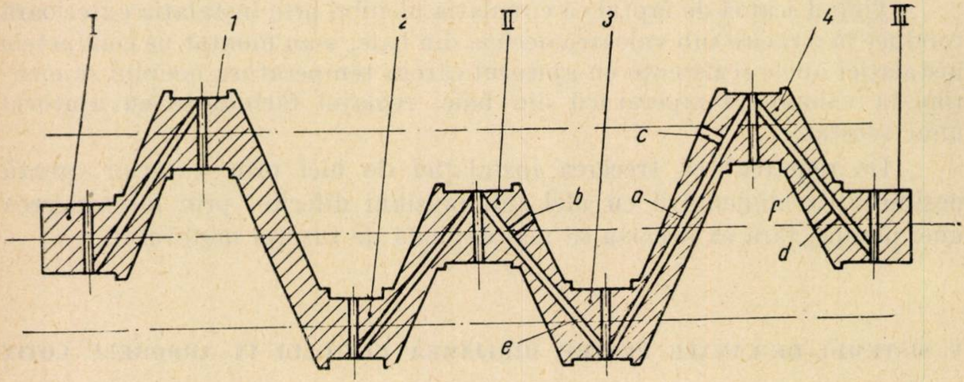


Fig. 5. — Secţiune în arborele cotit: I, II, III — lagăre de sprijin; *1, 2, 3, 4* — lagăre de bielă; *a* — canal nou practicat; *b, c, d* — găuri pentru obturarea canalelor *a, e, f*; *e,* — canale de ungere existente.

S-a realizat astfel izolarea lagărului de sprijin III, debitul de ulei putînd fi măsurat direct. Adăugîndu-se succesiv alimentarea lagărului de bielă 4 şi apoi 3, debitele de ulei se determină prin diferenţă, iar verificarea măsurătorilor se face faţă de scăderea debitelor din lagărul de sprijin II.

## VI. ETALONAREA ELEMENTELOR DE MĂSURĂ

Etalonarea elementelor pentru măsurarea debitelor de ulei s-a făcut pentru temperaturile de 60, 70, 80 şi 90°C, obţinîndu-se curbele din figura 6. Zona cuprinsă între debitele obţinute pentru temperaturile 60—90°C (zona haşurată) conduce la aflarea debitelor de ulei în cazul cînd temperaturile uleiului, în timpul lucrului, sînt diferite faţă de temperaturile de etalonare, dar cuprinse între acestea, prin interpolare.

Am arătat mai sus că traductoarele pentru măsurarea temperaturilor au o variaţie liniară pentru valorile la care se lucrează în mod obişnuit. Mărimea pantei este în raport direct cu mărimea rezistenţei electrice.

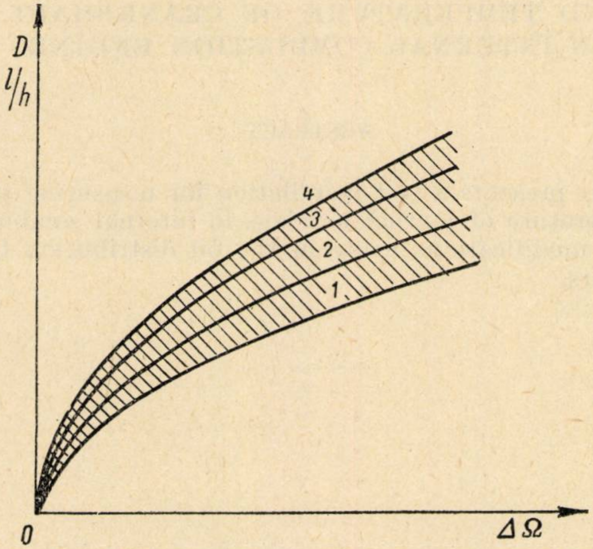


Fig. 6. — Curbe de etalonare pentru elementele de debit : *1* — pentru temperatura de 60°C ; *2* — 70°C ; *3* — 80°C ; *4* — 90°C ; zona haşurată este zona de interpolare.

## VII. CONCLUZII

Necesitatea efectuării unor măsurători de debit şi temperaturi la unele lagăre ale motoarelor cu ardere internă, în funcţiune, au condus la construirea unor elemente speciale, acţionîndu-se în acelaşi timp şi asupra sistemului de distribuţie a uleiului la lagărele de sprijin şi de bielă, astfel încît măsurătorile să poată fi făcute separat pentru fiecare lagăr.

Sistemul de măsură folosit, atît pentru temperaturi cît şi pentru debite, a dat rezultate satisfăcătoare, cu o precizie convenabilă, utilizarea aparaturii fiind în acelaşi timp comodă.

Astfel de măsurători sînt utile în cercetările teoretice, atît pentru verificarea cît şi pentru îmbunătăţirea soluţiilor teoretice de calcul.

*Primită la redacţie la 28 Ianuarie 1961*

## ЛАБОРАТОРНАЯ УСТАНОВКА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ РАСХОДОВ И ТЕМПЕРАТУР МАСЛА В ПОДШИПНИКАХ КОЛЕНЧАТЫХ ВАЛОВ ДВИГАТЕЛЕЙ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ

### РЕЗЮМЕ

Описывается лабораторная установка для измерения расходов масла и температур подшипников скольжения двигателей внутреннего сгорания, а также излагаются произведенные изменения в распределении масла при измерении этих параметров.

# TEST INSTALLATION FOR MEASURING THE OIL RATE OF FLOW AND TEMPERATURE OF CRANKSHAFT BEARINGS IN INTERNAL COMBUSTION ENGINES

## ABSTRACT

This paper presents a test installation for measuring the oil rate of flow and temperature of journal bearings in internal combustion engines as well as the modifications made in the oil distribution for measuring these parameters.

# MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

## RĂSPUNDERILE ECONOMICE, CULTURALE ŞI TEHNICE ÎN ÎNTREPRINDERILE DIN DOMENIUL MECANICII, ÎN ULTIMA PARTE A SECOLULUI AL XX-LEA[1]

DE

A. R. MÉTRAL[2]

În ultimii 30 de ani, caracterul exponențial al creşterii cunoştinţelor, realizărilor şi necesităţilor omeneşti a devenit foarte accentuat.

Într-adevăr, pînă la mijlocul veacului al XIX-lea, legile de creştere au fost liniare. Stăpînirea energiei, începută de Denis Papin şi de Watt, care caracterizează revoluția industrială a secolului al XX-lea, a rupt acest ritm. După părerea noastră, *caracteristica acestei revoluţii constă tocmai în trecerea de la creşterea liniară la creşterea exponențială.*

Să examinăm mai întîi evoluția cunoştinţelor noastre, începînd cu infinitul mare.

Indicii numerici ai progresului astronomic ne vor fi dați de următoarele curbe (toate curbele sînt în ordonate logaritmice cu abscise liniare) :

1. Numărul stelelor catalogate la diferite epoci. Pînă la începutul veacului al XVIII-lea, creşterea era infimă, apoi dintr-odată, creşterea devine exponențială (fig. 1);
2. Mişcările proprii cunoscute ale stelelor (fig. 2);
3. Numărul vitezelor radiale cunoscute (fig. 3);
4. Numărul paralaxelor cunoscute (fig. 4);
5. Numărul stelelor variabile cu perioadă cunoscută (fig. 5).

În ce priveşte ultimele două curbe (fig. 4 şi 5), veți observa că au concavitatea în sus, ceea ce arată că progresul este de fapt mai rapid decît legea exponențială.

În ceea ce priveşte infinitul mic, cunoştinţele noastre în acest domeniu au fost posibile, pe de o parte, datorită perfecționării constante a instrumentelor de investigaţie şi de măsură, iar pe de alta, progresului considerabil al teoriilor statisticii probabilității. Compensînd insuficiența măsurătorilor directe putem stabili dimensiunile și caracteristicile fizice ale constituenților atomici cu un grad de precizie de așa natură încît expresia cifrată a fenomenelor, la scara noastră, este conformă cu datele observațiilor. Ce se întîmplă însă cu realizările?

---

[1] Text prescurtat al conferinţei ţinute în cadrul Ministerului Industriei Grele, mai 1960.

[2] Conservatoire des arts et métiers, Paris.

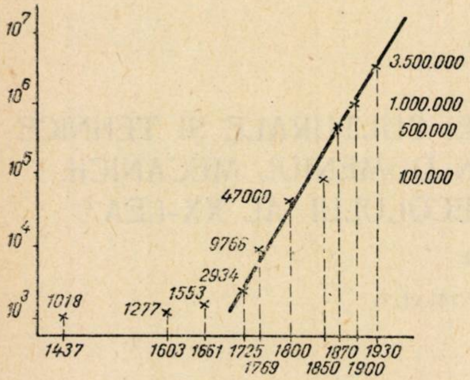


Fig. 1. — Numărul stelelor catalogate.

**Hipparque 130 (î.e.n.) 1 026, Ulugh Beigh 1 437 – 1 018, Tycho Brahe 1 603 – 1 277, Heyolius 1 661 – 1 553, Flamsteed 1725 – 2934, Lacaille 1 763 – 9 766, Lalande, Piazzi, Bessel 1800 – 47 000, Bessel, Argelander 1 850 – 100 000, Harta cerului 1870 – 500 000.**

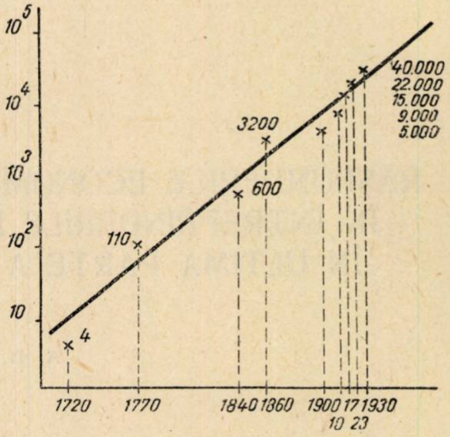


Fig. 2. — Mișcările proprii cunoscute ale stelelor.

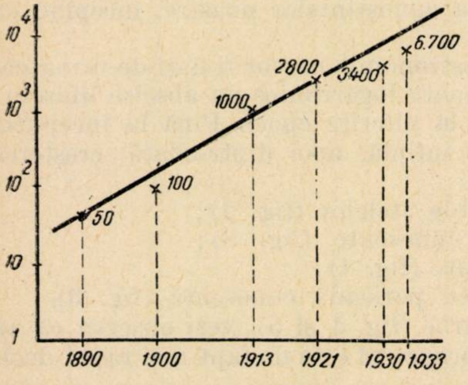


Fig. 3. — Numărul vitezelor radiale cunoscute.

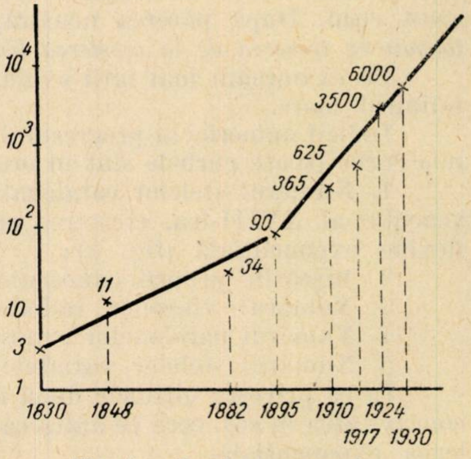


Fig. 4. — Paralaxe cunoscute.

— Curba *6* are în vedere măririle. Lupa datează de la începutul secolului al XVII-lea. Pe la mijlocul secolului al XVIII-lea apar sistemele optice fără de corecție a abaterilor. La începutul secolului al XIX-lea, o dată cu lentilele speciale, cu corectarea abaterilor și cu creșterea puterii separatoare, se ating măriri de 1 500. Microscopul electronic din 1938—1939 ajunge pînă la 40 000. Astăzi ne apropiem de 100 000.

— Curba 7 arată evoluţia vitezelor posibile de deplasare a omului. Pînă la mijlocul secolului al XIX-lea viteza limită era aceea a calului.

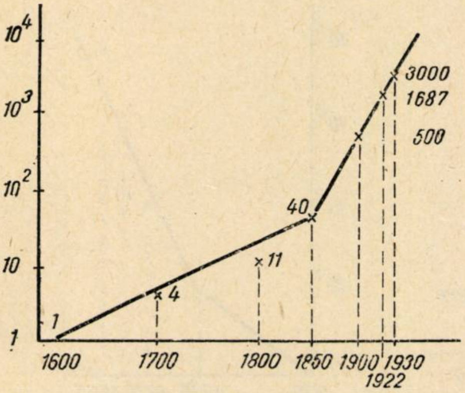


Fig. 5. — Numărul stelelor variabile cu perioadă cunoscută.

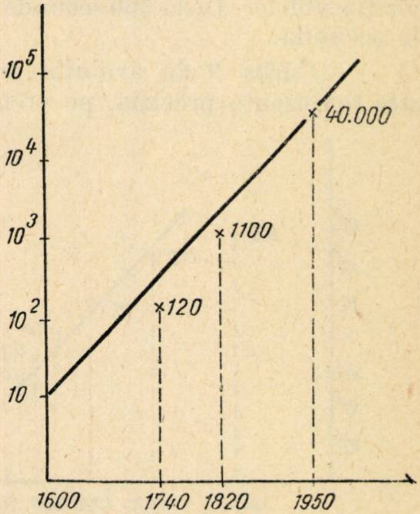


Fig. 6. — Evoluţia măririi instrumentelor de măsură.

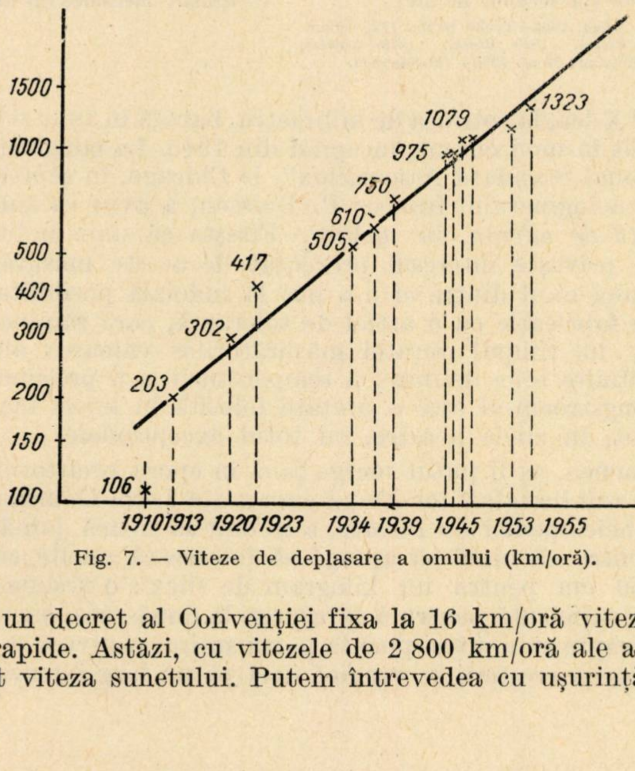


Fig. 7. — Viteze de deplasare a omului (km/oră).

În Franţa un decret al Convenţiei fixa la 16 km/oră viteza diligenţelor celor mai rapide. Astăzi, cu vitezele de 2 800 km/oră ale avioanelor, depăşim mult viteza sunetului. Putem întrevedea cu uşurinţă, pentru anii viitori, rachete cu pasageri, care să transporte ființe umane cu 20.000 sau 30 000 km/oră. În curînd, va fi destul o oră pentru a se face un larg ocol în jurul pămîntului.

— Curba *8* arată precizia cu care se va determina în decursul anilor, poziția stelelor. De la 600 secunde de arc în 1437, s-a ajuns astăzi la o miime de secundă.

— Curba *9* dă evoluția preciziilor în mecanică. De la milimetru, care reprezenta precizia, pe vremea lui James Watt, ajungem la sfîrșitul secolului al XIX-lea, la sutimea de milimetru, banală în 1930 și la micronul care este folosit în mod curent, începînd din 1945. La congresul organizat de „International Standard Association", la Chicago, în septembrie 1959, o comunicare a inginerului francez P. Buisson, a avut ca subiect *Măsurătorile la 1/10 de micron, în ateliere.* Firește că unii auditori au fost sceptici în ce privește interesul prezentat de aceste măsurători pentru ateliere, dar nici unul dintre ei n-a pus la îndoială posibilitatea clasării realizărilor de fabricație cu o astfel de toleranță, care rămîne adevărată, oricare ar fi, în timpul duratei măsurătorilor valoarea absolută, dar constantă în limite bine definite, a temperaturii și a presiunii. Se poate spune că și angstroem-ul este o unitate folosită în unele lucrări, numai că acestea sînt, în zilele noastre, cu totul excepționale.

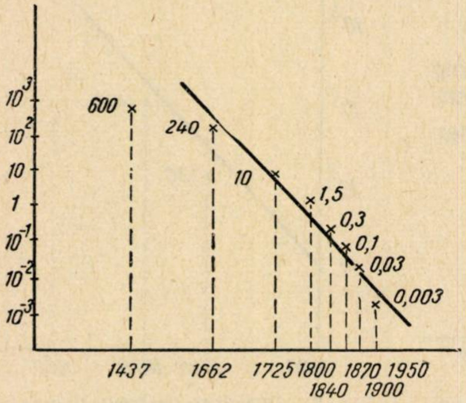


Fig. 8. — Precizia determinării poziției stelelor (în secunde de arc).

1437 – Ulugh – Beigh, 1602 – Tycho Brahe, 1725 – Flamsteed, 1800 – Piazzi, 1840 – Bessel, 1879 – Auwers, 1900—Newcomb Boss, 1930 – Van Mannen.

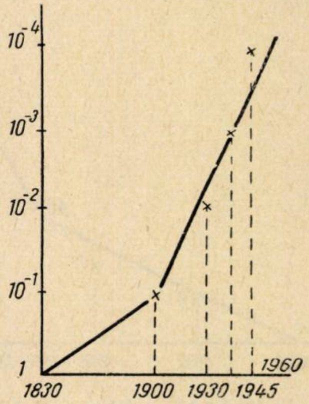


Fig. 9. — Evoluția preciziilor de uzinare mecanică (în milimetri).

De asemenea, aș fi putut merge pînă în epoca preistoriei în ceea ce privește progresul instalațiilor. După cum arată Leroi-Gourham în Istoria universală a enciclopediei *La Pléiade*, a trebuit să treacă jumătate din era cuaternară pentru ca omul să ajungă să folosească unelte cu o lungime de tăiș de 50 cm pentru un kilogram de silex : o șesime din aceeași durată a fost suficientă pentru a se ajunge la două sute, o zecime pentru a se ajunge la șapte sute și trei pînă la patru sutimi pentru a se depăși două mii. Aceeași lege a creșterii se verifică deci pe un larg interval de timp.

Producţia a urmat şi ea această lege exponenţială şi pentru a o caracteriza, am luat ca exemplu producţia mondială de energie şi de oţel.

— Curba *10* dă în ordonate logaritmice producţia anuală mondială în miliarde de kW/oră.

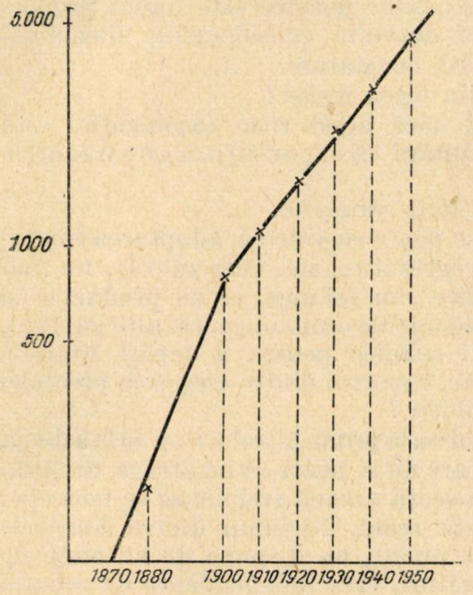


Fig. 10. — Producţia mondială de energie (în miliarde de kW/h).

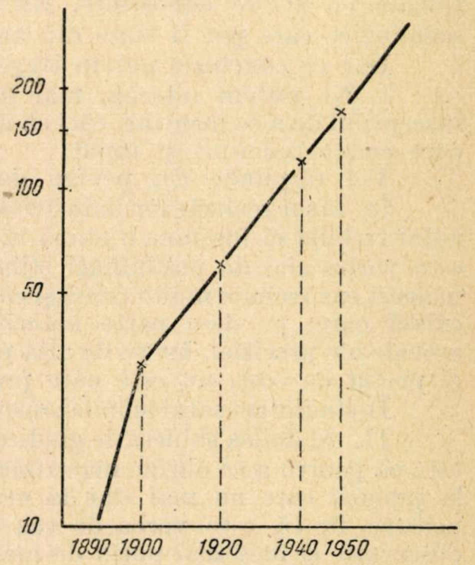


Fig. 11. — Producţia mondială de oţel (în milioane de tone).

— Curba *11* dă evoluţia producţiei anuale mondiale de oţel. Şi aici evoluţia este exponenţială. Este de semnalat că consumul mondial de oţel reprezintă ca greutate 95 % din consumul total de metale utilizate; acest lucru dovedeşte că producţia altor metale urmează aceeaşi lege.

★

Aşadar, în domeniile cunoaşterii, realizărilor şi trebuinţelor, legile de dezvoltare iau forma următoare.

$$Y = Ae^{k(t-t_0)}$$

unde $Y$ este caracteristica studiată, $e$ este baza logaritmilor neperieni, $A$ şi $k$ sînt două constante, $t$ este timpul şi $t_0$ este timpul origine al legii exponenţiale.

Atrag atenţia, înainte de toate, asupra comparaţiei dintre legea liniară

$$Y_1 = C_0 + C_t (C_0,\ C \text{ constante})$$

şi legea exponenţială

$$Y_e = Ae^{k(t-t_0)}.$$

Să luăm derivatele $\dfrac{dY_1}{dt} = C \qquad \dfrac{dY_e}{dt} = kY_e.$

Aceste două relații arată că pînă în veacurile XVII și XVIII *creșterea instantanee a cunoștințelor, realizărilor sau trebuințelor era o constantă. De la această epocă și pînă în zilele noastre această creștere instantanee este proporțională cu valoarea în același moment a caracteristicii studiate.*

Cu alte cuvinte, creșterea cunoștințelor noastre este direct proporțională cu aceste cunoștințe. Nu voi dezvolta considerațiile filozofico-sociologice care pot fi trase din această constatare.

Dar ce concluzie putem trage din legea însăși?

I. Ne putem întreba, mai întîi dacă acest ritm exponențial este susceptibil de a se menține, căci să nu uităm că exponențiala este o funcție care crește indefinit și rapid.

Voi răspunde *da*, pentru domeniul științific.

În cazul realizărilor industriale se poate susține că adoptarea micronului trebuie să însemne o etapă în progresul tehnic. Într-adevăr, nu mai este vorba aici de posibilități științifice sau tehnice, ci de producție și în acest caz trebuie să intervină și considerațiile economice. Cu alte cuvinte, există oare, pe de-o parte necesități tehnice pentru a depăși limitele actuale ale preciziei, iar pe de altă parte, raportul dintre creșterea preciziei și prețul de cost, nu este oare prohibitiv?

În stadiul actual al tehnicii, răspund *nu* la prima întrebare, și *da* la a doua.

II. Al doilea subiect de gîndire, care nu se poate să nu atragă atenția, este că pentru a se obține materiale la scara umană trebuie să se facă apel la precizii care nu mai sînt la această scară. Niciunul dintre simțurile noastre, fie că este vorba de văz sau pipăit, nu dispune de un cîmp de observație și încă mai puțin de măsurători, care independente de ecuația personală a observatorului (și aceasta variabilă de la individ la individ) să-i poată permite să ducă la bun sfîrșit o anumită operație.

Acest fenomen de schimbare de scară, ale cărui consecințe științifice Henri Poincaré le-a scos în mod atît de remarcabil în evidență, impune în acest caz o evoluție imperioasă a mijloacelor noastre de control. Dezvoltarea armonioasă a progresului științific ne-a pus din fericire la îndemînă, datorită electronicii, mijloace de percepere, de măsură, deci de control, la scara dorită.

În concluzie, iată de ce este vorba :

— să producem cît mai mult, pentru a satisface nevoile crescînde ;

— dar și să producem la prețuri de cost cît mai scăzute, pentru a satisface aspirația legitimă a ridicării standardului de viață.

Trebuie, așadar, neapărat :

— să se înlăture tot ce este inutil, cu alte cuvinte, un mecanic să elimine timpii morți, cînd este vorba de timpul de montare sau de demontare, timpii de trecere de la o operație la alta, timpii de înlocuire a sculelor, timpii de control și încă, mai ales, timpul de manipulare ;

— să se mărească vitezele de prelucrare ;

— să se evite rebuturile datorite fie omului, fie mașinii.

Aceste trei imperative se numesc, respectiv :

— Productivitate
— Cercetare tehnică
— Automatizare.

Înainte de a merge mai departe, aş vrea să răspund la o întrebare pe care fireşte că şi-o pune fiecare. S-a reuşit, oare, vreodată în aceste domenii?

Nu voi aborda cercetarea ştiinţifică : sîntem îndeajuns de informaţi pentru a cunoaşte considerabilele, imensele progrese făcute în ultimii cincisprezece ani.

Voi sublinia numai, prin două exemple, progresele productivităţii şi ale bunăstării sociale.

Dacă industria de automobile s-ar găsi obligată să construiască în 1960 automobile cu maşini din 1908, dar cu salarii din 1960, un astfel de automobil, dacă ar putea fi fabricat, ar costa circa 68 000 de dolari, adică de 34 de ori preţul actual. Cîte automobile s-ar putea vinde în cazul acesta şi mai ales, ar fi oare vreo posibilitate de a folosi mîna de lucru în această industrie de automobile pe tot globul?

★

Nu am pretenţia să schiţez aici studiul problemelor privitoare la productivitate, cercetare tehnică sau automatizare, care ar avea nevoie, fiecare, de lungi dezvoltări.

Dar, după ce am arătat că studiul problemelor industriale ale viitorului este legat în mod necesar de consideraţii economice, îmi voi consacra ultima parte a acestei lucrări studierii preţului de cost în funcţie de serie.

Mai întîi de toate, ce trebuie să înţelegem prin cuvîntul *serie*? Răspunsul este mai greu de dat decît s-ar crede. Dl. de la Palisse ar spune că o operaţie este în serie, atunci cînd nu este unitară. Această problemă a definiţiei ne face să ne gîndim imediat la aceea pe care şi-o puneau filozofii antichităţii care se întrebau, începînd de la cîte unităţi, o acumulare de grăunţe de nisip sau de boabe de grîu constituie o grămadă de nisip sau de grîu? Pentru noi, noţiunea de serie, în civilizaţia industrială a secolului al XX-lea, implică două noţiuni esenţiale : *număr* şi *interschimbabilitate*.

Conceptul de număr, legat de serie, este în mod esenţial, funcţie de natura obiectului manufacturat. Variaţia poate fi considerabilă pentru acest prim factor determinant al seriei.

Noi mai credem că nu poate să existe serie, dacă nu există interschimbabilitate în ce priveşte elementele care compun un ansamblu şi care asigură, în consecinţă, în limitele de toleranţe bine definite de la început, dar şi ele variabile, la rîndul lor, posibilităţile de a monta în lanţ subansambluri, apoi ansambluri complete, şi asta oricare ar fi complexitatea obiectului final.

Dăm astfel, următoarea definiţie a lucrării în serie : *Există lucrare industrială în serie, dacă producţia este organizată în vederea fabricaţiei într-un răstimp, evident cît mai redus posibil, a unui număr îndeajuns de mare, dar variabil, de la un tip la altul, de obiecte manufacturate, ale căror părţi constitutive sînt interschimbabile.*

Am spus ,,un răstimp cît mai redus posibil'', ceea ce face să intervină de îndată noţiunea de ,,cadenţă'' pe care o cunosc bine toţi inginerii din producţie.

Noțiunea de interschimbabilitate, esențială pentru noi, implică în mod automat pe aceea de *normalizare*, normalizarea materiilor prime, absolut capitală, normalizarea tuturor utilajelor și în sfîrșit normalizarea unităților de măsură. Va trebui să mai treacă vreo cîțiva ani pînă ce admirabila muncă de normalizare dimensională, făcută de Convenție la sfîrșitul secolului al XVIII-lea, să îmbrace caracterul mondial, la care aspira acea adunare.

Dar, dacă știm acum, într-o oarecare măsură, ce este seria, să vedem ce este *seria mare*. Anticipînd asupra celor ce vom arăta cu privire la relațiile dintre prețul de cost și serie, vom spune că *avem serie mare cînd creșterea numărului de obiecte care caracterizează seria nu are decît o influență foarte slabă, dacă nu chiar neglijabilă, asupra prețului de cost.*

Această definiție cere ca numărul *n* de obiecte ale seriei să fie îndeajuns de mare.

Care sînt ordinele de mărime ale acestui număr *n* caracteristic seriei, variabil de la o industrie la alta, variabil de la țară la țară, sau de la continent la continent? Nu voi da decît vreo cîteva exemple.

— Pentru locomotivele de toate tipurile, ordinul de mărime în perioada normală, este identic în țările producătoare și anume cîteva zeci de fiecare lansare;

— Pentru mașini-unelte, identitatea este tot atît de bine verificată și este de ordinul sutelor la întreprinderile constructoare mari (cu excepția uzinei de strunguri paralele ,,Krasnîi proletarii'' din Moscova, unde lansările sînt de cîte cinci sute sau o mie de unități);

— Pentru avioane, în afară de perioadele de război, trebuie avută în vedere suta de unități;

— Pentru automobile, ordinul de mărime este de zece mii cu disparități mai mult sau mai puțin mari. În Statele Unite, la Ford, de pildă, cadența zilnică este de 4 000, în timp ce în Franța, la Renault, cadența atinge 2 000 ,,Dauphine'';

— Pentru mașini de scris, ordinul de mărime este tot la zece mii;

— Pentru mașini agricole, cadența este de ordinul a 250 pe zi de opt ore și lansările se fac în serii de circa cinci mii;

— Pentru fabricarea sticlăriei (sticle, pahare, flacoane) seria este caracterizată prin milioane de unități.

Să oprim aici exemplele, insistînd numai asupra faptului că în cazurile bunurilor de investiție, numerele ce caracterizează seria sînt infinit mai puțin ridicate, bineînțeles în timp de pace, decît seriile bunurilor de consum. Luînd chiar cazul automobilelor și tractoarelor, nu găsim nici un factor comun, de pildă, între cele 2 sau 4 000 de automobile sau cele 250 de tractoare produse pe zi și cele 125 000 de perechi de încălțăminte produse zilnic de o uzină americană sau cele 25 000 de perechi pe zi, ale uzinelor elvețiene, germane, engleze sau franceze, sau producția zilnică de sticle de care am pomenit mai sus.

Aș vrea să fac aici o paranteză. Adesea tehnica intrînd în joc în producția bunurilor de instalații și utilaje care depinde în cea mai mare parte de teorii ale elaborării de energie, este de fapt stabilizată (hidraulică, termică, tehnica curenților tari). Îmbunătățirile își vor face drum cu mult mai mult în sensul sporirii randamentelor și a puterilor masice unitare, decît printr-o intervenție revoluționară, cu excepția, totuși, a folosirii directe a energiei nucleare.

De ce să eşalonăm, atunci, la infinit, de la țară la țară, puterea cazanelor, motoarelor Diesel sau alternatorilor, de pildă. De ce să nu normalizăm cu bună ştiinţă, gamele de puteri și astfel, sporind seriile, să facem să scadă prețul de cost? Aş vedea foarte bine o repartiție mondială a producției, care ar necesita desigur, nu-mi fac iluzii, numeroase conferințe inginereşti urmate de şi mai multe conferințe economico-politice. Dar nu se spune, oare, că nu este neapărat nevoie să speri, pentru ca să întreprinzi ceva?

Există, pe de altă parte, alte bunuri de instalații și utilaje, care sînt într-o constantă evoluție, iar printre acestea maşinile-unelte pentru metale constituie, poate, exemplul tipic. Mă voi opri puțin aici. Mai întîi, contrar celor ce s-ar putea crede, tehnica maşinilor-unelte nu este deloc stabilizată. Ea este condiționată esențial, și mai mult decît alte tehnici mecanice, atît de progresele metalurgiei aliajelor şi ale tratamentelor termice, cît şi de acelea ale teoriei servomecanismelor. De asemenea, este foarte influențată de întreaga evoluție a igienei muncii care, analizînd mult mai bine mişcările manuale impune adevărate cicluri de deplasări ale lucrătorului. Ea este prima care integrează progresele realizate în comenzile la distanță, fie hidraulice, fie electromagnetice, fie electronice, punîndu-le în relație directă cu toate disciplinele teoriei informației. În sfîrşit, ea urmează legea evoluției esteticii formei și chiar a culorilor.

În organizarea acestei industrii, ar trebui să se încerce *a se crea seria*, printr-o colaborare strînsă a constructorilor și a celor ce o utilizează, reducînd la minimum eşalonarea puterilor și a capacităților, deci numărul de tipuri de mașini, așa-zise ,,universale".

Dar iată că din nenorocire evoluția trebuințelor pe care le-am analizat la începutul acestei lucrări, impune o tendință irezistibilă, care rezultă adesea mai de grabă din intuiție decît din analiza metodică a necesităților de producție. Şi această tendință nu este altceva decît folosirea nu a mașinilor universale, ci a *mașinilor speciale adaptate la producția automată a unei piese date.*

★

*Așadar, cu cît trebuințele producției în serie vor fi mai ridicate, cu atît mașina-unealtă, instrument de bază al acestei producții, se va îndepărta de serie pentru a se specializa.*

Dar complexitatea mai mult sau mai puțin mare a piesei de realizat, adică numărul mai mult sau mai puțin mare de operații diferite, duce fie la elaborarea unor mașini care necesită un element motor care să antreneze un număr de utilaje anume adaptate acestor operații și acestea sînt *mașinile speciale*, al căror ultim stadiu îl constituie *mașinile-transfer*, fie la automatizarea completă a unei mașini universale care va realiza un ciclu complet de operațiuni de aceeași natură, cu un autocontrol al operațiunilor succesive; acestea sînt *mașinile cu cicluri* automate, ca strungurile pentru copiat, mașinile de rectificat, strungurile revolver, strungurile cu scule multiple, frezele, mașinile de tăiat roți dințate cu ciclu automat și forma cea mai completă, mașina universală de punctat, de alezat, de lamat, de găurit, de filetat, cu *program ciclic*.

Este evident, că mașina specială sau mașina-transfer trebuie în mod imperios, pentru a avea un bun coeficient de utilizare, să realizeze o serie minimă de piese, acest număr fiind superior în general minimelor rentabile ale mașinilor cu ciclu automat, care au un preț de cost în general mai scăzut.

Dar și unele și celelalte trebuie să elimine timpii morți, să reducă oboseala muncitorului și, evident, să scadă prețul de cost, din ale cărui elemente unul este, să nu uităm, amortizarea.

În sfîrșit, nu mai poate fi vorba, chiar în ceea ce privește seriile mijlocii sau mici, de a opera prin control după fiecare operație. Controlul trebuie să fie, după academicianul francez André Leaute, ,,operator'', adică instantaneu. Nu mai poate fi cazul de a insera verificări dimensionale în fazele de fabricație, cu oprirea prelucrării, ci a opera prin conlucrarea constantă a aparatelor de control la fabricarea însăși a pieselor.

Pentru aceasta este nevoie de un agent care să poată transmite instantaneu ordinele mașinii, fără fenomen de pompaj, adică de răspuns oscilatoriu. Acest agent de transmisie, în mod practic fără inerție și a cărui viteză de răspuns este de ordinul vitezei limită utilizabilă, și anume de viteza luminii, îl avem de aproximativ 15 ani — acesta este electronul. De aici dezvoltarea controlului și transmisiilor de ordine pe cale electronică.

★

Punînd capăt acestei digresiuni asupra mașinilor-unelte, să ne întoarcem la prețul de cost. Vom expune, pe scurt, concluziile a aproximativ 30 de ani de lucrări și studii personale, urmărite printr-un concurs fericit de împrejurări în multe țări și în condiții foarte diferite.

Să amintim, pe scurt, că prețul de cost al unui obiect manufacturat oarecare se compune din următoarele elemente :

— materii prime,

— accesorii cumpărate din afară,

— costul mîinii de lucru (prelucrare și montare),

— cheltuieli de fabricație propriu-zisă (forță motrice, diverse ingrediente, consum de utilaj, mînă de lucru neproductivă—ca muncitori necalificați —, tehnicieni, ingineri și întreținere),

— cheltuieli generale fixe și proporționale (primele luînd în epoca noastră o importanță din ce în ce mai mare),

— cheltuieli financiare și de amortizare și în special pentru seria mare, amortizările de scule specializate și mașini speciale de transfer prevăzut pentru o piesă dată sau pentru montaje.

Nu voi discuta în amănunt influența fiecăruia din acești factori, nici teoretic, nici potrivit rezultatelor experimentale. Voi enunța chiar de pe acum legea fundamentală care rezumă studiile pe care le-am întreprins.

*Factorul preponderent al prețului de cost al unui obiect manufacturat pentru o uzină bine organizată nu este altul decît numărul de unități al seriei. Dependența este aceea a unei funcții hiperbolice,*

$$y = a + b/x_n$$

*în care* $y$ *reprezintă prețul de cost al unei serii* $x_n$ *compusă din* $n$ *obiecte :* $a$ *și* $b$ *sînt două constante relative la fabricația considerată.*

Spre a se putea compara legile prețului de cost am normat curbele, adică au fost stabilite curbele plecînd nu de la prototip, ci de la seria 1

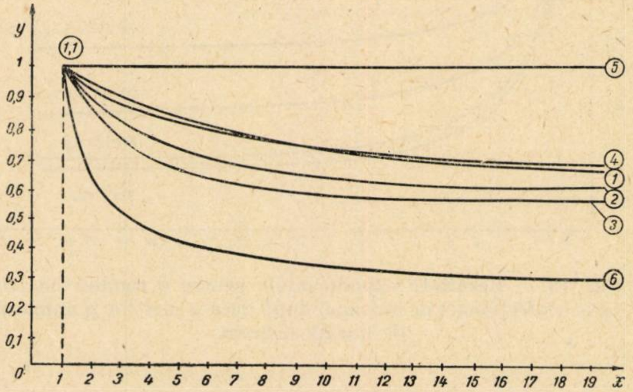


Fig. 12. — Rezultate experimentale, arătînd prețul de cost $y$, funcție de ordinul seriei de lansare.

care poate cuprinde $n$ aparate, $n$ fiind variabil cu tipul de obiect fabricat și s-a luat

$$y = 1 \text{ pentru } x = 1.$$

Figura 12 dă curbele pentru următoarele industrii :

— curba *1* : locomotive cu aburi, serie mică;

— curba *2* : mașini-unelte în serii de 30. Asimptota apare la seria a 10-a ;

— curba *3* : motoare cu benzină ;

— curba *4* : fabricarea automobilelor-cadență : pe zi de 8 ore ;

— curca *5* : fabricarea de sticlărie, care formează o paralelă cu axa absciselor, fapt asupra căruia vom reveni mai departe ;

— curba *6* : fabricarea de buloane. Este vorba aici de o curbă care dă rezultatele întregii branșe. Aici influența seriei este considerabilă și acest lucru nu trebuie să ne surprindă dacă ne amintim că seria este de ordinul a 100 de bucăți, de unde și influența considerabilă a utilajului și a timpilor morți. Se poate examina fabricația diferitelor buloane : se obține rețeaua de pe figura 13.

Studiind în special fabricarea de mașini-unelte de un același tip, am putut pune în evidență influența adaptării unei uzine la o producție specializată. Curba *1* de pe figura 14 dă evoluția prețului de cost al unei mașini-unelte, pornind de la prima serie. Curba *2* arată evoluția, pornind de la prima serie a unei mașini-unelte de același tip, dar cu caracteristici tehnologice mai slabe. Lansarea și prelucrarea au beneficiat nu numai de toate îmbunătățirile fabricației primei mașini, dar și de adaptarea mîinii de lucru. Cu alte cuvinte, curba *1* este a unei tehnici în dezvoltare, iar curba *2* a unei tehnici avansate.

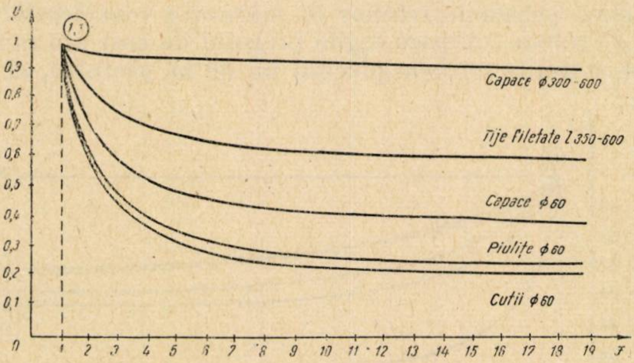


Fig. 13. — Rezultate experimentale pentru o ramură (matrițare, confecționare de buloane) după natura pieselor și numărul de bucăți elaborat.

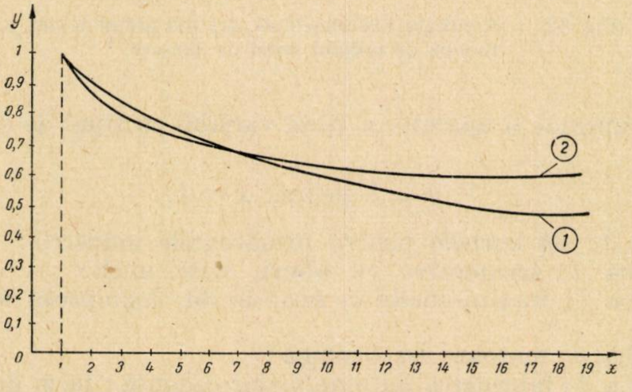


Fig. 14. — Prețul de cost experimental funcție de serie, pentru o tehnică în dezvoltare (*1*) și o tehnică avansată (*2*).

Să considerăm acum (fig. 15) fasciculul de hiperbole $y(x_n)$ atunci cînd $a$ variază. Curbele superioare cu asimptotă ridicată ($a = 0{,}90 - 0{,}8 -$ $- 0{,}7$) corespund unor industrii stabilizate, care sînt departe de prototipul revoluționar. Dimpotrivă, curbele cu asimptote joase ($a = 0{,}1$ la $0{,}6$) se referă la tehnici în mai mare sau mai mică evoluție.

Pe figura 15, începînd de la punctul (*1*, *1*) care corespunde seriei de bază sau prototipului, potrivit industriilor de care ne ocupăm, am tras o dreaptă oblică $\Delta$ ce separă fasciculul în două regiuni. La dreapta, variaţia preţului de cost este slabă ; la stînga este apreciabilă, dacă nu chiar considerabilă. *Această dreaptă caracterizează, după părerea noastră, separaţia între seria mică sau mijlocie şi seria mare.*

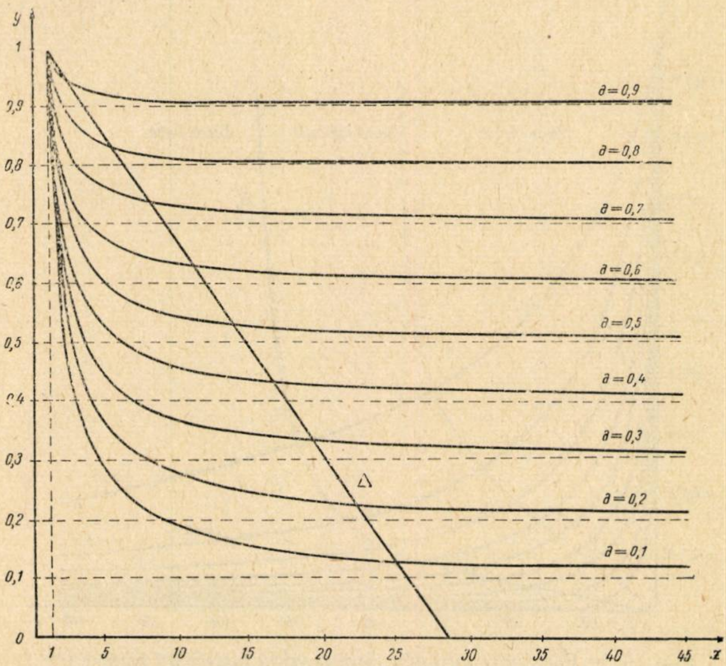


Fig. 15. — Curbele de variaţie ale preţului de cost în funcţie de seria $Y = a + b/x_n$ $(a + b) = 1)$.

Ea trebuie să fi ieşit, în orice caz, din punctul (*1*, *1*), deoarece curba $Y = a = 1$, corespunzînd lui $b = 0$, se referă la industria ajunsă la stadiul final al fabricării în serii foarte mari, ţinînd seama de stadiul actual al progresului tehnic. Este cazul pe care l-am găsit în ce priveşte industria sticlelor (curba *7* de pe figura 12).

Să cercetăm acum industriile de *serie foarte mare*. Legea fiind aceeaşi

$$y = a + b/x$$

curbele fiind normate (adică $y = 1$ pentru $x = 1$, deci $a + b = 1$) să căutăm procentul de cîştig atunci cînd se trece de la seria $x$ la seria $\lambda x$ (cu $\lambda \gg 1$) ; găsim

$$g(a, x) = 100\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\Big/\left(1 + \frac{ax}{1 - a}\right).$$

Dacă punem $100\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) = A$, fasciculul de curbe $g(a, x)$ este un fascicul de hiperbole care, neputînd fi considerate decît în intervalul $0 \leqslant x$ şi $0 < a < 1$, este cuprins între axa coordonatelor ($\lambda = 1$) şi cele două drepte $g = 0$ (pentru $a = 1$) şi $g = A$ pentru $a = 0$. Funcția $g(a)$ pentru

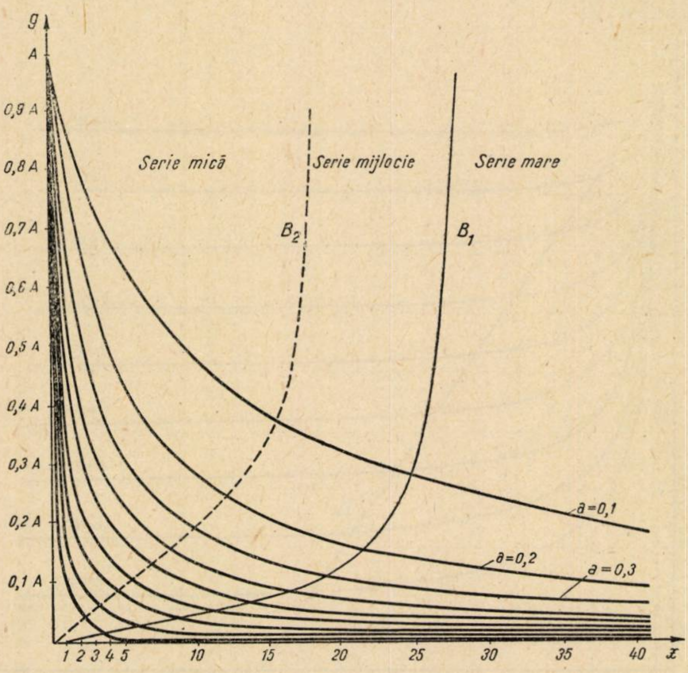


Fig. 16. — Fasciculul curbelor reprezentînd beneficiul asupra prețului de cost cînd se trece de la seria $\lambda$ la seria $\lambda x$ (în procente) $A = 100\left(1 \frac{1}{\lambda}\right)$.

$x$ dat este o funcție omografică, ce descreşte în regiunea dată, ori de cîte ori creşte $a$ de la 0 la 1. Valorile lui $A$ sînt respectiv

50 pentru $x = 2$
66,6 „ „ $= 3$
75 „ „ $= 4$
80 „ „ $= 5$
90 „ „ $= 10$
95 „ „ $= 20$

Toate aceste curbe pornesc din punctul $A$, dar nu ne interesează decît începînd de la ordonata $x = 1$. Am trasat curba $B_1$ transformată pe acest grafic (figura 16) din dreapta $\Delta$. Regiunea dreptei corespunde mai departe seriei mari. Se vede îndată că cu cît industria este mai evoluată şi de serie mare (curbele inferioare), cu atît va fi mai mic cîştigul corespunzător creşterii acestei serii; acesta poate fi considerat chiar neglijabil. Astfel, pentru $a = 0{,}8$ înmulţirea cu 2 a seriei, nu ne va procura decît un cîştig de maximum 1,5 % pentru $x$ de ordinul 8. Pentru o industrie mai puţin evoluată $a = 0{,}5$ cîştigurile respective unei multiplicări a numărului de bază al seriei vor fi mai importante.

De altfel, putem căuta creşterea $\lambda$ a seriei care procură un cîştig dat în procente şi care nu este altul decît

$$\lambda = 1 \Big/ \left[1 - \frac{g}{100}\left(1 + \frac{ax}{1-a}\right)\right].$$

Aceste observaţii cu privire la industria de serie mare, duc la concluzia că în acest caz, o schimbare de utilaj trebuie privită cu mare prudenţă, o astfel de schimbare putînd totuşi spori producţia.

În cele din urmă, pe graficul de pe figura 16, am trasat o altă curbă, curba $B\,2$, care poate caracteriza regiunea seriei mijlocii.

★

Ce concluzii trebuie să tragem din consideraţiile succinte, pe care le-am dezvoltat mai sus?

Prima este, că faţă de ritmul accelerat al trebuinţelor, căruia îi poate face faţă foarte bine ritmul constatat al evoluţiei tehnico-ştiinţifice, este necesar să facem o alegere a investiţiilor, spre a asigura stabilitatea şi regularitatea ritmului de creştere a producţiei. O investiţie poate fi considerată slabă, dacă preţul de cost al producţiei suplimentare este independent de importanţa investiţiei. Acest considerent ne dă un al doilea criteriu de alegere. Este vorba aici de deosebirea dintre investiţiile de înlocuire sau de expansiune şi investiţiile de modernizare, destinate prin esenţa lor să scadă costul producţiei.

★

Acei care au sarcina de a hotărî în domeniul economic trebuie să facă faţă unor mari răspunderi. Pe lîngă orientarea investiţiilor, este necesar să ţină seama şi de o serie de considerente de ordin tehnic.

Fie că este vorba de cunoştinţele umane de stăpînirea energiilor naturale vizibile sau invizibile, sau de transformarea materiei pentru trebuinţele zilnice ale omului, savanţii şi inginerii au realizat minuni, care în anul 1800 nici nu puteau fi bănuite.

Toţi acei care au răspunderi faţă de umanitate trebuie să se gîndească în fiecare zi la viitorul omului, căci ţinînd seama de viteza actuală a progresului şi a expansiunii, problemele de mîine, chiar cele de poimîine sînt de fapt problemele zilei de azi.

Sînt sigur că printr-o colaborare loială a savanţilor, inginerilor şi tehnicienilor, pe plan mondial, orice sentiment de uimire sau de întrebare pe care l-ar putea avea cineva în faţa creşterii exponenţiale, vertiginoase a cunoştinţelor şi a mijloacelor noastre de producţie, va fi înlocuit cu un sentiment de securitate şi încredere, ca urmare a micşorării muncii umane, alăturată creşterii productivităţii şi a buneistări generale.

# RECENZII

**D. TUTUNARU**, *Teoria mecanismelor și mașinilor. Mecanisme cu came*. Ed. tehnică, București, 1959, 335 p.

Dintre diferitele mecanisme cu elemente rigide, mecanismele cu came s-au remarcat prin avantajele lor, în special prin universalitatea mișcărilor și simplitatea construcției, situație recunoscută de mult timp în construcția de mașini, cît și prin folosirea pe scară din ce în ce mai largă la mecanizarea sau automatizarea proceselor tehnologice. În această situație, editarea prezentei lucrări de către Ed. tehnică ca parte integrantă din ciclul *Teoria mecanismelor și mașinilor* la un nivel științific corespunzător tehnicii actuale, cu probleme de teoria, proiectarea, executarea și exploatarea mecanismelor cu came din diferite construcții, constituie un ajutor prețios studenților, proiectanților și inginerilor și umple un gol în literatura noastră științifică, care nu a posedat o astfel de lucrare pînă în prezent.

Lucrarea începe cu clasificarea mecanismelor cu came din diferite puncte de vedere și tratează amănunțit mecanismele înlocuitoare cu cuple inferioare, în special înlocuirea cuplei superioare dintre tachet și camă printr-un element rigid cu două cuple de rotație sau una de rotație și una de translație. Aceasta permite direct aplicarea simplă a metodelor poligoanelor de viteză și de accelerație în analiza mecanismelor respective. Analiza mecanismelor cu came este tratată și prin metodele analitice, grafoanalitice și a diagramelor cinematice cu avantajele și particularizările respective.

Sinteza mecanismelor cu came s-a bucurat de asemenea de o atenție deosebită din partea autorului, fiind considerată de primă importanță pentru proiectanți. Aici s-a luat în considerare impunerea legilor de mișcare pe porțiunea activă a camei, conform procesului tehnologic, mergîndu-se de la legea de mișcare liniară cu viteză constantă la legile parabolice și sinusoidale, arătîndu-se influența și necesitatea racordărilor la profilurile compuse pentru eliminarea șocurilor tari și elastice. S-au tratat comparativ și întrebuințarea curbelor simple (arce de cerc) care aproximează legile teoretice dar care simplifică calculul și execuția camelor. În afară de considerarea legilor de mișcare s-a urmărit proiectarea și față de condițiile unghiului de presiune, care pe de o parte trebuie mărit pentru reducerea dimensiunilor de gabarit, iar pe de altă parte trebuie micșorat pentru evitarea autoblocării. Întrebuințarea acestor condiții s-a făcut fie prin prescrierea directă a unui unghi de presiune critic, fie prin cercetarea sistemului de forțe cu frecare ce iau naștere asupra tachetului, fie de asemenea prin considerarea randamentului mecanismelor cu came, dîndu-se atît soluții analitice cît și grafice pentru determinarea razei minime.

Partea a II-a a lucrării se ocupă de mecanisme cu came spațiale, dezvoltînd teoria curbelor respective și urmărind analiza și sinteza mecanismelor după aceleași criterii ca și la cele plane, secțiunea fiind încadrată și de diferite cazuri particulare.

MŰSZAKI EGYETEM

În secțiunea a III-a se găsesc date tehnologice și constructive privind mecanismele cu came, cu aplicații la construirea camelor pentru diferitele programe ale mașinilor automate. Autorul a întrebuințat în elaborarea lucrării ultimele publicații ale specialiștilor sovietici precum și lucrări din R.P.R. și R.D.G. și se remarcă de asemenea contribuția sa originală. Lucrarea se înscrie pe linia celor similare din străinătate ocupîndu-se în principal de partea cinematică a mecanismelor cu came. Astăzi însă cînd se caută imperios mărirea productivității mașinilor, ridicarea vitezelor de lucru pune probleme deosebit de complexe în dinamica acestor mecanisme. O completare în acest sens ar fi mărit mult volumul lucrării, dar va fi bine venită pe această linie o publicație viitoare a autorului.

În afara unor puține greșeli, prevăzute într-o scurtă erată, lucrarea este editată în bune condiții și este de mare ajutor în activitatea specialiștilor care lucrează în exploatarea, în proiectarea sau în problemele științifice ale mecanismelor cu came.

*Chr. Pelecudi*

N. I. MANOLESCU și D. MAROȘ, *Teoria mecanismelor și mașinilor. Cinetostatica și dinamica.* Ed. tehnică, București, 1958, 476 p.

Lucrarea constituie unul din cele patru volume ale seriei *Teoria mecanismelor și mașinilor* scoase de Editura tehnică și dezvoltă două părți importante ale acestui domeniu. Este vorba în prima parte de cinetostatica mecanismelor, care bazată pe principiul echilibrului D'Alembert, cuprinde metodele practice pentru diferite mecanisme în scopul determinării forțelor necunoscute ca: reacțiunile în cuplele cinematice, forțele de frecare, forțele de echilibrare. În partea doua a *dinamicii mașinilor* sînt cuprinse problemele importante despre legile de mișcare a mecanismelor, randamente, reglarea mașinilor precum și echilibrajul mașinilor.

Astfel lucrarea începe printr-o expunere vectorială a reducerii forțelor de inerție în mișcarea generală și particulară a unui element, avînd ca problemă principală dezvoltarea procedeului uzual în studiul mecanismelor de înlocuire a masei distribuite prin mase concentrate, cu o analizare largă a posibilităților respective. Acest procedeu ușurează determinarea reacțiunilor, ceea ce se face mai întîi fără considerarea frecării în capitolul al doilea al lucrării. Aici se cercetează reacțiunile în grupele plane static determinate ale lui Assur (lanțurile cinematice cu $3n = 2C_5 + C_4$) și se expun soluțiile grafice, analitice sau grafoanalitice. Deși metodele sînt clasice autorii au căutat o aplicare simplă dar totodată detaliată și precisă. Capitolul este încheiat cu determinarea forțelor și momentelor de echilibrare în funcție de forțele și momentele cunoscute exterioare, inclusiv forțele și cuplurile motoare sau rezistente și de inerție, cu ajutorul principiului deplasărilor, care pus în legătură cu planul vitezelor rabatut constituie metoda ușor utilizabilă a *pîrghiei lui Jukowski*.

Înainte de a trece la determinarea reală a reacțiunilor în mecanisme, ținîndu-se seama și de frecări, capitolul al III-lea se ocupă de frecarea în mecanisme sub forma generală, de diagramele coeficienților de frecare prelucrate din bogata literatură sovietică și cu expuneri amănunțite despre frecarea uscată și semiuscată, în cuplele de translație și de rotație, la șuruburi și la mecanismele cu came. Și aici lucrarea nu se oprește numai la expunerile clasice, simplificate, ci tratează amănunțit cazurile reale. De asemenea, are meritul în continuare că față de alte lucrări similare străine cuprinde suficient de dezvoltată partea de frecare fluidă. Sînt expuse apoi frecarea de rostogolire, fenomenul de pseudoalunecare, frecarea la rulmenți și la transmisiile cu elemente flexibile. Înglobînd eforturile de frecare în rezistența tehnologică a mecanismului, se arată influenţa separată a acestora precum şi modul de calcul al reacţiunilor reale prin metode care utilizează în special avantajele unghiului de frecare şi a cercului de frecare.

Dinamica maşinilor începe prin considerarea legii energiei $W_m - W_r = E - E_0$ în mişcarea mecanismelor expunînd posibilităţile de uşurare a calculelor uzuale, prin obţinerea maselor şi momentelor de inerţie reduse la un punct sau element în mişcare simplă, precum şi a forţelor sau momentelor reduse egale şi de semn contrar cu forţele şi momentele de echilibrare. Deşi prezintă inconvenientul că aceste mărimi variază o dată cu poziţia mecanismului, ecuaţia energiei simplificată este mai adecvată studiului. După analiza fazelor de pornire, de regim şi de oprire se trece la bilanţul energetic şi apoi defalcîndu-se efectul frecărilor se introduce randamentul maşinilor. În cazul acestuia, lucrarea face o analiză adîncă de exemplu la roţile dinţate, la mecanismele planetare etc. şi prezintă dezvoltarea despre teoria randamentului mecanismelor liniare şi despre condiţiile de nereversibilitate. În continuare, sînt tratate diversele aspecte şi posibilităţi de rezolvare a problemelor legate de legile mişcării maşinii. Astfel sînt determinaţi parametrii cinematici ca : viteză unghiulară, timp etc. prin aplicarea fie directă a legii energiei, fie prin prelucrarea ecuaţiei de mişcare $I_{\text{red}} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dI_{\text{red}}}{d\varphi} = M_{\text{red}}$ dacă elementele sale sînt date fie în funcţie de timp ($t$), fie în funcţie numai de poziţia elementului de reducere ($\varphi$). De asemenea, sînt tratate cazurile cînd energia cinetică este redată în raport cu momentul de inerţie redus, sau cu viteza unghiulară şi la sfîrşit metoda lui N. E. Jukowski.

Neregularitatea mersului maşinii precum şi problemele legate de determinarea volantului fac obiectul capitolului următor, iar în capitolul IV se tratează reglajul mişcării maşinilor cu regulatoare cu acţiune în funcţie de derivata I şi a II-a, directă sau indirectă şi cu legături inverse. Sînt prevăzute problemele specifice de neregularitate, de instabilitate şi de insensibilitate.

Ultimul capitol, echilibrajul maşinilor, cuprinde probleme de echilibrare statică şi dinamică a corpurilor în rotaţie precum şi echilibrarea lanţurilor cinematice cu particularizările la mecanismul patrulater articulat şi bielă-manivelă, echilibrarea forţelor de inerţie de diferite ordine, a motoarelor cu mai mulţi cilindri, şi metodele experimentale respective.

Deşi problemele tratate sînt în general cunoscute, lucrarea are meritul unor completări faţă de altele similare cu ultimele rezultate ale lucrărilor din acest domeniu şi cu o prelucrare bogată, variată şi bine organizată. Prin conţinutul său ea este utilă tehnicienilor, studenţilor şi inginerilor.

*Chr. Pelecudi*

---

В. Н. ТРЕЙЕР, *Расчет деталей машин по предельным состояниям* (Calculul organelor de maşini după stările limită). Государственное издательство БССР, Редакция научно-техническо й литературы, Минск 1960; p. 254.

Dezvoltarea construcţiilor de maşini pune în faţa cercetătorilor şi proiectanţilor de maşini o serie întreagă de probleme printre care reducerea greutăţii maşinilor constituie una de primul ordin. Acest lucru se poate obţine pe de o parte, prin utilizarea unor materiale cu caracteristici mecanice superioare, iar pe de altă parte prin cunoaşterea condiţiilor reale de funcţionare a maşinilor care să permită o proiectare economică.

Elaborarea metodelor moderne de calcul care să ia în consideraţie stările limită, reprezintă una din problemele importante de care se ocupă cercetătorii din acest domeniu.

Lucrarea recenzată prezintă calculul unor organe de maşini pe baza stărilor limită.

În primele patru capitole se expune teoria generală a calculului organelor de maşini pe baza stărilor limită.

Astfel în capitolele 1 şi 2 se face o trecere în revistă a problemelor fundamentale ce se pun în cazul calculului organelor de maşini pe baza stărilor limită şi consideraţii asupra criteriilor de stabilire a acestor stări. În capitolul 3 sînt expuse elementele generale de calcul în diverse cazuri de funcţionare şi criteriile de stabilire a timpului de funcţionare programat. Capitolul 4 este mai dezvoltat şi cuprinde o analiză a metodelor de calcul a solicitărilor admisibile şi durabilitatea organelor de maşini cu luarea în consideraţie a distribuţiei tensiunilor în cazul încărcărilor statice şi dinamice. De asemenea se fac consideraţii asupra durabilităţii pieselor pe baza experienţelor de laborator sau de funcţionare experimentală în condiţii reale de lucru, precum şi aprecieri asupra metodelor statistice în cazul încercărilor de mare serie.

Celelalte capitole ale lucrării cuprind aplicarea teoriilor generale la calculul efectiv a unor organe de maşini (astfel în capitolul 5 sînt date metodele de calcul a îmbinărilor prin sudură nituire sau filet; în capitolul 6 calculul transmisiilor prin angrenaje de contact, iar în celelalte capitole se dau metodele de calcul ale axelor, arborilor, lagărelor cu rostogolire, cablurilor etc.).

Aspectul economic al problemelor de calcul a constituit o preocupare deosebită a autorului care rezervă tot capitolul 10 pentru analizarea lui. Se fac consideraţii asupra criteriilor de stabilire a reparaţiilor (numărul lor şi durata dintre ele) precum şi concordanţa dintre durata de serviciu stabilită prin calcul şi cea reală.

Prezentarea problemelor este făcută în mod logic, iar metodele de calcul expuse sînt temeinic fundamentate din punct de vedere ştiinţific.

Prin faptul că lucrarea cuprinde o serie întreagă de formule şi tabele comode de calcul poate fi utilizată cu succes de inginerii proiectanţi precum şi de cei ce lucrează în sectoarele mecanicului şef din uzină.

*P. Freund*

* * * *Труды института Машиноведения*; *Семинар по теории машин и механизмов* (Lucrările Institutului de maşini; Seminarul de teoria maşinilor şi mecanismelor). **XX**, *79*, Москва, 1960, 60 p.

În caietul 79 sînt cuprinse patru comunicări.

1. *Asupra alegerii legii de frînare a acţionărilor hidraulice* de N. I. Levitski şi E. A. Tuhanova.

În articol, se studiază procesul de frînare în cazul diferitelor acţionări hidraulice şi în special la liniile automate. Este pusă problema alegerii legii de frînare optime a sistemului din agregatele pentru acţionări hidraulice cuprinzînd în ansamblu o pompă nereglabilă cu supapă de siguranţă şi dispozitivele de inversare a mişcării şi de frînare, agregate ce sînt, în general, folosite la acţionările hidraulice ale sistemelor de transport în liniile automate, la maşinile de şlefuit etc.

Se arată că în general la frînare trebuie evitate şocurile care se produc tocmai printr-o alegere necorespunzătoare a timpului şi a legii de frînare.

Pe de altă parte, la alegerea legii de frînare, trebuie să se ţină seama şi de cerinţele procesului tehnologic în aşa fel ca frînarea să nu ducă la scăderea productivităţii maşinii.

În lucrare se insistă asupra acestor probleme de bază şi sînt date formule de calcul după care se poate aprecia modul cum trebuie modificată legea de frînare pentru a obţine pentru fiecare caz concret, caracteristicile optime de frînare, adică timpul $t_f$ şi puterea $N_f$.

Lucrarea este utilă atît în exploatare, cît și pentru proiectanții de mașini, pentru faptul că pune la dispoziție o metodă științifică referitoare la alegerea legii de frînare, problemă atît de des întîlnită în exploatarea și proiectarea tuturor tipurilor de mașini.

2. *Asupra alegerii legii de mişcare a tachetului mecanismelor cu came la presele şi automatele de forjare şi ştanţare*, de I. A. Miropolski.

Lucrarea cuprinde un studiu referitor la proiectarea mecanismelor cu came în vederea obținerii caracteristicilor dinamice optime, cît și o prezentare a unor procedee tehnologice destinate prelucrării camelor prin metoda cinematică. De asemenea, sînt date anumite rezultate experimentale referitoare la determinarea momentului desprinderii tachetului de pe camă și diagrame după care se pot determina turația critică a camei de un anumit profil în funcție de efortul din resortul tachetului.

Lucrarea este utilă pentru proiectanți și constructorii de mașini.

3. *Asupra teoriei maşinilor cu acţiune prin vibraţii produse prin şoc*, de A. E. Kobrinski, A. V. Şleahtin şi M. N. Iamşcikova.

În lucrare, autorii cercetează vibrațiile libere și forțate ale unui sistem elastic acționat de o masă $m$ în cădere liberă, sistem ce poate reprezenta modelul dinamic al unui oricare tip de mașină cu acțiune vibratorie produse prin șoc, cum ar fi mașinile de încercat prin șoc în laborator a diferitelor organe de mașini, mașini vibratorii utilizate în turnătorii, transportoare etc.

Se dau date de calcul referitoare la determinarea parametrilor regimurilor de mișcare, periodice care se produc la ciocnirea elementelor sistemului elastic și masa $m$. Într-un capitol aparte se analizează stabilitatea dinamică a regimurilor periodice de mișcare.

Rezultatele studiilor pot fi utilizate în mod direct la calculul și proiectarea sistemelor ce lucrează într-un regim vibratoriu produs prin șoc.

4. *O analiză generală a transmisiilor hidromecanice cu două canale*, de V. D. Arsenenko.

În lucrare sînt studiate transmisiile hidrodinamice care în ultimul timp iau o răspîndire din ce în ce mai mare în diferite domenii ale tehnicii. Transmisiile hidrodinamice (turbotransformatori, convertizoare hidraulice, turbomufe) sînt de obicei utilizate cuplate cu transmisiile mecanice, formînd împreună ceea ce se întîlnește sub denumirea de transmisie hidromecanică.

Autorul în studiul de față propune o metodă de calcul și proiectare a transmisiilor hidromecanice cu dublu curent, foarte simplă și practică.

Sînt date de asemenea diferite scheme de cuplare și o diagramă după care se pot determina turațiile relative ale elementelor transmisiilor hidromecanice cu dublu curent (cu două căi).

De asemenea este foarte important faptul că numărul formulelor după care se fac calculele pentru proiectarea unei astfel de transmisii este foarte mic și relativ simple, lucru ce face ca lucrarea să fie foarte utilă mai ales pentru proiectanții de mașini.

*L. Calmaciuc*

---

А. Н. ГАВРИЛОВА, *Приборостроение и измерительная техника* (Construcția de aparate și tehnica măsurătorilor). Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы, Москва, 1960, 426 p.

Prin folosirea pe scară largă a aparatelor și mijloacelor de automatizare moderne, se poate obține o mărire a eficacității utilajului industrial, o mărire a productivității muncii, reducerea prețului de cost și pe această bază o mărire apreciabilă a volumului producției în toate ramurile economiei naționale.

Pentru discutarea problemelor legate de introducerea automatizării în diverse sectoare industriale, s-a organizat în U.R.S.S. o consfătuire pe această temă.

În lucrarea recenzată sînt publicate 24 comunicări prezentate la această consfătuire.

În prima comunicare semnată de I. L. Loghinov se face o analiză a dezvoltării construcţiei de aparate în U.R.S.S.

Celelalte comunicări sînt grupate în 3 părţi :

Partea I este intitulată *Calculul şi construcţia* şi cuprinde o serie de comunicări ce analizează următoarele probleme : bazele calculului şi proiectării aparatelor de precizie, îmbunătăţirea caracteristicilor dinamice ale elementelor sensibile, folosirea rulmenţilor cu bile la aparatele giroscopice, consideraţii asupra funcţionării transmisiilor cilindrice utilizate la servomecanisme, mărirea eficacităţii aparatelor electromagnetice şi utilizarea traductorilor electronici pentru măsurarea mărimilor mecanice.

Partea a II-a este intitulată *Tehnologie şi calcul*, şi tratează următoarele probleme : utilizarea comenzilor cu program în construcţia de aparate, mărirea preciziei de prelucrare la strungurile automate şi lărgirea domeniului lor de aplicare, reducerea volumului de lucru la realizarea matriţelor, utilizarea ultrasunetelor, automatizarea şi mecanizarea proceselor tehnologice de executare a rezistenţelor cu fir variabil etc.

Partea a III-a se ocupă de problemele metrologiei şi tehnicii măsurătorilor.

Astfel sînt prezentate domeniile de utilizare a izotopilor radioactivi în tehnica măsurătorilor, probleme din domeniul defectoscopiei, aparate de măsură optico-mecanice pentru controlul dimensiunilor, metode moderne pentru măsurarea vibraţiilor, metode pentru măsurarea frecvenţei, metode pentru determinarea modulului de elasticitate în condiţii de temperaturi înalte etc.

Prin multitudinea problemelor discutate, lucrarea se adresează unui cerc larg de specialişti care lucrează în domeniul construcţiilor de maşini şi constituie un îndreptar preţios pentru stabilirea perspectivelor de dezvoltare a diverselor tipuri de aparate.

*P. Freund*

* * * *Исследования по теории сооружений* (Cercetări de teoria construcţiilor). **IX**, *сборник статей* (Culegere de articole), Гос. изд. лит. по строит. арх. и строит. маш., Москва, 1960, 304 p.

Al IX-lea volum al culegerii de teoria construcţiilor, apărut sub redacţia prof. A. A. Gvozdev, I. M. Rabinovici şi M. M. Filonenko-Borodici, cuprinde — ca şi volumele anterioare — numeroase studii, atît de statica, dinamica şi stabilitatea construcţiilor cît şi de teoria elasticităţii.

Unele din aceste cercetări sînt consacrate problemei grinzilor sau plăcilor pe mediu elastic. Astfel A. P. Siniţîn se ocupă de calculul dincolo de limita de elasticitate al grinzii drepte pe un semispaţiu elastic, folosind metoda de calcul dată cu 15 ani în urmă, împreună cu B. N. Jemocikin. O. V. Lujin consideră problema barelor de secţiune oarecare, sprijinite pe un mediu cu deformaţie liniară iar E. S. Kononenko foloseşte un sistem special de funcţii în studiul unei plăci dreptunghiulare ce reazemă pe un mediu elastic ; o metodă variaţională de calcul este utilizată de D. P. Paşcevschii pentru o problemă analogă. Ia. M. Rippenbein se ocupă de calculul barelor ce se găsesc într-un mediu elastic generalizat. F. Ş. Iusipov aplică metoda prof. B. N. Jemocikin la rezolvarea unei probleme de contact.

Calculul plăcilor dreptunghiulare în cazul deformațiilor mari este considerat de M. R. Feldman. Ș. Iu. Țeitlin găsește operatori optimali în aplicarea metodei diferențelor finite la calculul plăcilor plane și curbe.

S. D. Leites și K. M. Huberian studiază unele probleme de calculul cadrelor. Menționăm că B. F. Neustroev aplică metoda iterativă a lui Seidel la două probleme de mecanica construcțiilor.

Studiile cuprinse în această culegere sînt, în general, conduse pînă la rezultate finale și pînă la posibilitatea de aplicare practică. Ele prezintă astfel un interes deosebit pentru cercetătorii din domeniul mecanicii construcțiilor.

*P. P. Teodorescu*

M. BRDIČKA, *Mechanika kontinua* (Mecanica continuum-ului). Naklad. Českoslov. Akad. Věd, Praha, 1959, 720 p.

Cartea privind mecanica mediilor continue a docentului M. Brdička de la Facultatea de matematică și fizică a Universității caroline din Praga este al doilea volum dintr-un ciclu de lucrări privind fizica teoretică. Primul volum al acestui ciclu a fost scris de prof. V. Trkal, fiind consacrat problemelor generale de mecanică teoretică.

Lucrarea este împărțită în 18 capitole, grupate în trei părți.

Prima parte este destinată analizei tensorilor tensiune și deformație specifică. După o introducere de ordin matematic, asupra tensorilor în coordonate carteziene și în spații metrice, autorul studiază probleme generale privind starea de tensiune și starea de deformație în jurul unui punct aparținînd unui mediu continuu deformabil oarecare.

În partea a doua sînt cuprinse probleme de teoria elasticității. După ce se introduce legea lui Hooke, se trece la formularea problemelor fundamentale, în caz static și în caz dinamic, insistîndu-se asupra rezolvării în tensiuni (ecuațiile Beltrami-Michell). Se stabilesc apoi unele teoreme generale, bazate pe introducerea noțiunii de lucru mecanic de deformație. Urmează un studiu succint al problemei încovoierii și răsucirii barei drepte, după care se consideră problema plană, pentru care se dau cîteva rezultate și se indică metoda de rezolvare cu ajutorul funcțiilor de variabilă complexă. Această parte cuprinde, de asemenea, cîteva date privind propagarea undelor în medii cu proprietăți elastice, precum și un studiu al corzii vibrante și al membranei vibrante.

Partea a treia este consacrată problemelor de mecanica fluidelor. După considerarea unor elemente de hidrostatică și cinematică a fluidelor, se trece la stabilirea unor teoreme generale, cum sînt ecuația de continuitate, ecuația lui Bernoulli etc. Se face apoi un studiu al problemei plane pentru cazul fluidelor perfecte incompresibile, introducîndu-se funcția complexă de potențial. Se consideră mișcările fluide plane cu vîrtejuri și se studiază aleia lui Kármán. Ultimul capitol este destinat dinamicii fluidelor vîscoase. Se stabilesc și se studiază ecuațiile Navier-Stokes, se consideră probleme de disipare a energiei etc.

Fiecare capitol este însoțit de numeroase exerciții, ale căror soluții sînt date la sfîrșitul lucrării. De asemenea, după fiecare capitol se dă o scurtă bibliografie, cuprinzînd cele mai importante cărți în care se găsește tratată problema respectivă.

Această carte, destinată inițial a fi un curs de facultate, depășește nivelul cerut unei asemenea lucrări, putînd fi consultată cu folos nu numai de cei ce se inițiază în domeniul mecanicii mediilor continue deformabile ci și de cei care întreprind studii în această direcție.

*P. P. Teodorescu*

LOUIS COMPAIN, *Perçage, alésage, pointage, taraudage mécanique* (Găurire, alezare, punctare, tarodaj mecanic). Editions Eyrolles, Paris, 1960, 344 p.

În colecția *Technologie d'usinage* a apărut în cursul anului 1960 lucrarea cu titlul de mai sus de ing. Louis Compain, profesor de tehnologie la Școala națională de ingineri „Arts et métiers" din Angers.

În acest manual sînt tratate, sub toate aspectele, următoarele prelucrări ale metalelor : găurirea, lamarea și alezarea normală și de precizie, precum și tarodajul mecanic.

În primul capitol, care cuprinde mai bine de o treime din textul cărții, sînt studiate toate sculele așchietoare pentru găurire, lamare, și alezare, dîndu-se indicații referitoare la :

— Terminologie, clasificare și descriere ;
— Geometria sculelor și parametrii de așchiere ;
— Determinarea vitezelor economice ale diverselor prelucrări ;
— Utilajul de fixare și accesorii ;
— Ascuțirea sculelor.

Întreaga expunere este completată cu tabele și nomograme care dau indicații concrete asupra utilizatorilor condițiilor optime pentru alegerea și folosirea sculelor, precum și cu exemple practice, inclusiv calcule de cost.

Patru capitole care urmează se referă la clasificarea și descrierea mașinilor de găurit și de alezat normale și a celor de precizie.

Pentru fiecare categorie de mașini se expune :

— Clasificarea și descrierea diverselor tipuri ;
— Studiul cinematic al mașinilor ;
— Procesul tehnologic al diferitelor genuri de lucrări pe mașinile descrise ;
— Accesoriile mașinilor.

Ultimul capitol tratează despre tarodaj, cuprinzînd descrierea atît a diferitelor tipuri de tarozi, cît și a mașinilor de tarodat.

Autorul se menține în cadrul tehnicii noi, insistînd asupra studiului sculelor și mașinilor celor mai evoluate și perfecționate, atît pentru lucrările de serie de mare productivitate, cît și pentru lucrări speciale de înaltă precizie. Pentru fiecare categorie de mașini se indică domeniul și variantele de utilizare, precum și exemple de aplicații practice deosebit de utile. De asemenea, se dau indicații asupra pregătirii pieselor înainte de prelucrare și asupra lubrificației sculelor în cursul diverselor prelucrări enumerate mai sus.

Stilul redactării este clar și concis, reprezentînd o adevărată sinteză documentară asupra tehnologiei găuririi, alezării și tarodării, iar desenele, schițele și diagramele sînt foarte bine executate.

Lucrarea este foarte utilă și se adresează : întreprinderilor de metalurgie prelucrătoare, constituind pentru inginerii și tehnicienii de atelier un ghid prețios care le permite a soluționa orice problemă referitoare la prelucrările mai sus indicate ; instituțiilor de învățămînt tehnic profesional și superior, constituind un valoros manual pentru elevi și studenți în domeniul tehnologiei găuririi, alezării și tarodajului, precum și a prelucrărilor înrudite cu aceste operații de așchiere, ca lamarea, centrarea sau unele cazuri de rectificare plană ; institutelor de proiectări în domeniul construcțiilor de mașini și utilaje.

*V. Marcu*

HEINRICH HERTEL, *Leichtbau* (Construcții ușoare). Berlin — Göttingen — Heidelberg, Springer Verlag, 1960, 526 p., 525 fig., 13 tabele.

Lucrarea prezintă o amplă culegere de date necesare proiectării construcțiilor aeronautice și în general a construcțiilor ușoare.

După un prim capitol privind problemele constructive, se prezintă proprietățile materialelor utilizate pentru asemenea construcții. Sînt date aici curbele caracteristice la aproape toate materialele cunoscute, precum și efectele plasticității, solicitării, temperaturii etc.

În capitolul III se prezintă date teoretice și experimentale privind încovoierea și flambajul plăcilor în funcție de forma lor, a modului de încărcare și a efectului rigidizărilor. Numeroasele grafice date ușurează mult utilizarea formulelor de calcul.

Capitolul următor privește problemele legate de barele cu pereți subțiri profil deschis, stabilitatea acestora în ansamblu, stabilitatea locală și comportarea lor în prezența plăcii pe care o rigidizează.

Răsucirea profilelor și a plăcilor este prezentată în continuare. Este interesantă aici includerea efectului rigidizărilor locale.

Capitolele VI—VIII cuprind studiul și datele de proiectare privind plăcile rigidizate. Un loc important îl ocupă cazul construcțiilor integrale.

Capitolul următor prezintă toate datele de proiectare necesare logeroanelor, nervurilor și în general a structurilor solicitate prin forțe transversale, cuprinzînd pe lîngă calculul general de rezistență și stabilitate și efectul diferitelor tipuri de rigidizări.

Studiul structurilor ,,Sandwich'' de diferite tipuri, prezentarea datelor constructive, diagrame cuprinzînd rezultatul calculelor de rezistență și stabilitate, probleme de asamblare și rigidizare locală formează obiectul capitolului X.

Capitolul următor se ocupă de problema stabilirii direcțiilor principale de solicitare în construcții complicate precum și cele necesare introducerii de forțe concentrate în construcții ușoare.

Tehnologia fabricației pieselor turnate precum și toate problemele legate de piese turnate din material ușor formează obiectul capitolului XII.

Capitolele următoare sînt destinate problemelor de asamblare întîlnite în construcții ușoare în general și în cele aeronautice în special. După o prezentare generală din punct de vedere constructiv a modurilor posibile de asamblare și a problemelor speciale legate de construcțiile integrale, capitolul XV se ocupă în întregime de asamblarea prin puncte. Problema asamblării prin lipire este amplu tratată în capitolul XVI ținînd seama, pe lîngă problemele tehnologice și de rezistență, de efectele modulelor de elasticitate diferite, de efectele temperaturii, de solicitare etc.

Lucrarea se încheie cu un capitol destinat problemelor de rezistență în regim dinamic stabilind cu această ocazie factorii importanți în acest domeniu și efectul lor cantitativ.

În rezumat se poate afirma, față de bogatul conținut al acestei lucrări, că ea reprezintă un manual de bază pentru un proiectant în domeniul construcțiilor ușoare, precum și un serios punct de plecare pentru cei care studiază acest domeniu.

*Augustin Petre*

* * * *Dynamics of conducting gases* (Dinamica gazelor conductibile). *Proceedings of the third biannual gas dynamics symposium* (Actele celui de-al III-lea simpozion bienal de dinamica gazelor, 1959). Editori — Ali Bulent Cambel și John B. Fenn, Northwestern University Press, Evanston, Illinois, 1960, 212 p.

Acest volum cuprinde lucrările expuse în cadrul unui simpozion care face parte dintr-un ciclu consacrat prezentării și discutării unor subiecte specifice din domeniul dinamicii gazelor. În 1955, în cadrul primului simpozion au fost prezentate lucrări care au avut ca temă probleme din domeniul *Aerotermochimiei*. Al doilea simpozion a avut loc în 1957, avînd ca temă *Proprietăți de transport în gaze*. Lucrările prezentate la simpozionul ținut în anul 1959 sînt în legătură cu *Dinamica gazelor conductibile*.

Introducerea este făcută de către Th. von Kármán cu unele comentarii asupra aplicațiilor magnetomecanicii fluidelor. Această scurtă prezentare cuprinde cîteva idei foarte interesante în legătură cu : unele analogii cu mecanica fluidelor convenționale, care există în cazul fluidului conductibil ca un rezultat al combinației dintre cîmpul de scurgere și cîmpul electromagnetic și cu aplicațiile practice ale magnetomecanicii fluidelor în următoarele trei direcții : modificarea scurgerii, conținere și propulsie.

Lucrările prezentate la acest simpozion sînt grupate în patru părți.

*Prima parte* cuprinde procese elementare și proprietăți în gaze ionizate ; este luată în considerație plasma slab și puternic ionizată. Tot în această parte este dezvoltată teoria ciocnirii între mai multe corpuri pentru procesele ireversibile în plasmă și se studiază efectul forțelor cu rază mare de acțiune. De asemenea, sînt discutate fenomene de relaxare în ionizare.

În cadrul acestei părți sînt prezentate următoarele lucrări :

W. P. Allis și S. J. Buchsbaum, *Conductibilitatea unui gaz ionizat într-un cîmp magnetic* în care autorii studiază plasma Lorentziană (ioni infinit grei în repaus) și dau o expresie pentru conductibilitate. De asemenea, ecuațiile de transport pentru ioni și electroni sînt definite și simplificate, luîndu-se în considerație mișcarea ionilor. Din expresiile obținute se vede că conductibilitatea unui gaz ionizat într-un cîmp magnetic nu este un concept tot atît de simplu ca cel al conductibilității unui solid sau a unui gaz care nu se află într-un cîmp magnetic.

R. A. Gross și C. L. Eisen, *Unele proprietăți ale unei plasme de hidrogen*. Autorii determină compoziția chimică de echilibru a unui amestec de hidrogen într-un interval mare de temperaturi și presiuni. De asemenea, sînt prezentate valorile de echilibru și valorile înghețate ale lui $\gamma$, $C_p$ și viteza sunetului în regimuri de disociere și ionizare.

I. Prigogine, *Mecanica statistică a apropierii de echilibru în gaze*. În această lucrare sînt discutate în termeni calitativi concepțiile principale care stau la baza recentei teorii mecanice statistice a proceselor ireversibile datorită autorului și colaboratorilor săi. Se studiază relația care există între natura mecanică a sistemului (natura forțelor dintre particole) și calea pe care este atins echilibrul statistic.

Radu Bălescu, *Procese ireversibile într-o plasmă. Efectul forțelor cu rază mare de acțiune*. Autorul, luînd în considerație interacțiunile electrostatice cu rază mare de acțiune și aplicînd metodele mecanicii statistice (dezvoltate de Prigogine și Bălescu) deduce o ecuație a cărei proprietate caracteristică este caracterul ei colectiv. Sînt discutate principalele consecințe ale acestei proprietăți.

H. F. Calcote, *Procese de relaxare în plasmă*. Viteza la care un gaz într-o stare de neechilibru de ionizare se apropie de condiția de echilibru poate fi descrisă de timpul de relaxare caracteristic diferitelor procese elementare ca recombinarea ionilor, atașarea electronilor, schimb de sarcină, difuzie și scăderea temperaturii electronului. Este trecută în revistă starea actuală a problemei și tehnica de analizare aplicată la flăcările de combustie.

În partea a II-a a volumului sînt prezentate considerații teoretice asupra interacțiunii cîmpului magnetic și scurgerii gazelor ionizate și anume sînt prezentate teorii macroscopice și microscopice, este analizat efectul de *canalizare* a cîmpurilor magnetice, este dezvoltată teoria continuului a fluidelor conductibile electric pentru cazul forțelor de inerție mici, sînt luate în considerație diferite cazuri și configurații magnetoaerodinamice.

Următoarele lucrări se găsesc în această parte a volumului :

W. R. Sears, *Unele soluții ale ecuațiilor macroscopice ale hidrodinamicii magnetice*. Sînt prezentate investigații teoretice în domeniul magnetohidrodinamicii fluidelor incompresibile nevîscoase în legătură cu : profile subțiri și corpuri zvelte în fluide cu conductibilitate moderată, stratul limită magnetic, scurgeri conținînd tensorul de conductibilitate.

Eugene E. Covert, *O analiză microscopică a magnetodinamicii gazelor*. Scopul acestui studiu este de a analiza modificările caracteristicilor gazului cauzate de acțiunea unui cîmp magnetic exterior. Analiza este bazată pe teoria cinetică a gazelor.

Se arată că efectele cîmpului magnetic asupra interacțiunilor particulei și a traiectoriilor lor introduc anizotropii în magnetodinamica gazelor ; sînt discutate pe scurt efectele acestor anizotropii.

Rudolf X. Meyer, *Magnetohidrodinamica în cazul forțelor de inerție mici*. În acest studiu se consideră teoria continuului a fluidelor conductibile pentru cazul în care forțele de inerție sînt neglijabile comparate cu gradienții de presiune și forțele ponderomotoare.

Este indicată o aplicație la propulsia cu plasmă și la tuburile de șoc electromagnetice.

F. D. Hains, Yusuf A. Yoler și Edward Ehlers, *Scurgere canal hidromagnetică, axial simetrică*. Se analizează în această lucrare efectul de canal al cîmpului magnetic produs de o buclă din fir circulară asupra unei stări permanente de scurgere, la numere Reynolds magnetice mici, a unui gaz compresibil conductibil electric într-un canal circular de rază constantă, coaxial cu cîmpul magnetic.

De asemenea, sînt date rezultate numerice ale ecuațiilor exacte, soluții formale pentru scurgerea liniarizată și sînt discutate cercetările din tubul de șoc asupra presiunilor pe pereți.

În continuare, în partea a III-a a volumului de față, sînt prezentate experiențele de laborator în legătură cu scurgerea de gaze ionizate. Sînt discutate aparate de laborator ca de exemplu tuburi de șoc electromagnetice și generatori de scurgere permanentă de plasmă și prezentate aplicații și limitări ale acestor aparate. Sînt discutate studii experimentale și tehnici de măsurători și sînt considerate diferite aplicații ale magnetohidrodinamicii.

Sînt prezentate în această parte următoarele lucrări :

Winston H. Bostick, John Nankivell, Samuel Koslov și George Schmidt, *Studii experimentale asupra dinamicii plasmei*.

Mecanica extragerii puterii electrice dintr-o plasmă în mișcare poate fi studiată utilizînd două plăci paralele între care plasma poate fi proiectată printr-un cîmp magnetic. Această frînare electromagnetică poate astfel să fie utilizată pentru a măsura rezistența internă a plasmei între aceste plăci, ceea ce face posibil să se determine densitatea plasmei.

De asemenea, două sonde pot fi utilizate pentru a măsura curentul de ioni saturat precum și cîmpul electric Hall. A fost făcută verificarea experimentală a metodelor tehnice de mai sus și rezultatele experimentale concordă cu valorile calculate, în cadrul unui anumit ordin de mărime.

M. Camac și G. S. Janes au prezentat un raport asupra cercetărilor experimentale și teoretice de *Magnetohidrodinamică aplicată* efectuate în laboratoarele de cercetări Avco-Everett. Cercetările sînt făcute în legătură cu următoarele domenii : magnetohidrodinamica cu aplicații la zbor (propulsia în zborul cosmic și dispozitive pentru frînare la reintrare) și generare de putere electrică (procese de temperatură joasă, metode de fuziune).

James A. Browning, *Tehnica producerii jeturilor de plasmă.* În această lucrare autorul se ocupă de problema producerii continue a gazelor ionizate cu ajutorul arcului electric și utilizarea plasmei rezultate ca sursă caldă pentru diferite aplicații interesante.

Richard W. Ziemer în lucrarea sa *Tuburi de șoc electromagnetice*, prezintă mai întîi principiile de lucru și avantajele diferitelor tipuri de tuburi de șoc electromagnetice și apoi dă detalii în legătură cu construcția, folosirea și performanțele unui aparat de tipul unui tub efilat pe care l-a utilizat. De asemenea, sînt discutate posibilitățile și limitările tubului de șoc electromagnetic.

Partea a IV-a, *Aplicații ale efectelor magnetogazodinamice* cuprinde aplicațiile magnetogazodinamicii la generarea de putere și la propulsie și prezentarea unor metode de accelerare a plasmei.

Următoarele lucrări formează această parte a volumului de față :

Joseph L. Neuringer, *Generare de putere optimă utilizînd o plasmă ca fluid de lucru.* Problema considerată este mișcarea permanentă, unidimensională a unei plasme într-un tunel de secțiune arbitrară ce variază lent. Plasma se scurge într-un cîmp magnetic transvers de intensitate arbitrar variabilă și pereții conductibili ai tunelului sînt conectați la o sarcină externă de mărime arbitrară. Se soluționează o problemă de extremum în legătură cu extragerea puterii maxime pentru un tunel cu secțiune de intrare și lungime dată.

Se formulează problema generală și se soluționează aceasta în cîteva cazuri.

M. L. Ghai, *Mașini propulsoare în spațiul cosmic. O problemă de producere de gaze cu viteze mari.* În această lucrare sînt prezentate trei mașini de propulsie electrice capabile în mod inerent să producă gaze la viteze foarte mari și anume motorul cu arc jet, motorul magnetohidrodinamic și motorul cu propulsie ionică.

Alfred E. Kunen și William Mc Ilroy, *Efectul „pinch" electromagnetic pentru propulsie în spațiul cosmic.* Efectul de „pinch" electromagnetic este utilizat pentru a accelera gazele ionizate în vederea propulsiei în spațiul cosmic. Sînt discutate experiențe făcute cu trei electrozi proiectați în diferite moduri și rezultatele obținute sînt comparate cu valori calculate. Rezultatele studiului sînt aplicate unui sistem particular de propulsie în spațiul cosmic.

Celelalte lucrări care cuprind și ele aplicații ale efectelor magnetogazodinamice sînt :

Robert V. Hess și Karlheinz Thom, *Accelerarea plasmei prin microunde ghidate.* În această lucrare este discutată o metodă, aparent nouă, de accelerare nepermanentă a plasmei. Această metodă prezintă unele avantaje față de alte metode cînd plasma accelerată este de masă comparativ mică și este accelerată la viteze extreme. Sînt discutate aplicații posibile ale unor astfel de plasme pentru studiul anumitor aspecte ale fuziunii termonucleare și propulsiei.

George P. Wood și Arlen F. Carter, *Considerații în legătură cu proiectarea unui accelerator DC de scurgere permanentă de plasmă.* În această lucrare autorii prezintă soluțiile unor probleme care se pun în legătură cu proiectarea unui accelerator și descriu un model de accelerator, actualmente în construcție.

Deşi conţinutul volumului respectiv a fost expus într-un mod foarte succint, totuşi se poate remarca diversitatea aspectelor problemei dinamicii gazelor conductibile luate în considerație. Se studiază fenomenele din punct de vedere teoretic introducîndu-se teorii şi metode noi, sînt prezentate studii experimentale şi metode tehnice de măsurători, precum şi aplicaţii practice importante.

Acest volum prezentînd, în totalitatea lui, fenomenele dinamicii gazelor conductibile, precum şi aplicaţii practice ale acestora, aşa cum au fost ele cunoscute în anul 1959, constituie o lucrare valoroasă pentru toţi cei ce lucrează în domeniul respectiv.

*Ş. Săndulescu*

R. M. EXNER, M. F. ROSSKOPF, *Logic in elementary mathematics* (Logica în matematica elementară). McGraw-Hill Book Co. Inc., New York — Toronto — London, 1959, 274 p.

În literatura de specialitate s-au scris multe lucrări privitoare la ceea ce a ajuns să se numească *logica matematică*. Cartea prof. Exner şi Rosskopf se deosebeşte însă de acestea, deoarece ea se ocupă de problemele de logică legate de matematica elementară (probleme de algebră elementară, aritmetică sau geometrie sintetică). În felul acesta structura simbolismului logic modern este folosită la discutarea unor aspecte formale ale matematicii elementare, materialul fiind prezentat astfel încît să fie accesibil celor ce se ocupă cu asemenea probleme — dar doresc să le privească dintr-un punct de vedere superior.

Cartea are şase capitole. Primele două capitole cuprind elemente de logică formală, nume, precum şi modul de a defini calculul. Al treilea capitol este destinat modului în care se fac demonstraţiile. Sistemele matematice abstracte sînt tratate în următoarele două capitole. Ultimul capitol este destinat aplicaţiilor cunoştinţelor de logică în matematică.

Lucrarea prezintă interes şi prin faptul că sînt discutate în amănunt multe chestiuni care de obicei sînt trecute cu vederea, fiind considerate ca de la sine înţeles. Principiul deducţiei şi posibilităţile de generalizare ale unui rezultat sînt considerate în mod deosebit.

Cartea se citeşte cu multă uşurinţă, fiind utilă celor ce doresc să-şi lămurească probleme de metodă în demonstraţii sau celor ce se ocupă cu matematici elementare sau cu probleme de fundamente ale matematicii.

*P. P. Teodorescu*

# LISTA PUBLICAŢIILOR PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE

A. G. TRESTMAN, *Metodî podsceta stoka rek v zavisimosti ot fizikogheograficeskih uslovii.* Ghidrometeorizdat, 1960, 187 p.
A. I. CEBOTAREV, *Obşciaia ghidrologhia.* Leningrad, 1960, 537 p.
A. M. GAVRILOV i J. V. POPOV, *Ghidrologhia i narodnoe hoziaistvo.* Leningrad, 1960, 183 p.
A. A. PIATNITKI, *Vvedenie v teoriiu i praktiku tenzometrirovania.* Novocerkassk, 1960, 73 p.
A. K. BEDELBAEV, *Ustoicivost nelineinîh sistem avtomaticeskogo regulirovania.* Alma Ata, 1960, 162 p.
S. M. ZUDAKOV, *Mineraloobrazovanie v hromomagnezitovîh ogneuporah.* Alma Ata, 1960, 103 p.
A. A. PRESNIAKOV, *Plasticinost metalliceskih splavov.* Alma Ata, 1959, 207 p.
O. G. ILENKO, *Avtomobilnîe topliva i smazocinîie materialî.* Alma Ata, 1960, 157 p.
— *Trudî L.P.I.*, *211* (1960).
— *Izvestia vîsşih ucebnîh zavedenii*, Fizika, Tomsk, 5, 6 (1960).
— *Izvestia Akademii Nauk Kazahskoi SSR*, Seria energheticeskaia, 1, 2 (1960).
— *Trudî Tallinskogo Politehniceskogo Instituta*, 175, 176 (1960).
— *Trudî Instituta Maşinovedeniia*, Seminar po teorii maşin, 81—82 (1960).
— *Soobşcenia Akademii Nauk Gruzinskoi SSR*, *3*, *4*, *5* (1959); *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6* (1960); *1*, *2* (1961).
— *Godişnik na naucinoizledovatelskia institut za tehnolojki izsledovania na goristva*, Sofia, **I** (1956); **II** (1957); **III** (1958); **IV** (1959); **V** (1959).
— *Prace instytuta technicki cieplnej*, **VII**, *14* (1960).
— *Biuletyn Instytutu Technicki cieplnej*, *1*, *2*, *3*, *4*, *5* (1960).
— *Prace instytuta lotnictwa*, Warszawa, *11* (1960); *12* (1960).
— *Zpravodaj vzlu*, Praga, *19*, *20* (1960).
— *Zpravy ustavu teoreticeski a aplikovane Mechaniki*, *23*, *24* (1960).
— *Sbornik vysokoho ucenii technickeho Brno*, *1—2* (1960).
W. KÄMMERER, *Ziffernrechenautomaten.* Berlin, 1960, 303 p.
E. BLAU, *Die modellmässige Untersuchung von Venturikanälen verschiedener Form und Grösse.* Berlin, 1960.
V. VOLTERRA et E. VOLTERRA, *Sur les distorsions des corps élastiques.* Paris 1960, 118 p.
W. LINCKE, *Berechnung der Auftriebverteilung bei elastischen Flügeln* (Institut für Luftfahrttechnik Darmstadt). 1960, 38 p.
W. LINCKE, *Berechnung der Luftkraftderivate von Delta-Flügeln bei symmetrischer Anblasung in Unterschallströmung* (Institut f. Luftfahrttechnik Darmstat). 1960, 43 p.

BERICHTE D. V. L., 91, 113, 131, 133, 136, 137, 139, 143 (1960).

UTIA Technical Notes, 29, 31 (1960).

UTIA Reports, 67 (1960).

College of Aeronautics Cranfield,

Notes: 82, 83, 84, 88, 90, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 99, 101, 102, 103, 104 (1958–1960).

Reports: 112, 113, 114, 115, 116, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133 (1957–1960).

Flugtekniska Försöksanstalten. Bromma, Repot 86 (1960).

A. LENCASTRE, *Manuel d'Hydraulique générale*. Eyrolles, Paris, 1961, 410 p.

G. REMANIERAS, *L'Hydrologie de l'Ingénieur*. Eyrolles, Paris, 1960, 413 p.

*Yearbook of the American Iron and Steel Institute*. 1960.

*Proceedings of the 3rd Japan Congress on Testing Materials*. Kyoto, 1960, 163 p.

# FESTIVALUL INTERNAŢIONAL AL FILMULUI ŞTIINŢIFIC ŞI TEHNIC – BUDAPESTA 1961

,,Gépipari Tudományos Egyesület" Budapest organizează la Budapesta între 16 — 25 noiembrie 1961 cel de-al II-lea festival internaţional al filmului tehnic şi ştiinţific.

Spre deosebire de primul festival din 1959, în cadrul căruia s-au prezentat numai filme din domeniul construcţiei de maşini, anul acesta se vor prezenta şi filme din domeniul ştiinţelor naturii, precum şi din domeniul altor ştiinţe de bază avînd contingenţe cu tehnica.

De asemenea, anul acesta, conform rezoluţiei celui de-al XIV-lea Congres al Asociaţiei Internaţionale a Cinematografului Ştiinţific, va avea loc şi sesiunea secţiei de popularizare ştiinţifică a acestei asociaţii.

În cadrul sesiunii se vor discuta problemele privind *Rolul filmelor de popularizare tehnico-ştiinţifice în dezvoltarea tehnicii.*

## LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R.P.R.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, 996 p. + 6 pl., 42,80 lei.

E. ZAHARESCU, **Contribuţii la studiul capacităţii portante a fundaţiilor**, 300 p. + 4 pl., 16,40 lei.

M. GHERMĂNESCU, **Ecuaţii funcţionale**, 523 p., 25,60 lei.

C. CORDUNEANU, **Funcţii aproape periodice**, 191 p., 8,30 lei.

B. JANKO, **Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuaţii liniare**, 224 p., 8,85 lei.

* * * **Probleme de automatizare, vol. II. Folosirea maşinilor electronice de calcul în industrie şi economie**, 171 p., 8,55 lei.

R
F 2557

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

3144

4
ANUL XII
1961

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1948

# STUDII ȘI CERCETĂRI DE
# MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

## COMITETUL DE REDACŢIE

*Redactor responsabil:*

ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri:

ACADEMICIAN N. PROFIRI;

A. BELEŞ, membru corespondent al Academiei R.P.R.;

CR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.;

R. BOGDAN, conferenţiar la Institutul de petrol, gaze şi geologie, Bucureşti;

N. TIPEI, conferenţiar la Institutul politehnic, Bucureşti;

M. ARCAN, şef secţie, Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor (INCERC), Bucureşti.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
APARE DE 6 ORI PE AN
*Redacţia:* INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"
**Str. Const. Mille 15, tel. 17.34.09**

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

# STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

4

ANUL XII

1961

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

1989

F

2557

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
Folyóirattár
252/1963

**Revista**

*STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ*

*publică :*

— Studii originale *de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.*

— Note (*lucrări mai scurte*) *cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.*

— Referate ştiinţifice şi tehnice *în care se expune : stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.*

— Recenzii *asupra cărţilor şi studiilor romîne sau străine.*

*Domeniile de specialitate ale revistei sînt :*

— *Aeromecanică* (*mecanica fluidelor, aerodinamică, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori*).

— *Hidromecanică* (*hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine hidraulice şi pompe, amenajări hidraulice*).

— *Construcţii de maşini* (*cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue*).

— *Mecanică generală* (*rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice*)

— *Statica şi dinamica construcţiilor* (*metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode de executarea lucrărilor de construcţii*).

— *Tehnica măsurătorilor* (*aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică*).

*Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.*

★

*Articolele vor fi redactate într-o formă concisă şi clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părţile cunoscute ale problemei.*

*Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar şi citeţ cu cerneală. Figurile şi graficele se vor desena în tuş pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar şi în număr cît mai mic.*

*Literatura citată în text se va insera la sfîrşitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariţie, iar pentru revistă se va indica şi numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.*

*Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză şi germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.*

*Aceleaşi norme sînt valabile şi pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.*

*Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, Bucureşti, str. C. Mille nr. 15, raionul Gh. Gheorghiu-Dej.*

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA”

# STUDII ŞI CERCETĂRI
# DE
# MECANICĂ APLICATĂ

Tomul XII, nr. 4 1961

## SUMAR

### STUDII

CINEMATICA ŞI DINAMICA SOLIDULUI

Pag.

N. TIPEI şi V. IONESCU, Studiul unei clase de mişcări plane ale avioanelor . . . 743

*AEROMECANICĂ*

A. PETRE, C. STĂNESCU şi L. LIBRESCU, Divergenţa aeroelastică a aripilor cheson ţinînd seama de restrîngerile de fixare . . . . . . . . . . . . . . . . 755
ŞT. N. SĂVULESCU, Distribuţia mărimilor turbulente în scurgerea unidimensională prin conducte de secţiune oarecare . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 765

*HIDROMECANICĂ*

RADU PRIŞCU şi ALEX. STOIAN, Studiu asupra barajelor cu contraforţi-ciupercă 783
V. HARNAJ, Contribuţii la studiul filtraţiilor prin barajele neomogene realizate prin fracţionare hidraulică . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 795

*UNGERE — FRECARE — UZURĂ*

V. N. CONSTANTINESCU, Asupra scurgerii cu frecare a unui gaz între două plăci paralele . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 809
AL. NICA şi C-TIN BARBU, Studiul unor materiale antifricţiune zinc-aluminiu de înlocuire pentru lagărele cu alunecare . . . . . . . . . . . . . . . . 827

*ELASTICITATE — PLASTICITATE — REZISTENŢA MATERIALELOR*

N. S. PÎRVULESCU, Ţevi grele de extracţie pentru pompajul de adîncime . . . . 841
VALERIU PETCU, Sarcina de rupere a grinzilor static nedeterminate de beton armat cu secţiunea variabilă . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 853

Pag.

LIVIU LIBRESCU, Asupra problemei elastodinamice a structurilor subțiri, neomogene . . . . . . . . . . 861
H. SANDI, Asupra efectului elementelor vibroizolante . . . . . . . . . . 877

*TEORIA MECANISMELOR*

ALFRED BRAIER, Studiul grafic al mișcării unor oscilatori neliniari cu două grade de libertate . . . . . . . . . . 883

**NOTE**

M. MIȘICU și FL. DINCĂ, Unele rezultate experimentale în legătură cu încovoierea dinamică a barelor . . . . . . . . . . 899

**REFERATE ȘTIINȚIFICE ȘI TEHNICE**

I. STROESCU și AL. MARINESCU, Cercetări experimentale asupra sufleriei aerodinamice subsonice a Institutului de mecanică aplicată ,,Traian Vuia'' al Academiei R.P.R. . . . . . . . . . . 909

**RECENZII** . . . . . . . . . . 923

**LISTA PUBLICAȚIILOR PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACȚIE** . . . . . . . 937

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ „ТРАЯН ВУЯ“

# ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том XII, № 4 1961

## СОДЕРЖАНИЕ

**СТАТЬИ**

*КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ТВЕРДЫХ ТЕЛ* Стр.

Н. ТИПЕЙ и В. ИОНЕСКУ, Исследование одного класса плоских движений самолета . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 743

*АЭРОМЕХАНИКА*

А. ПЕТРЕ, К. СТЭНЕСКУ и Л. ЛИБРЕСКУ, Аэроупругая дивергенция кессонных крыльев с учетом ограничений закрепления . . . . . . 755
Ш. Н. СЭВУЛЕСКУ, Распределение турбулентных величин при одномерном течении в трубопроводах произвольного сечения . . . . . . . . 765

*ГИДРОМЕХАНИКА*

РАДУ ПРИШКУ и А. СТОЯН, Исследование массивно-ребристых плотин. 783
В. ХАРНАЖ, К исследованию фильтраций через неоднородные плотины, осуществленные путем гидравлического фракционирования. . . . . 795

*СМАЗКА — ТРЕНИЕ — ИЗНОС*

В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, О течении газа с трением между двумя параллельными поверхностями . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 809
А. НИКА и К. БАРБУ, Исследование некоторых заменяющих антифрикционных материалов цинк-алюминий для подшипников скольжения . . . 827

*УПРУГОСТЬ — ПЛАСТИЧНОСТЬ — СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ*

Н. С. ПЫРВУЛЕСКУ, Тяжелые насосные трубы для глубинной откачки . 841
ВАЛЕРИУ ПЕТКУ, Несущая способность статически неопределимых железобетонных балок переменного сечения . . . . . . . . . . . . 853

Стр.

ЛИВИУ ЛИБРЕСКУ, К упруго-динамической задаче неоднородных тонких конструкций . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 861

Х. САНДИ, Об эффекте виброизолирующих элементов. . . . . . . . . . . 877

*ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ*

АЛЬФРЕД БРАЙЕР, Графическое исследование движения нелинейных осцилляторов с двумя степенями свободы . . . . . . . . . . . . . . 883

**ЗАМЕТКИ**

М. МИШИКУ и Ф. ДИНКЭ, Некоторые экспериментальные результаты в связи с динамическим изгибом стержней . . . . . . . . . . . . . . 899

**НАУЧНЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕФЕРАТЫ**

И. СТРОЕСКУ и А. МАРИНЕСКУ, Экспериментальные исследования дозвуковой аэродинамической трубы Института прикладной механики имени Траяна Вуя Академии РНР . . . . . . . . . . . . . . . . 909

**РЕЦЕНЗИИ** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 923

**СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ, ПОЛУЧННЫХ РЕДАКЦИЕЙ ПУТЕМ ОБМЕНА** . 937

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

**Журнал**

## *,,ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ"*

*публикует:*

— Оригинальные исследования *высокого уровня, представляющие общий научный интерес, связанный с практикой.*

— Заметки (*краткие работы*) *оригинального характера, представляющие уточнение некоторого вопроса.*

— Научные и технические рефераты, *в которых излагаются: современное состояние определенной задачи с выявлением нового подхода к ней, замечания и обсуждения некоторых работ по прикладной механике.*

— Рецензии *на румынские или зарубежные книги и исследования. В журнале публикуются работы по следующим специальностям:*

*— Аэромеханика (механика жидкостей и газов, аэродинамика, газодинамика, механика самолета, аэроупругость, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, термоаэродинамика реактивных двигателей, вентиляция ветродвигатели).*

*— Гидромеханика (гидравлика, гидромеханические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства).*

*— Машиностроение (кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей, механика сплошных твердых сред).*

*— Общая механика (сопротивление материалов, упругость, пластичность, вибрация и удары, устойчивость, электрические и гидравлические аналогии).*

*— Статика и динамика сооружений (методы статистического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, механика грунтов, устойчивость грунтов, методы производства строительных работ).*

*— Техника измерений (электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в технике).*

*Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех отечественных специалистов и зарубежных сотрудников.*

★

*Статьи должны быть написаны в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений (относящихся к уже известным частям проблемы).*

*Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала, формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует делать китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.*

*Литература, цитированная в тексте должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, заглавие, том, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов — и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.*

*Кроме текста, для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском языке или же на русском, французском, английском или немецком языках. Резюме должно составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к работам зарубежных сотрудников, редактированным на русском, английском, французском или немецком языках.*

*Рукописи препровождаются по адресу: Институт прикладной механики, Бухарест, ул. Константин Милле, № 15, район Г. Георгиу-Деж.*

## Le périodique

### *« STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ »*
### *(ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE)*

*publie :*

— *des* études originales *à caractère hautement scientifique, recherches fondamentales d'intérêt général, orientées vers l'activité pratique;*

— *des* notes *(communications brèves) à caractère général, ou constituant une mise au point d'une certaine question;*

— *des* exposés scientifiques et techniques *où l'on expose : l'état actuel d'un certain problème, en soulignant son aspect nouveau; des remarques et discussions concernant certains travaux de mécanique appliquée;*

— *des* notes bibliographiques *au sujet des livres et des études roumains et étrangers.*

*Les domaines de spécialité de la revue sont les suivants :*

— *aéromécanique (mécanique des fluides, aérodynamique, dynamique des gaz, mécanique de l'avion, aéroélasticité, aérodynamique des moteurs à combustion interne, thermo-aérodynamique des moteurs à réaction, ventilation, aéromoteurs);*

— *hydromécanique (hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines hydrauliques et pompes);*

— *constructions mécaniques (cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des machines, automation, étude des surfaces, technologie des milieux solides continus);*

— *mécanique générale (résistance des matériaux, élasticité, plasticité, vibrations et chocs stabilité, analogies électriques et hydrauliques);*

— *statique et dynamique des constructions (méthodes de calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilité des terrains, méthodes d'exécution des travaux de construction);*

— *technique des mesures (appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation des ultra-sons et des isotopes radioactifs en technique).*

*La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires en publiant, dans ce but, les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.*

★

*Les articles seront rédigés dans un style concis et clair, étant évitées les introductions trop longues concernant les données connues des problèmes.*

*Les manuscrits seront envoyés en trois exemplaires, dactylographiés, aux formules écrites de manière lisible, à l'encre. Les figures, ainsi que les diagrammes, seront tracés à l'encre de Chine sur du papier calque. On utilisera le nombre de figures strictement indispensable.*

*Les références bibliographiques seront mentionnées à la fin de l'article. On y indiquera le nom de l'auteur, le titre de l'ouvrage, le tome, la page, le lieu de la parution et, pour les périodiques on ajoutera le numéro auquel on se réfère. On ne fera pas mention des travaux non publiés.*

*Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé en roumain ou, éventuellement, en russe, français, anglais ou allemand (environ une page pour 20 pages dactylographiées de texte).*

*Les mêmes normes sont valables pour les collaborateurs étrangers, qui peuvent rédiger leurs travaux en russe, anglais, français ou allemand.*

*Les manuscrits seront envoyés à l'adresse suivante : Institut de Mécanique Appliquée «Traian Vuia», 15, str. Constantin Mille, Bucarest, Roumanie.*

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE «TRAIAN VUIA»

# ÉTUDES ET RECHERCHES
# DE
# MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome XII, nº 4 1961

## SOMMAIRE

### ÉTUDES

*CINÉMATIQUE ET DYNAMIQUE DU SOLIDE* Page

N. TIPEI and V. IONESCU, Study of a class of plane motions of aircrafts . . . . 743

*AÉROMÉCANIQUE*

A. PETRE, C. STĂNESCU and L. LIBRESCU, Aeroelastic divergence of box beam wings taking into consideration build-in restraints. . . . . . . . . . . . . . . 755
ŞT. N. SĂVULESCU, Distribution of turbulent mean characteristics in the one-dimensional flow through conduits of arbitrary cross-section . . . . . . . . . 765

*HYDROMÉCANIQUE*

RADU PRIŞCU et ALEX. STOIAN, Étude sur les barrages à contreforts-champignon . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 783
V. HARNAJ, Beiträge zum Studium der Filtration durch nichthomogene mittels hydraulischer Fraktionierung erzielter Erddämme . . . . . . . . . . . . . . . . 795

*LUBRIFICATION – FROTTEMENT – USURE*

V. N. CONSTANTINESCU, On the flow of a viscous gas between two parallel surfaces . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 809
AL NICA and C. BARBU, Study of some zinc-aluminium anti-friction materials to be used for journal bearings. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 827

*ÉLASTICITÉ – PLASTICITÉ – RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX*

N. S. PÎRVULESCU, Le tubing lourd pour le pompage de profondeur . . . . . . 841
VALERIU PETCU, Ultimate load of redundant reinforced concrete beams of variable cross-section . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 853

Page

LIVIU LIBRESCU, On the elasto-dynamic problem of thin multilayer shells . . . 861
H. SANDI, On the effect of vibration insulating elements . . . . . . . . . . . . 877

*THÉORIE DES MÉCANISMES*

ALFRED BRAIER, Graphische Untersuchung der Bewegung von nichtlinearen Oszillatoren mit zwei Freiheitsgraden . . . . . . . . . . . . . . . . . . 883

**NOTES**

M. MIŞICU et FL. DINCĂ, Flexion dynamique des barres à propriétés visco-élastiques, III . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 899

**RAPPORTS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES**

I. STROESCU et AL. MARINESCU, Recherches expérimentales sur la soufflerie aérodynamique subsonique de l'Institut de Mécanique Appliquée «Traïan Vuia» de l'Académie de la République Populaire Roumaine . . . . . . . . 909

**REVUE BIBLIOGRAPHIQUE** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 923

**PUBLICATIONS REÇUES À LA RÉDACTION** . . . . . . . . . . . . . . . . 937

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

# STUDIUL UNEI CLASE DE MIŞCĂRI PLANE ALE AVIOANELOR

DE

N. TIPEI şi V. IONESCU

O evoluţie frecventă a avioanelor care execută zboruri artistice este lupingul sau bucla verticală. Pentru studiul acestei mişcări, se presupune, de obicei, că traiectoria este un cerc vertical. În realitate, această ipoteză este rareori satisfăcută, iar curba descrisă are forma mai generală a unei porţiuni de fugoidă (fig. 1).

Astfel punctele $A$, $B$, în care unghiul de urcare $\gamma = 0\ (2\pi)$, nu coincid, iar raza de curbură trece printr-un minimum în punctul superior $C$.

Dacă se elimină simplificările admise în cazul fugoidelor, determinarea parametrilor unei astfel de mişcări este complicată, iar rezultatele nu pot fi redate prin expresii cu un număr finit de termeni. Ca şi în alte lucrări [1], în loc de a impune o lege de pilotaj, se poate porni de la traiectorii date sub o formă generală, deducînd apoi elementele evoluţiei şi legea de variaţie a incidenţei. Fie astfel curbele definite prin expresia următoare a razei de curbură :

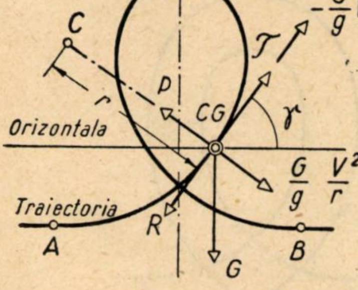


Fig. 1

$$r = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n \sin^n \frac{\gamma}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin^n \frac{\gamma}{2}. \quad (1)$$

Această formulă, cu totul generală, permite să se scrie ecuaţia traiectoriilor cu un număr minim de termeni. Ea se poate particulariza, impunînd unele condiţii. Astfel, dacă $B_1 = B_2 = \ldots = B_n = 0$ şi dacă coeficienţii $A_n$ sînt toţi pozitivi, rezultă imediat că pentru $\gamma = \pi$ (în punctul $C$) $r$ este minimum

$$r_c = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n} + B_0. \qquad (2)$$

Admiţînd că coeficienţii $A_n$ formează o progresie geometrică de raţie $q < 1$ şi considerînd numai puterile pare ale $\sin\frac{\gamma}{2}$, se poate scrie

$$A_{2n} = A_2 q^{n-1}; \; r = \frac{1}{A_0 + A_2 \frac{\sin^2\frac{\gamma}{2}}{1 - q\sin^2\frac{\gamma}{2}}} + B_0 \qquad (3)$$

şi dacă şi coeficientul $A_0$ se încadrează în şirul coeficienţilor $A_n$, $A_0\, q = A_2$, rezultă ecuaţia traiectoriei

$$r = \frac{1}{A_0}\left(1 - q\sin^2\frac{\gamma}{2}\right) + B_0 = r_0\left(1 - \varepsilon\sin^2\frac{\gamma}{2}\right). \qquad (4)$$

Ultima expresie se poate obţine şi direct din (1), dacă se ia $A_0 = \infty$, $A_n = B_1 = B_3 = B_4 = \ldots B_n = 0$; $r_0$ reprezintă raza de curbură la intrarea şi la ieşirea de pe bucla verticală, iar $\varepsilon = \frac{q}{A_0 r_0}$. Pentru $q = 0$, se găseşte cercul, iar pentru $\varepsilon = 1$ traiectorii cu un punct unghiulos. Se remarcă, apoi, că cu ajutorul constantei $B_0$ se poate trasa foarte uşor familia de traiectorii

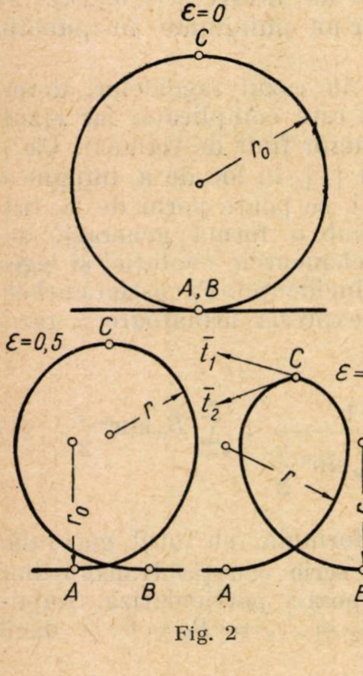


Fig. 2

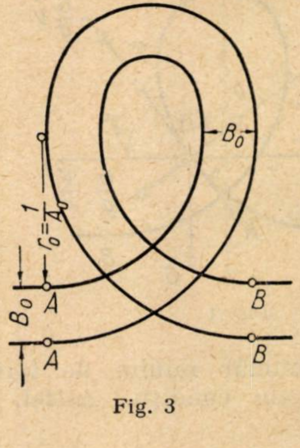


Fig. 3

derivată din curba de bază corespunzătoare unor valori date pentru $A_0=\frac{1}{r_0}$ şi $q=\varepsilon$ (fig. 2).

În figura 3, s-au reprezentat, la scara $r_0$, cîteva cazuri caracteristice. Denivelarea totală între punctele $A$, $B$ şi $C$ este dată de expresia

$$\left.\begin{aligned}
&x_{3C}-x_{3A}=\int_0^{\pi}\left[\frac{1-q\sin^2\frac{\gamma}{2}}{A_0+(A_2-qA_0)\sin^2\frac{\gamma}{2}}+B_0\right]\sin\gamma\,d\gamma=\\
&=2\left[B_0-\frac{q}{A_1-qA_0}+\frac{1-\frac{q}{2}+q\dfrac{\left(1-\frac{q}{2}\right)A_0+\frac{A_2}{2}}{A_2-qA_0}}{A_2-qA_0}\ln\frac{1+\dfrac{\frac{1}{2}\left(A_2-qA_0\right)}{\left(1-\frac{q}{2}\right)A_0+\frac{A_2}{2}}}{1-\dfrac{\frac{1}{2}(A_2-qA_0)}{\left(1-\frac{q}{2}\right)A_0+\frac{A_2}{2}}}\right],\\
&x_{3C}-x_{3A}=2r_0\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right),\ \text{pentru } A_0q=A_2.
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

În mod analog, rezultă distanţa $AB$, adică deplasarea totală a avionului pe orizontală

$$\left.\begin{aligned}
&x_{1B}-x_{1A}=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1-q\sin^2\frac{\gamma}{2}}{A_0+(A_2-qA_0)\sin^2\frac{\gamma}{2}}+B_0\right]\cos\gamma\,d\gamma=\\
&=4\pi\frac{1-\frac{q}{2}+q\dfrac{\left(1-\frac{q}{2}\right)A_0+\frac{A_2}{2}}{A_2-qA_0}}{A_2-qA_0}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{(A_2-qA_0)^2}{4\left[\left(1-\frac{q}{2}\right)A_0+\frac{A_2}{2}\right]^2}}}-1\right]\\
&=\frac{\pi}{2}r_0\varepsilon,\ \text{pentru } A_0q=A_2.
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Astfel, constantele $A_0$, $A_2$, $B_0$ şi $q$ sau $r_0$ şi $\varepsilon$ determină forma traiectoriei, în condiţiile simplificate arătate, care lasă totuşi o remarcabilă generalitate. În expresiile (1) — (6), s-au considerat numai puteri ale $\sin \frac{\gamma}{2}$, corespunzînd unor curbe cu simetrie verticală. Dacă se introduc și termeni în $\sin \gamma$, se pot obține mișcări de un tip mai complex, potrivit numărului de termeni admis. Totuși, și în acest caz, razele de curbură la intrare și la ieșire sînt egale. Pentru a se elimina și această particularitate, (1) se poate pune sub forma

$$r = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(A_{sn}\sin^n\frac{\gamma}{2} + A_{cn}\cos^n\frac{\gamma}{2} + \mathcal{A}_n\sin^n\gamma\right)} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty}\left(B_{sn}\sin^n\frac{\gamma}{2} + B_{cn}\cos^n\frac{\gamma}{2} + \mathcal{B}_n\sin^n\gamma\right) \tag{7}$$

care este însă mult mai greu de utilizat decît (3) sau (4).

Ecuațiile de mișcare (fig. 1), notînd cu $\rho$ densitatea aerului, cu $S$ suprafața portantă și cu $C_X$, $C_Z$ coeficienții aerodinamici, sînt

$$\left.\begin{aligned} &\frac{G}{2gr}\frac{dV^2}{d\gamma} = \mathcal{T} - \frac{\rho}{2}SC_X V^2 - G\sin\gamma, \\ &\frac{\rho}{2}SC_Z V^2 = G\left(\frac{V^2}{gr} + \cos\gamma\right). \end{aligned}\right| \tag{8}$$

Se deduce din acestea

$$\frac{dV^2}{d\gamma} = 2gr\left[\frac{\mathcal{T}}{G} - \left(\frac{V^2}{gr} + \cos\gamma\right)\frac{C_X}{C_Z} - \sin\gamma\right]. \tag{9}$$

Tracțiunea poate fi considerată constantă, cît timp admisia nu variază. Ea depinde însă, în mică măsură și de viteză, mai ales la avioanele cu elice. Fie

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 - kV^2. \tag{10}$$

Cu aceasta, ecuația (9) este

$$\frac{dV^2}{d\gamma} - 2gr\left(\frac{\mathcal{T}_0}{G} - \sin\gamma - \frac{C_X}{C_Z}\cos\gamma\right) + 2\left(\frac{gkr}{G} + \frac{C_X}{C_Z}\right)V^2 = 0. \tag{11}$$

Pentru incidențe medii, se poate considera $\frac{C_X}{C_Z}$ constant [2] și, deoarece $r(\gamma)$ este cunoscut, soluția rezultă imediat

$$V^2 = e^{-2\int\left(\frac{gk}{G}r + \frac{C_X}{C_Z}\right)d\gamma}\left[C + 2g\int\left(\frac{\mathcal{T}_0}{G} - \sin\gamma - \frac{C_X}{C_Z}\cos\gamma\right)re^{2\int\left(\frac{gk}{G}r + \frac{C_X}{C_Z}\right)d\gamma}d\gamma\right]. \tag{12}$$

La valorile mici ale unghiului de atac, în locul aproximației $\frac{C_x}{C_z} =$ $=$ const., se va introduce în (9) ecuația polarei. Astfel, notînd cu $\lambda$ alungirea aripii şi cu $\delta$ un coeficient subunitar care ține seama de forma în plan a aripii [3], ecuația (9) devine

$$\frac{dV^2}{d\gamma} - 2gr\left(\frac{\mathcal{T}_0}{G} - \sin\gamma\right) + \frac{4G}{\rho S}\,\frac{1+\delta}{\pi\lambda}\cos\gamma\left(2 + \frac{gr}{V^2}\cos\gamma\right) +$$

$$+\left[\frac{4G}{\rho g S r}\,\frac{1+\delta}{\pi\lambda} + \frac{gr}{G}(\rho S C_{x_0} + 2k)\right]V^2 = 0. \tag{13}$$

Cum la regimurile de zbor cu incidență mică se poate considera $gr \ll V^2$, termenul $\frac{gr}{V^2}\cos\gamma$ poate fi neglijat față de 2, în care caz soluția se scrie, din nou, direct

$$V^2 = e^{-\int\left[\frac{4G(1+\delta)}{\pi\lambda\rho g S}\cdot\frac{1}{r} + \frac{g}{G}(\rho S C_{X_0} + 2k)r\right]d\gamma}\left\{C + 2\int\left[gr\left(\frac{\mathcal{T}_0}{G} - \sin\gamma\right) - \frac{4G(1+\delta)}{\rho S\pi\lambda}\cos\gamma\right]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\, e^{\int\left[\frac{4G(1+\delta)}{\pi\lambda\rho g S}\cdot\frac{1}{r} + \frac{g}{G}(\rho S C_{X_0} + 2k)r\right]d\gamma}\cdot d\gamma\right\} \tag{14}$$

Funcția de sub integrala exponentului din (12) conține termenul $\frac{gk}{G}r$ care este, chiar la incidențe în jurul fineței maxime, mult mai mic decît $\frac{C_x}{C_z}$; astfel, neglijînd acest termen, calculele se pot simplifica substanțial. O aproximație mai bună, mai ales pentru $\gamma > \frac{\pi}{2}$, se poate realiza dacă se introduce valoarea lui $r$ din (4) şi se neglijează din valoarea exponentului termenul în sin $\gamma$

$$\left.\begin{aligned} 2\int\left(\frac{gk}{G}r + \frac{C_x}{C_z}\right)d\gamma &= 2\left[\frac{gk}{G}r_0\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{C_x}{C_z}\right]\gamma + \frac{gk}{G}r_0\varepsilon\sin\gamma \cong a_0\gamma, \\ a_0 &= 2\left(\frac{gk}{G}r_0\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{C_x}{C_z}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Astfel viteza dedusă din (12) va fi

$$V^2 = Ce^{-a_0\gamma} + 2\,gr_0\left(\left[\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\mathcal{T}_0}{G} - \frac{\varepsilon}{4}\frac{C_x}{C_z}\right]\frac{1}{a_0} + \right.$$

$$+ \frac{1}{1+a_0^2}\left\{\left[\frac{\varepsilon}{2}\frac{\mathcal{T}_0}{G} - \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\frac{C_x}{C_z}+a_0\right)\right]\sin\gamma + \left[\frac{\varepsilon}{2}\frac{\mathcal{T}_0}{G} - \right.\right.$$

$$\left.\left.- \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\frac{C_x}{C_z}a_0 - 1\right)\right]\cos\gamma\right\} - \frac{\varepsilon}{4\,(4+a_0^2)}\left[\left(a_0 + 2\frac{C_x}{C_z}\right)\sin 2\gamma + \right.$$

$$\left.\left. + \left(a_0\frac{C_x}{C_z} - 2\right)\cos 2\gamma\right]\right). \tag{16}$$

Dacă se pleacă de la expresia (14), exponentul acesteia este

$$\left.\begin{aligned}
&\int\left[\frac{4G\,(1+\delta)}{\rho g S\pi\lambda}\frac{1}{r} + \frac{g}{G}(\rho S C_{x_0} + 2k)\,r\right]d\gamma = \int\left(b_{-1}\frac{1}{r} + b_1 r\right)d\gamma = \\
&= b_1 r_0\left[\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\gamma + \frac{\varepsilon}{2}\sin\ \gamma\right] + \frac{2b_{-1}}{r_0\sqrt{1-\varepsilon}}\,\mathrm{arc\ tg}\left(\sqrt{1-\varepsilon}\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\right). \\
&\qquad \cong \left(b_1 r_0 + \frac{b_{-1}}{r_0}\right)\gamma, \quad \text{pentru}\ \gamma < \frac{\pi}{2}; \\
&\qquad \cong \left[b_1 r_0\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{b_{-1}}{r_0}\right]\gamma, \quad \text{pentru}\ \gamma > \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Se poate deci pune, și în acest caz,

$$\int\left(b_{-1}\frac{1}{r} + b_1 r\right)d\gamma \cong b_0\gamma, \tag{18}$$

iar viteza rezultă din (14)

$$V^2 = Ce^{-b_0\gamma} + \frac{gr_0}{b_0}\frac{\mathcal{T}_0}{G}(2-\varepsilon) + \frac{1}{1+b_0^2}\left(\left\{gr_0\left[\frac{\mathcal{T}_0}{G}\varepsilon - (2-\varepsilon)\,b_0\right] - \frac{8G(1+\delta)}{\rho S\pi\lambda}\right\}\sin\gamma + \right.$$

$$\left. + \left\{gr_0\left[\left(\frac{\mathcal{T}_0}{G}b_0 - 1\right)\varepsilon + 2\right] - \frac{8G(1+\delta)b_0}{\rho S\pi\lambda}\right\}\cos\gamma\right) - gr_0\frac{\varepsilon}{4}\,\frac{b_0\sin 2\gamma - 2\cos 2\gamma}{4+b_0^2}. \tag{19}$$

O dată stabilită viteza, formula a doua din (8) dă incidența ($C_z$) și portanta sau rezistența totală, necesare pentru a se deduce solicitarea aripii. Astfel, forța normală pe viteză rezultă direct din relația (8), în care coeficientul $C_z$ pentru întregul avion poate fi considerat aproximativ egal cu al aripii. Pe direcția vitezei, solicitarea aripii va fi, notînd cu $G_a$ greutatea aripii și cu $Cx$ coeficientul de rezistență al acesteia,

$$F_{1a} = \frac{\rho}{2}SV^2 Cx + G_a\left(\frac{\dot V}{g} + \sin\gamma\right), \tag{20}$$

iar solicitarea totală pe aripă

$$F_a = G\sqrt{\left[\left(\frac{V^2}{gr}+\cos\gamma\right)\frac{Cx}{C_z}+\frac{G_a}{G}\left(\frac{1}{2gr}\frac{dV^2}{d\gamma}+\sin\gamma\right)\right]^2+\left[\frac{V^2}{gr}+\left(1-\frac{G_a}{G}\right)\cos\gamma\right]^2}, \quad (21)$$

poate fi determinată, deoarece conţine numai elemente cunoscute; dacă motoarele sînt cuprinse în aripă, trebuie să se ţină seama de aceasta la calculul forţei $F_1$, respectiv $F_a$. Solicitarea aripii este o funcţie de punctul de pe traiectorie, deci de unghiul $\gamma$ corespunzător. Dacă se scrie $F_a$ sub forma

$$F_a = G\sqrt{\left.\frac{\rho}{2G}SV^2\left(C_x - C_X\frac{G_a}{G}\right)+\mathcal{T}\frac{G_a}{G^2}\right]^2+\left[\frac{V^2}{gr}+\left(1-\frac{G_a}{G}\right)\cos\gamma\right]^2}, \quad (22)$$

se observă că primul patrat este aproape constant, deoarece diferenţa $Cx - C_X\frac{G_a}{G}$ este redusă. Rezultă că maximul lui $F_a$ va coincide aproximativ cu maximul celui de-al doilea patrat; condiţia este astfel

$$\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{V^2}{r}\right) = g\left(1-\frac{G_a}{G}\right)\sin\gamma, \quad (23)$$

iar valoarea lui $\gamma$ corespunzătoare poate fi dedusă analitic, sau, mai simplu, grafic, deoarece funcţia $\frac{V^2}{r}(\gamma)$ este cunoscută.

Utilizarea formulelor (12) sau (14), respectiv (16) sau (19) depinde de valoarea incidenţei. Se poate despărţi curba în 2—3 porţiuni, pe care se aplică mai avantajos ecuaţia polarei sau o valoare medie constantă a raportului $\frac{C_X}{C_Z}$ şi se racordează soluţiile, determinîndu-se în punctele corespunzătoare valoarea constantei $C$ din expresia vitezei.

A doua ecuaţie (8) arată că echilibrul pe traiectorie cere ca incidenţa în fiecare punct să aibă o valoare dată, cuprinsă între limitele corespunzătoare valorilor maxime $(C_{z_M})$ şi minime $(C_{z_m})$ ale lui $C_Z$. În fiecare punct al traiectoriei, trebuie satisfăcute condiţiile

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\rho S}{2G}C_{z_M} \geqslant \dfrac{1}{gr}+\dfrac{\cos\gamma}{V^2} \geqslant \dfrac{\rho S}{2g}C_{z_m}, \\ V^2 \geqslant 0, \end{array}\right\}, \quad (24)$$

fără de care traiectoria considerată nu este posibilă.

Soluţia problemei depinde de parametrii $\mathcal{T}_0$ şi $k$, funcţii, la rîndul lor, de admisia la motor. Există, deci, o infinitate de soluţii posibile, corespunzînd diferitelor regimuri ale motorului, în limitele fixate prin condiţiile (24).

Viteza trece printr-un minimum căruia îi corespunde, potrivit primei ecuaţii din (8), o valoare

$$V_m^2 = \frac{\mathcal{T}_0 - G \sin \gamma_1}{\frac{\rho}{2} S C_{x1} + k}, \qquad (25)$$

$C_{x1}$ şi $\gamma_1$ fiind valorile $C_x$, $\gamma$ în punctul respectiv. Astfel, ultima condiţie (24) se poate scrie

$$\mathcal{T}_0 \geqslant G \sin \gamma_1 \qquad (26)$$

şi la limită, cînd $V_m = 0$, rezultă din a doua ecuaţie (8) $\gamma_1 = \frac{\pi}{2}$, pentru $r_1 \neq 0$. În consecinţă, dacă viteza se anulează, traiectoria trebuie să prezinte un punct unghiulos, $r_1 = 0$, cu excepţia cazului $\gamma_1 = \frac{\pi}{2}$, iar aparatul nu poate parcurge decît o porţiune din buclă. Evident, ultimele concluzii pot fi valabile numai în ipoteza că domeniul de manevrabilitate al avionului, pentru incidenţe, satisface tot timpul condiţia (24), permiţînd astfel să se atingă această situaţie limită.

*Exemplu.* Fie un avion cu următoarele caracteristici

$$G = 1880 \text{ kg}, S = 13{,}8 \text{ m}^2, \lambda = 5{,}9, \mathcal{T} = \mathcal{T}_0 = 400 \text{ kg}, \left(\frac{C_x}{C_z}\right)_{\text{mediu}} = \frac{1}{12}$$

Se presupune că avionul intră pe buclă în punctul $A$, fig. 4, cu o viteză orizontală egală cu aceea maximă în apropierea solului, $V_A = 530$ km/oră. Aparatul descrie curba prescrisă prin ecuaţia

$$r = 400\left(1 - 0{,}5 \sin^2 \frac{\gamma}{2}\right), \qquad (27)$$

$r$ fiind dat în metri (fig. 4). Se admite, de asemenea, că prima jumătate a buclei $(0 \leqslant \gamma \leqslant \pi)$ se execută cu motorul în plin, iar a doua $(\pi \leqslant \gamma \leqslant \leqslant 2\pi)$ cu motorul tăiat.

În aceste condiţii, se poate deduce, în funcţie de $\gamma$, viteza, $C_z$, $r$ şi acceleraţia $\frac{V^2}{gr}$, în fiecare punct. Aceste mărimi au fost reprezentate în diagrama din fig. 5, care arată că viteza scade pînă la cca. jumătate din valoarea iniţială, în punctul superior al traiectoriei, o dată cu $r$. Dimpotrivă, $C_z$ variază puţin, avînd o uşoară tendinţă de scădere în zona superioară a curbei. Acest fapt se datoreşte descreşterii razei de curbură, care face ca acceleraţia $\frac{V^2}{gr}$ să nu scadă sub 1/2 din cea iniţială. Evident că, pentru o variaţie mai mică a razei $r$, incidenţa trebuie să se micşoreze sensibil în jurul zonei $\gamma = \pi$; la acelaşi rezultat se ajunge şi dacă tracţiunea se reduce înainte de punctul superior al traiectoriei. Se relevă faptul că se pot obţine curbe de acest fel cu manevre simple, menţinînd manşa aproape mobilă (după manevra iniţială care asigură incidenţa necesară la angajarea în evoluţie), iar admisia constantă pe cele două jumătăţi de curbă. Acceleraţiile tangenţiale au valori mici, sub 10% din acelea centrifugale, de aceea nu au fost reprezentate pe diagrame; valoarea minimă a acestora $\dot{V}_m = -11$ m/s² are loc pentru $\gamma = 90°$, iar maxima, mai redusă în mărime absolută, $\dot{V}_M = 7{,}2$ m/s² la $\gamma = 270°$.

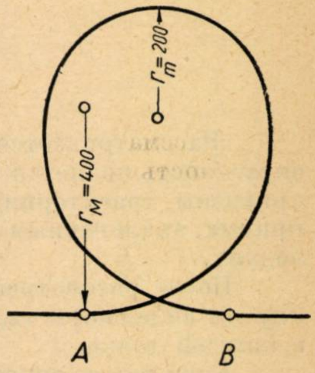


Fig. 4

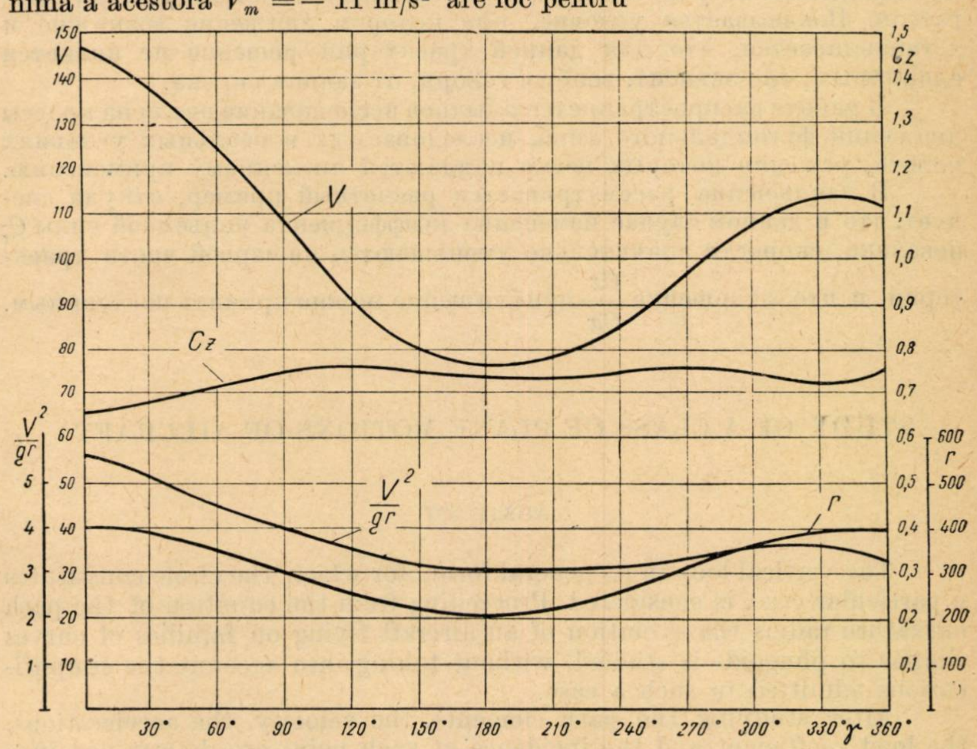


Fig. 5

Deoarece incidenţa variază puţin, calculele au fost efectuate pentru întreaga traiectorie cu ajutorul formulelor (11), (12) şi (16).

*Primită la redacţie la 21 aprilie 1961.*

# ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА ПЛОСКИХ ДВИЖЕНИЙ САМОЛЕТА

## РЕЗЮМЕ

Рассматривается вертикальная петля в общем виде, для которой окружность является частным случаем. Исходя из уравнения радиуса кривизны траектории, изучается движение самолета по семействам кривых, аналогичным фугоидам, но без упрощений, принятых для последних.

После рассмотрения элементов траекторий, определяются в замкнутом виде скорость, ускорения, коэффициент нагрузки и угол атаки в каждой точке.

Если впуск двигателя считается переменным, то движение можно определить по участкам, соответствующим каждому режиму двигателя. Показывается условие, при котором движение возможно и устанавливается, что для данной траектории решение не является единичным; оно зависит, вообще говоря, от закона впуска.

В работе распространяется обычное исследование петли на классы движений фугоидального типа, исследованных в реальных условиях полета, решения которых легко поддаются численному применению.

В заключение рассматривается расчетный пример, откуда следует, что в данном случае изменение коэффициента подьемной силы $C_z$ невелико, скорости значительно уменьшаются на первой части траектории и что отношение $\frac{Cz}{Cx}$ приближенно можно принять постоянным.

# STUDY OF A CLASS OF PLANE MOTIONS OF AIRCRAFT

## ABSTRACT

The vertical loop in its general form, for which the circle constitutes a particular case, is considered. Proceeding from the equation of the path curvature radius the evolution of an aircraft flying on families of curves similar to phugoids is studied, without taking into account the simplifications admitted in such a case.

After studying the path elements, the velocity, the accelerations, the load coefficient and the incidence at each point are determined in a closed form. If the engine admission is assumed to be variable, the motion may be determined on separate portions corresponding to each regime of the engine. The condition under which the motion is possible is shown, pointing out that for a given path the solution is not unique; it generally depends on the law of admission.

The paper extends the usual study of loopings to classes of phugoid type motions, investigated in actual flight conditions, giving solutions easy to be numerically applied.

A numerical example is finally included, showing that, for the considered case, the variation of the lift coefficient $C_z$ is small, the velocities decrease appreciably within the first part of the path and that the ratio $C_x/C_z$ may be assumed as constant.

## BIBLIOGRAFIE

1. N. Tipei, C. Gută., *On the Motion of an Airplane on a Given Trajectory*. Revue de Mécanique Appliquée, III, *4*, 393–403 (1958).
2. R. von Mises., *Theory of Flight*. Mc. Graw-Hill, New York, 1945, 547–550.
3. E. Carafoli., *Aerodinamica*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1951.

AEROMECANICĂ

# DIVERGENȚA AEROELASTICĂ A ARIPILOR CHESON ȚINÎND SEAMA DE RESTRÎNGERILE DE FIXARE

DE

A. PETRE, C. STĂNESCU și L. LIBRESCU

Se știe că în cazul suprafețelor portante elastice, dacă axa elastică nu coincide cu linia centrelor aerodinamice, există o viteză la care, pentru o variație de incidență, momentul forțelor aerodinamice față de axa elastică devine egal cu momentul necesar pentru a produce prin deformație elastică aceeași variație de incidență.

De la această viteză întreg sistemul devine nestabil și ruperea este inevitabilă. Calculul vitezei critice de divergență la care se produce acest fenomen prezintă, de asemenea, o mare importanță datorită faptului că și celelalte fenomene aeroelastice statice depind în mare măsură de această viteză.

Obiectul lucrării prezente este de a da o soluție pentru problema divergenței în cazul suprafețelor portante de secțiune constantă în ipoteza mai generală a considerării acesteia ca bară cu pereți subțiri. Există astfel posibilitatea să se obțină cantitativ efectul restrîngerilor impuse de condițiile la limită, funcție de parametri geometrici și elastici care intervin.

Pornind de la ipoteza lui A. A. Umanski potrivit căreia deplasarea longitudinală $u\,(y, s)$ în cazul răsucirii împiedecate este proporțională cu deplasarea $\omega\,(s)$ din cazul răsucirii libere rezultă

$$u\,(y, s) = \omega\,(s)\,\psi\,(y), \tag{1}$$

unde $\psi\,(y)$ este o funcție care urmează a se determina. S-au luat aici ca variabile $y$ în lungul amvergurii, iar $s$ în lungul conturului secțiunii transversale. Răsucirea împiedecată se caracterizează prin constrîngeri în deplanare produse de variația momentului de răsucire sau modului de fixare și apariția în consecință de tensiuni normale.

Tensiunile normale produse de aceste constrîngeri, vor avea conform legii lui Hooke, expresia

$$\sigma = E\frac{\partial u}{\partial y} = E\omega\,\frac{\partial \psi}{\partial y}\,. \tag{2}$$

Ţinînd seama de relaţia (1), precum şi de faptul că secţiunea transversală, prin ipoteză, nu se deformează, condiţia de echivalenţă între momentul de răsucire $M_t$ şi cel rezultat din tensiunile tangenţiale se poate scrie

$$M_t = GI_c\left[\frac{d\varphi}{dy} + \nu\psi\right], \tag{3}$$

unde $\nu$ este coeficientul de deplanare definit de Ebner ca

$$\nu = 1 - \frac{I_d}{I_c}, \tag{4}$$

$GI_d$ — rigiditatea la răsucirea liberă,
$\varphi$ — unghiul de răsucire.

Din condiţia ca eforturile unitare să satisfacă în medie, după metoda Galerkin, ecuaţia de echilibru a unui element izolat din suprafaţa mediană a aripii, se obţine ecuaţia [2]

$$EI_\omega\frac{d^2\psi}{dy^2} - \nu\, GI_d\psi = \nu M_t, \tag{5}$$

unde

$$I_\omega = \int \omega^2 h\, ds \tag{6}$$

este momentul de inerţie sectorial. Eliminînd între ecuaţiile (3) şi (5) funcţia $\psi$, se obţine pentru momentul de răsucire expresia

$$M_t = GI_d\frac{d\varphi}{dy} + \frac{EI_\omega}{\nu}\left(\frac{1}{GI_c}\frac{dm_t}{dy} - \frac{d^3\varphi}{dy^3}\right), \tag{7}$$

unde $m_t = \frac{dM_t}{dy}$ reprezintă momentul de răsucire distribuit în lungul anvergurii pe unitatea de lungime.

Făcînd să apară momentul de răsucire distribuit, ecuaţia (7) devine

$$\bar{k}^2\frac{d^4\varphi}{dy^4} - \frac{d^2\varphi}{dy^2} = -\frac{m_t}{GI_d} + \frac{\bar{k}^2}{GI_c}\frac{d^2m_t}{dy^2}, \tag{8}$$

unde s-a notat

$$\bar{k} = \sqrt{\frac{EI_\omega}{\nu GI_d}}. \tag{9}$$

Ecuaţia (8) este ecuaţia fundamentală a răsucirii împiedecate.

Ecuaţia diferenţială a divergenţei aeroelastice în cazul răsucirii împiedecate se obţine din ecuaţia (8) prin explicitarea momentului de răsucire distribuit $m_t$. Notînd cu $c$ coarda aripii, cu $e$ distanţa dintre axa elastică şi linia centrelor aerodinamice, cu $q = \frac{\rho}{2}V^2$ presiunea dinamică şi cu $\frac{dC_z}{di}$ panta curbei de portanţă, se obţine pentru $m_t$ următoarea expresie :

$$m_t = - q\, ce \frac{dC_z}{di} \varphi . \tag{10}$$

Introducînd această expresie în ecuaţia (8) se obţine ecuaţia diferenţială a divergenţei aeroelastice în cazul răsucirii împiedecate

$$\bar{k}^2 \frac{d^4 \varphi}{dy^4} + \left( \frac{\bar{k}^2 qce \frac{dC_z}{di}}{GI_c} - 1 \right) \frac{d^2 \varphi}{dy^2} - \frac{qce \frac{dC_z}{di}}{GI_d} \varphi = 0 . \tag{11}$$

După cum se remarcă, această ecuaţie este de ordinul patru, pe cînd ecuaţia obţinută prin aplicarea teoriei lui Saint-Venant, a răsucirii libere, este de ordinul doi [1].

În cele ce urmează este avantajos ca ecuaţia (11) să fie scrisă în variabile nul dimensionale. În acest scop se face schimbarea de variabilă

$$y = \frac{b}{2} \zeta , \tag{12}$$

unde $b$ reprezintă anvergura suprafeţei portante.

Considerînd ca parametri nuldimensionali

$$X = \frac{b^2 qce \frac{dC_z}{di}}{4\, GI_d} ; \quad k = \frac{4\, \bar{k}^2}{b^2} \tag{13}$$

şi în baza schimbării de variabilă (12), ecuaţia (11) devine

$$k \frac{d^4 \varphi}{d\zeta^4} + [k (1 - \nu) X - 1] \frac{d^2 \varphi}{d\zeta^2} - X\varphi = 0 . \tag{14}$$

Se observă că pentru $k = 0$ ($\bar{k} = 0$) se obţine ecuaţia răsucirii libere. Rezultă atunci, în baza celei de-a doua relaţii (13), că pentru aripi avînd acelaşi profil efectul împiedicării scade o dată cu creşterea anvergurii.

Soluţia ecuaţiei de mai sus este

$$\varphi = C_1 \sin \alpha \zeta + C_2 \cos \alpha \zeta + C_3 \operatorname{sh} \beta \zeta + C_4 \operatorname{ch} \beta \zeta , \tag{15}$$

unde

$$\alpha = \sqrt{\frac{k (1 - \nu) X - 1 + \sqrt{k^2 (1 - \nu)^2 X^2 + 2\, k (1 + \nu) X + 1}}{2k}} , \tag{16}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{- k\, (1 - \nu) X + 1 + \sqrt{k^2 (1 - \nu)^2 X^2 + 2k\, (1 + \nu) X + 1}}{2k}} .$$

Evident

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= \sqrt{\frac{X}{k}}, \\ \alpha^2 - \beta^2 &= \frac{k(1-\nu)X - 1}{k}. \end{aligned} \tag{17}$$

Constantele de integrare $C_1$, $C_2$, $C_3$ şi $C_4$ urmează a fi determinate din condiţiile la limită. Aceste condiţii la limită sînt următoarele :

1°. La încastrare ($\zeta = 0$) secţiunea fiind împiedicată să se rotească şi să se deplaseze, rezultă că este necesar să fie satisfăcute următoarele condiţii :

$$\varphi = 0 \qquad u = 0. \tag{18}$$

În baza soluţiei (15), prima condiţie conduce la ecuaţia

$$C_2 + C_4 = 0. \tag{19}$$

Pentru cea de-a doua condiţie (18) se remarcă că, în virtutea relaţiei (1), rezultă

$$\psi(0) = 0. \tag{20}$$

Folosind relaţiile (3) şi (7) se obţine, în urma unor calcule elementare, relaţia

$$\psi(y) = -\frac{2k(1-\nu)}{b\nu}\left[\frac{d^3\varphi}{d\zeta^3} + \left(\alpha^2 - \beta^2 + \frac{1}{k(1-\nu)}\right)\frac{d\varphi}{d\zeta}\right]. \tag{21}$$

Condiţia (20) conduce, ca urmare a relaţiei (21), la următoarea ecuaţie :

$$\alpha\left(-\beta^2 + \frac{1}{k(1-\nu)}\right)C_1 + \beta\left(\alpha^2 + \frac{1}{k(1-\nu)}\right)C_3 = 0. \tag{22}$$

2°. La extremitatea liberă a aripii evident se impune ca

$$M_t = 0; \qquad \sigma_y = 0. \tag{23}$$

Pentru prima condiţie se utilizează expresia

$$M_t = -\frac{2GI_d k}{b}\left[\frac{d^3\varphi}{d\zeta^3} + (\alpha^2 - \beta^2)\frac{d\varphi}{d\zeta}\right]. \tag{24}$$

Corespunzător condiţiei $M_t = 0$ rezultă din (24) ecuaţia

$$-\beta\cos\alpha\, C_1 + \beta\sin\alpha\, C_2 + \alpha\,\mathrm{ch}\,\beta\, C_3 + \alpha\,\mathrm{sh}\beta\, C_4 = 0. \tag{25}$$

Pentru scrierea ultimei condiţii din (23) se foloseşte relaţia (2) de unde rezultă

$$\begin{aligned} &\alpha^2\left[\beta^2 - \frac{1}{k(1-\nu)}\right]\sin\alpha\, C_1 + \alpha^2\left[\beta^2 - \frac{1}{k(1-\nu)}\right]\cos\alpha\, C_2 + \\ &+ \beta^2\left[\alpha^2 + \frac{1}{k(1-\nu)}\right]\mathrm{sh}\,\beta\, C_3 + \beta^2\left[\alpha^2 + \frac{1}{k(1-\nu)}\right]\mathrm{ch}\,\beta\, C_4 = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Pentru determinarea constantelor de integrare s-a obținut un sistem omogen, format din ecuațiile (19), (22), (25), și (26). Pentru ca fenomenul de divergență să se producă este necesar ca unghiul de răsucire $\varphi$ să fie diferit de zero.

Anulînd determinantul sistemului, se obține, în cele din urmă, următoarea ecuație transcendentă :

$$\begin{aligned} & 2\alpha^2\beta^2\left(-\beta^2+\frac{1}{k(1-\nu)}\right)\left(\alpha^2+\frac{1}{k(1-\nu)}\right)- \\ & -\alpha\beta\,(\alpha^2-\beta^2)\left(-\beta^2+\frac{1}{k(1-\nu)}\right)\left(\alpha^2+\frac{1}{k(1-\nu)}\right)\sin\alpha\,\mathrm{sh}\,\beta+ \\ & +\left[\alpha^4\left(-\beta^2+\frac{1}{k(1-\nu)}\right)^2+\beta^4\left(\alpha^2+\frac{1}{k(1-\nu)}\right)^2\right]\cos\alpha\,\mathrm{ch}\,\beta=0\,. \end{aligned} \tag{27}$$

Folosind relațiile (17) această ecuație devine

$$\begin{aligned} & \frac{2k\nu X}{\mathrm{ch}\sqrt{\dfrac{1-k(1-\nu)X+\sqrt{k^2(1-\nu)^2X^2+2k(1+\nu)X+1}}{2k}}}- \\ & -\nu\sqrt{kX}\,[k(1-\nu)X-1]\times \\ & \times\sin\sqrt{\frac{k(1-\nu)X-1+\sqrt{k^2(1-\nu)^2X^2+2k(1+\nu)X+1}}{2k}}\times \\ & \times\mathrm{th}\sqrt{\frac{1-k(1-\nu)X+\sqrt{k^2(1-\nu)^2X^2+2k(1+\nu)X+1}}{2k}}+ \\ & +[k^2(1-\nu)^2X^2+2kX+1)]\times \\ & \times\cos\sqrt{\frac{k(1-\nu)X-1+\sqrt{k^2(1-\nu)^2X^2+2k(1+\nu)X+1}}{2k}}=0\,, \end{aligned} \tag{28}$$

care este ecuația fundamentală rezolventă a divergenței aeroelastice pentru aripile monocheson de secțiune constantă în cazul că se iau în considerare restrîngerile de fixare. Este evident că pentru o aripă de profil dat, deci $k$ și $\nu$ cunoscuți, ecuația (28)[1]) are o infinitate de rădăcini; esențial pentru prevenirea acestui fenomen, este însă cunoașterea rădăcinii care are valoarea cea mai mică și care corespunde, prin urmare, vitezei minime de divergență[1]).

Considerînd fie $k = 0$, fie $\nu = 0$, ecuația (28), după cum se poate constata ușor, degenerează în ecuația simplă

$$\cos\sqrt{X}=0\,.$$

---

[1]) Rezolvarea ecuației transcendente (28) s-a făcut cu ajutorul mașinii electronice de calculat (I.F.A. 2) la Institutul de fizică al Academiei R.P.R.

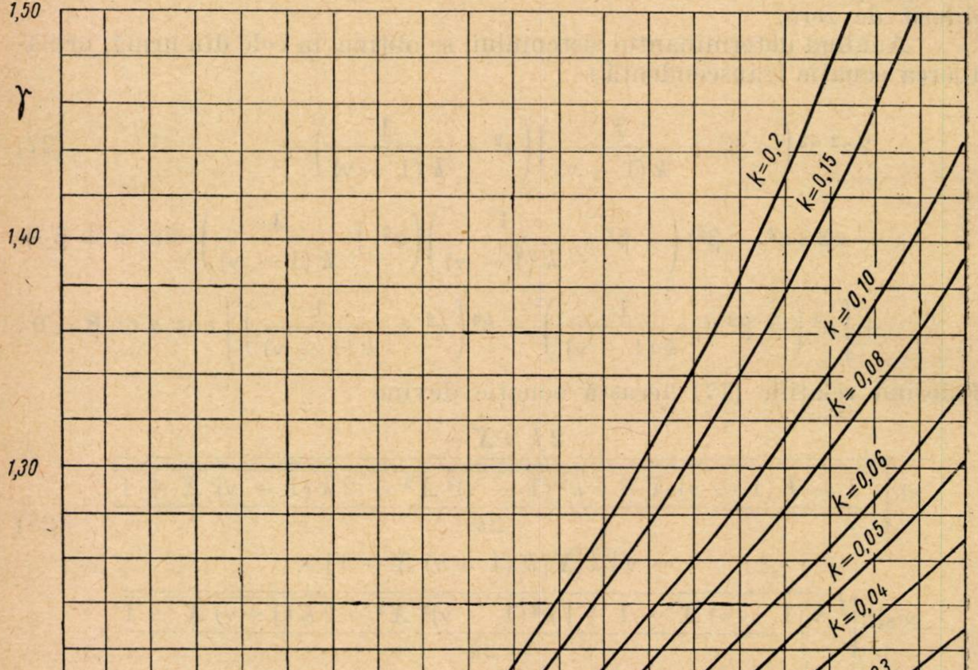

1,50
1,40
1,30
1,20
1,10
1,00
γ
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
ν
1
k=0,2
k=0,15
k=0,10
k=0,08
k=0,06
k=0,05
k=0,04
k=0,03
k=0,025
k=0,02
k=0,015
k=0,01
k=0,005
k=0,001

Fig 1

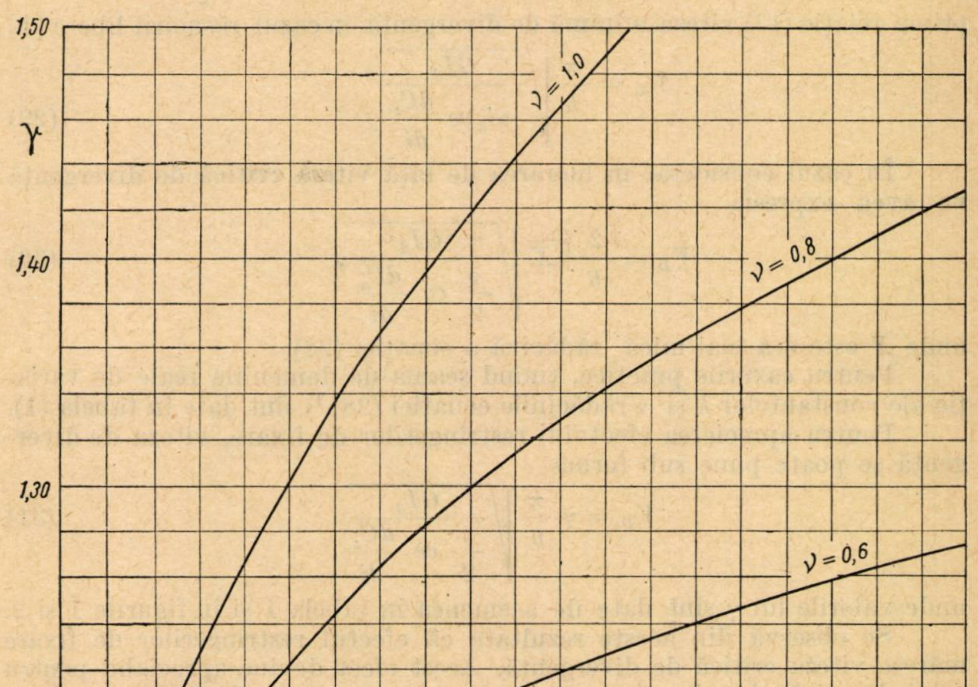

1,50
1,40
1,30
1,20
1,10
1,00
γ
ν = 1,0
ν = 0,8
ν = 0,6
ν = 0,4
ν = 0,3
ν = 0,2
ν = 0,1
ν = 0,05
0
0,05
0,1
0,15
k
0,2

Fig. 2

Corespunzător rădăcinii minime a acestei ecuaţii, $\sqrt{X} = \frac{\pi}{2}$, se obţine din prima relaţie (13) viteza minimă de divergenţă în cazul răsucirii libere [1]

$$V_D = \frac{\pi}{b}\sqrt{\frac{GI_d}{\rho/_2\, ce \frac{dC_z}{di}}}. \tag{29}$$

În cazul considerat în lucrarea de faţă viteza critică de divergenţă va avea expresia

$$V_D = \frac{2}{b}\sqrt{X}\sqrt{\frac{GI_d}{\frac{\rho}{2}\, ce\, \frac{dC_z}{di}}}, \tag{30}$$

unde $X$ este cea mai mică rădăcină a ecuaţiei (28).

Pentru cazurile practice, ţinînd seama de domeniile reale de variaţie ale constantelor $k$ şi $\nu$ rădăcinile ecuaţiei (28) [1]) sînt date în tabela (1).

Pentru aprecierea efectului restrîngerilor de fixare, viteza de divergenţă se poate pune sub forma

$$V_D = \gamma \frac{\pi}{b}\sqrt{\frac{GI_d}{\frac{\rho}{2}\, ce\, \frac{dC_z}{di}}}, \tag{31}$$

unde valorile lui $\gamma$ sînt date de asemenea în tabela 1 şi în figurile 1 şi 2.

Se observă din aceste rezultate că efectul restrîngerilor de fixare măresc viteza critică de divergenţă. Acest efect devine apreciabil pentru aripi de mică alungire şi scade cu creşterea acesteia. Modul de variaţie funcţie de ceilalţi parametri se poate deduce din tabela 1 şi figurile 1 şi 2 ţinînd seama de (4), (9) şi (13).

*Tabela 1*

| $k$ | $\nu$ | $\sqrt{X}$ | $\gamma$ | $k$ | $\nu$ | $\sqrt{X}$ | $\gamma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,001 | 1,0 | 1,62 | 1,031 | | 0,35 | 1,645 | 1,047 |
| | | | | | 0,4 | 1,657 | 1,055 |
| 0,005 | 1,0 | 1,688 | 1,075 | | 0,5 | 1,680 | 1,070 |
| | | | | | 0,6 | 1,700 | 1,082 |
| 0,01 | 0,05 | 1,579 | 1,005 | | 0,7 | 1,730 | 1,101 |
| | 0,1 | 1,587 | 1,010 | | 0,8 | 1,756 | 1,118 |
| | 1,0 | 1,742 | 1,109 | | 0,9 | 1,783 | 1,135 |
| | | | | | 1,0 | 1,811 | 1,152 |
| 0,015 | 0,05 | 1,581 | 1,006 | 0,02 | 0,05 | 1,582 | 1,007 |
| | 0,1 | 1,591 | 1,013 | | 0,1 | 1,594 | 1,015 |
| | 0,15 | 1,602 | 1,020 | | 0,15 | 1,606 | 1,022 |
| | 0,2 | 1,612 | 1,026 | | 0,2 | 1,618 | 1,030 |
| | 0,25 | 1,623 | 1,033 | | 0,25 | 1,631 | 1,038 |
| | 0,3 | 1,634 | 1,040 | | 0,3 | 1,644 | 1,047 |

---

[1]) Rezolvarea ecuaţiei transcedente (28) s-a făcut cu ajutorul maşinii electronice de calculat (I.F.A. 2) la Institutul de fizică al Academiei R.P.R.

| k | ν | $\sqrt{X}$ | γ |
|---|---|---|---|
| | 0,35 | 1,657 | 1,055 |
| | 0,4 | 1,670 | 1,063 |
| | 0,5 | 1,697 | 1,080 |
| | 0,6 | 1,726 | 1,098 |
| | 0,7 | 1,756 | 1,118 |
| | 0,8 | 1,788 | 1,138 |
| | 0,9 | 1,820 | 1,158 |
| | 1,0 | 1,854 | 1,180 |
| 0,025 | 0,1 | 1,596 | 1,016 |
| | 0,2 | 1,624 | 1,034 |
| | 0,3 | 1,652 | 1,052 |
| | 0,4 | 1,682 | 1,071 |
| | 0,6 | 1,745 | 1,111 |
| | 0,8 | 1,816 | 1,156 |
| | 1,0 | 1,894 | 1,206 |
| 0,03 | 0,1 | 1,599 | 1,018 |
| | 0,2 | 1,628 | 1,036 |
| | 0,3 | 1,659 | 1,056 |
| | 0,4 | 1,692 | 1,077 |
| | 0,6 | 1,762 | 1,122 |
| | 0,8 | 1,841 | 1,172 |
| | 1,0 | 1,929 | 1,228 |
| 0,04 | 0,1 | 1,602 | 1,020 |
| | 0,2 | 1,636 | 1,041 |
| | 0,3 | 1,671 | 1,064 |
| | 0,4 | 1,709 | 1,088 |
| | 0,6 | 1,791 | 1,140 |
| | 0,8 | 1,885 | 1,200 |
| | 1,0 | 1,993 | 1,269 |
| 0,05 | 0,1 | 1,605 | 1,022 |
| | 0,2 | 1,642 | 1,045 |
| | 0,3 | 1,681 | 1,070 |
| | 0,4 | 1,723 | 1,097 |
| | 0,6 | 1,816 | 1,156 |
| | 0,8 | 1,923 | 1,224 |
| | 1,0 | 2,049 | 1,304 |
| 0,06 | 0,1 | 1,608 | 1,024 |
| | 0,2 | 1,647 | 1,048 |
| | 0,3 | 1,690 | 1,076 |
| | 0,4 | 1,735 | 1,110 |
| | 0,6 | 1,837 | 1,169 |
| | 0,8 | 1,957 | 1,246 |
| | 1,0 | 2,099 | 1,336 |
| 0,08 | 0,1 | 1,612 | 1,026 |
| | 0,2 | 1,656 | 1,054 |
| | 0,3 | 1,703 | 1,084 |
| | 0,4 | 1,755 | 1,117 |
| | 0,6 | 1,873 | 1,192 |
| | 0,8 | 2,015 | 1,283 |
| | 1,0 | 2,188 | 1,393 |
| 0,10 | 0,2 | 1,662 | 1,058 |
| | 0,3 | 1,714 | 1,091 |
| | 0,4 | 1,771 | 1,127 |
| | 0,6 | 1,902 | 1,211 |
| | 0,8 | 2,063 | 1,313 |
| | 0,1 | 2,267 | 1,443 |
| 0,15 | 0,1 | 1,620 | 1,031 |
| | 0,2 | 1,675 | 1,066 |
| | 0,3 | 1,734 | 1,104 |
| | 0,4 | 1,801 | 1,146 |
| | 0,6 | 1,959 | 1,247 |
| | 0,8 | 2,163 | 1,377 |
| | 0,1 | 2,435 | 1,550 |
| 0,2 | 0,1 | 1,624 | 1,034 |
| | 0,2 | 1,684 | 1,072 |
| | 0,3 | 1,749 | 1,113 |
| | 0,4 | 1,823 | 1,160 |
| | 0,6 | 2,003 | 1,275 |
| | 0,8 | 2,242 | 1,427 |
| | 1,0 | 2,580 | 1,642 |

*Primită la redacţie la 18 aprilie 1961*

# АЭРОУПРУГАЯ ДИВЕРГЕНЦИЯ КЕССОНОВЫХ КРЫЛЬЕВ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ ЗАКРЕПЛЕНИЯ

## РЕЗЮМЕ

В работе излагается расчет дивергенции аэроупругих несущих поверхностей постоянного сечения при учете эффекта изменения крутящего момента вдоль размаха, а также эффекта ограничений закрепления.

Результаты приводятся на рис. 1 и в таблице (1) в зависимости от геометрических и упругих параметров конструкции. Наблюда-

ются приращения критической скорости дивергенции в зависимости от ограничений закрепления, которые для крыла малого размаха становятся значительными.

## AEROELASTIC DIVERGENCE OF BOX BEAM WINGS, TAKING INTO CONSIDERATION BUILD- IN RESTRAINTS

### ABSTRACT

The calculation of aeroelastic divergence of lifting surfaces of constant cross-section is prsented, taking into consideration the effect of the variation of the spanwise twisting moment as well as the effect of build-in restraints.

Results are given quantitatively in figures 1, 2 and in table 1, function of the geometrical and elastic parameters of the structure. Critical divergence velocity is found to increase as a function of the build- in restraints ; this increase becomes appreciable with the decrease of the wing aspect ratio.

### BIBLIOGRAFIE

1. R. Bisplinghoff, H. Ashley, R. Halfman *Aeroelasticity*. Cambridge, 1955.
2. A. Petre., M. Atanasiu, *Bare cu pereți subțiri*. Ed. tehnică, București, 1960.
3. В. З. Власов, *Тонкостенные упругие стержни*, Москва, Физматгиз, 1959, 568.

# S T U D I I

## AEROMECANICA

# DISTRIBUȚIA MĂRIMILOR TURBULENTE ÎN SCURGEREA UNIDIMENSIONALĂ PRIN CONDUCTE DE SECȚIUNE OARECARE

DE

ȘT. N. SĂVULESCU

1. În cazul bidimensional sau axial-simetric distribuția practică a mărimilor unei scurgeri turbulente se determină cu ajutorul teoriei semiempirice a lungimii de amestec. Completările aduse acestei teorii, ca de exemplu *legea la perete* [1], nu pot da nici o evaluare practică a distribuției acestor mărimi în cazul tridimensional general. Spre ilustrare să considerăm cazul unei conducte de secțiune triunghiu echilateral, unde *legea la perete* poate da rezultate satisfăcătoare pe porțiunea de înălțime de la o latură la centrul triunghiului, unde ne apropiem de cazul bidimensional, dar nu poate oferi o soluție satisfăcătoare pentru cealaltă porțiune (de lungime dublă), de la vîrf la centrul triunghiului, unde ne îndepărtăm evident de cazul bidimensional.

În această lucrare vom extinde aplicativ, în cazul conductelor de secțiune oarecare, metoda de evaluare a distribuției mărimilor dintr-o scurgere turbulentă complet dezvoltată, pornind de la scurgerea laminară corespunzătoare, așa cum am procedat în cazul bidimensional [2]. Ne vom limita la determinarea distribuției vitezei medii și a fluctuațiilor turbulente în ipoteza organizării statistice limitative a fluctuațiilor turbulente [3], cînd distribuția energiei medii turbulente este transformata energiei medii din mișcarea laminară corespunzătoare. Această distribuție este ideală, corespunzînd unei situații cînd se neglijează influența numărului $\mathcal{R}e$, a rugozității, a mișcărilor transversale etc., și poate da o indicație asupra tabloului de distribuție al vitezei medii și fluctuațiilor destul de apropiat de cazul real al conductelor netede.

2. Să reamintim, pe scurt, observațiile noastre din cazul bidimensional [3]. În figura 1 am reprezentat distribuția energiei medii adimensionale

$$E_a\left(\frac{y}{\delta}\right)=\frac{\left(p+\frac{\rho}{2}V^2\right)-\left(p+\frac{\rho}{2}V^2\right)_w}{\left(p+\frac{\rho}{2}V^2\right)_e-\left(p+\frac{\rho}{2}V^2\right)_w}\simeq u_a^2\left(\frac{y}{\delta}\right),$$

unde $V^2=(u+u')^2+(v+v')^2+(w+w')^2$, $p$ este presiunea la distanța $y$ de la perete, $\delta$ grosimea stratului considerat (eventual raza unei conducte circulare), $u_a=\frac{u}{u_e}$ indicele $w$ înseamnă la perete, iar $e$ înseamnă frontiera exterioară care definește domeniul cu distribuția $E_a$.

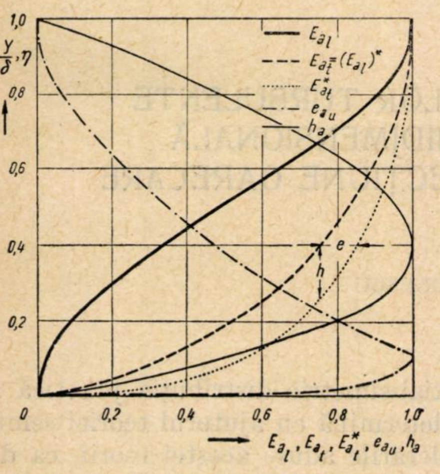


Fig. 1. — Distribuția adimensională a energiei laminare $E_{a_e}$, a transformatei $(E_{a_e})^\star$ care reprezintă distribuția energiei medii turbulente, a transformatei $(E_{a_e})^{\star\star}$ care reprezintă distribuția limitată a fluctuațiilor turbulente și distribuțiile mărimilor $e_a=\frac{e}{e_M}$ și $h_a=\frac{h}{h_M}$, într-un caz teoretic $E_{a_l}=\sin^2\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}$.

Am reprezentat de asemenea transformata $E^\star$ ($\eta\rightarrow\eta_0$), unde

$$\eta=\frac{\int_0^{\eta_0}E_a\,d\eta_0}{\int_0^1 E_a\,d\eta_0},\qquad \eta_0=\frac{y}{\delta},\qquad(1)$$

și am arătat că banda cuprinsă între cele două distribuții este o măsură a fluctuațiilor de energie turbulentă, astfel că avem

$$e=E_a^\star-E_a\cong K_u\overline{u'^2}\simeq K_w\overline{w'^2};$$
$$h=\eta_0-\eta\simeq K_v\overline{v'^2}\qquad(2)$$

și deci

$$e_a=\frac{e}{e_{\max}}\simeq\frac{\overline{u'^2}}{|\overline{u'^2}|_{\max}}\simeq\frac{\overline{w'^2}}{|\overline{w'^2}|_{\max}};\qquad h_a=\frac{h}{h_{\max}}\simeq\frac{\overline{v'^2}}{|\overline{v'^2}|_{\max}},$$

deoarece distribuția transformată $E_a^\star$ este distribuția limită a interacțiunilor unităților individualizate de turbulență, susținute de distribuția generatoare $E_a$, astfel că producerea de energie de agitație turbulentă să fie minimă. Este clar că dacă

$$\overline{v'^2}<\overline{u'^2},\ \overline{v'^2}<\overline{u'^2},\text{ avem imediat}$$

$$\frac{\overline{u'^2}+\overline{v'^2}+\overline{w'^2}}{|\overline{u'^2}+\overline{v'^2}+\overline{w'^2}|_{\max}}\simeq\frac{\overline{n'^2}}{|\overline{u'^2}|_{\max}}\simeq e_a.\qquad(3)$$

De asemenea, s-a observat că procesul de tranziţie poate fi imaginat ca succesiunea unor transformări de tipul (1), astfel că în cele din urmă distribuţia energiei medii turbulente $E_{a_t}$ să fie chiar transformata distribuţiei energiei medii laminare $E_{a_l}$, lucru demonstrat pentru scurgerea de pe o placă (sau eventual într-o conductă circulară, cu gradient de presiune constant negativ).

Deci, pornind de la distribuţia adimensională a energiei medii laminare $E_{a_l} = u^2_{a_l}$ vom putea determina distribuţia adimensională a energiei turbulente $E_{a_t} = u^2_{a_t} = E^\star_{a_l}$ $(\eta \to \eta_0)$, iar de aici, printr-o nouă transformare, vom putea deduce distribuţia mărimilor

$$\frac{\overline{u'^2}}{|\overline{u'^2}|_{\max}} \simeq \frac{\overline{w'^2}}{|\overline{w'^2}|_{\max}} \quad \text{şi} \quad \frac{\overline{v'^2}}{|\overline{v'^2}|_{\max}}.$$

3. Pentru a aplica aceste observaţii în cazul tridimensional al scurgerii prin conducte de secţiune constantă, de formă oarecare, să considerăm în figura 2 reprezentat un tronson de conductă, raportat la un sistem de axe tridimensional, $Ox$ fiind după direcţia curgerii (axa conductei).

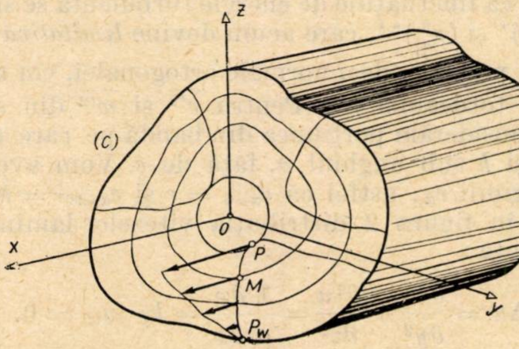


Fig. 2. — Secţiunea unui tronson de conductă cu spectrul curbelor $u^2_{a_l}$ = const. şi ortogonalele respective.

Mişcarea laminară determină reţeaua $u^2_{a_l}(z, y) =$ const. şi reţeaua ortogonală corespunzătoare.

Pentru a aduce problema la cazul bidimensional vom admite, ca o primă indicaţie, că interacţiunea vîrtejurilor purtătoare de energie turbulentă, corespunzătoare straturilor de energie cinetică medie $u^2_{a_e}(y, z) =$ const. se produce după distanţa minimă dintre aceste straturi, adică după reţeaua ortogonală corespunzătoare. Urmărind o astfel de curbă ortogonală $P_w$ $P$, începînd de la perete $P_w$, pînă la punctul de energie maximă al acestei curbe $P$ am decupat un caz bidimensional, unde $y =$ arcul $P_w M$, $\delta =$ arcul $P_w P$, $u^2_l = u^2_l(P)$, iar $u^2 = u^2(M)$.

Vom aplica observațiile de la punctul 2 acestui profil $u^2_{a_l}\left(\frac{P_w M}{P_w P}\right)$ obținînd printr-o primă transformare distribuția adimensională a energiei cinetice medie turbulente $(u^2_{a_l})^\star \simeq u^2_{a_l}(M)$ raportată la valoarea $u^2_l(P)$. Pentru conductele utilizate în practică, în general, ansamblul punctelor $P$ formează nucleul scurgerii, iar $u^2_l(P) = \text{const.}$

De asemenea, pentru fluctuațiile de energie vom obține distribuția limită $(u^2_{a_l})^{\star\star}$ și din banda cuprinsă între $(u^2_{a_l})^\star$ și $(u^2_{a_l})^{\star\star}$ distribuția mărimilor adimensionale $\frac{e}{e_M} = e_a(M)$ pentru fluctuații normale pe ortogonală și $\frac{h}{h_M} = h_a(M)$ pentru fluctuații tangente ortogonalei.

Aceste distribuții sînt raportate la valorile corespunzătoare maxime $e_M(M_e)$, $h_M(M_h)$ din punctele $M_e$, $M_h$ care vor diferi ca poziție în lungul arcului $P_w P$, ca și valorile acestor fluctuații maxime corespunzătoare. Vom putea trasa deci diagrama acestor rapoarte $e_a(M) = \text{const.}$, $h_a(M) = \text{const.}$, pentru determinarea cantitativă rămînînd doar de știut valoarea mărimilor $|\overline{u'^2}|_{\max}$ și $|\overline{v'^2_n}|_{\max}$.

Să observăm că fluctuațiile de energie turbulentă se situează în banda cuprinsă între $(u^2_{a_l})^\star$ și $(u^2_{a_l})^{\star\star}$, care acum devine *limitativă în spațiu*. Fluctuațiile paralele cu peretele, deci normale ortogonalei, vor avea alura lui $e_a$, un exemplu fiind totdeauna $\overline{u'^2}$. Pentru $\overline{v'^2}$ și $\overline{w'^2}$ din sistemul de axe ales va trebui să considerăm porțiunea din bandă pe care axa $Oy$ respectiv $Oz$ o taie între $e$ și $h$ sub unghiul $\alpha$, față de $e$. Vom avea deci de considerat variația mărimii $e_\alpha$, astfel că $e_{\alpha=0} = e$ și $e_{\alpha=90^\circ} = h$.

4. Analitic, în figura 2 distribuția vitezelor laminare este soluția problemei cunoscute:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} = k, \quad u_{(c)} = 0. \tag{4}$$

Fie $u(P) = u_e(y, z)$; $\frac{u(M)}{u_e(P)} = u_a(y, z)$, soluțiile cunoscute ale ecuației (4). Rețeaua de curbe ortogonale $u^2_a(y, z) = \text{const.}$ și ortogonala la $u^2_a(y, z) = \text{const.}$ formează un sistem de coordonate curbilinii pe care le vom nota prin $\zeta(y, z)$ și $\eta(y, z)$. Vom pune

$$\eta(y, z) = \frac{\int_0^s u^2_a\, ds}{\int_0^{s_P} u^2_a\, ds}, \tag{5}$$

unde $s$ este arcul măsurat de la perete, iar $s_P$ arcul măsurat pînă la punctul de energie $u^2$ maximă.

Introducînd mărimea adimensională $u_a$, ecuația (4) devine

$$u_e\,\Delta u_a + u_a\,\Delta u_e + 2\left(\frac{\partial u_e}{\partial y}\frac{\partial u_a}{\partial y} + \frac{\partial u_e}{\partial z}\frac{\partial u_a}{\partial z}\right) = K. \tag{6}$$

Sistemul de coordonate curbilinii ortogonale $\zeta\,(y,\,t)$ și $\eta\,(y,\,z)$ determină relațiile $y = y\,(\zeta,\,\eta)$ și $z = z\,(\zeta,\,\eta)$ astfel că avem

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\zeta}\,;\;\; \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\zeta},\\ \Delta = \frac{1}{h_\eta\,h_\zeta}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_\zeta}{h_\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{h_\eta}{h_\zeta}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\right],\end{gathered} \tag{7}$$

unde $h_\eta = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial\eta}\right)^2}$, $\quad h_\zeta = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial\zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right)^2}$ sînt coeficienții lui Lamé.

Cu ajutorul relațiilor de mai sus, ecuația (6) devine

$$\begin{aligned}&u_e\,\frac{1}{h_\eta\,h_\zeta}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_\zeta}{h_\eta}\,\frac{\partial u_a}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{h_\eta}{h_\zeta}\,\frac{\partial u_a}{\partial\zeta}\right)\right] + u_a\,\frac{1}{h_\eta\,h_\zeta}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_\zeta}{h_\eta}\,\frac{\partial u_e}{\partial\eta}\right) +\right.\\ &\qquad\left. + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{h_\eta}{h_\zeta}\,\frac{\partial u_e}{\partial\eta}\right)\right] + 2\left\{\left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2\right]\frac{\partial u_e}{\partial\eta}\,\frac{\partial u_e}{\partial\eta} +\right.\\ &\left. + \left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2\right]\frac{\partial u_e}{\partial\zeta}\,\frac{\partial u_a}{\partial\zeta} + \left(\frac{\partial u_e}{\partial\eta}\,\frac{\partial u_a}{\partial\zeta} + \frac{\partial u_a}{\partial\eta}\,\frac{\partial u_a}{\partial\zeta}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\,\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial z}\,\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)\right\} = k.\end{aligned}$$

Această ecuație este în general foarte complicată și dificil de mînuit. De exemplu, pentru un contur circular de rază $R$, raportat la $Oyz$ cu $O$ în centrul cercului, avem

$$u_e = u_e\,(0) = \text{const.}\,;\;\; u_a = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2;\;\; r^2 = y^2 + z^2.$$

Rețeaua ortogonală $u_a^2 = \alpha^2$ o formează cercurile concentrice $\frac{r}{R} = \sqrt{1 - \alpha}$ și razele pornite din centru, $\theta = \text{const.}$ Vom avea

$$y = r\cos\theta, \qquad z = r\sin\theta, \qquad s = R - r$$

astfel că

$$\zeta\,(y,\,z) = \theta, \qquad \eta\,(y,\,z) = \frac{\int_0^s u_a^2\,ds}{\int_0^R u_a^2\,ds} = \frac{\int_0^s u_a^2\,ds}{\psi_r},$$

$h_\eta = \dfrac{dr}{d\eta}$, $\quad h_\zeta = r$ și ecuația (8) devine

$$\frac{d}{d\eta}\left(r\,\frac{d\eta}{dr}\,\frac{du_a}{d\eta}\right) - r\,\frac{dr}{d\eta}\,k = 0. \tag{9}$$

Observînd că $\frac{d\eta}{dr} = -\frac{u_a^2}{\psi_r}$, obținem în cele din urmă ecuația

$$\frac{d^2(u_a)}{d\eta^2} + \frac{2}{u_a}\left(\frac{du_a}{d\eta}\right)^2 + \frac{C_1}{r}\,\frac{1}{u_a^2}\,\frac{du_a}{d\eta} + \frac{C_2}{u_a^4} = 0, \tag{10}$$

unde $C_1$ și $C_2$ cuprind constantele $\psi_r$, $k$. Această ecuație se integrează dificil, chiar pentru acest caz simplu, dacă o considerăm sub forma completă de mai sus. Să remarcăm însă că, în cazul unei transformări, $\eta_0 = \frac{s}{R}$ ecuația devine : $\frac{d^2 u_a}{d\eta_0^2} - \frac{R}{r}\frac{du_a}{d\eta_0} + k_0 = 0$, a cărei soluție reală nu cuprinde termenul logaritmic dat de $\frac{R}{r}\frac{du_a}{d\eta_0}$, fiind identică ecuației Poiseuille $\frac{d^2 u_a}{d\eta_0^2} + k_0 = 0$. În mod evident ecuația transformată, care trebuie să dea soluția $u_a(\eta)$ ca transformată a soluției Poiseuille $u_a(\eta_0)$, va avea forma,

$$\frac{d^2 u_a}{d\eta^2} + \frac{2}{u_a}\left(\frac{du_a}{d\eta}\right)^2 + \frac{c}{u_a^4} = 0, \tag{11}$$

a cărei soluție implicită este

$$\eta = 1 - \frac{15}{8}(1-u_a)^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{4}(1-u_a)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{8}(1-u_a)^{\frac{5}{2}}. \tag{12}$$

Această soluție nu se deosebește esențial ca alură de distribuția vitezei în scurgerea turbulentă dezvoltată într-o conductă de secțiune circulară, bineînțeles făcînd $\eta \to \eta_0$. Vom avea mai departe

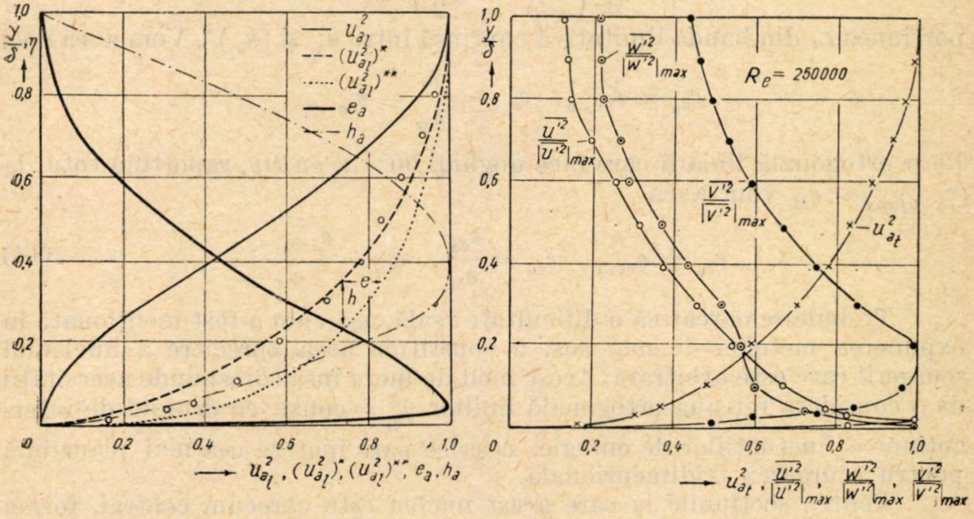
$$\frac{\overline{u'^2}}{|\overline{u'^2}|_M} \simeq \frac{\overline{w'^2}}{|\overline{w'^2}|} \simeq \frac{(u_a^2)^\star - u_a^2}{|(u_a^2)^\star - u_a^2|_M}, \qquad \frac{\overline{v'^2}}{|\overline{v'^2}|_M} \simeq \frac{\eta_0 - \eta}{|\eta_0 - \eta|_M}. \tag{13}$$

În figura 3 am reprezentat aceste distribuții, deduse pur teoretic (fig. 3 *a*), în comparație cu unele rezultate (fig. 3 *b*) experimentale [4], [5].

Cu toate limitările ipotezei datorite fluctuațiilor din centrul conductei, se poate totuși remarca faptul că alura calitativă a celor două distribuții de fluctuații : paralele cu peretele ($\overline{u'^2}$ și $\overline{w'^2}$) și normale peretelui ($\overline{v'^2}$) diferă esențial, mai ales ca punct de situare a maximului, lucru arătat de distribuțiile teoretice $e_a$ și $h_a$. De asemenea, distribuția energiei medii $u_{a_l}^2$ nu diferă esențial de $(u_{a_l}^2)^\star$, sub rezerva studierii influenței numărului $\mathcal{R}e$ asupra acestor transformări.

Aceast caz simplu s-a rezolvat totuşi dificil analitic pornind de la ecuația scurgerii laminare (4). De aceea, pentru cazuri mai complicate, cînd conturul nu este circular, vom adopta o metodă grafo-analitică în următoarele trepte :

*a*) Presupunem cunoscută soluția ecuației (4) așa cum se deduce cu ajutorul metodelor de integrare, sau prin analogia cu membrana lui Prandtl, adică știm spectrul curbelor de nivel ale vitezei laminare $u_{a_l}$ cu valorile respective.



*a* *b*

**Fig. 3. — Distribuția energiei medii a fluctuațiilor turbulente pe raza unei conducte circulare. Fig. 3 *a* arată repartiția mărimilor $u^2_{a_l}$, a transformatei $\left(u^2_{a_l}\right)^* = u^2_{a_l}$ și a mărimilor $e_a = \frac{e}{e_M} \simeq \frac{\overline{u'^2}}{|\overline{u'^2}|_{\max}}$ și $h_a = \frac{h}{h_M} \simeq \frac{\overline{v'^2}}{|\overline{v'^2}|_{\max}}$. Fig. 3 *b* cuprinde datele experimentale [4] pentru $R_e = 250\,000$. Punctele × indică pe $u^2_{a_t}$, ○ – $\frac{\overline{u'^2}}{|\overline{u'^2}|_{\max}}$, ◉ – $\frac{\overline{w'^2}}{|\overline{w'^2}|_{\max}}$, ● – $\frac{\overline{v'^2}}{|\overline{v'^2}|_{\max}}$.**

*b*) Trasăm spectrul liniilor de nivel pentru $u^2_{a_l}(y, z)$ cu valorile respective și apreciem practic nucleul scurgerii, adică acolo unde $u_p \simeq$ const.

*c*) Trasăm curbele ortogonale, fie analitic, fie grafic, pornind de la anumite puncte pe contur, suficient de distanțate, pentru ca să evităm ambiguitățile date de întîlnirea curbelor ortogonale și astfel ca să prindem în această rețea nucleul scurgerii.

*d*) Izolăm un profil $\frac{u^2_l}{u^2_{e_P}} = u^2_{a_l}(\eta_s)$, $\eta_s = \frac{s}{s_P}$, unde $P$ corespunde valorii maxime a energiei $u^2_{a_l}$.

*e*) Aplicăm acestui profil, reprezentat bidimensional, transformarea de scară (1), obținînd distribuția $(u^2_{a_l})^*(\eta) \rightarrow u^2_{a_t}(\eta_0)$.

*f*) Transformăm pe $(u_{a_l}^2)^\star$, obţinem pe $(u_{a_l}^2)^{\star\star}$ şi deci

$$e_{a_u} = \frac{(u_{a_l}^2)^{\star\star} - (u_{a_l}^2)^\star}{|(u_{a_l}^2)^{\star\star} - (u_{a_l}^2)^\star|_M} \simeq \frac{\overline{u'^2}}{|\overline{u'^2}|_M},$$

determinînd astfel distribuţia fluctuaţiilor de energie în lungul scurgerii.

Pentru a obţine distribuţia fluctuaţiilor în secţiune după o direcţie oarecare ce face unghiul $\alpha\left(0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ cu peretele, o să considerăm porţiunea $e_\alpha$ din banda limitativă cuprinsă între $u_{a_l}$ şi $(u_{a_l})^\star$. Vom avea deci

$$e_{a_u} = e_{a\alpha=0}, \quad e_{a_n} = \frac{h}{h_M} = e_{a\alpha=90^\circ}.$$

Pe o ortogonală liniară care face unghiul 90°—$\alpha$ cu $Oy$, raportînd totul la $(e_{\alpha=0})_{\max} = e_M$ vom avea

$$e_{a_u} = e_{a\alpha=0}, \quad e_{a_v} = \frac{e_{a\alpha}}{e_M}, \quad e_{a_w} = \frac{e_{a=90-\alpha}}{e_M}. \tag{14}$$

Trebuie remarcat că o dificultate reală, aşa cum a fost menţionată în expunerea metodei de mai sus, o constituie acea apreciere a nucleului scurgerii care este arbitrară. Acest mod de lucru însă corespunde necesităţii de a considera reţeaua ortogonală liniilor $u_{a_l}^2 = \text{const.}$ ca drumul de interacţiune a fluctuaţiilor de energie, ceea ce pare ipoteza cea mai plauzibilă pentru scurgerea tridimensională.

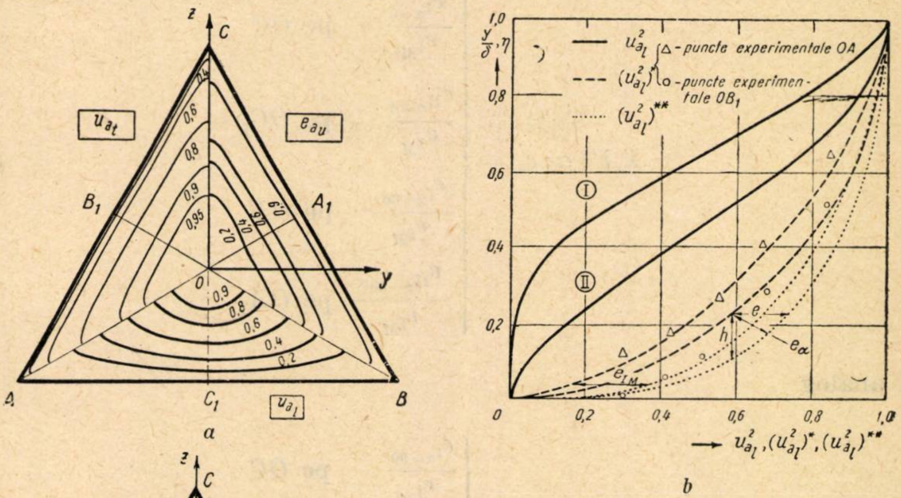
Pentru secţiunile la care acest nucleu este oarecum central, forma lui apropiindu-se de un cerc, se iveşte posibilitatea unei simplificări. Anume, se poate considera punctul unde $u_{a_l}^2 = \text{maxim}$ (de obicei centrul cercului-nucleu) drept punctul la care se raportează toate decupările de repartiţii bidimensionale, adică ajungem în cazul bidimensional unind acest punct cu orice punct de pe contur, în linie dreaptă. Este clar că pentru colţurile unui dreptunghi alungit, sau pentru anumite puncte ale unei elipse alungite, această simplificare nu mai este satisfăcătoare, dar pentru pătrat, triunghi echilateral, trapez isoscel cu rapoarte de ordinul unităţii între înălţime şi baze, o vom putea utiliza.

5. *Exemple ilustrative.* Vom considera două cazuri pentru care avem unele date experimentale : triunghi echilateral şi trapez isoscel de formă dată.

*a*) Fie triunghiul echilateral de latură $l$ din figura 4 pentru care cunoaştem distribuţia de viteze în scurgerea laminară, raportată la axele de figură, sub forma

$$\begin{gathered} u_{a_l} = (1 + z_a)\,[(2 - z_a)^2 - 3y_a^2], \quad u_a = \frac{u}{u_0}, \\ y_a = \frac{y\,2\sqrt{3}}{l}, \quad z_a = \frac{2\sqrt{3}\,z}{l}. \end{gathered} \tag{15}$$

Se consideră că interacţiunea vîrtejurilor se produce după o reţea de ortogonale din care luăm ca suficiente pe $OA$, $OC_1$, $OB$ şi celelalte analoage. Pe diagrama 4 *a* în porţiunea $OAB$ s-a trasat reţeaua $u_{a_l} = \text{const.}$ conform formulei (14). Pe diagrama 4 *b* s-au reprezentat două profile de



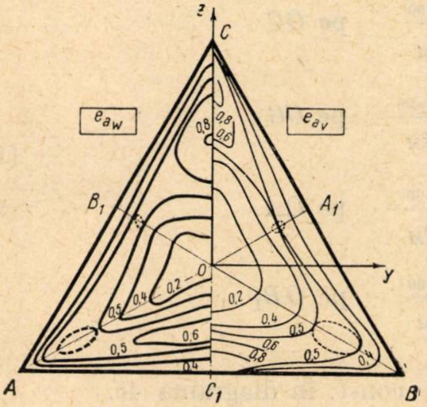


Fig. 4. — Determinarea distribuţiei adimensionale a vitezelor medii şi a fluctuaţiilor turbulente într-o conductă de secţiune triunghi echilateral·

Fig. 4 *a*. — Distribuţia adimensională a mărimilor $u_{a_l}$, $(u_{a_l})^\star \simeq u_{a_l}$, $e_a \simeq k_u \overline{u'^2}$.

Fig. 4 *b*. — Repartiţia adimensională a mărimilor $u^2_{a_l}$, $\left(u^2_{a_l}\right)^\star$, $\left(u^2_{a_l}\right)^{\star\star}$ după 2 ortogonale OB şi $OC_1$.

Fig. 4 *c*. — Distribuţia adimensională a mărimilor $e_{a_v} \simeq k_v \cdot \overline{v'^2}$, $e_{a_w} = k_w \overline{w'^2}$.

energie $u^2_{a_l}$ $(\eta_0)$, corespunzătoare ortogonalelor $OA$ şi $OB_1$, care au fost transformate o dată, obţinîndu-se $\left(u^2_{a_l}\right)^\star \simeq u^2_{a_t}$; cu ajutorul celei de-a doua transformări $\left(u^2_{a_l}\right)^{\star\star} \simeq \left(u^2_{a_t}\right)^\star$ s-au determinat diferenţele $e = \left(u^2_{a_l}\right)^{\star\star} - \left(u^2_{a_l}\right)^\star$ şi $h = \eta_0 - \eta$. S-a considerat drept unică mărime de comparaţie valoarea $e_{I_M}$, astfel că mărimile adimensionale ce reprezintă fluctuaţiile de energie sînt raportate la această valoare. Avem deci

$$k_u \overline{u'^2} \simeq e_{a_u} = \begin{cases} \dfrac{e_I}{e_{I_M}} \text{ pe } OA,\ OB,\ OC, \\[2ex] \dfrac{e_{II}}{e_{I_M}} \text{ pe } OA,\ OB,\ OC_1, \end{cases} \tag{16}$$

rețeaua $e_{a_u} =$ const. fiindt trasată în porțiunea $OBC$ din figura 4 *a*. Pentru fluctuațiile $\overline{v'^2}$ și $\overline{w'^2}$ avem de considerat unghiul $\alpha$ al axelor $Oy$, $Oz$ cu ortogonala corespunzătoare. Avem deci

$$k_v \overline{v'^2} \simeq e_{a_v} = \begin{cases} \dfrac{e_{\mathrm{I}_{\alpha=0}}}{e_{\mathrm{I}_M}} & \text{pe } OC \\[2ex] \dfrac{e_{\mathrm{II}_{\alpha=0}}}{e_{\mathrm{I}_M}} & \text{pe } OC_1 \\[2ex] \dfrac{e_{\mathrm{I}_{\alpha=60^\circ}}}{e_{\mathrm{I}_M}} & \text{pe } OB \\[2ex] \dfrac{e_{\mathrm{II}_{\alpha=60^\circ}}}{e_{\mathrm{I}_M}} & \text{pe } OA_1 \end{cases} \tag{17}$$

și analog

$$k_w \overline{w'^2} \simeq e_{a_w} = \begin{cases} \dfrac{e_{\mathrm{I}_{\alpha=90^\circ}}}{e_{\mathrm{I}_M}} & \text{pe } OC \\[2ex] \dfrac{e_{\mathrm{II}_{\alpha=90^\circ}}}{e_{\mathrm{I}_M}} & \text{pe } OG \\[2ex] \dfrac{e_{\mathrm{I}_{\alpha=30^\circ}}}{e_{\mathrm{I}_M}} & \text{pe } OA \\[2ex] \dfrac{e_{\mathrm{I}_{\alpha=30^\circ}}}{e_{\mathrm{I}_M}} & \text{pe } OB_1 \end{cases} \tag{18}$$

trasîndu-se curbele $e_{a_v} =$ const. și $e_{a_w} =$ const. în diagrama 4*c*.

Trebuie remarcat pe de o parte că raportarea la o singură valoare $e_{\mathrm{I}_M}$ nu este justificată, întrucît influența colțurilor și turbulența nucleului scurgerii alterează considerațiile pur teoretice de mai sus, așa că sînt foarte probabile organizări ale fluctuațiilor de tipul celor indicate prin linii punctate în figura 4 *c*. Pe de altă parte însă, cu toate limitările de comportament fizic ale metodei expuse, se observă diferențe nete între spectrele fluctuațiilor $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$ și $\overline{w'^2}$, raportate la axele din figură. Diferența de distribuție între componenta de fluctuație normală pe perete și cea tangențială peretelui este vizibilă clar în spectrele prezentate.

În privința comparării cu rezultate experimentale, pentru acest caz nu posedăm decît distribuția vitezelor medii în regim turbulent la un număr Reynolds $\simeq 10^5$ [5].

În figura 4 *b* s-au indicat punctele experimentale pentru ortogonalele *OC* şi *OA*. Se observă imediat diferenţa dintre cele două distribuţii, sesizată calitativ de distribuţia teoretică a metodei propuse. Diferenţa înspre perete pentru repartiţia după $OC_1$ se explică prin faptul că transformarea (1), aşa cum am mai arătat 3 nu sesizează influenţa numărului $\mathcal{R}e$, rugozităţii etc.

*b*) Să considerăm acum trapezul isoscel din figura 5 *a*, unde s-au reprezentat curbele $u_{a_l} = \text{const.}$, obţinute prin metoda practică a analogiei cu membrana. Luăm ca origine a axelor de coordonate punctul *O*, în care $u_{a_l} = 1$ (maximum), axele fiind dirijate ca în figură. Alegem ortogonalele următoare : $OA_1$, $OA_2$, $OA_0$ care sînt normalele coborîte din *O* pe laturile trapezului şi cele două linii curbe *OB* şi *OC* care urmăresc pe o bună porţiune bisectoarele unghiurilor *B* şi respectiv *C*.

Am decupat astfel 5 cazuri bidimensionale şi reprezentăm $u_{a_l}^2 = u_{a_l}^2\,(s_a)$, unde $s_a = \dfrac{MA_0}{OA_0}$ şi analogele, în figura 5 *b*. Se remarcă imediat că profilele ortogonalelor $OA_1$, $OA_2$, $OA_0$ sînt practic identice, în timp ce distribuţiile după ortogonalele *OB* şi *OC* sînt diferite de primele. Aplicîndu-le transformarea (1) se obţine distribuţia energiei medii turbulente în ipoteza organizării statistice limitative a fluctuaţiilor de energie turbulentă. Se observă uşor din figura 5 *b* că prin transformare cele 5 distribuţii diferite s-au apropiat foarte mult, existînd o oarecare deosebire

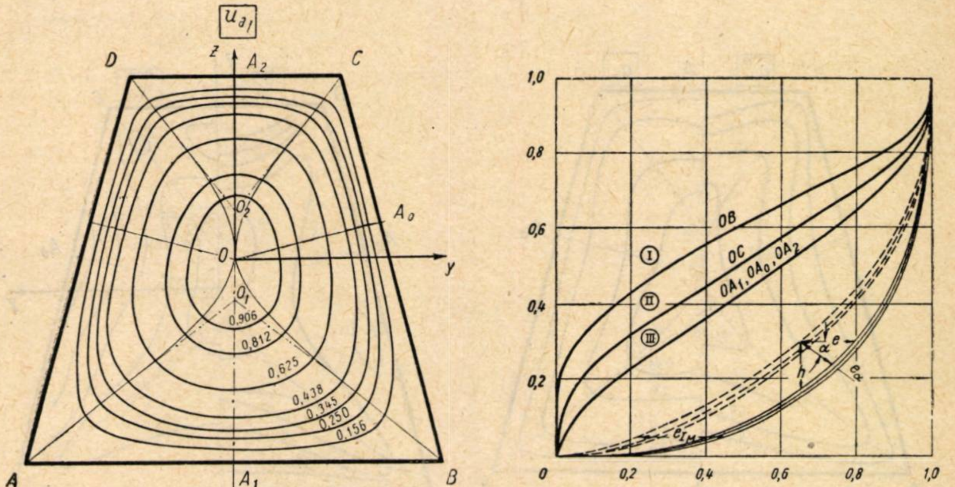


Fig. 5. — Determinarea distribuţiei adimensionale a vitezelor medii şi a fluctuaţiilor turbulente într-o conductă de secţiune un trapez isoscel.

Fig. 5 *a*. — Distribuţia adimensională a vitezelor în scurgerea laminară.

Fig. 5 *b*. — Repartiţia energeiei medii laminare, a transformatei (energia medie turbulentă) şi a celei de a doua transformate după cele 5 ortogonale.

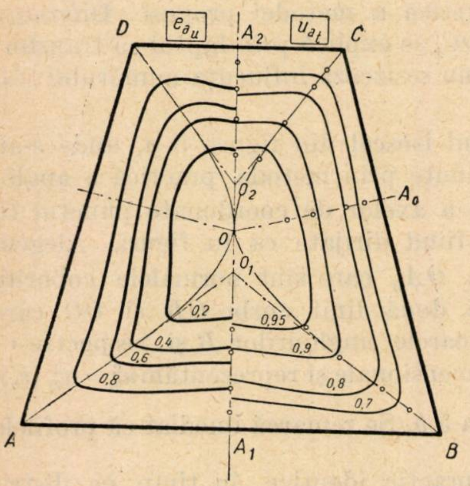

D
$e_{a_u}$
A2
$u_{a_t}$
C
O2
A0
O
O1
0,2
0,95
0,4
0,9
0,6
0,8
0,8
0,7
A
A1
B

Fig. 5 c. — Distribuţia adimensională a vitezei medii a şi a cantităţii $e_{a_u} = \frac{e}{e_{I_M}}$ deduse teoretic.

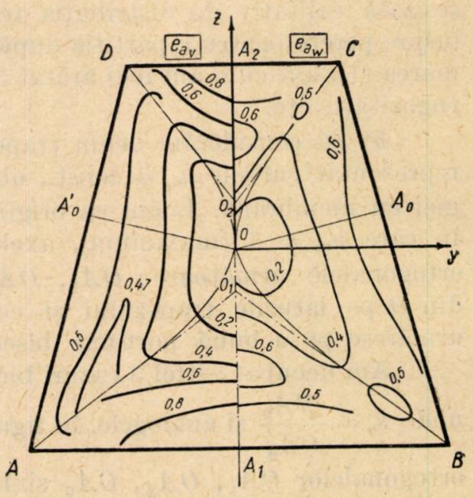

z
D
$e_{a_v}$
A2
$e_{a_w}$
C
0,8
0,6
0,5
0,6
0,6
A'0
O2
A0
O
y
0,2
0,47
O1
0,2
0,5
0,4
0,6
0,4
0,6
0,5
0,5
0,8
A
A1
B

Fig. 5 d. — Distribuţia adimensională a cantităţilor $e_{a_v} = \frac{e_\alpha}{e_{I_M}} \simeq k_v \overline{v'^2}$; $e_{a_w} = \frac{e_\alpha}{e_{I_M}} \simeq k_w \overline{w'^2}$ deduse teoretic.

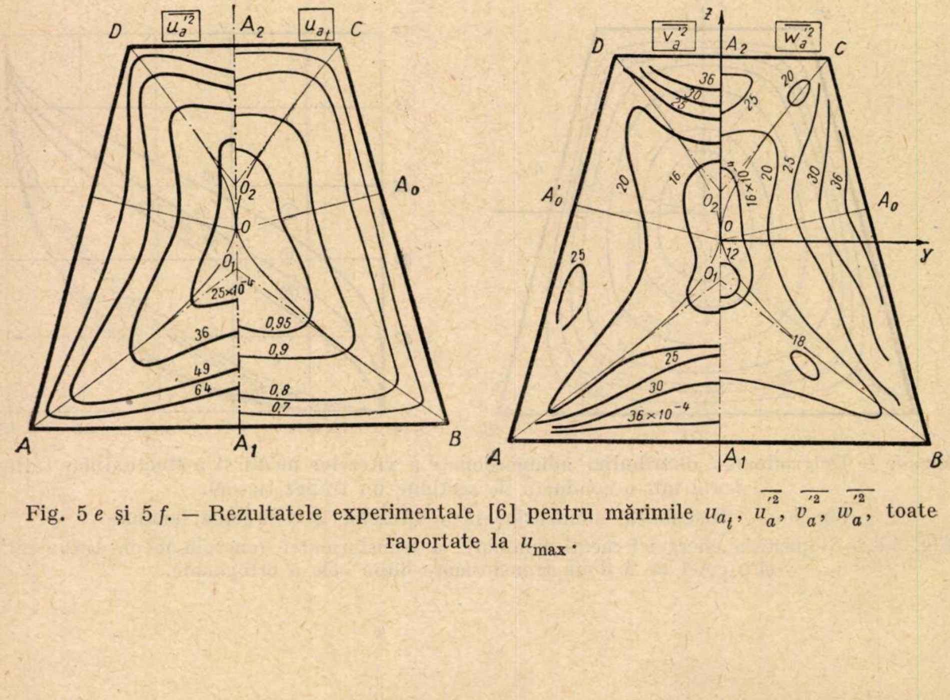

D
$\overline{u_a'^2}$
A2
$u_{a_t}$
C
O2
A0
O
O1
25×10⁻⁴
36
0,95
0,9
49
64
0,8
0,7
A
A1
B
z
D
$\overline{v_a'^2}$
A2
$\overline{w_a'^2}$
C
36
20
25
25
20
20
16
16×10⁻⁴
20
25
30
36
A'0
O2
A0
O
12
y
25
O1
18
25
30
36×10⁻⁴
A
A1
B

Fig. 5 e şi 5 f. — Rezultatele experimentale [6] pentru mărimile $u_{a_t}$, $\overline{u_a'^2}$, $\overline{v_a'^2}$, $\overline{w_a'^2}$, toate raportate la $u_{\max}$.

între cele 3 distribuții normale pe latură pe de o parte și cele două distribuții din colțuri pe de altă parte.

Transformînd încă o dată aceste distribuții se obțin distribuțiile limită pentru fluctuațiile de energie turbulentă susținute de repartițiile de energie medie. Raportînd totul la $e_{\mathrm{I}_M}$, găsim

$$k_u \overline{u}'^2 \simeq e_{a_u} = \begin{cases} \dfrac{e_{\mathrm{III}_{\alpha=0}}}{e_{\mathrm{I}_M}} & \text{pe } OA,\ OA,\ OA_0, \\[2ex] \dfrac{e_{\mathrm{II}_{\alpha=0}}}{e_{\mathrm{I}_M}} & \text{pe } OC, \\[2ex] \dfrac{e_{\mathrm{I}_{\alpha=0}}}{e_{\mathrm{I}_M}} & \text{pe } OB; \end{cases} \tag{19}$$

$$k_v \overline{v}'^2 \simeq e_{a_v} = \begin{cases} \dfrac{e_{\mathrm{III}_{\alpha=0}}}{e_{\mathrm{I}_M}} & \text{pe } OA_1,\ OA_2, \\[2ex] \dfrac{e_{\mathrm{III}_{\alpha=75^\circ}}}{e_{\mathrm{I}_M}} & \text{pe } OA_0, \\[2ex] \dfrac{e_{\mathrm{II}_{\alpha=37^\circ}}}{e_{\mathrm{I}_M}} & \text{pe } OD, \\[2ex] \dfrac{e_{\mathrm{I}_{\alpha=53^\circ}}}{e_{\mathrm{I}_M}} & \text{pe } OA; \end{cases} \tag{20}$$

$$k_w \overline{w}'^2 \simeq e_{a_w} = \begin{cases} \dfrac{e_{\mathrm{III}_{\alpha=90^\circ}}}{e_{\mathrm{I}_M}} & \text{pe } OA_1,\ OA_2, \\[2ex] \dfrac{e_{\mathrm{III}_{\alpha=15}}}{e_{\mathrm{I}_M}} & \text{pe } OA_0, \\[2ex] \dfrac{e_{\mathrm{II}_{\alpha=53^\circ}}}{e_{\mathrm{I}_M}} & \text{pe } OC, \\[2ex] \dfrac{e_{\mathrm{I}_{\alpha=37^\circ}}}{e_{\mathrm{I}_M}} & \text{pe } OB. \end{cases} \tag{21}$$

Curbele $e_{a_u} = \text{const.}$, $e_{a_v} = \text{const.}$ și $e_{a_w} = \text{const.}$, ca și $(u_{a_t})^\star = \text{const.}$, calculate în acest mod se găsesc trasate în figurile 5 *c* și 5 *d*.

În figurile 5 *e* și 5 *f* se găsesc rezultatele experimentale comparative acestui caz [6]. Cu limitările precizate de la început pentru acest mod de evaluare a distribuțiilor de energie medie și fluctuantă, precum și cu erorile inerente măsurătorilor experimentale, se pot face totuşi următoarele observaţii :

*a*) Distribuţia energiei medii (sau a vitezelor medii) corespunde cantitativ chiar cu rezultatele experimentale, în limita unor erori de ±10 %, mai ales lîngă perete. Acest lucru rezultă din figura 5 *c* unde s-au trecut rezultatele experimentale corespunzătoare celor deduse teoretic. Se remarcă totuşi că, spre deosebire de triunghiul echilateral, distribuţiile după diferitele ortogonale s-au apropiat ceva mai mult, acest trapez fiind în orice caz mai aproape de secţiunea circulară, decît triunghiul echilateral.

*b*) Distribuţiile de fluctuaţii de energie, deşi interesante numai ca spectru calitativ, arată deosebirea extrem de importantă dintre distribuţia fluctuaţiilor paralele cu peretele şi cele normale pe perete. Într-adevăr distribuţia fluctuaţiei $\overline{u'^2_a}$ arată o creştere continuă către perete, lucru pe care îl indică în mod clar variaţia diferenţei *e*, al cărei maxim se situează aproximativ către $\frac{y}{s} \simeq 0{,}05 \div 0{,}09$.

În acelaşi timp fluctuaţiile normale pe perete arată un maxim situat către $\frac{y}{s} \simeq 0{,}3-0{,}4$, după cum se vede din variaţia diferenţelor *h*, fapt care iese din cadrul erorilor experimentale. În acest sens sînt de comparat figurile 5 *d* şi 5 *f* pe care sînt trasate spectrele fluctuaţiilor $\overline{v'^2_a}$ şi $\overline{w'^2}$ raportate la axele din figură. Atît timp cît aceste mărimi aparţin unei ortogonale, ele se comportă în mod clar diferit, după cum reprezintă diferenţele $e_{\alpha=0}$ sau $e_{\alpha=90°}$. Astfel $\overline{w'^2_a}$ este diferenţa $e_{\alpha=90°}$ pe ortogonalele $OA_1$ şi $OA_2$ avînd maximul către mijloc, lucru confirmat de rezultatele experimentale din figura 5 *f*, în timp ce pe ortogonala $OA_0$ se comportă aproximativ ca diferenţa $e_{\alpha=0}$, crescînd continuu către perete. Analog mărimea $\overline{v'^2_a}$ urmează legea diferenţei $e_{\alpha=0}$ pe ortogonalele $OA_1$ şi $OA_2$, iar legea diferenţei $e_{\alpha=90°}$ pe ortogonala $OA_0$.

De asemenea, pe ortogonalele $OB$ şi $OC$, unde $0° < \alpha < 90°$ distribuţiile obţinute concordă calitativ satisfăcător cu rezultatele experimentale. Sînt de remarcat în această privinţă *curbele* $\overline{w'^2_a}$ = *const. închise* formate pe $OB$ şi $OC$, de asemenea *curba închisă* $\overline{v'^2_a}$ = *const.* apărută experimental pe ortogonala normală peretelui $AD$, deplasată întrucîtva, însă în orice caz de aceeaşi natură cu spectrul teoretic.

*c*) Diferenţele dintre curbele deduse teoretic şi cele rezultate experimental sînt mai marcante în figurile 5 *d* şi 5 *f* şi se datoresc, în afara cauzelor arătate anterior, şi modului de reprezentare a acestor curbe. Într-adevăr ar fi de reexaminat datele experimentale în privinţa reprezentării mărimilor $\overline{v'^2_a}$ = const. şi $\overline{w'^2_a}$ = const. întrucît se pare că datele sînt incomplete pentru trasarea cu certitudine a acestor curbe. În plus, este clar că influenţa colţurilor este destul de pronunţată, eventual şi starea de rugozitate a pereţilor, modul de interacţiune dintre straturile de fluid, aspecte pe care ipoteza calitativă expusă nu poate să le prindă deocamdată.

6. *Concluzii.* Exemplele prezentate par să justifice următoarele concluzii în legătură cu ipoteza organizării statistice limitative a fluctuaţiilor de energie turbulente.

1) Banda cuprinsă între distribuţiile $E_a$ şi $(E_a)^*$ unde $E_a$ este distribuţia de energie medie dă într-adevăr o măsură a repartiţiei fluctuaţiilor chiar şi în spaţiu. Fluctuaţia de energie considerată după o direcţie oarecare faţă de ortogonala de variaţie a lui $E_a$ se înscrie într-adevăr în banda menţionată ca porţiunea corespunzătoare.

2) Interacţiunea straturilor de fluid din scurgerea unidimensională după normalele dintre straturi se pare că este cea mai adecvată ipoteză în tratarea turbulenţei tridimensionale în sensul ipotezei expuse.

3) Practic, obţinerea spectrului calitativ al mărimilor medii şi fluctuaţiilor pătratice ale mişcării turbulente din spectrul cunsocut al mărimilor medii laminare este o indicaţie în orice caz folositoare chiar în utilizarea firului cald. Ea poate servi pentru simplificarea măsurătorilor şi chiar pentru corectarea unor rezultate.

O comparaţie destul de sugestivă, dar limitată totuşi la posibilităţile actuale, ar arăta că acest mod *geometric* de determinare a unor mărimi adimensionale în mişcarea turbulentă seamănă întrucîtva cu *vizualizarea* ca metodă experimentală generală în mecanica fluidelor, rezultatele calitative obţinute fiind de multe ori utile şi uşor de obţinut.

4) Cunoscîndu-se scurgerea fundamentală, laminară, în conducte de secţiune variabilă se poate extinde problema şi la acest caz, lucru interesant pentru difuzoare, colectoare de suflerii, canale variabile etc.

5) Dependenţa acestei transformări de numărul $\mathcal{R}e$ şi de celelalte condiţii ale scurgerii medii, precum şi o limitare cantitativă a energiei de agitaţie turbulentă este o problemă ce rămîne deschisă.

*Primită la redacţie la 18 aprilie 1961.*

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ВЕЛИЧИН ПРИ ОДНОМЕРНОМ ТЕЧЕНИИ В ТРУБОПРОВОДАХ ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

### РЕЗЮМЕ

В настоящей работе автор распространяет соображения о статистической организации флюктуации турбулентной энергии двухмерного случая на трехмерный случай. Исходя из известного распределения средней ламинарной энергии в трубопроводе произвольного сечения, получается окончательно при помощи введенных автором преобразований, спектр безразмерных величин средней энергии и флюктуации в развивающемся турбулентном течении. Получаются значительные разности между распределениями флюктуаций по различным направлениям, что показывает внутренний физический

смысл ограничительного диапазона между средним распределением энергии и ее преобразованной.

Сравнение экспериментальных результатов, особенно в случае трубопровода с сечением в виде равнобедренной трапеции, удовлетворительное.

## ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Безразмерное распределение ламинарной энергии $E_{a_e}$, пресбразованной $(E_{a_e})^*$, представляющей собой распределение средней турбулентной энергии; преобразованной $(E_{a_e})^{**}$, представляющей собой предельное распределение турбулентных флюктуаций и распределения величин $e_a = \frac{e}{e_M}$ и $h_a = \frac{h}{h_M}$, в теоретическом случае $E_{a_e} = \sin^2 \frac{\pi}{2} \frac{y}{\delta}$.

Рис. 2. — Сечение части трубопровода со спектром кривых $u_{a_e}^2 =$ конст. и соответствующие ортогональные линии.

Рис. 3. — Распределение средней энергии и турбулентных флюктуаций по радиусу круглого трубопровода. Рис. 3*a* — показывает распределение величин $u_l^2$, преобразованной $\left(u_l^2\right)^* = u_{a_t}$ и величин $e_a = \frac{e}{e_M} \simeq \frac{\overline{u'^2}}{\left|\overline{u'^2}\right|_{\max}}$ и $h_a = \frac{h}{h_M} \simeq \frac{\overline{v'^2}}{\left|\overline{a'^2}\right|_{\max}}$. Рис. 3*b* содержит экспериментальные данные [4] при $Re = 250000$. Обозначено: $X - u_{a_t}^2$, ○ — $\frac{\overline{u'^2}}{\left|\overline{u'^2}\right|_{\max}}$, ◉ — $\frac{\overline{w'^2}}{\left|\overline{w'^2}\right|_{\max}}$, ● — $\frac{\overline{v'^2}}{\left|\overline{v'^2}\right|_{\max}}$.

Рис. 4. — Определение безразмерного распределения средней скорости и турбулентных флюктуаций в трубопроводе с сечением в виде равностороннего треугольника.

Рис. 4*a*. — Безразмерное распределение величин $u_{a_l}$, $(u_{a_l})^* \simeq u_{a_t}$, $e_a \simeq k_u \overline{u'^2}$.

Рис. 4*b*. — Безразмерное распределение величин $u_{a_l}^2$, $\left(u_{a_l}^2\right)^*$, $\left(u_{a_l}^2\right)^{**}$ по двум ортогональным линиям $OB$ и $OC_1$.

Рис. 4*c*. — Безразмерное распределение величин $e_{a_v} \simeq k_v \cdot \overline{v'^2}$, $e_{a_w} \simeq k_w \cdot \overline{w'^2}$.

Рис. 5. — Определение безразмерного распределения средних скоростей и турбулентных флюктуаций в трубопроводе с сечением в виде равнобедренной трапеции.

Рис. 5*a*. — Безразмерное распределение скоростей при ламинарном течении.

Рис. 5*b*. — Распределение средней ламинарной энергии, преобразованной (средней турбулентной энергии) и второй преобразованной по 5 ортогональным линиям.

Рис. 5*c*. — Безразмерное распределение средней скорости и количества $e_{a_u} = \frac{e}{e_{I_M}}$, выведенного теоретическим путем.

Рис. 5*d*. — Безразмерное распределение количеств $e_{a_v} = \frac{e_\alpha}{e_{I_M}} \simeq k_v \overline{v'^2}$; $e_{a_w} = \frac{e_\alpha}{e_{I_M}} \simeq k_w \overline{w'^2}$, выведенного теоретическим путем.

Рис. 5*e* и 5*f* — Экспериментальные результаты [6] для количеств $u_{af}$, $\overline{u'^2_a}$, $\overline{v'^2_a}$, $\overline{w'^2_a}$, всех отнесенных к $u_{\max}$.

# DISTRIBUTION OF TURBULENT MEAN CHARACTERISTICS IN THE ONE-DIMENSIONAL FLOW THROUGH CONDUITS OF ARBITRARY CROSS-SECTION

## ABSTRACT

This paper extends from the two-dimensional to the three-dimensional case the considerations on the statistical organization of turbulent energy fluctuations. Proceeding from the distribution of the known laminar mean energy in a conduit of arbitrary cross-section, the pattern of dimensionless mean characteristics (energy and fluctuations) in a developed turbulent flow are obtained with the aid of the transformations introduced by the author. Important differences are found between fluctuation distributions upon different directions, which show the intrinsic physical meaning of the limiting strip between the mean energy distribution and its transformed distribution.

A comparison with experimental results seems to be satisfactory particularly in the case of a conduit of isosceles-trapeze cross-section.

## CAPTIONS

Fig. 1. — Dimensionless distribution of the laminar energy $E_{a_l}$ of the transformed distribution $(E_{a_l})^*$ which represents the distribution of the mean turbulent energy of the transformed distribution $(E_{a_l})^{**}$ which represents the limit distribution of turbulent fluctuations and the distributions of the quantities $e_a = \frac{e}{e_M}$ and $h_a = \frac{h}{h_M}$ in the theoretical case $E_{a_l} = \sin^2 \frac{\pi}{2} \frac{y}{\delta}$.

Fig. 2. — Cross-section of a conduit element with the pattern of curves $u^2_{a_l} = \text{const.}$ and the respective ortohgonal curves.

Fig. 3. — Distribution of mean energy and of turbulent fluctuations on the radius of a circular conduit. Figure 3 *a* shows the distribution of the quantities $u^2_{a_l}$, $(u^2_{a_l})^* \simeq u^2_{a_l}$, $e_a = \frac{e}{e_M} \simeq \frac{\overline{u'^2}}{|\overline{u'^2}|_{\max}}$ and $h_a = \frac{h}{h_M} \approx \frac{\overline{v'^2}}{|\overline{v'^2}|_{\max}}$.

Figure 3 *b* includes experimental data [4] for $R_e = 250\,000$

$$X - u^2_{a_l},\ \circ - \frac{\overline{u'^2}}{|\overline{u'^2}|_{\max}},\ \odot - \frac{\overline{w'^2}}{|\overline{w'^2}|_{\max}},\ \bullet - \frac{\overline{v'^2}}{|\overline{v'^2}|_{\max}}.$$

Fig. 4. — Determination of the dimensionless distribution of mean velocities and of turbulent fluctuations in a conduit of equilateral triangle cross-section.

Fig. 4 *a*. — Dimensionless distribution of the quantity $u_{a_l}$, $(u_{a_l})^{**} \approx u_{a_l}$, $e_a \simeq k_u \overline{u'^2}$.

Fig. 4 *b*. — Dimensionless distribution of the quantities $u^2_{a_l}$, $(u^2_{a_l})^*$, $(u^2_{a_l})^{**}$ upon 2 orthogonal curves $OB$ and $OC_1$.

Fig. 4 *c*. — Dimensionless distribution of the quantities $e_{a_v} \simeq k_v \cdot \overline{v'^2}$, $e_{a_w} = k_w \cdot \overline{w'^2}$.

Fig. 5. — Determination of the dimensionless distribution of mean velocities and of turbulent fluctuations in a conduit of isosceles trapeze cross-section.

Fig. 5 *a*. — Dimensionless distribution of velocities in laminar flow.

Fig. 5 *b*. — Distribution of the laminar mean energy, of its first transformed (mean turbulent energy) and of its second transformed, upon the 5 orthogonal curves.

Fig. 5 *c*. — Dimensionless distribution of the mean velocity and of the quantity $e_{a_u} = \frac{e}{e_{I_M}} \simeq$ theoretically deduced.

Fig. 5 *d*. — Dimensionless distribution of the quantities $e_{a_v} = \frac{e_\alpha}{e_{I_M}} \simeq k_v \overline{v'^2}$; $e_{a_w} \frac{e_\alpha}{e_{I_M}} \simeq$ $\simeq k_w \overline{w'^2}$ theoretically deduced.

Fig. 5 *e* and *f*. — Experimental results [6] for the quantities $u_{a_t}, \overline{u'^2_a}, \overline{v'^2_a}, \overline{w'^2_a}$ all of them being referred to $u_{\max}$.

## BIBLIOGRAFIE

1. F. H. CLAUSER, *The turbulent boundary-layer*. Adv. Appl. Mech., **IV** (1956).
2. ŞT. N. SĂVULESCU, *Utilizarea profilelor tip de viteze pentru determinarea calitativă a unor caracteristici ale scurgerii turbulente anizotrope*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **XI**, *5* (1960).
3. ŞT. N. SĂVULESCU, *On a hypothesis of limitative statistical organization of energy fluctuations in the fully developed turbulent boundary layer*. Revue de Mécanique Appliquée, **V**, *6* (1960)..
4. G. B. SCHUBAUER, *Turbulent processes in boundary-layer and in ducts*. Journal of Applied Physica, **25**, *2* (1954).
5. Л. Г. ЛОЙЦАНСКИЙ, *Механика жидкости и газа*. Москва, 1959.
6. E. RODET, *Etude de l'écoulement turbulent dans un tunnel de section non circulaire*. CRAS, *246*, 3314—3316, 3578—3580 (1958).

# STUDII

## HIDROMECANICA

# STUDIU ASUPRA BARAJELOR CU CONTRAFORȚI-CIUPERCĂ

DE

RADU PRIȘCU [1]) și ALEX. STOIAN [2])

### A. GENERALITĂȚI

Primul baraj cu contraforți-ciupercă a fost barajul Don Martin din Mexic, construit în anii 1927—1928. El este constituit dintr-o serie de contraforți independenți care la capătul amonte se evazează sub forma unor ciuperci (fig. 1*a*). Conturul exterior al fiecărei ciuperci are forma unui segment de cerc, foarte favorabilă pentru transmiterea presiunii hidrostatice la contraforți, fără eforturi de încovoiere. La unele baraje construite ulterior, cum este cazul barajului Lucendro (fig. 1*b*), conturul

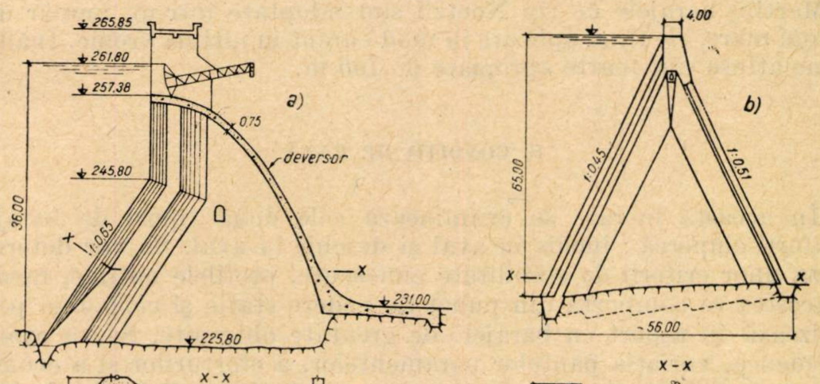

265.85
261.80
257.38
a)
0.75
deversor
245.80
36.00
1:0.65
x
x
231.00
225.80
x - x
9.00
6.00
2.0
3.5
3.5
placă de
beton armat
1.85
2.33
4.07
9.00
2.0
4.00
b)
65.00
1:0.45
1:0.51
x
x
~56.00
x - x
3.88
13.00
10.00
13.00
10.00
~53.00

Fig. 1. — *a*) barajul Don Martin ; *b*) barajul Lucendro.

---

[1]) Institutul de construcții, București.

[2]) Institutul de studii și proiectări energetice, București.

circular a fost înlocuit cu un contur poligonal, pentru simplificarea execuției.

După cum arată autorul acestui tip de baraj, F. A. Noetzli [1], în comparație cu un baraj de greutate obișnuit un baraj cu contraforți-ciupercă se bucură de următoarele avantaje :

— reducerea subpresiunilor care acționează la talpa barajului și a presiunilor din porii betonului — provocate de apele de infiltrație — prin acțiunea drenantă a golurilor dintre contraforți ;

— stabilitatea la alunecare mărită atît prin reducerea subpresiunilor cît și prin încastrarea contraforților în roca de fundație ;

— degajarea ușoară a căldurii de priză a cimentului, datorită dimensiunilor relativ reduse ale elementelor componente și ca urmare atenuarea fenomenelor de contracție a betonului ;

— economia de beton care conduce la un cost și la o durată de execuție mai reduse ;

— posibilitatea unei supravegheri directe a comportării construcției, mai ușoară și mai eficace decît în cazul barajelor de greutate obișnuite.

Ca dezavantaje se pot aminti :

— încărcarea discontinuă a terenului de fundație și concentrările de eforturi provocate de acest mod de fundare ;

— stabilitatea longitudinală a barajelor deschise în aval, mai slabă ca în cazul barajelor de greutate obișnuite.

După un interval de aproape zece ani de la construcția barajului Don Martin, barajele de tip Noetzli sînt adoptate într-un număr din ce în ce mai mare, ele fiind aplicate în mod curent în ultima vreme. Înălțimile maxime atinse sînt foarte apropiate de 100 m.

## B. CONDIȚII DE BAZĂ

În această lucrare se examinează cele două tipuri de baraje cu contraforți-ciupercă : închis în aval și deschis în aval. Se vor determina, pe baza unor criterii de stabilitate cunoscute, profilele optime, modul în care acestea se comportă din punct de vedere static și economia pe care o realizează în raport cu barajele de greutate obișnuite. Se va examina, de asemenea, variația pantelor paramentelor, a eforturilor și a economiei de volum în funcție de doi parametri importanți : coeficientul de frecare statică între beton și rocă și coeficientul de evidare. Prin acesta din urmă se înțelege raportul între lățimea totală a golurilor și lățimea totală ($L$) a unui bloc component, în secțiune orizontală.

În cîteva lucrări anterioare, în care s-au studiat sub aceleași aspecte barajele de greutate obișnuite cu profilul triunghiular [2], barajele cu profilul trapezoidal [3], barajele cu rosturi lărgite [4], și barajele evidate [5], s-au indicat criteriile utilizate pentru dimensionarea acestor baraje.

Primul criteriu constă în condiția ca, ținînd seama de acțiunea subpresiunilor, efortul normal vertical de la piciorul amonte al barajului să fie mai mare sau la limită egal cu zero. Prin această condiție se exclud deci eforturile de tensiune în acest punct. În ipoteza repartiției liniare a eforturilor, acest lucru se scrie sub forma

$$\sigma_{am} = \frac{\Sigma V}{\Omega} + \frac{\Sigma M}{W} \geqslant 0. \quad (1)$$

Al doilea criteriu constă în condiția de stabilitate la alunecare a barajului în secțiunea de fundație. În mod obișnuit acest lucru se exprimă punînd condiția ca coeficientul de alunecare, definit prin raportul între suma forțelor orizontale $\Sigma H$ și suma forțelor verticale $\Sigma V$, să fie mai mic sau la limită egal cu coeficientul de frecare statică $f$ al betonului cu roca de fundație

$$\frac{\Sigma H}{\Sigma V} \leqslant f. \quad (2)$$

Introducerea unui anumit coeficient de siguranță la alunecare sau luarea în considerare a coeziunii dintre beton și rocă se pot realiza implicit, prin modificarea corespunzătoare a cifrei $f$, determinată prin încercări pe teren.

În cazul barajelor cu contraforți-ciupercă, care beneficiază în mod normal de o încastrare suficientă în fundație, coeficientul de frecare ce se introduce în calcul poate fi mărit față de cel real cu circa 10—20%. Acest lucru este echivalent cu admiterea unui coeficient de siguranță subunitar.

În lucrările citate s-a definit profilul optim, înțelegînd prin acesta acel profil care satisface simultan și la limită cele două condiții (1) și (2). S-a demonstrat că acest profil necesită, față de alte profile care nu satisfac la limită cele două condiții, cantitatea minimă de beton.

Pentru barajele cu contraforți-ciupercă, închise și deschise în aval, s-au aplicat aceleași criterii de dimensionare și s-au determinat, funcție de anumiți parametri, înclinările paramentelor.

Forțele luate în considerare au fost : greutatea proprie, presiunea orizontală și verticală a apei, și subpresiunea. Asupra acestei forțe din urmă s-a făcut ipoteza că acționează numai asupra plăcii amonte, cu o distribuție liniară de la valoarea presiunii hidrostatice $\gamma H$ în amonte, la zero pe marginea aval. Această ipoteză a fost verificată pe cale experimentală, prin metoda analogiei electrohidrodinamice, în secțiunea de fundație a unui baraj cu contraforți-ciupercă, în curs de execuție. Determinările au fost efectuate în laboratorul I.C.S.E. În figura 2 se indică rezultatele obținute și anume : spectrul hidrodinamic, în ipoteza scurgerii plane a apelor de infiltrație, practic concentrat în suprafața ciupercii (*a*) ; repartiția subpresiunilor unitare (t/m$^2$) în diverse secțiuni (*b*) și forțele de subpresiune pe unitatea de lungime (t/ml), raportate după axul longitudinal al ciupercii (*c*). Forța totală de subpresiune care rezultă prin planimetrarea diagramei din figura 2*c* este practic identică cu forța care corespunde repartiției liniare, admisă în calcule.

Pentru ușurarea calculelor, blocurile componente ale barajelor care se studiază s-au înlocuit prin blocuri echivalente, cu formele simplificate.

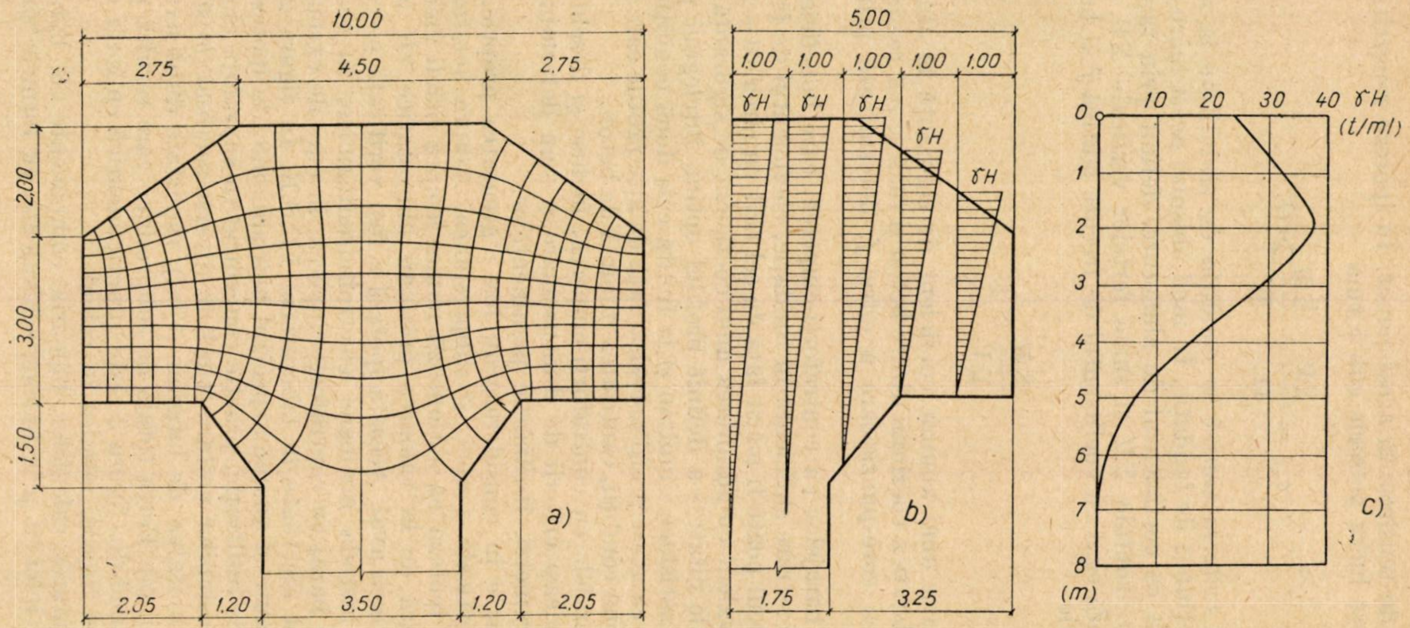

10,00
2,75
4,50
2,75
2,00
3,00
1,50
a)
2,05
1,20
3,50
1,20
2,05
5,00
1,00
1,00
1,00
1,00
1,00
γH
γH
γH
γH
γH
b)
1,75
3,25
0
10
20
30
40
γH
(t/ml)
1
2
3
4
5
6
7
8
(m)
c)

Fig. 2. — Subpresiuni în suprafaţa de fundaţie a unui baraj cu contraforţi-ciupercă; *a*) spectru hidrodinamic; *b*) subpresiuni în diverse secţiuni; *c*) subpresiuni pe unitatea de lungime.

Calculele comparative referitoare la economicitatea acestor baraje s-au efectuat pe metru liniar de baraj, ca și cînd văile barate ar avea secțiunea dreptunghiulară.

Notațiile întrebuințate sînt următoarele :

$\alpha$ — coeficientul de evidare sau raportul între lățimea golurilor și lățimea totală ($L$) a unui bloc component, în secțiune orizontală ;
$\beta$ — raportul între grosimea plăcii amonte și lățimea la bază a unui element component ;
$\gamma$ — greutatea specifică a apei (t/m$^3$) ;
$\gamma_b$ — greutatea specifică a betonului (t/m$^3$) ;
$\lambda$ — tangenta unghiului pe care îl face paramentul aval cu verticala ;
$\lambda_1$ — tangenta unghiului pe care îl face paramentul amonte cu verticala ;
$\sigma$ — efort normal vertical (t/m$^2$) ;
$\sigma_1$ — efort normal principal (t/m$^2$) ;
$f$ — coeficientul de frecare statică beton-rocă ;
$H$ — înălțimea barajului (m) ;
$L$ — lățimea frontală a unui bloc component (m) ;
$W$ — volumul de beton pe metru liniar de baraj (m$^3$/ml).

### C. BARAJE ÎNCHISE ÎN AVAL

Considerînd un bloc închis în aval, de forma celui schițat în figura 3, s-a determinat expresia eforturilor verticale care acționează la picioarele amonte și aval, în ipoteza lacului plin

$$\sigma_{av}^{am} = \left[\frac{K_3\lambda_1 + K_4\lambda}{K_1(\lambda_1+\lambda)} \pm \frac{K_5\lambda^2{}_1 + K_6\lambda\lambda_1 + K_7\lambda^2 - 2\gamma}{K_2(\lambda_1+\lambda)^2}\right]\frac{H}{2}. \tag{3}$$

Punînd condiția de egalitate între coeficientul de alunecare și coeficientul de frecare statică, a rezultat relația

$$\lambda = \frac{\gamma - K_3 f \lambda_1}{K_4 f}. \tag{4}$$

Cele două necunoscute $\lambda$ și $\lambda_1$ se pot determina anulînd expresia efortului amonte și înlocuind în această ecuație pe $\lambda$ din relația (4). Făcînd aceste operații, a rezultat ecuația

$$\left(A - \frac{K_3}{K_4}B + \frac{K_3^2}{K_4^2}C\right)\lambda_1^2 + \frac{\gamma}{fK_4}\left(B - 2\frac{K_3}{K_4}C\right)\lambda_1 + \\ + \frac{\gamma^2}{f^2K_4^2}C - 2\gamma K_1 = 0. \tag{5}$$

Necunoscuta $\lambda$ poate fi calculată prin relația (4) spre exemplu.

În relațiile (3), (4) şi (5) s-au făcut următoarele prescurtări :

$$\begin{aligned}
A &= K_2K_3 + K_1K_5,\\
B &= K_2K_4 + K_2K_3 + K_1K_6,\\
C &= K_2K_4 + K_1K_7,\\
K_1 &= 1 - \alpha(1 - 2\beta),\\
K_2 &= 1 - \alpha(1 - 2\beta)^3,\\
K_3 &= \gamma(1 - \beta) + \gamma_b - \alpha\gamma_b(1 - 2\beta)^2,\\
K_4 &= K_3 - \gamma,\\
K_5 &= \gamma + \alpha\gamma_b(1 - 2\beta)^3 - \beta\gamma(3 - 2\beta) - \gamma_b,\\
K_6 &= 3\gamma - 2\beta\gamma(3 - 2\beta),\\
K_7 &= \gamma_b - \beta\gamma(3 - 2\beta) - \alpha\gamma_b(1 - 2\beta)^3.
\end{aligned}$$

★

Admițînd constantele $\gamma = 1{,}0$ t/m³, $\gamma_b = 2{,}3$ t/m³ şi $\beta = 0{,}125$, s-au efectuat o serie de calcule numerice, făcînd să varieze coeficientul de frecare statică $f$ şi coeficientul de evidare $\alpha$. Rezultatele obținute sînt reprezentate în diagramele din figura 3. Curbele care corespund barajului de greutate obişnuit ($\alpha = 0$), au fost calculate pentru un coeficient de reducere a subpresiunilor $m = 0{,}75$.

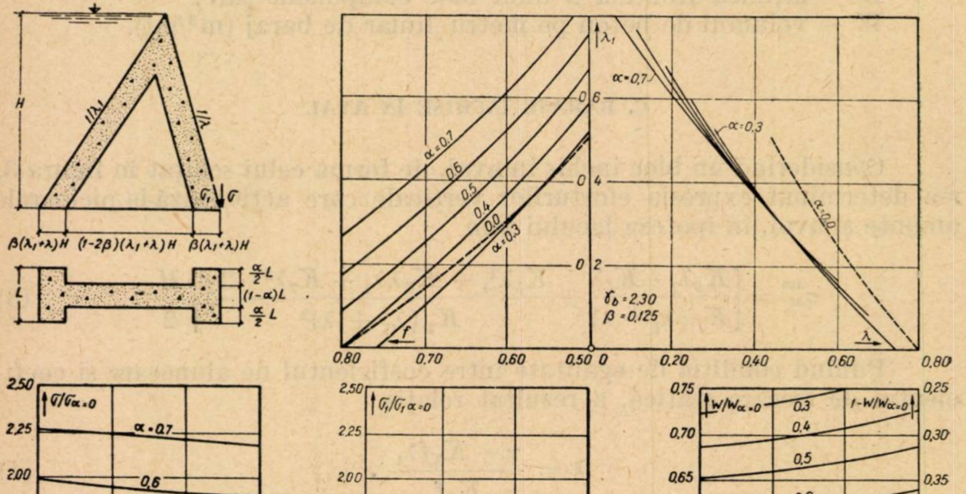


Fig. 3. — Diagrame caracteristice pentru barajele cu contraforți-ciupercă închise în aval.

Se constată că :

— înclinarea paramentului amonte față de verticală $\lambda_1$ este puternic influențată de coeficientul de frecare statică $f$ şi de coeficientul de evidare $\alpha$ ;

ea rezultă cu atît mai mare cu cît $f$ este mai mic și $\alpha$ mai mare; relația între cele două înclinări $\lambda_1$ și $\lambda$ nu este practic influențată de coeficientul de evidare;

— eforturile care acționează la piciorul aval al barajului cresc cu coeficientul de evidare; în comparație cu un baraj de greutate obișnuit, eforturile verticale sînt mai mari cu 105%, iar cele principale cu 65%, pentru $\alpha = 0{,}65$;

— economia de volum crește cu coeficientul de evidare; pentru $\alpha = 0{,}65$ spre exemplu, aceasta este de ordinul a 40%.

## D. BARAJE DESCHISE ÎN AVAL

Considerînd în continuare un bloc deschis în aval, de forma celui schițat în figura 4, s-a determinat expresia eforturilor verticale care acționează la picioarele amonte și aval, în ipoteza lacului plin

$$\sigma_{av}^{am} = \left[\frac{K_3\lambda_1 + K_4\lambda}{K_1(\lambda_1+\lambda)} \pm \frac{K_5\lambda_1^2 + K_6\lambda\lambda_1 + K_7\lambda^2 - 2\gamma}{K_2(\lambda_1+\lambda)^2}\right]\frac{H}{2}. \qquad (6)$$

Punînd condiția de egalitate între coeficientul de alunecare și coeficientul de frecare statică, a rezultat relația

$$\lambda = \frac{\gamma - K_3 f\lambda_1}{K_4 f}. \qquad (7)$$

Cele două necunoscute $\lambda$ și $\lambda_1$ se pot determina anulînd expresia efortului amonte și înlocuind în această ecuație pe $\lambda$ din relația (7). Făcînd aceste operații, a rezultat ecuația

$$\left(A - \frac{K_3}{K_4}B + \frac{K_3^2}{K_4^2}C\right)\lambda_1^2 + \frac{\gamma}{fK_4}\left(B - 2\frac{K_3}{K_4}C\right)\lambda_1 +$$

$$+ \frac{\gamma^2}{f^2K_4^2}C - 2\gamma k_1 = 0. \qquad (8)$$

Necunoscuta $\lambda$ poate fi calculată prin relația (7) spre exemplu. În relațiile (6), (7) și (8) s-au făcut următoarele prescurtări:

$$A = K_2K_3 + K_1K_5,$$
$$B = K_2K_4 + K_2K_3 + K_1K_6, \qquad \varepsilon = \frac{1-\alpha(1-\beta^2)}{1-\alpha(1-\beta)}$$
$$C = K_2K_4 + K_1K_7,$$
$$K_1 = 1 - \alpha(1-\beta),$$
$$K_2 = \frac{1}{\varepsilon}\left[\alpha\beta^3 + 1 - \alpha + 3\alpha\beta(\varepsilon-\beta)^2 + 3(1-\alpha)(1-\varepsilon)^2\right],$$
$$K_3 = \gamma(1-\beta) + \gamma_b - \alpha\gamma_b(1-\beta)^2,$$
$$K_4 = K_3 - \gamma,$$
$$K_5 = \gamma(3\varepsilon - 2) - \beta\gamma(3\varepsilon - 2\beta) - \gamma_b(4 - 3\varepsilon) + \alpha\gamma_b(1-\beta)^2 \cdot$$
$$\cdot(4 + 2\beta - 3\varepsilon),$$

$$K_6 = 3\gamma\varepsilon - 2\beta\gamma(3\varepsilon - 2\beta) - 6\gamma_b(1-\varepsilon) + 6\alpha\gamma_b(1-\beta)^2 \cdot (1+\beta-\varepsilon),$$
$$K_7 = \alpha\gamma_b(1-\beta)^2\,(4\beta + 2 - 3\varepsilon) - \beta\gamma(3\varepsilon - 2\beta) - \gamma_b(2 - 3\varepsilon).$$

★

Admiţînd, la fel ca în cazul barajelor închise în aval, $\gamma = 1{,}0$ t/m³, $\gamma_b = 2{,}3$ t/m³ şi $\beta = 0{,}125$, s-au efectuat o serie de calcule numerice, făcînd să varieze coeficientul de frecare statică $f$ şi coeficientul de evidare $\alpha$. Rezultatele obţinute sînt reprezentate în diagramele din figura 4. Curbele care corespund barajului de greutate obişnuit ($\alpha = 0$), au fost calculate pentru un coeficient de reducere a subpresiunilor $m = 0{,}75$.

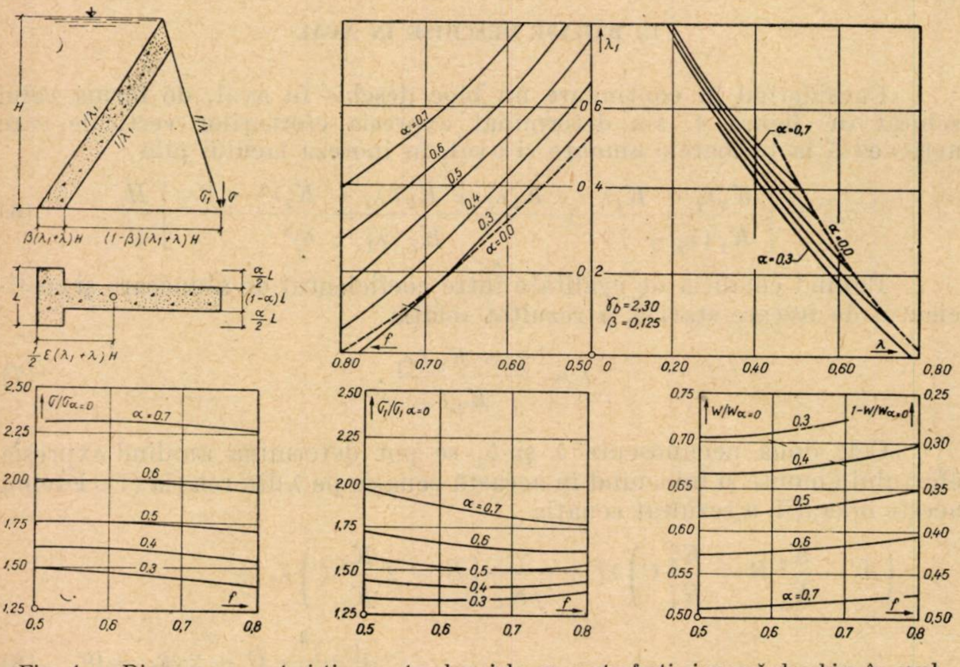


Fig. 4. — Diagrame caracteristice pentru barajele cu contraforţi-ciupercă deschise în aval.

Se constată că :

— la fel ca în cazul precedent, înclinarea paramentului amonte faţă de verticală $\lambda_1$ este puternic influenţată de coeficientul de frecare statică $f$ şi de coeficientul de evidare $\alpha$ ; ea rezultă cu atît mai mare cu cît $f$ este mai mic şi $\alpha$ mai mare ; spre deosebire de cazul precedent, relaţia între cele două înclinări $\lambda_1$ şi $\lambda$ este influenţată în oarecare măsură de coeficientul de evidare ;

— eforturile care acţionează la piciorul aval al barajului cresc cu coeficientul de evidare ; în comparaţie cu un baraj de greutate obişnuit, eforturile verticale sînt mai mari cu 110%, iar cele principale cu 70%, pentru $\alpha = 0{,}65$;

— economia de volum creşte cu coeficientul de evidare; pentru $\alpha = 0{,}65$ spre exemplu, aceasta este de ordinul a 45%.

### E. POZIŢIA OPTIMĂ A CORONAMENTULUI LA BARAJELE DESCHISE ÎN AVAL

Pentru barajele deschise în aval, care se aplică în prezent mai frecvent decît cele închise, s-a studiat influenţa alcătuirii şi poziţiei coronamentului asupra economiei de material. S-au luat în considerare cele trei scheme indicate în figura 5 şi s-au dedus aceleaşi relaţii de dimensionare ca în cazurile precedente. Din cauza extinderii lor, aceste relaţii nu se mai reproduc.

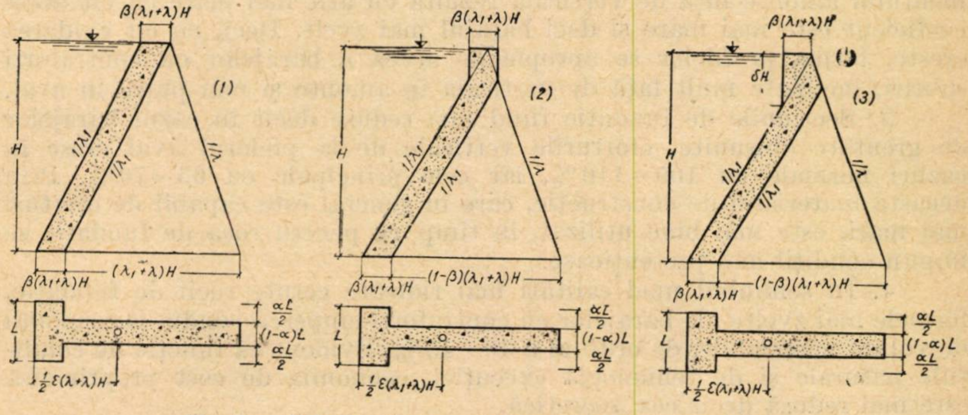


Fig. 5. — Diferite scheme pentru poziţia coronamentului.

Admiţînd constantele $\gamma = 1{,}0$ t/m³, $\gamma_b = 2{,}3$ t/m³, $\alpha = 0{,}65$ şi grosimea plăcilor amonte egală în toate cazurile cu $0{,}10\ H$, au rezultat valorile din tabela de mai jos.

| cazul (*i*) | (*1*) | (*2*) | (*3*) |
|---|---|---|---|
| $W$ (m³/m l) | $0{,}2427H^2$ | $0{,}2283H^2$ | $0{,}2310H^2$ |
| $W_i/W_2$ | 1,063 | 1,000 | 1,012 |
| $W_2/W_i$ | 0,941 | 1,000 | 0,988 |

Se constată că schema (*1*) necesită în ansamblu cel mai mare volum de beton, urmînd în ordine schema (*3*) şi (*2*). Cea mai avantajoasă este schema (*2*) care conduce la cel mai redus volum de beton. În practică s-au construit baraje cu coronamentul dispus atît după schema (*2*) cît şi după schema (*3*), care nu diferă sensibil între ele.

## F. CONCLUZII

Din cele expuse mai sus se pot desprinde următoarele concluzii de ordin general :

1. Ca şi în cazul barajelor evidate, profilele barajelor cu contraforţi-ciupercă se acomodează cu capacitatea de rezistenţă la alunecare a terenului prin înclinarea paramentului amonte. Cu cît coeficientul de frecare beton — rocă este mai redus cu atît înclinarea paramentului amonte faţă de verticală rezultă mai mare. Greutatea apei purtată de acest parament exercită deci o acţiune stabilizatoare însemnată.
2. La rîndul său, coeficientul de evidare are o influenţă substanţială asupra proporţiilor unui baraj cu contraforţi-ciupercă. Înclinarea paramentului amonte faţă de verticală rezultă cu atît mai mare cu cît acest coeficient este mai mare şi deci barajul mai zvelt. Deci, cu cît evidarea creşte, forma profilelor se apropie de aceea a barajelor cu contraforţi subţiri, înclinate mult faţă de verticală în amonte şi mai puţin în aval.
3. Secţiunile de fundaţie fiind mai reduse decît în cazul barajelor de greutate obişnuite, eforturile verticale de la piciorul aval cresc în cazuri normale cu 105—110%, iar cele principale cu 65—70%. Prin aceasta materialul de construcţie, care în general este capabil de eforturi mai mari, este mai bine utilizat, în timp ce pentru roca de fundaţie se impun condiţii mai pretenţioase.
4. În schimbul unei calităţi mai ridicate cerute rocii de fundaţie, formele mai zvelte ale barajelor cu contraforţi-ciupercă conduc la economii de volum apreciabile, de ordinul a 40—45%. Evident că funcţie de condiţiile naturale şi de tehnologia execuţiei, economia de cost propriu-zisă este mai redusă decît cea teoretică.

*Primită la redacţie la 14 aprilie 1961.*

## ИССЛЕДОВАНИЕ МАССИВНО-РЕБРИСТЫХ ПЛОТИН

### РЕЗЮМЕ

В настоящей работе рассматриваются два типа плотин с массивными консольными оголовками контрфорсов: перекрытых и открытых с низовой стороны. Принимая при выборе размеров в качестве критериев условие нулевого напряжения в верховой пяте (1) и условие устойчивости на скольжение (2) определяются оптимальные профили, их статическая работа и получаемая по отношению к обычным гравитационным плотинам экономия.

После общего описания плотины с массивными оголовками контрфорсов выводятся некоторые формулы для обоих типов плотины, при помощи которых исследуется колебание уклонов граней, напряжений в низовой пяте и теоретической экономии в зависимости от двух основных

параметров: коэффициента статического трения $f$ и коэффициента облегчения $\alpha$ (отношение ширины пустот к общей ширине одного блока). Рассматривается также оптимальное расположение гребня этих плотин.

В конце работы приведены некоторые выводы общего характера.

### ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — *a*) Плотина Дон Мартин; *b*) плотина Лучендро.

Рис. 2. — Противодавление на поверхности основания плотины с массивными консольными оголовками контрфорсов; *a*) гидродинамический спектр; *b* противодавления в разных профилях; *c*) противодавление на единицу длины.

Рис. 3. — Характерные диаграммы плотин с массивными консольными оголовками контрфорсов перекрытых вниз по течению.

Рис. 4. — Характерные диаграммы плотин с массивными консольными оголовками контрфорсов — открытых вниз по течению.

Рис. 5. — Различные схемы положения гребня.

## ÉTUDE SUR LES BARRAGES À CONTREFORTS-CHAMPIGNON

### RÉSUMÉ

Dans la présente étude on étudie deux types de barrages à contreforts-champignon : fermés et ouverts au parement aval. En considérant la condition de non-extension au pied amont (1) et la condition de stabilité au glissement (2), on détermine les profils optimums, leur comportement au point de vue statique et l'économie qu'ils représentent par rapport aux barrages-poids usuels.

Après avoir présenté les barrages à contreforts-champignon, on établit pour les deux types de barrages mentionnés quelques formules permettant d'étudier la variation des pentes des parements, des efforts agissant sur le pied aval et de l'économie du volume, en fonction de deux paramètres principaux : le coefficient de frottement statique $f$ et le coefficient d'évidement $\alpha$ (le rapport entre la largeur des évidements et la largeur totale d'un bloc). On examine en outre la disposition optimum du couronnement de ces barrages.

On finit l'étude en tirant quelques conclusions d'ordre général.

### EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — *a*) le barrage de Don Martin ; *b*) le barrage de Lucendro.

Fig. 2. — Sous-pressions sur la surface de fondation d'un barrage à contreforts-champignon : *a*) spectre hydro-dynamique ; *b*) sous-pressions dans diverses sections ; *c*) sous-pressions par unité de longueur.

Fig. 3. — Diagrammes caractéristiques des barrages à contreforts-champignon fermés en aval.

Fig. 4. — Diagrammes caractéristiques des barrages à contreforts-champignon ouverts en aval.

Fig. 5. — Divers schémas pour la position du couronnement.

## BIBLIOGRAFIE

1. F. A. NOETZLI, *Ueber einige neue Arten von Pfeiler-Staumauern*. Der Bauingenieur, *13/14* (1933).
2. R. PRIŞCU, *Asupra profilului optim al barajelor de greutate*. Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie, **IV** (1953).
3. R. PRIŞCU, C. IAMANDI, *Consideraţii asupra dimensionării barajelor de greutate cu profilul trapezoidal*. Studii de mecanică aplicată, *3* (1960).
4. R. PRIŞCU, *Asupra barajelor de greutate cu rosturi lărgite*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, *3—4* (1954).
5. R. PRIŞCU, S. CĂCIULESCU, *Studiu asupra barajelor de greutate evidate*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, *4* (1957).

## HIDROMECANICĂ

# CONTRIBUȚII LA STUDIUL FILTRAȚIILOR PRIN BARAJELE NEOMOGENE REALIZATE PRIN FRACȚIONARE HIDRAULICĂ

DE

V. HARNAJ [1]

Barajele prin fracționare hidraulică sînt baraje realizate prin procedee hidromecanice. Prin depunerea dirijată a hidromasei pe ambele părți ale amprizei de lucru, corpul barajului rezultat va fi format dintr-un mediu poros izotrop și neomogen.

În părțile laterale, datorită depunerii particulelor mai mari din curent prin fracționare hidraulică se formează două prisme de rezistență cu un coeficient de filtrare destul de mare care crește gradual către centru. Materialul fin dus în suspensia de nămol formează în partea centrală a barajului un miez sau sîmbure de impermeabilizare. El are un coeficient de filtrare redus datorită fracțiunilor mici ce-l compun și care s-au depus într-un bazin central de nămol liniștit.

Datorită acestei variații a coeficientului de filtrare în secțiunea transversală, studiul filtrării curentului de apă prin astfel de baraje este dificil prin metodele obișnuite.

Ne-am propus să prezentăm un caz particular al unor astfel de baraje, tratat prin metode exacte.

Pentru studiul curentului filtrat prin baraj se analizează separat cazul cînd barajul este fundat pe o rocă teoretic impermeabilă, față de situația cînd barajul este realizat pe o fundație permeabilă.

În sîmburele de impermeabilizare avem un material omogen cu un coeficient de filtrare destul de mic $k_1$, iar prismele laterale rezultate prin depunere fracționată a particulelor solide din hidroamestec, au un coeficient de filtrare $k_2$ diferit și variabil în cuprinsul prismei, ca rezultat al neomogenității materialului. Putem admite în această situație că valoarea lui $k_2$ este dependentă de poziția punctului studiat față de sîmbure și de elementele fracționării, adică

---

[1] Institutul de petrol, gaze și geologie.

$$k_2 = f(x, q, c, \varphi, d). \qquad (1)$$

## I. BARAJUL FUNDAT PE UN TEREN PERMEABIL

Pentru un baraj neomogen rezultat prin fracționare hidraulică (fig. 1), admitem un coeficient de filtrare constant $k_1$ pentru sîmburele de impermeabilizare obținut prin depunere sub apă a fracțiunilor fine și ultrafine, pentru prismele laterale vom ține seama de cofeicientul de filtrare $k_2$ exprimat mai sus și dependent de condițiile de fracționare, iar pentru terenul de fundație presupus omogen și izotrop, admitem coeficientul de filtrare $k_3$ diferit de valorile de mai sus.

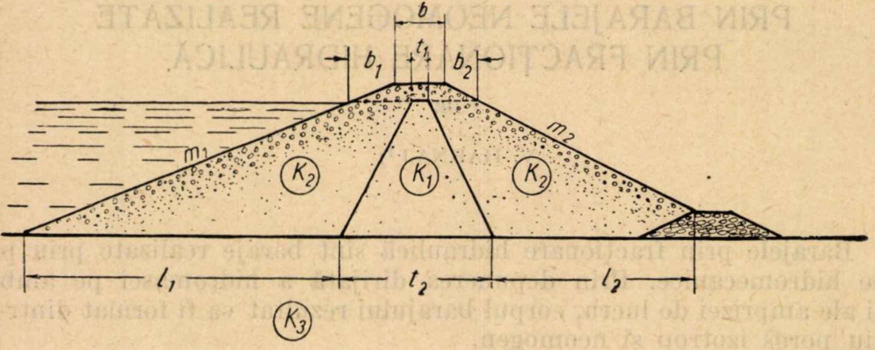


Fig. 1.

Procesul de filtrare fiind destul de complex pentru un astfel de mediu, propunem transformarea profilului de baraj dat într-o secțiune echivalentă hidraulic, corespunzătoare unui baraj omogen și izotrop, avînd un coeficient de filtrare $k_3$, identic cu al terenurilor de fundație. Vom obține în acest fel următoarele dimensiuni echivalente

$$t_{1e} = t_1 \frac{k_3}{k_1}, \quad t_{2e} = t_2 \frac{k_3}{k_1},$$

$$l_{1e} = l_1 \frac{k_3}{k_2}, \quad l_{2e} = l_2 \frac{k_3}{k_2},$$

$$b_{1e} = b_1 \frac{k_3}{k_2}, \quad b_{2e} = b_2 \frac{k_3}{k_2}. \qquad (2)$$

În acest fel obținem un baraj omogen al cărui profil este indicat în figura 2. Efectul filtrațiilor este identic cu cel obținut și prin barajul neomogen dat.

Pentru însumarea debitului filtrat, va trebui să ținem seama că

$$\psi_{ne} = \psi_n \frac{(l_1 + l_2)\dfrac{k_3}{k_2} + t_2 \dfrac{k_3}{k_1}}{l_1 + l_2 + t_2,}, \tag{3}$$

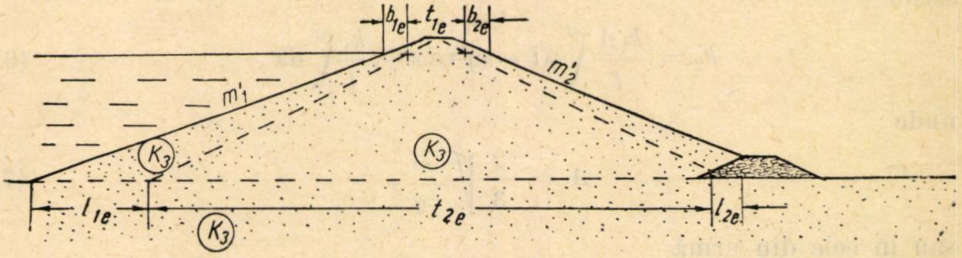


Fig. 2.

iar

$$Q_i = \int_0^{L_b} \psi_{ne}\, dL. \tag{4}$$

Deoarece $k_2 = f(x, q, c, \varphi, d)$, va trebui să determinăm expresia lui în condițiile de fracționare date.

Ținînd seama de legea de fracționare în regim staționar (fig. 3), după care este realizată cea mai mare parte din corpul barajului, putem

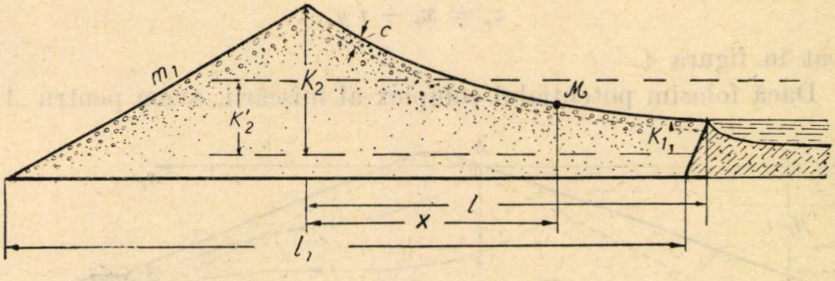


Fig. 3.

admite că valoarea coeficientului de filtrare este proporțională cu ordonata relativă de fracționare dată de

$$k_2 = k_1 \left[ \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\gamma c}{\varphi q}} (l - x)^{3/2} + 1 \right], \tag{5}$$

unde

$\gamma$ — greutatea specifică a fracțiunilor solide;
$c$ — intensitatea de depunere;
$\varphi$ — un coeficient de fracționare dependent de natura particulelor solide din hidroamestec, de diametrele particulelor și de condițiile interne ale curentului de fracționare;

$q$ — intensitatea de inundare;
$l$ — distanța de fracționare măsurată de la taluzul din amonte pînă la sîmburele de impermeabilizare.

Pentru ușurință de calcul, vom admite un coeficient de filtrare echivalent $k_2' =$ constant pentru întreaga prismă. El poate fi exprimat astfel

$$k_2' = \frac{k_1 A}{l}\int_0^l (l-x)^{3/2}\,dx + \frac{k_1}{l}\int_0^l dx, \tag{6}$$

unde

$$A = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\gamma c}{\varphi q}}, \tag{7}$$

sau în cele din urmă

$$k_2' = k_1\left(\frac{4}{15}\sqrt{\frac{\gamma c}{\varphi q}}\,l^{3/2} + 1\right), \tag{8}$$

această valoare poate fi introdusă în toate expresiile în care am întîlnit valoarea variabilă $k_2$.

Pentru studiul filtrației prin barajul omogen astfel obținut, ne folosim de metoda hidromecanică. Admitem ca domeniu al mișcării, domeniul $D_{z_r}$

$$z_r = x_r + i\,y_r \tag{9}$$

indicat în figura 4.

Dacă folosim potențialul complex al mișcării, avem pentru $AB$

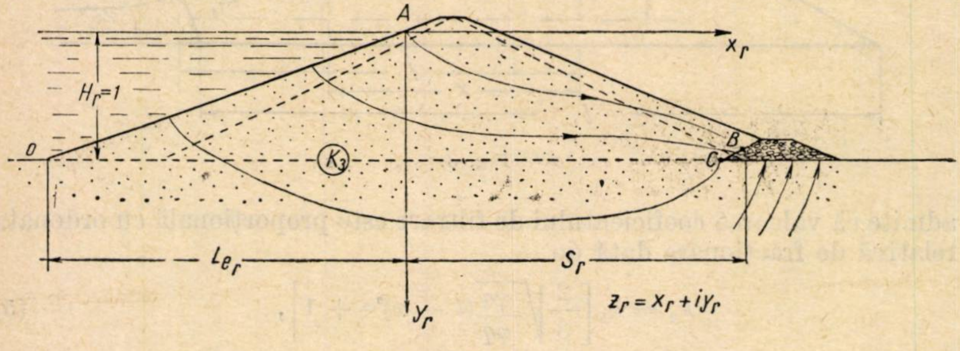


Fig. 4.

$$\varphi = k_3 y \text{ și } \psi = \text{const.} = 0,$$

pentru $AO$

$$\varphi = 0;\ \psi_{A0} = k_3 f(x). \tag{10}$$

Potențialul complex redus pentru $k = 1$ și $H = 1$ are expresia

$$\omega_r = \psi_r + i\psi_r, \tag{11}$$

iar domeniul redus $D\omega_r$ corespunzător este indicat în figura 5.

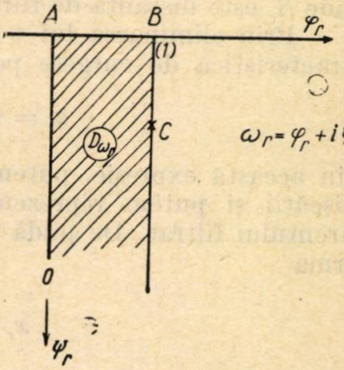

A
B
$\varphi_r$
(1)
C
$D_{\omega_r}$
$\omega_r = \varphi_r + i\psi_r$
0
$\psi_r$

Fig. 5

Domeniul potențialului complex Jucovsky (fig. 6) este

$$\Omega = z_r - i\omega_r = (x_r + \psi_r) + i(y_r - \varphi_r) \tag{12}$$

sau dacă admitem pe taluzul din amonte

$$\psi_r = y_r \tag{13}$$

obținem domeniul $D_\Omega$ din figura 6, unde putem spune că

$$\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{m}, \tag{14}$$

iar

$$m = \frac{\pi}{\operatorname{arctg} \frac{Le}{H}}, \tag{15}$$

dacă

$$L_e = \left((l_{1e} + \frac{t_{2e}}{2}\right) - \left(b_{1e} + \frac{t_{1e}}{2}\right). \tag{16}$$

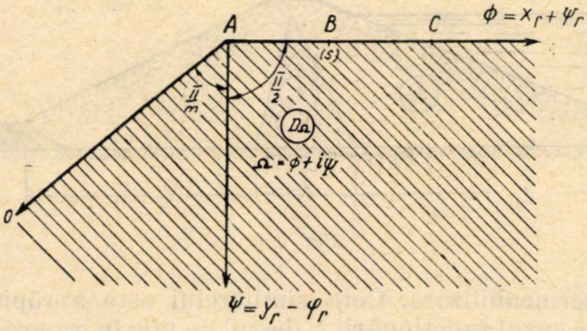

A
B
C
$\Phi = x_r + \psi_r$
(s)
$\frac{\pi}{m}$
$\frac{\pi}{2}$
$D_\Omega$
$\Omega = \phi + i\psi$
0
$\psi = y_r - \varphi_r$

Fig. 6

Folosind un domeniu semiplan ajutător putem trece de la domeniul $D_\Omega$ la semiplanul $\theta$ prin

$$\theta = \Omega^n. \tag{17}$$

Cunoscînd că legătura între domeniul redus $D_{\omega_r}$ și un semiplan de tipul $D_\theta$, este de forma

$$\theta = S_r^n \sin^2\left(\omega_r \frac{\pi}{2}\right), \tag{18}$$

deci

$$\Omega = S_r \sin^{\frac{2}{n}}\left(\omega_r \frac{\pi}{2}\right) = z_r - i\omega_r, \qquad (18^1)$$

unde $S_r$ este distanța de filtrare caracteristică indicată în figura 4.

Prin eliminarea lui $\theta$ din relațiile 17 și 18, putem obține funcția caracteristică de curgere pentru domeniul omogen și izotrop echivalent

$$z_r = i\omega_r + S_r \sin^{\frac{2}{n}}\left(\omega_r \frac{\pi}{2}\right).$$

Din această expresie, putem deduce elementele cele mai importante ale mișcării și putem reprezenta cu ajutorul ei spectrul hidrodinamic al curentului filtrat. De pildă ecuația suprafeței libere a acestui curent are forma

$$x_r = S_r \sin^{\frac{2}{n}}\left(\omega_r \frac{\pi}{2}\right). \qquad (20)$$

În același mod putem determina cu ajutorul funcției de curgere debitul filtrat, cît și acțiunea curentului filtrat pentru zonele cele mai solicitate.

## II. BARAJUL FUNDAT PE UN TEREN PRACTIC IMPERMEABIL

În această situație este mult mai util să transformăm prismele laterale în strate echivalente, hidraulic, mediului poros ce formează sîmburele de impermeabilizare. Cota sîmburelui este apropiată de nivelul apei din lac, iar cazul funcționării $t_1$ destul de mic în raport cu $t_2$, practic $t_1 = 0$ (fig. 7$a$).

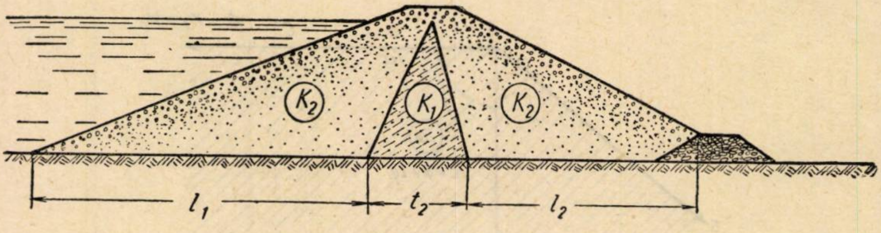


Fig. 7 $a$.

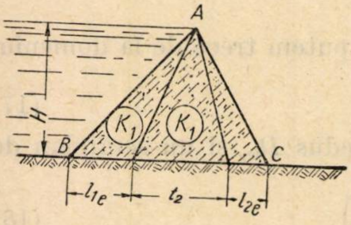


Fig. 7 $b$.

Pentru transformarea prismelor laterale, ne folosim de expresiile :

$$l_{ie} = l_1 \frac{k_1}{k_2'} \text{ și } l_{2e} = l_2 \frac{k_1}{k_2'}, \qquad (21)$$

iar pentru $k_2'$ utilizăm valoarea dată de relația (8).

Observăm că după transformare întregul mediu permeabil este omogen şi izotrop şi de forma unui triunghi (fig. 7b) peste creasta căruia trece un uşor curent de prelingere.

Pentru o primă etapă de calcul, am considerat mediul poros format dintr-un triunghi isoscel ca cel din figura 8 (stratul de fundaţie este considerat impermeabil).

Fie planul în care se găseşte acest domeniu triunghiular

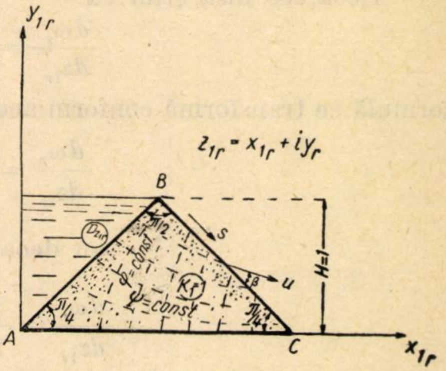
$$z_{1r} = x_{1r} + iy_{1r} \qquad (22)$$

În acest caz putem spune că

$$\varphi_{BC} = -k_1 y_1 , \qquad (23)$$

iar dacă $k_1 = 1$ $H = 1$ (potenţial redus)

$$\varphi_{rBC} = -y_{1r} = -S_r \sin 45°. \qquad (24)$$



$y_{1r}$
$z_{1r} = x_{1r} + iy_r$
B
$D_{z_{1r}}$
$\pi/2$
s
$\varphi = const$
$K_r$
$\beta$
u
$H=1$
$\psi = const$
$\pi/4$
$\pi/4$
A
C
$x_{1r}$

Fig. 8.

Viteza pe taluzul aval poate fi exprimată

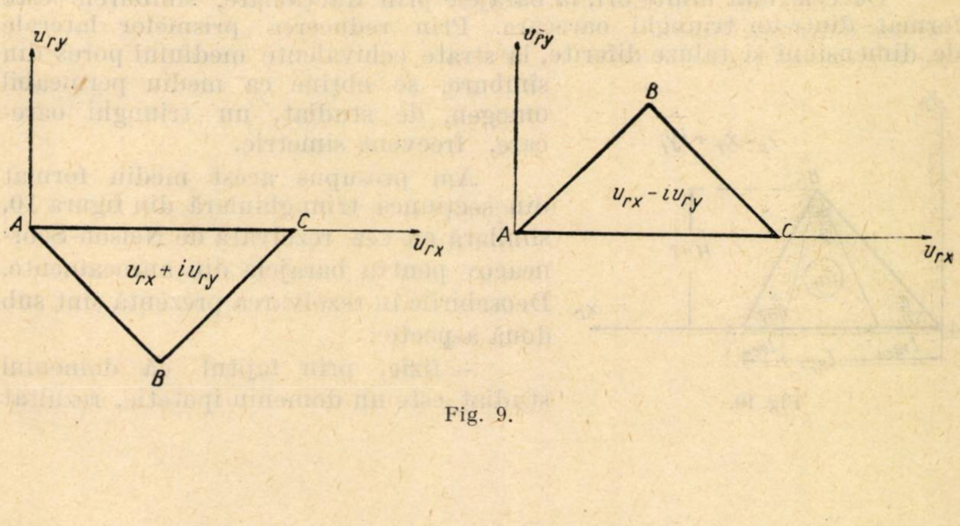
$$u_{rtBC} = \frac{\partial\varphi_r}{\partial S_r} = -\sin 45° \text{ şi } u_{rB} = -\sin 45°, \qquad (25)$$

sau viteza reală de filtrare în vecinătatea piciorului taluzului din aval

$$u_{rBC} = \frac{\sin 45°}{\cos \beta}. \qquad (26)$$

Pentru linia $AC$ corespunzînd liniei de curent în vecinătatea stratului impermeabil, avem

$$u_{rvAC} = 0 \text{ şi } u_{rc} = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} = \text{tg } 45° ; \ \beta = 45°. \qquad (27)$$



$u_{ry}$
A
C
$u_{rx}$
$u_{rx} + iu_{ry}$
B
$u_{ry}$
B
$u_{rx} - iu_{ry}$
A
C
$u_{rx}$

Fig. 9.

Construind cu aceste elemente hodograful vitezelor din figura 9, observăm că simetricul acestui domeniu ne dă viteza conjugată

$$u'_r = u_{rx} - iu_{rv}. \tag{28}$$

Deoarece însă știm că

$$\frac{d\omega_r}{dz_{1r}} = u_{rx} - iu_{ry}, \tag{29}$$

formulă ce transformă conform acest domeniu în domeniul $D$ dat este

$$\frac{d\omega_r}{dz_{1r}} = c_1 z_{1r}, \tag{30}$$

sau deoarece $C_1 = \frac{1}{2}$

$$\frac{d\omega_r}{dz_{1r}} = \frac{1}{2} z_{1r}, \tag{31}$$

care mai poate fi scrisă sub forma

$$\frac{d\omega_r}{dz_{1r}} = u_{rz1} - i\,ury_1 = \frac{1}{2} x_{1r} - \frac{1}{2} y_{1r}. \tag{32}$$

Prin integrarea ecuației (31), obținem potențialul redus al mișcării sub forma

$$\omega_r = \varphi_r + i\psi_r = \frac{z_{1r}^2}{4} - 1 \tag{33}$$

iar funcția caracteristică a mișcării fluidului prin mediul poros dat este

$$z_{1r} = 2\sqrt{\omega_r + 1}. \tag{34}$$

Cu ajutorul acestor funcții, putem studia ca și în cazul precedent, orice element hidraulic al curentului filtrat în condițiile date.

De cele mai multe ori, la barajele prin fracționare, sîmburele este format dintr-un triunghi oarecare. Prin reducerea prismelor laterale de dimensiuni și taluze diferite, la strate echivalente mediului poros din sîmbure, se obține ca mediu permeabil omogen, de studiat, un triunghi oarecare, frecvent simetric.

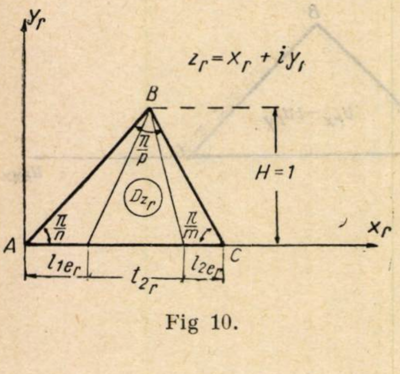


Fig 10.

Am presupus acest mediu format din secțiunea triunghiulară din figura 10, similară cu cea rezolvată de Nelson-Scorneacov pentru barajele din anrocamente. Deosebirile în rezolvarea prezentă sînt sub două aspecte :

— fizic, prin faptul că domeniul studiat este un domeniu ipotetic, rezultat prin transformarea mediilor neomogene într-un strat echivalent hidraulic, dar omogen :

— matematic, deoarece în rezolvările ce urmează, folosim funcțiunile reduse pentru medii echivalente, funcții aplicate și în cazurile precedente. Fie într-un plan complex

$$z_r = x_r + i y_r , \tag{35}$$

domeniul $D_{z_r}$ de mișcare reprezentat de secțiunea triunghiulară a mediului poros echivalent barajului neomogen realizat prin fracționare hidraulică.

Pentru a obține funcția caracteristică a mișcării, se transformă mai întîi domeniul triunghiular $D_{z_r}$ în domeniul $D_\theta$ (cadran), obținînd o funcție

$$z_r = f_1(\theta). \tag{36}$$

Folosind domeniul triunghiular $D_{z_{1r}}$ (studiat anterior) ca domeniu ajutător, se poate stabili o legătură între acest domeniu și $D_\theta$ de formă

$$z_{1r} = f_2(\theta), \tag{37}$$

sau între $D_{z_{1r}}$ și $D_{z_r}$ de formă

$$z_{1r} = f_3(z_r). \tag{38}$$

De asemenea, din cele precizate anterior asupra domeniului triunghiular isoscel în legătură cu potențialul complex redus putem scrie

$$\omega_r = f_4(z_{1r}). \tag{39}$$

Prin eliminarea tuturor variabilelor ajutătoare din aceste ecuații, obținem în cele din urmă o expresie de tipul

$$\omega_r = f_5(z_r), \tag{40}$$

sau

$$z_r = f_6(\omega_r), \tag{41}$$

care reprezintă potențialul complex redus al mișcării, respectiv funcția caracteristică a mișcării, expresii cu ajutorul cărora putem studia complet mișcarea și în special să se determine elementele fundamentale ale filtrării : debitul filtrat, cîmpul de viteze, zone critice de sufozie și afuere, presiuni critice etc. În sfîrșit, se poate reprezenta spectrul hidrodinamic al mișcării.

Fie domeniul $D_{z_r}$ triunghiular (fig. 11) care poate fi extins la un patrulater $ABCBA$ prin atașarea la triunghiul dat $ABC$ a simetricului lui față de axa $x$. Rezultă astfel în același plan domeniul $D'_{z_r}$.

Rotind domeniul $D'_{z_r}$ cu un unghi $\frac{\pi}{2}$ în sensul direct al acelor ceasornicului, obținem un domeniu $-iz_r$ (fig. 12), domeniu care poate fi ușor transformat conform în domeniul semiplan $D_\theta$ (fig. 13), aplicînd formula Schwartz-Kristoffel, astfel

$$z_r = c_1 \int_0^\theta \theta^{\frac{2}{n}-1} (\theta^2 - 1)^{-\frac{m+n}{mn}} d\theta + C_2 . \tag{42}$$

Deoarece pentru punctul $A$ avem $\theta_A = 0$ şi $(-iz_r)_A = 0$ obţinem $C_2 = 0$. Particularizînd ecuaţia (42) pentru punctul $B$ pentru care

$$(-iz_r)_B = \left(1 - i \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2}\right) \text{şi } \theta_B = 1, \tag{43}$$

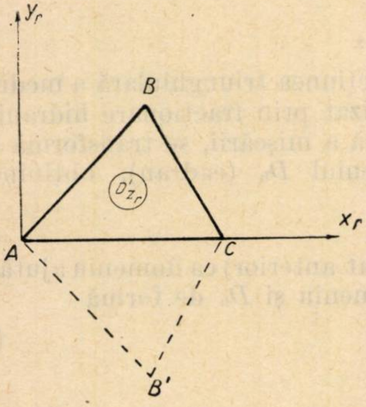

$y_r$
B
$D'_{z_r}$
$x_r$
A
C
B'

Fig. 11.

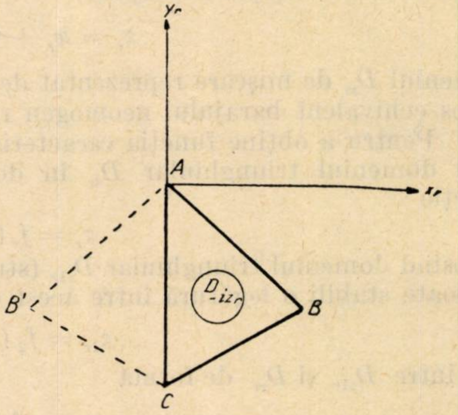

$y_r$
A
$x_r$
$D_{-iz_r}$
B'
B
C

Fig. 12.

obţinem constanta $C_1$ sub forma

$$(-1)\, C_1 = \frac{2\left(1 - i \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}\right)}{B\left(\frac{1}{n}; 1 - \frac{m+n}{mn}\right)}, \tag{44}$$

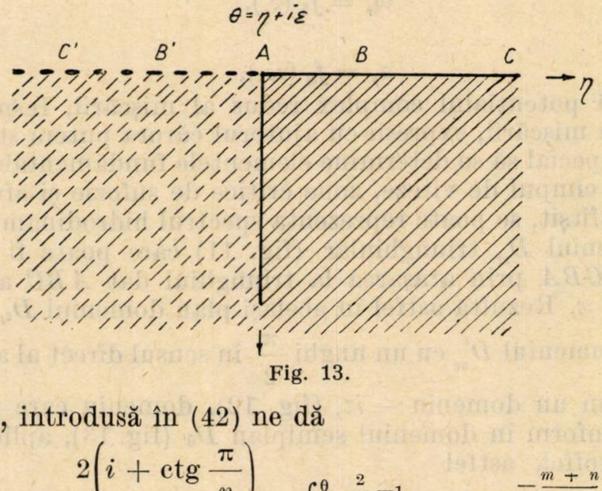

$\theta = \eta + i\varepsilon$
C'
B'
A
B
C
$\eta$

Fig. 13.

expresie care, introdusă în (42) ne dă

$$z_r = \frac{2\left(i + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}\right)}{B\left(\frac{1}{n}; 1 - \frac{m+n}{mn}\right)} \int_0^{\theta} \theta^{\frac{2}{n} - 1} (1 - \theta^2)^{-\frac{m+n}{mn}}\, d\theta, \tag{45}$$

sau exprimînd funcțiile $B\,(a,\,b)$ prin funcții $\Gamma\,(a,\,b)$ prin relația cunoscută

$$B\,(a,\,b) = \frac{\Gamma\,(a).\,\Gamma\,(b)}{\Gamma\,(a+b)}\,, \tag{46}$$

obținem

$$z_r = \frac{2\left(i + \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n}\right)\Gamma\left(1 - \dfrac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{n}\right)\Gamma\left(1 - \dfrac{m+n}{mn}\right)} \int_0^{\theta} \theta^{\frac{2}{n}-1}\,(1-\theta^2)^{-\frac{m+n}{mn}}\,d\theta, \tag{47}$$

sau după integrare

$$z_r = \frac{\left(i + \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n}\right)\Gamma\left(1 - \dfrac{1}{m}\right) n\sqrt[n]{\theta^2}}{\Gamma\left(\dfrac{1}{n}\right).\,\Gamma\left(1 - \dfrac{m+n}{mn}\right)} \left\{ 1 + \frac{m+n}{mn\,(1+n)}\,\theta^2 + \right.$$

$$+ \frac{(m+n)\,(m+n+mn)}{m^2n^2\,(2n+1)\,2\,!}\,\theta^4 +$$

$$\left. + \frac{(m+n)\,(m+n+mn)\,(m+n+2\,mn)}{m^3n^3\,(3n+1)\,3\,!}\,\theta^6 + \ldots\ldots \right\}.$$

Expresie ce transformă conform domeniul triunghiular $D_{zr}$ în domeniul cadranului $\theta$ (fig. 13), și care reprezintă forma explicită a legăturii (36) dintre $z$ și $\theta$.

Transformarea conformă a domeniului triunghiular isoscel $D_{zr}$ în partea dreaptă a semiplanului $\theta$ se poate face folosindu-ne de relația (48) în care însă ținem seama că domeniul triunghiular $Dz_{1r}$ este caracterizat prin legătura $m = n = 4$.

Se obține astfel

$$z_{1r} = \frac{4\,(1+i)\,\Gamma\left(\dfrac{3}{4}\right)\sqrt{\theta}}{\Gamma\left(\dfrac{1}{4}\right).\,\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)} \{\,1 + 0{,}1\,\theta^2 + 0{,}041\,\theta^4 + 0{,}024\,\theta^6 + \ldots\}, \tag{49}$$

sau din (48) și (49)

$$z_{1r} = z_r N, \tag{50}$$

unde

$$N = \frac{4}{n}\,\theta^{\frac{n-4}{2n}}\,\frac{\Gamma\left(\dfrac{1}{n}\right).\,\Gamma\left(1 - \dfrac{m+n}{mn}\right)\Gamma\left(\dfrac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(1 - \dfrac{1}{m}\right).\,\Gamma\left(\dfrac{1}{4}\right).\,\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)}$$

$$\sin^2\frac{\pi}{2}\left[\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} + 1\right) + i\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} - 1\right)\right| \times \tag{51}$$

$$\times \left[\frac{1 + 0{,}1\;\;\theta^2 + 0{,}041\;\theta^4 + \ldots.}{1 + \dfrac{m+n}{mn\,(m+1)}\,\theta^2 + \dfrac{(m+n)\,(m+n+mn)}{m^2n^2\,(2n+1)\,2\,!}\,\theta^4 + \ldots}\right].$$

Deoarece în (33) s-a stabilit legătura sub forma

$$\omega_r = \frac{z_{1r}^2}{4} - 1\,,$$

folosindu-ne de (50) putem elimina prima coordonată complexă ajutătoare $z_{1r}$ obținînd

$$\omega_r = \varphi_r + i\,\psi_r = \frac{z_r^2\,N^2}{4} - 1\,, \tag{52}$$

de unde obținem elementele mișcării pentru taluzul amonte *AB* pentru care $0 > \theta > 1$.

De pildă pentru funcțiunea de curent $\psi_r$ avem

$$\psi_r = \frac{1}{2} M^2 \left[ x_r\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} + 1\right) - y_r\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} - 1\right)\right]\left[ x_r\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} - 1\right) + \right. \tag{53}$$

$$\left. + \, y_r\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} + 1\right)\right],$$

unde

$$M = \frac{4}{n}\sin^2\frac{\pi}{n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1 - \frac{m+n}{mn}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right).\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\,\theta^{\frac{n-4}{2n}} \times \tag{54}$$

$$\times \left\{ \frac{1 + 0{,}1\;\theta^2 + 0{,}041\;\theta^2 + \ldots}{1 + \frac{m+n}{mn\,(n+1)}\,\theta^2 + \frac{(m+n)\,(m+n+mn)}{m^2n^2\,(2n+1)\,2\,!}\,\theta^4 + \ldots,} \right\}.$$

Prin valori constante succesive date lui θ între 0 și 1, se pot determina grafice ajutătoare pentru studiul liniilor de curent și al celor echipotențiale.

Pentru taluzul din aval se procedează la fel ca și pentru cel amonte numai că în loc de domeniul ajutător $D_\theta$ folosim un alt domeniu $D_\theta$ legat de acesta sub forma

$$\theta' = \frac{1}{\theta}. \tag{55}$$

Celelalte legături se obțin la fel ca și cele arătate pentru cazul folosirii domeniului ajutător $D_\theta$.

## CONCLUZII

Din cele expuse se poate constata că în cazul barajelor de pămînt neomogene, realizate prin fracționare hidraulică, metodele exacte pot stăpîni fenomenul de filtrare dacă se cunosc condițiile de fracționare hidraulică.

Metoda expusă în prezenta lucrare este caracterizată de legarea procesului de fracționare hidraulică de fenomenul de filtrare din corpul barajului, prin obținerea unor funcțiuni caracteristice de mișcare destul de simple și ușor de mînuit, folosind pe de o parte potențialul redus și secțiunile echivalente hidraulic, iar pe de altă parte legătura dintre coeficientul de filtrare și procesul de fracționare corespunzător.

## К ИССЛЕДОВАНИЮ ФИЛЬТРАЦИЙ ЧЕРЕЗ НЕОДНОРОДНЫЕ ПЛОТИНЫ, ОСУЩЕСТВЛЕННЫЕ ПУТЕМ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО ФРАКЦИОНИРОВАНИЯ

### РЕЗЮМЕ

Исходя из физико-механического анализа процесса гидравлического фракционирования во время оседания грунта в гидросмеси, заложенной в тело земляной плотины, осуществленной путем гидромеханизации, переходят к исследованию инфильтраций через эту плотину.

Автор рассматривает два характерные случая плотины с дренажем вниз по течению: плотина, сооруженная на водопроницаемой породе и плотина на водонепроницаемой породе. В обоих случаях вводится приведенный потенциал движения. Непрерывные и разрывные неоднородности фильтрующей области устраняются применением эквивалентных гидравлических областей. При помощи ряда конформных преобразований, применяя вспомогательные области, определяются для каждого случая в отдельности характеристическая функция фильтрированного потока, и, следовательно, можно управлять движение потока в данной плотине.

## BEITRÄGE ZUM STUDIUM DER FILTRATION DURCH NICHTHOMOGENE MITTELS HYDRAULISCHER FRAKTIONIERUNG ERZIELTER ERDDÄMME

### ZUSAMMENFASSUNG

Nach der physikalisch-mechanischen Analyse des Prozesses der hydraulischen Fraktionierung während der Absetzung des Erdmaterials aus dem in einen durch Hydromechanisierung gewonnenen Dammkörper geleiteten Wasser-Erdgemisch, wird zum Studium der Infiltrationen durch diesen Damm übergegangen.

Der Verfasser beschäftigt sich mit zwei charakteristischen Fällen eines Erddammes mit Dränagen im Unterteil, und zwar einem auf wasserdurchlässigem Gestein errichteten und einem auf wasserundurchlässigem Gestein errichteten Damm. In beiden Fällen wird das reduzierte Bewe-

gungspotential eingeführt. Die stetigen und unstetigen Nichthomogenitäten des Filtrierungsbereiches sind durch Anwendung von äquivalenten hydraulischen Gebieten ausgeschaltet. Durch eine Reihe konformer Transformationen mittels Hilfsgebieten wird für jeden einzelnen Fall die charakteristische Funktion der filtrierten Strömung festgelegt und auf diese Weise die Möglichkeit gegeben, die Wasserbewegung durch den Erddamm zu bestimmen.

## BIBLIOGRAFIE

1. В. А. ФЛОРИН, *Уплотнение земляной среды и фильтрация при переменной пористости с учетом влияния связанной воды.* Изд. АН СССР, 1951.
2. П. Ф. ФИЛЧАКОВ, *Механические основы расчета плотин.* Киев, 1952.
3. П. И. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА, *О фильтрации двух грунтов с наклонной линией раздела.* Изв. АН СССР, 1952.
4. — *К теории намыва плотин.* АН СССР, 1953.
5. Н. А. СНЕЕР, *О фракционировании грунта при надводном намыве.* 1958.
6. Ф. Б. НЕЛЬСОН-СКОРНЯКОВ, *Фильтрация в однородной среде.* 1949.

UNGERE – FRECARE – UZURĂ

# ASUPRA SCURGERII CU FRECARE A UNUI GAZ ÎNTRE DOUĂ PLĂCI PARALELE

DE

V. N. CONSTANTINESCU

Problema scurgerii unui gaz în straturi subțiri sub acțiunea unui gradient de presiune prezintă, în afara interesului teoretic, un interes din punct de vedere aplicativ, deoarece tipul de scurgere menționat are loc în lagărele cu aer alimentate sub presiune (hidrostatice). În această situație mişcarea este examinată în general operînd simplificările utilizate curent în problemele de lubrificație. Aceste simplificări şi în special neglijarea forțelor de inerție pot conduce însă la erori în cazul lubrificației hidrostatice, în special dacă presiunea de alimentare este ridicată sau dacă grosimea $h$ a stratului de lubrifiant are valori mai mari.

În cele ce urmează vom căuta să examinăm influența forțelor de inerție asupra caracteristicilor scurgerii, în cazul mişcărilor bidimensionale şi axial-simetrice între două suprafețe paralele.

## MIŞCĂRI BIDIMENSIONALE

Fie deci mişcarea bidimensională a unui gaz între două suprafețe paralele, plasate la o distanță $h$ una de alta. Luînd axele de coordonate ca în figura 1, ecuațiile de mişcare se scriu

$$\left.\begin{aligned} \rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)&=-\frac{dp}{dx}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\\ \frac{\partial p}{\partial y}&=0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

la care se asociază ecuaţia de continuitate

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

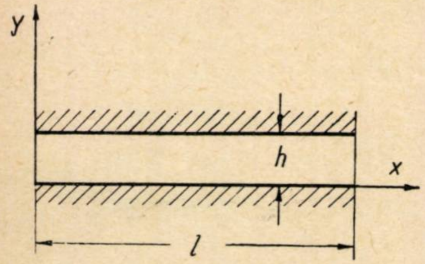


Fig. 1

şi ecuaţia de stare

$$\frac{p}{\rho^n} = \text{const.} \tag{3}$$

unde $1 \leqslant n \leqslant \frac{c_p}{c_v} = k.$

Pentru rezolvarea sistemului (1) să introducem funcţia de curent

$$u = \frac{\rho_1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial y}; \quad v = -\frac{\rho_1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial x}. \tag{4}$$

Se obţine astfel ecuaţia diferenţială

$$\rho_1 \frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho_1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial y}\right) - \rho_1 \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\rho_1}{\rho}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\rho_1}{\rho}\frac{\partial^3 W}{\partial y^3}. \tag{5}$$

Condiţiile la limită se scriu

$$\left.\begin{aligned} &\text{la } y = 0;\ u = v = 0;\ \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial x} = 0,\\ &\text{la } y = h;\ u = v = 0;\ \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

şi

$$\rho_1[(W)_{y=h} - (W)_{y=0}] = \mathcal{M}_x \tag{7}$$

unde $\mathcal{M}_x$ este debitul masic de lubrifiant.

Dacă forţele de inerţie sînt neglijabile, ecuaţia (5) se reduce la

$$\frac{\partial^3 (W)_0}{\partial y^3} = \frac{\rho}{\mu\rho_1}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{8}$$

unde s-a notat cu $(W)_0$ valoarea funcţie de curent în acest caz. Rezultă atunci

$$(W)_0 = \frac{\rho}{2\mu\rho_1}\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^2 h}{2}\right), \tag{9}$$

iar din (7) şi (3)

$$p^{\frac{1}{n}}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12\,\mu p_1^{\frac{1}{n}}\mathcal{M}_x}{\rho_1 h^3}. \tag{10}$$

Ținînd seama că la $x = 0$, $p = p_1$ şi la $x = l$, $p = p_0$, se deduce succesiv

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{p}{p_0}\right)_0 = \frac{p_1}{p_0}\left\{1 - \left[1 - \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{n+1}{1}}\right]\frac{x}{l}\right\}^{\frac{n}{n+1}},\\
&(\zeta)_0 = \frac{P}{p_0 l} = \frac{\int_0^l (p - p_0)\, dx}{p_0 l} = \frac{n+1}{2n+1}\,\frac{\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{2n+1}{n}} - 1}{\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{n+1}{n}} - 1} - 1,\\
&(\mathcal{M}_x)_0 = \frac{n}{n+1}\,\frac{\rho_1 p_1 h^3}{12\,\mu l}\left[1 - \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right].
\end{aligned}\right| \tag{11}$$

În cazul cînd se consideră ecuația (5) sub formă completă, integrarea ei este greu de efectuat în cazul general. Se poate obține totuşi destul de simplu o soluție aproximativă în care să se pună în evidență influența forțelor de inerție. Astfel este cunoscut faptul că în raport cu forțele datorită viscozității, forțele de inerție au ordinul de mărime [1]

$$\chi = \psi \mathcal{R}_{e_m} = \frac{h}{l}\,\frac{\rho_1 U_1 h}{\mu} = \frac{h \mathcal{M}_x}{l\mu} = \text{const.} \tag{12}$$

unde $\psi$ este raportul $\frac{h}{l}$, iar $U_1$ viteza medie $U$ în secțiunea de intrare $x = 0$.

Dacă $\chi < 1$, atunci soluția $W$ poate fi dezvoltată în serie după puterile lui $\chi$

$$W = W_0 + \chi W_1' + \chi^2 W_2' + \ldots \tag{13}$$

sau notînd

$$W_1' = \frac{l}{h^2 U_1} W_1\,;\ W_2' = \frac{l^2}{h^4 U_1^2} W_2\,;\ \ldots \tag{14}$$

se obține în cele din urmă

$$W = W_0 + \frac{\rho_1}{\mu} W_1 + \left(\frac{\rho_1}{\mu}\right)^2 W_2 + \ldots \tag{15}$$

dezvoltare utilizată şi pentru studiul lubrificației cu lichide în aceleaşi condiții [2].

Din ecuația (5) rezultă pentru funcțiile $W_n$ ecuațiile diferențiale

$$\left.\begin{array}{c}
\dfrac{\rho_1}{\rho}\dfrac{\partial^3 W_0}{\partial y^3}=\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial p}{\partial x}, \\[2ex]
\dfrac{\rho_1}{\rho}\dfrac{\partial^3 W_1}{\partial y^3}=\dfrac{\partial W_0}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\rho_1}{\rho}\dfrac{\partial W_0}{\partial y}\right)-\dfrac{\partial W_0}{\partial x}\dfrac{\rho_1}{\rho}\dfrac{\partial^2 W_0}{\partial y^2}=\dfrac{\rho_1}{\rho}f_1(x, y) \\[2ex]
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\[2ex]
\dfrac{\rho_1}{\rho}\dfrac{\partial^3 W_n}{\partial y^3}=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left[\dfrac{\partial W_i}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\rho_1}{\rho}\dfrac{\partial W_{n-1-i}}{\partial y}-\dfrac{\partial W_i}{\partial x}\dfrac{\rho_1}{\rho}\dfrac{\partial^2 W_{n-1-i}}{\partial y^2}\right]=\dfrac{\rho_1}{\rho}f_n(x, y).\right.
\end{array}\right\} \quad (16)$$

Funcția $W_0$ satisface ecuația (8) în consecință va fi dată de expresia (9) și reprezintă soluția în cazul absenței forțelor de inerție.

Celelalte funcții $W_n$ au o formă asemănătoare

$$W_n=\int dy\int dy\int f_n(x, y)\,dy-\frac{1}{2h}\left[\int dy\int f_n(x, y)\,dy\right]_{y=h}\cdot y^2. \quad (17)$$

În același timp rezultă

$$u=\frac{\rho_1}{\rho}\left(\frac{\partial W_0}{\partial y}+\frac{\rho_1}{\mu}\frac{\partial W_1}{\partial y}+\frac{\rho_1^2}{\mu^2}\frac{\partial W_2}{\partial y}+\dots\right), \quad (18)$$

$$v\equiv 0$$

și

$$\rho_1\left[(W_0)_{y=h}+\frac{\rho_1}{\mu}(W_1)_{y=h}+\dots\right]=\mathcal{M}_x=\text{const.} \quad (19)$$

deoarece $(W)_{y=0}=0$.

Limitîndu-ne la primii doi termeni ai dezvoltării (15), ecuația (19) se scrie

$$-\rho_1\left\{\frac{h^3}{12\mu}\frac{\rho}{\rho_1}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\rho_1}{\mu}\left[\frac{1}{8\mu^2}\frac{\rho}{\rho_1}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho}{\rho_1}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4\mu^2}\frac{\rho^2}{\rho_1^2}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\frac{h^7}{280}+\dots\right\}=\mathcal{M}_x=\text{const.} \quad (20)$$

sau încă

$$\frac{h^3}{12\mu}\rho\frac{\partial p}{\partial x}\left\{1+\frac{3\,h^4}{280\mu^2}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\rho\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right]+\dots\right\}=-\mathcal{M}_x. \quad (21)$$

Deoarece paranteza de mai sus reprezintă un termen de corecție, putem scrie aproximativ

$$\varpi = \frac{3\,h^4}{280\mu^2}\left[\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \rho\,\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right] + \ldots \cong$$

$$\cong \frac{3\,h^4}{280\mu^2}\left\{\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\left[(\rho)_0\frac{\partial (p)_0}{\partial x}\right] + (\rho)_0\frac{\partial^2 (p)_0}{\partial x^2}\right\} + 0(\chi^2) \qquad (22)$$

unde cu indice 0 s-au notat valorile $p$ și $\rho$ obținute în cazul neglijării forțelor de inerție. Ținînd atunci seama de ecuația de stare (3) se deduce

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left[(\rho)_0\frac{\partial (p)_0}{\partial x}\right] = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{12\,\mu\mathcal{M}_x}{h^3}\right) = 0,\\ &(\rho)_0\frac{\partial^2 (p)_0}{\partial x^2} = -\frac{144\,\mu^2\mathcal{M}_x^2}{nh^6\rho_1}\,\frac{1}{p}\left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Astfel încît ecuația (21) se scrie

$$\frac{\partial p}{\partial x}\left\{p^{\frac{1}{n}} - \frac{\alpha\mathcal{M}_x^2 p_1^{\frac{1}{n}}}{nh^2\rho_1}\,\frac{1}{p}\right\} = -\frac{12\,\mu\mathcal{M}_x p^{\frac{1}{n}}}{h^3\,\rho_1}, \qquad (24)$$

unde $\alpha = 1{,}54$. Este interesant de remarcat că dacă se consideră ipoteza lui Slezkin și Targ [3] după care vitezele ar avea în continuare o distribuție parabolică cu $y$, se obține în cele din urmă aceeași ecuație (24) avînd coeficientul $\alpha$ puțin modificat, $\alpha = \frac{6}{5}$ [4]. În sfîrșit, dacă se consideră vitezele $u$ constante, atunci $\alpha = 1$.

Integrînd ecuația de mai sus de la 0 la $x$ se obține

$$\frac{n}{n+1}\left[p_1^{\frac{n+1}{n}} - p^{\frac{n+1}{n}}\right] - \frac{\alpha\mathcal{M}_x^2 p_1^{\frac{1}{n}}}{nh_1\rho_1}\ln\frac{p_1}{p} = \frac{12\mu\mathcal{M}_x p_1^{\frac{1}{n}}}{h^3\rho_1}\,x \qquad (25)$$

ecuație care satisface în mod automat condiția ca $p = p_1$ la $x = 0$. Apoi din condiția ca $p = p_0$ la $x = l$ se deduce ecuația de gradul doi în $\mathcal{M}_x$

$$\frac{n}{n+1}\left[p_1^{\frac{n+1}{n}} - p_0^{\frac{n+1}{n}}\right] - \frac{\alpha\mathcal{M}_x^2 p_1^{\frac{1}{n}}}{nh^2\rho_1}\ln\frac{p_1}{p_0} = \frac{12\mu l p_1^{\frac{1}{n}}}{h^3\,\rho_1}\,\mathcal{M}_x, \qquad (26)$$

sau

$$1 - \frac{\alpha\chi}{12n}\ln\frac{p_1}{p_0}\overline{\mathcal{M}}_x^2 = \overline{\mathcal{M}}_x\,; \overline{\mathcal{M}}_x = \frac{\mathcal{M}_x}{(\mathcal{M}_x)_0}. \qquad (27)$$

În mod aproximativ, dezvoltîndu-se $\overline{\mathcal{M}}_x$ după puterile lui $\chi$

$$\overline{\mathcal{M}}_x = 1 + \chi\overline{\mathcal{M}}_{x_1} + \chi^2\overline{\mathcal{M}}_{x_2} + \dots \tag{28}$$

şi luînd numai primii doi termeni ai acestei dezvoltări se obţine o formulă pentru debitul masic, care corectează formula corespunzătoare (11)

$$\mathcal{M}_x \cong (\mathcal{M}_x)_0\left(1 - \frac{\alpha\chi}{12n}\ln\frac{p_1}{p_0}\right). \tag{29}$$

Pentru rezultanta presiunilor, din relaţia (25) se deduce

$$\zeta = \frac{1}{p_0 l}\left[\int_{p_1}^{p_0} p\frac{\partial x}{\partial p}dp - p_0 l\right] =$$

$$= \frac{n}{2n+1}\,\frac{h^3\rho_1\left[p_1^{\frac{2n+1}{n}} - p_0^{\frac{2n+1}{n}}\right]}{12\,\mu\mathcal{M}_x p_1^{\frac{1}{n}} p_0 l} - \frac{\alpha h\mathcal{M}_x(p_1 - p_0)}{12n\mu p_0 l} - 1. \tag{30}$$

Procedînd ca şi pentru debit se obţine

$$\zeta = (\zeta)_0 + \frac{\alpha\chi}{12n}\left[((\zeta)_0 + 1)\ln\frac{p_1}{p_0} - \left(\frac{p_1}{p_0} - 1\right)\right]. \tag{31}$$

Rezultatele de mai sus conduc la o precizie suficientă dacă $\chi < 1$. În asemenea condiţii scurgerea este cvasi-izotermă. Într-adevăr să considerăm modelul experimental studiat de Grinnell [5] cu : $l = 10{,}15$ cm, $\frac{h}{l} = \frac{1}{667}$ $(h = 0{,}152$ mm$)$, $p_1 = 1{,}015$ kg/cm², $\frac{p_1}{p_0} = 8{,}65$ $(p_0 = 0{,}1172$ kg/cm²$)$, numărul Mach la intrare $M_1 = 0{,}1249$. Introducînd numărul Mach

$$M = \frac{U}{a} = \frac{U}{\sqrt{kp/\rho}}, \tag{32}$$

ecuaţia (26) se scrie

$$\frac{n}{n+1}\left[1 - \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right] - \alpha M_1^2\frac{k}{n}\ln\frac{p_1}{p_0} = \frac{12\,\mu k M_1^2 l}{h}\,\frac{1}{\mathcal{M}_x}, \tag{33}$$

relaţie din care se calculează direct $\mathcal{M}_x$. Rezultă pentru datele numerice de mai sus $\mathcal{M}_x = 0{,}803 \times 10^{-3}$ kgm/sec şi $\chi = 0{,}6$. În figura 2 s-a reprezentat distribuţia presiunilor obţinută experimental [5], ca şi distribuţia presiunilor obţinută cu ajutorul formulelor precedente pentru $n = 1$ şi $n = k = 1{,}4$. Se constată că distribuţia presiunilor cu $n = 1$ se suprapune practic peste curba experimentală. În realitate, este probabil ca mişcarea să fie adiabatică în regiunea de intrare, dar natura evoluţiei se apropie de cea izotermă, după o mică distanţă de la începutul stratului de lubrifiant. În plus, în figura 2 se constată că efectul forţelor de inerţie este totuşi destul de redus pentru cazul considerat.

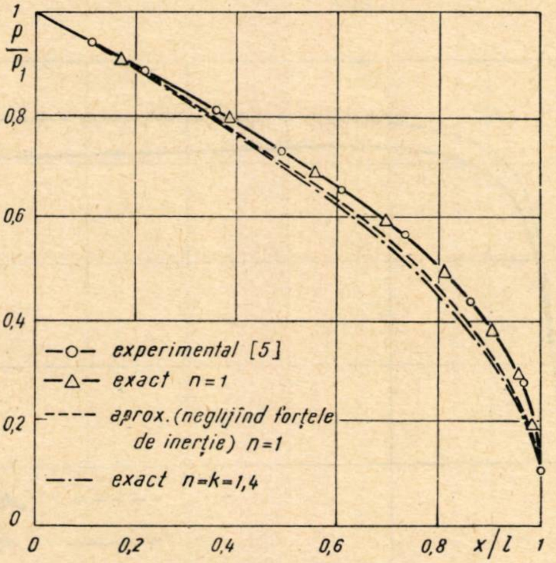


Fig. 2

În consecinţă, se poate afirma că pentru $\chi < 1$, forţele de inerţie nu au o influenţă prea mare, iar vitezele păstrează o alură aproximativ parabolică

$$\frac{x}{U} = -\frac{(U)_0}{U}\frac{6}{h^2}(y^2 - yh) - \frac{3}{2}\frac{U-(U)_0}{U}\frac{1}{h^6}(14\,y^6 - 42\,y^5 h + \\ + 35\,y^4 h^2 - 7\,y h^5). \qquad (34)$$

De exemplu dacă $l = 2{,}5$ cm, $h/l = 1/1\,000$, $p_1 = 6$ kg/cm$^2$, $p_0 = 1$ kg/cm$^2$, $\rho_1 = 0{,}7$ kgs$^2$/m$^4$, $\mu = 2 \times 10^{-6}$ kgs/m$^2$, rezultă $\chi = 0{,}266$ şi $\zeta = 3{,}2$, $\mathscr{M}_x = 5 \times 10^{-4}$ kgs/m$^2$ faţă de $(\zeta)_0 = 3{,}12$ şi $(\mathscr{M}_x)_0 = 5{,}3 \times 10^{-4}$ kgs/m$^2$. Dacă în schimb se păstrează condiţiile de intrare $(p_1, \rho_1)$ constante dar raportul $\frac{p_1}{p_0}$ creşte ($p_0$ scade), variaţia debitului $\mathscr{M}_x$ are aspectul din figura 3, prezentînd un maximum pentru un anumit raport $\frac{p_1}{p_0}$ critic, şi anulîndu-se pentru $\frac{p_1}{p_0} \to \infty$, respectiv $p_0 \to 0$. Cum scăderea debitului cu creşterea raportului $\frac{p_1}{p_0}$ este inacceptabilă din punct de vedere fizic, rezultă că dacă $\dfrac{p_1}{p_0} > \left(\dfrac{p_1}{p_0}\right)_c$ trebuie să se renunțe la condiția $p = p_0$ pentru $x = l$, înlocuind valoarea $p_0$ din secțiunea de serie cu o altă presiune $p_0'$ astfel încît raportul $\left(\dfrac{p_1}{p_0'}\right)$ să aibă valoarea critică corespunzătoare.

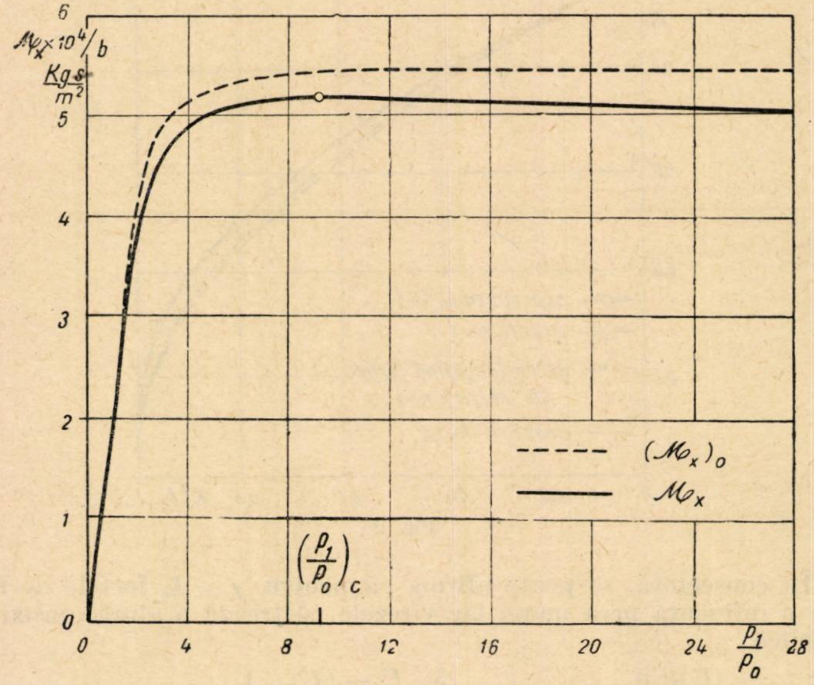


Fig. 3

Raportul $\left(\dfrac{p_1}{p_0}\right)_c$ se poate calcula anulînd derivata $\dfrac{\partial \mathcal{M}_x}{\partial\left(\dfrac{p_1}{p_0}\right)}$. Din ecuația (26) se deduce în acest caz

$$\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{n+1}{n}} - \left[1 + \frac{n+1}{n}\ln\left(\frac{p_1}{p_0}\right)_c\right] = \frac{12\,(n+1)\,\mu l}{\alpha h\,\mathcal{M}_{xc}} = \frac{12\,(n+1)}{\alpha\,\chi_c}. \quad (35)$$

Cazul neglijării forțelor de inerție conduce la $\left(\dfrac{p_1}{p_0}\right)_c \to \infty$ în timp ce pentru $\chi \to \infty$, $\left(\dfrac{p_1}{p_0}\right)_c \to 1$.

Ținînd seama că raportul $\left(\frac{p_1}{p_0}\right)_c$ are în acest caz valori mari, termenul $\left(1 + \frac{n+1}{n} \ln \frac{p_1}{p_0}\right)$ este neglijabil față de $\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{n+1}{n}}$ și în consecință

$$\begin{gathered}\left(\frac{p_1}{p_0}\right)_c \cong \left(\frac{12\,(n+1)}{\alpha\,\chi_c}\right)^{\frac{n}{n+1}} \cong \left(\frac{144\,(n+1)^2\,\mu^2 l^2}{\alpha\, n\, h^4\, \rho_1 p_1}\right)^{\frac{n}{n+1}}; \\ (\mathcal{M}_x)_c \cong (\mathcal{M}_x)_{0\,\frac{p_1}{p_0}\to\infty} = \frac{n\,\rho_1\, h^3\, p_1}{12\,(n+1)\,\mu\, l}.\end{gathered} \tag{36}$$

Fenomenul de mai sus este întru totul analog scurgerilor fără frecare prin ajutaje la care de asemenea debitul masic prezintă un maxim și rămîne în continuare constant. Într-adevăr, introducînd viteza medie $U$, ecuațiile (1)—(3) ale problemei se scriu

$$\left.\begin{aligned} &\alpha U\, dU + \frac{dp}{\rho} + \frac{12\,\mu}{h^2}\,\frac{U}{\rho}\, dx = 0, \\ &\frac{dU}{U} + \frac{d\rho}{\rho} = 0\,; \quad \frac{dp}{p} - n\,\frac{d\rho}{\rho} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Eliminînd $U$ și $\rho$ se regăsește ecuația (24). Dacă însă se introduce în prima ecuație (38) numărul Mach modificat

$$\mathrm{M}_* = \frac{U_c}{a_*}\,; \quad a_x^2 = \frac{dp}{d\rho} = n\,\frac{p}{\rho}, \tag{38}$$

egal cu numărul Mach dacă evoluția este adiabatică ($n = k$), se obține

$$\left(\alpha - \frac{1}{\mathrm{M}_*}\right)\frac{dM}{U} + \frac{12\,\mu}{h\mathcal{M}}\, dx = 0. \tag{39}$$

Cum termenul $\frac{12\,\mu}{h\mathcal{M}_x}$ este întotdeauna pozitiv,

$$\left(\alpha - \frac{1}{\mathrm{M}_*^2}\right)\frac{dU}{U} > 0 \tag{40}$$

întotdeauna. Dacă $\mathrm{M}_* < \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, rezultă deci $dU > 0$. În aceste condiții, pentru un anumit $x = x_{\max}$, $M_* = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ iar paranteza din formula (40) se anulează. Mai departe vitezele $U$ nu mai pot crește, deoarece semnul parantezei menționate se inversează. Rezultă deci că presiunea la ieșire trebuie să fie astfel încît $\mathrm{M}_{*_2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Astfel, înlocuind $U$ cu $M_*$ (38) ecuația (39) se mai scrie

$$\left(\alpha - \frac{1}{\mathrm{M}_*^2}\right) \frac{d M_*^2}{\mathrm{M}_*^2} + \frac{12\,(n+1)\,\mu}{h\,\mathcal{M}_x}\, dx = 0, \tag{41}$$

sau, integrînd și punînd $x = x_{\max}$ la $M_*^2 = \dfrac{1}{\alpha}$,

$$x_{\max} = \frac{h \mathcal{M}_*}{12\,(n+1)\,\mu} \left[\frac{1}{M_{*1}^2} - \alpha + \alpha \ln \alpha M_{*_1}^2\right] \tag{42}$$

În sfîrșit, dacă $\mathrm{M}_* = \mathrm{M}_{*_2}$ pentru $x = l$, atunci

$$l = (x_{\max})_{\mathrm{M}_{*_1}} - (x_{\max})_{\mathrm{M}_{*_2}} = \frac{h\,\mathcal{M}_x}{12\,(n+1)\,\mu} \left[\frac{1}{\mathrm{M}_{*1}^2} - \frac{1}{\mathrm{M}_{*_1}^2} + \alpha \ln \frac{\mathrm{M}_{*_1}^2}{\mathrm{M}_{*_2}^2}\right] \tag{43}$$

În schimb există cel puțin teoretic posibilitatea ca pentru anumite condiții de alimentare la intrare viteza gazului să fie supersonică. Apare atunci o undă de șoc în imediata apropiere a secțiunii de intrare, după care scurgerea redevine subsonică.

## MIȘCĂRI AXIAL-SIMETRICE

Metoda de mai sus poate fi extinsă cu ușurință și în cazul mișcărilor simetrice. Astfel plecînd de la ecuațiile de mișcare în coordonate polare $y$, $r$, $\theta$

$$\left.\begin{aligned} &\rho\left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v \frac{\partial v_r}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 v_r}{\partial y^2} \\ &\frac{\partial p}{\partial y} = 0\,; \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0\,; \quad \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

să introducem funcția de curent W, definită de relațiile

$$v_r = \frac{\rho_1}{\rho r}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y}\,; \quad v = -\frac{\rho_1}{\rho r}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial r}. \tag{45}$$

În acest caz, în locul ecuației (5) se obține

$$\frac{\rho_1}{\rho r}\left[\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho_1}{\rho r}\frac{\partial W}{\partial y}\right) - \frac{\rho_1}{\rho r}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial r}\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial y^2}\right] = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\rho_1}{\rho r}\frac{\partial^3 \mathrm{W}}{\partial y^3}, \tag{46}$$

cu aceleași condiții la limită (6). De asemenea ecuația (7) se scrie asemănător :

$$2\pi\rho_1\,[(\mathrm{W})_{y=h} - (\mathrm{W})_{y=0}] = \mathcal{M}_r. \tag{47}$$

În cazul absenţei forţelor de inerţie, funcţia de curent corespunzătoare $W_0$ are o formă analogă cu (9)

$$W_0 = \frac{\rho r}{2\rho_1\mu}\frac{\partial p}{\partial r}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^2 h}{2}\right), \tag{48}$$

iar din (47) rezultă

$$r p^{\frac{1}{n}}\frac{dp}{dr} = -\frac{6\mu p_1^{\frac{1}{n}}\mathcal{M}_r}{\pi\rho_1 h^3}. \tag{49}$$

În sfîrşit cu $p = p_1$, $\ln r = r_1$ şi $p = p_0$ la $r = r_0$ rezultă formulele cunoscute

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{p}{p_0}\right)_0 &= \frac{p_1}{p_0}\left\{1 - \left[1 - \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]\frac{\ln\dfrac{r}{r_1}}{\ln\dfrac{r_0}{r_1}}\right\}^{\frac{n}{n+1}} \\ (\mathcal{M}_r)_0 &= \frac{n}{n+1}\,\frac{\pi\rho_1 h^3 p_1}{6\mu}\,\frac{1 - \left(\dfrac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{n+1}{n}}}{\ln\dfrac{r_0}{r_1}} \end{aligned}\right\}. \tag{50}$$

Parametrul $\chi$ (12) are acum expresia

$$\chi = \frac{h}{2\pi r^2}\,\frac{\mathcal{M}_r}{\mu} = \frac{h}{2\pi r_1^2}\,\frac{\mathcal{M}_r}{\mu}\,\frac{r_1^2}{r^2} = \chi_1\frac{r_1^2}{r^2}, \tag{51}$$

de unde se vede că $\chi$ nu mai rămîne constant, ci scade cu raza.

Utilizînd dezvoltări în serie analoge cu (13), (15) se deduce un sistem corespunzător sistemului (16)

$$\frac{\rho_1}{\rho r}\frac{\partial^3 W_0}{\partial y^3} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r},$$

$$\frac{\rho_1}{\rho r}\frac{\partial^3 W_1}{\partial y^3} = \frac{1}{r}\frac{\partial W_0}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho_1}{\rho r}\frac{\partial W_0}{\partial y}\right) - \frac{\rho_1}{\rho r^2}\frac{\partial W_0}{\partial r}\frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} = \frac{\rho_1}{\rho r}f_1(r, y), \tag{52}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{\rho_1}{\rho r}\frac{\partial^3 W_n}{\partial y^3} = \sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial W_i}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho_1}{\rho r}\frac{\partial w_{n-1-i}}{\partial y}\right) - \frac{\rho_1}{\rho r^2}\frac{\partial W_i}{\partial r}\frac{\partial^2 W_{n-1-i}}{\partial y^2}\right] = \frac{\rho_1}{\rho r}f_n(r, y),$$

funcţiile $W_n$ avînd o formă analogă cu (17). De asemenea, pentru distribuţiile vitezelor $v_r$ şi $v$ rezultă relaţii analoge (18), în particular $v \equiv 0$, iar prin utilizarea ecuației (47) se deduce în locul relației (21) relația

$$\frac{h^3}{12\,\mu}\,\rho\,\frac{\partial p}{\partial r}\left\{1+\frac{3h^4}{280\,\mu^2}\left[\rho\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{2r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho r\,\frac{\partial p}{\partial r}\right)\right]+\ldots\right\}=-\,\frac{\mathscr{M}_r}{2\pi r}. \tag{53}$$

Urmînd aceeași cale ca și pentru problema bidimensională și ținînd seama ca

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho r\,\frac{\partial p}{\partial r}\right)\cong 0,\\ &\rho\,\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}\cong\frac{12\,\mu\,\mathscr{M}_r}{2\pi r\,h^3}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)=\\ &=-\,\frac{144\,\mu^2\mathscr{M}_r^2}{4\pi^2 r^3 h^6\,\rho_1}\left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)^{-1}-\frac{144\,\mu\,\mathscr{M}_r^2}{4\,n\pi r^2 h^6\,\rho_1}\,\frac{1}{p}\left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{n}}, \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

se deduce în cele din urmă pentru ecuația presiunilor (24) următoarea ecuație diferențială

$$\frac{\partial p}{\partial r}\left(p^{\frac{1}{n}}-\frac{\alpha\mathscr{M}_r^2\,p_1^{\frac{1}{n}}}{4n\,\pi^2 r^2\rho_1 h^2}\,\frac{1}{p}\right)=-\,\frac{12\,\mu\mathscr{M}_r\,p_1^{\frac{1}{n}}}{2\pi\,r\,h^3\,\rho_1}+\frac{\alpha\mathscr{M}_r^2\,p_1^{\frac{1}{n}}}{4\pi^2 r^3 h^2\,\rho_1}. \tag{55}$$

Față de ecuația (24) apare în plus ultimul termen. În același timp, în fiecare termen apare la numitor raza $r$ ceea ce face ca integrarea acestei ecuații să fie mult mai dificilă [6].

De asemenea, aspectul calitativ al scurgerii este diferit. Mișcarea bidimensională prezintă caracteristici asemănătoare unui ajutaj convergent, în timp ce mișcarea axial-simetrică poate fi asimilată cu scurgerea printr-un ajutaj divergent.

Astfel, notînd cu $U$ viteza medie $v_r$

$$U=\frac{\mathscr{M}_r}{2\pi\,r\rho\,h}=\frac{p_1^{\frac{1}{n}}\,\mathscr{M}_r}{2\pi\rho_1 h}\,\frac{1}{r p^{\frac{1}{n}}} \tag{56}$$

ecuația de mișcare (44) se scrie

$$\alpha\rho U\,dU+dp+\frac{12\,\mu}{h^2}\,\rho U\,dr=0 \tag{57}$$

ecuația de continuitate

$$\frac{d\rho}{\rho}+\frac{dU}{U}+\frac{dr}{r}=0 \tag{58}$$

în timp ce ecuația de stare păstrează aceiași formă (37). În acest mod, se obține în locul relației (39) următoarea ecuație

$$(1-\alpha M_*^2)\frac{dU}{U} = -\frac{dr}{r}\left(1-\frac{24\,\mu\pi r^2}{h\mathcal{M}_r}M_*^2\right). \tag{59}$$

Dacă forțele de inerție sînt neglijabile, $\alpha = 0$. Apare acum posibilitatea ca $dU = 0$, chiar fără să se țină seama de forțele de inerție, dacă

$$1-\frac{24\,\mu\pi r^2}{h\mathcal{M}_r}M_*^2 = 1-\frac{6\mu\mathcal{M}_r}{n\pi h^3 p\rho} = 0. \tag{60}$$

De exemplu pentru o mișcare izotermă ($n = 1$), din (60) și (50) se deduce că $dU = 0$ pentru

$$p^2 = \frac{p_1^2-p_0^2}{2\ln\dfrac{r_0}{r_1}}, \tag{61}$$

valoare care în general este cuprinsă între valorile extreme, și deci are loc pentru o rază $r_1 < r_m < r_0$.

Pentru ca viteza să crească tot timpul, ca în cazul bidimensional, este necesar ca $r_m \leqslant r_1$, sau

$$\frac{r_0}{r_1} \leqslant \exp\left(\frac{p_1^2-p_0^2}{2p_1^2}\right). \tag{62}$$

Membrul al doilea al acestei inegalități variază între 1 pentru $\frac{p_1}{p_0}\to 1$ și $\sqrt{e} = 1{,}65$ pentru $\frac{p_1}{p_0}\to\infty$. Practic deci condiția (62) nu corespunde cazurilor interesante pentru aplicații.

Invers, pentru ca viteza să scadă tot timpul, este necesar ca $r_m \geqslant r_0$ sau

$$\frac{r_0}{r_1} \geqslant \exp\left(\frac{p_1^2-p_0^2}{2p_0^2}\right), \tag{63}$$

raport care variază între unitate pentru $\frac{p_1}{p_0}\to 1$ și $\infty$ pentru $\frac{p_1}{p_0}\to\infty$, crescînd repede cu $\frac{p_1}{p_0}$. De exemplu pentru $\frac{p_1}{p_0} = 4$, $\frac{r_0}{r_1} \geqslant 1\,800$. În consecință condiția (63) este practic îndeplinită numai pentru rapoarte $\frac{p_1}{p_0}$ reduse sau rapoarte $\frac{r_0}{r_1}$ mari.

În cazul general, viteza scade pînă în punctul definit de condiția (62) după care crește. Este de notat în sfîrșit că din relația (56) rezultă că după cum

$$\frac{p_0}{p_1}\frac{r_0}{r_1} > 1 \quad \text{sau} \quad \frac{p_0}{p_1}\frac{r_0}{r_1} < 1, \tag{64}$$

viteza în secțiunea de ieșire rezultă mai mică sau mai mare decît în secțiunea de intrare.

Revenind acum la ecuația completă (59) cu $\alpha \neq 0$ concluziile de mai sus sînt adevărate pentru $1 - \alpha M_*^2 > 0$. Pentru cazul supersonic $1 - \alpha M_*^2 < 0$ iar concluziile sînt inversate : viteza crește cu $r$ dacă expresia (60) este pozitivă și scade dacă aceiași expresie este negativă.

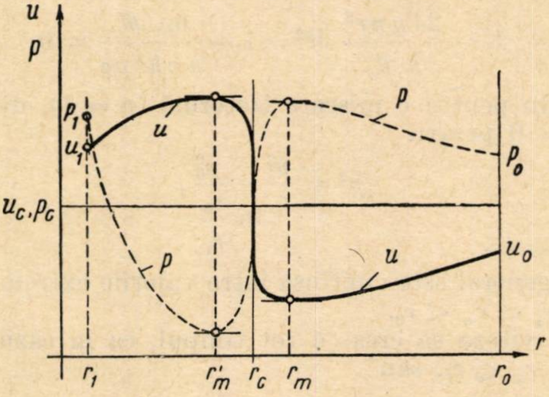


Fig. 4

De exemplu, dacă $\frac{p_0}{p_1}\frac{r_0}{r_1} > 1$ și viteza de intrare este supersonică, va exista un interval $r_1 < r < r'_m$ în care viteza va crește, atingînd un maximum la $r = r'_m$ după care scade, trecînd în regim subsonic la $r = r_c$ (fig. 4). Pentru $r > r_c$ situația este inversată, existînd un minim pentru $r = r_m$. Presiunile au o variație corespunzătoare. Punctul $r = r_c$ unde variația caracteristicilor mișcării este bruscă, este locul unei unde de șoc frontale. În realitate saltul de presiune are loc pe o anumită grosime, deoarece evoluția este apropiată de o adiabată pentru $r < r_c$ și de o izotermă pentru $r > r_c$; din această cauză cele două arce de curbă nu se racordează riguros, apărînd o zonă de tranziție [6].

Dacă însă $\frac{p_0}{p_1}\frac{r_0}{r_1} \leqslant 1$ viteza cea mai mare are loc în secțiunea de ieșire. În această secțiune, viteza nu poate depăși viteza sunetului deoarece semnul expresiei (60) este negativ. Rezultă o situație oarecum analogă cazului mișcării bidimensionale : presiunea în zona de ieșire devine mai mare decît presiunea din mediul exterior $p_0$.

O situație analogă dar cu întreg cîmpul vitezelor supersonic se produce și pentru cazul $\frac{p_0}{p_1}\frac{r_0}{r_1} > 1$, dacă presiunea $p_0$ scade sub valoarea care corespunde poziției extreme a undei de șoc chiar în secțiunea de ieșire, $r_c = r_0$ (scăderea ulterioară a presiunii mediului exterior $p_0$ nu mai modifică valoarea presiunii în secțiunea de ieșire).

Dacă însă orificiul de alimentare prezintă o strangulare, sau are debitul limital printr-un alt sistem, influența forțelor de inerție este mai redusă. Zona supersonică, dacă apare, se întinde atunci pe un interval $r_1 \leqslant r \leqslant r_c$ destul de redus și poate fi chiar neglijată [7].

În ipoteza că forțele de inerție sînt relativ reduse, se pot obține formule de corecție analoge cazului mișcării bidimensionale. Astfel în ecuația (55), termenul $\dfrac{\alpha \mathcal{M}_r^2 p_1^{\frac{1}{n}}}{4\, n \pi^2 r^2 \rho_1 h^2} \dfrac{1}{p}$ poate fi neglijat față de $p^{\frac{1}{n}}$. Rezultă în acest mod, pentru valori $\chi$ mici

$$p^{\frac{1}{n}} \frac{dp}{dr} \cong -\frac{6 \mu \mathcal{M}_r p_1^{\frac{1}{n}}}{\pi\, r\, \rho_1 h^3} + \frac{\alpha\, \mathcal{M}_r^2\, p_1^{\frac{1}{n}}}{4 \pi^2 r^3 \rho_1 h^2}, \tag{65}$$

sau, integrînd de la $r_1$ la $r$

$$p_1^{\frac{n+1}{n}} - p^{\frac{n+1}{n}} = \frac{n+1}{n} \frac{6 \mu\, \mathcal{M}_r p_1^{\frac{1}{n}}}{\pi \rho_1 h^3} \left[ \ln \frac{r}{r_1} - \frac{\alpha \chi_1}{24} \left( 1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right) \right], \tag{66}$$

ultimul termen, proporțional cu $\chi_1$ reprezentînd corecția asupra distribuției presiunilor față de formulele (49) (50). Debitul $\mathcal{M}_r$ se determină din condiția $p = p_0$ pentru $r = r_0$. Rezultă, din (65)

$$\mathcal{M}_r = \frac{n}{n+1} \frac{\pi \rho_1 h^3 \left( p_1^{\frac{n+1}{n}} - p_0^{\frac{n+1}{n}} \right)}{6\, \mu\, p_1^{\frac{1}{n}} \left[ \ln \frac{r_0}{r_1} - \frac{\alpha \chi_1}{24} \left( 1 - \frac{r_1^2}{r_0^2} \right) \right]}, \tag{67}$$

sau aproximativ

$$\mathcal{M}_r = (\mathcal{M}_r)_0 \left[ 1 + \frac{\alpha \chi_1}{24} \frac{1 - \frac{r_1^2}{r_0^2}}{\ln \frac{r_0}{r_1}} \right], \tag{68}$$

unde $(\mathcal{M}_r)_0$ este dat de formula (50).

Ecuația (65) poate fi aplicată pentru valori $\chi_1$ mai mari, dar numai pentru valori $\dfrac{r}{r_1}$ suficient de mari pentru ca în realitate $\chi$ (51) să fie redus. În schimb aceste rezultate nu sînt aplicabile pentru $\dfrac{r}{r_1} \to 1$; în particular formula (67) pentru debitul $M_r$ este aplicabilă numai pentru valori $\chi_1$ relativ reduse. Astfel dacă punem condiția

$$\frac{\alpha \chi_1}{24} \frac{1 - \frac{r_1^2}{r_0^2}}{\ln \frac{r_0}{r_1}} < 0{,}1, \tag{69}$$

este necesar aproximativ ca

$$\chi_1 < 2 \ln \frac{r_0}{r_1} . \tag{70}$$

Din această condiție se deduce, ținînd seama de relațiile (50) (51), că pentru o evoluție izotermă ($n = 1$)

$$h \leqslant \sqrt{\frac{4\sqrt{3}\,\mu\, r_1 \ln \frac{r_0}{r_1}}{\sqrt{\rho_1 p_1}}} . \tag{71}$$

Numărul Mach la intrare $M_{a_{*1}}$ rezultă subunitar. Într-adevăr

$$M_{*1} = \frac{U_1}{a_{*1}} = U_1 \sqrt{\frac{\rho_1}{p_1}} = \frac{h^2 \sqrt{\rho_1 p_1}\, p_1 \left(1 - \frac{p_0^2}{p_1^2}\right)}{24\, \mu\, r_1 \ln \frac{r_0}{r_1}} , \tag{72}$$

sau acoperitor

$$h \leqslant \sqrt{\frac{24\, \mu r_1 \ln \frac{r_0}{r_1}}{\sqrt{\rho_1 p_1}}} , \tag{73}$$

condiție automat satisfăcută, dacă condiția (71) este îndeplinită. De exemplu pentru $p_1 = 6$ kg/cm², $\rho_1 = 0{,}75$ kg sec²/m⁴, $r_1 = 0{,}4$ mm, $\frac{r_0}{r_1} = 50$ rezultă $h < 0{,}01$ mm. La valori $h$ mai mari trebuie în acest caz să se utilizeze ecuația complexă (55) [6].

## CONCLUZII

Din considerațiile de mai sus, se constată că prin integrarea aproximativă a ecuațiilor de mişcare prin introducerea funcției de curent se poate aprecia influența forțelor de inerție asupra caracteristicilor scurgerii cu frecare a unui gaz în straturi subțiri. Metoda a fost aplicată numai pentru situațiile cele mai simple ale mişcărilor bidimensionale şi axial simetrice cu $h =$ const. Ea se poate aplica analog şi pentru alte cazuri, însă calculele devin laborioase. De altfel rezultatele obținute permit aprecierea influenței calitative a forțelor de inerție în cazul general. Astfel această influență depinde în primul rînd de parametrul $\chi$ (12) (51). La valori $\chi$ reduse influența forțelor de inerție este de asemenea redusă şi poate fi eventual evaluată cu ajutorul formulelor de corecție simple, stabilite mai sus. Pe măsură ce $\chi$ creşte această influență devine din ce în ce mai puternică, ajungînd în cele din urmă ca pentru valori $\chi$ foarte mari, să devină preponderentă. În acest caz limită, influența viscozității gazului devine neglijabilă, iar problema se reduce la o problemă de dinamica gazelor perfecte (de exemplu scurgerile cvasidimensionale ale gazelor prin ajutaje). În sfîrşit, este de menţionat că analiza efectuată este aplicabilă numai pentru regimuri de scurgere laminare. Dacă însă mişcarea devine turbulentă se poate relua studiul pe o cale asemănătoare, obţinîndu-se în cele din urmă concluzii analoge.

Pentru cazul lubrificaţiei cu gaze sub presiune, se caută, în general, ca debitul de lubrifiant să nu aibă valori prea mari, atît pentru considerente economice cît şi pentru asigurarea stabilităţii mişcării lagărului. De aceea în cele mai multe cazuri influenţa forţelor de inerţie este redusă. Cu toate acestea cunoaşterea acestei influenţe este importantă. De exemplu în cazul mişcării axial simetrice, dacă se produce o situaţie ca în figura 4, rezultanta presiunilor este mult redusă datorită depresiunilor din zona supersonică, putînd exista situaţii cu o rezultantă nulă [6] sau chiar negativă.

*Primită la redacţie la 24 aprilie 1961*

## О ТЕЧЕНИИ ГАЗА С ТРЕНИЕМ МЕЖДУ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

### РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается влияние сил инерции на характеристики течения газа с трением между двумя параллельными поверхностями применительно к газовой смазке под давлением (гидростатической смазке). Уравнения движения для случая двухмерных и осесимметрических течений интегрируется приближенно путем введения функции тока.

Таким образом получаются простые приближенные поправочные формулы для характеристик течения по сравнению со случаем пренебрежения силами инерции. Одновременно приводятся некоторые качественные соображения о влиянии сил инерции, причем показывается, что это влияние может быть значительным, особенно для осесимметрических движений.

## ON THE FLOW OF A VISCOUS GAS BETWEEN TWO PARALLEL SURFACES

### ABSTRACT

The influence of the force of inertia on the characteristics of the friction flow of a gas between two parallel surfaces is analysed and the results are applied to lubrication with gas under pressure (hydrostatic lubrication). The motion equations for two-dimensional and axisymmetrical

flows are approximately integrated by introducing the stream function. Thus simple approximate correction formulae are obtained for the flow characteristics when the inertia forces are neglected. Further, the influence of the inertia forces is considered qualitatively, and it is shown that it can be notable, particularly for axisymmetrical motions.

## BIBLIOGRAFIE

1. V. N. CONSTANTINESCU, *Criterii de similitudine în funcționarea lagărelor lubrificate cu lichide sau gaze.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **XII**, 3 (1961).
2. A. A. MILNE, *On the Effect of Lubricant Inertia in the Theory of Hydrodynamic Lubrication.* Transactions of the ASME, Series D, Journal of Basic Engineering, **81**, 2, June, 239–244 (1959).
3. N. A. SLEZKIN, S. M. TARG, *Obobşcenie uravnenia Reynoldsa.* Dokladt Akademii Nauk SSSR, **54**, 205–208 (1946).
4. W. A. GROSS, *Film Lubrication.* Part IX Externally Pressurized Bearings, IBM Research Paper, 1960.
5. S. K. GRINNELL, *Flow of a Compressible Fluid in a thin Passage.* Transaction of the ASME, **78**, May, 765–771 (1956).
6. E. A. DENKER, M. WOJTECH, *Ecoulement radial d'un fluide visqueux entre deux disques très rapprochés. Théorie du palier a air,* Revue Générale de l'Hydraulique, *65* Sept-Oct. (227–237 (1951); *66*, nov-dec. 285–294 (1951).
7. I. H. LAUB, *Hydrostatic Gas Bearings.* Transactions of the ASME, Series D, Journal of Basic Engineering, **82** *2*, June 276–286 (1960).

# STUDIUL UNOR MATERIALE ANTIFRICȚIUNE ZINC-ALUMINIU DE ÎNLOCUIRE PENTRU LAGĂRELE CU ALUNECARE[1]

DE

AL. NICA și C-TIN BARBU[2]

Unele încercări preliminare de utilizare a aliajelor zinc-aluminiu în construcția lagărelor cu alunecare au permis să se constate caracteristicile lor funcționale favorabile, cît și avantajele de ordin economic pe care le prezintă.

În cele ce urmează se expun rezultatele unor cercetări experimentale mai ample, urmărind cunoașterea proprietăților antifricțiune în paralel cu ale unor materiale consacrate, pentru stabilirea posibilităților de utilizare a acestor aliaje în locul materialelor deficitare.

## 1. MATERIALELE STUDIATE

Materialele utilizate în cadrul experiențelor au fost obținute în șarje industriale, avînd proprietăți și caracteristici standard.

S-au considerat două aliaje zinc-aluminiu : $ZnAl_{10}Cu_5$ și $ZnAl_{25}Cu_{1,5}$. Compoziția chimică a acestor aliaje este redată în tabela 1; aliajul $ZnAl_{25}Cu_{1,5}$ se notează și prin 25AZ5, adică cu un simbol compus din cifra care reprezintă rezistența la rupere (coincide cu cifra care exprimă conținutul de AL), din inițialele principalelor elemente componente și din cifra care exprimă alungirea în procente.

---

[1] Elaborarea și determinarea proprietăților fizico-mecanice ale materialelor s-a realizat în cadrul Uzinelor metalurgice „Mao-Tze-Dun" din București, iar caracteristicile funcționale au fost determinate în cadrul Institutului de mecanică aplicată, al Academiei R.P.R.

[2] Uzinele metalurgice „Mao-Tze-Dun", București.

*Tabela 1*

| Compoziţie<br>Simbol | Al<br>% | Cu<br>% | Mg<br>% | Zn | Sn, Sb, Fe,<br>Pb, Cd, Bi |
|---|---|---|---|---|---|
| $ZnAl_{10}Cu_5$ | 10÷15 | 4÷6 | 0,05÷0,1 | Restul pînă la 100% | Sub formă de impurităţi |
| $ZnAl_{25}Cu_{1,5}$ | 25÷30 | 1÷3 | — | | |

Proprietăţile fizico-mecanice ale aliajelor studiate sînt reprezentate în tabela 2.

*Tabela 2*

| Caracteristica<br>Aliajul | Greutatea specifică ($kgf/dm^3$) | Punctul de topire (°C) | Duritate (HB) | Rezistenţa de rupere la tracţiune ($kgf/mm^2$) | Alungirea % |
|---|---|---|---|---|---|
| $ZnAl_{10}Cu_2$ | 5,9÷6,2 | 420 | 90÷110 | 28÷35 | 1÷2 |
| $ZnAl_{25}Cu_{1,5}$ | 4,8÷5,2 | 520 | 60÷90 | 25÷35 | 5 |

Pentru elaborarea acestor materiale cuprul se introduce sub formă de prealiaj elaborat în şarje separate (50% Cu şi 50% Al), la care se adaugă apoi cantitatea necesară de aluminiu pentru a se obţine proporţiile stabilite; după o supraîncălzire la 700—750°C, se adaugă în 2—3 rînduri cantitatea cuvenită de zinc (se utilizează zinc electrolitic sau metalurgic în plăci), luîndu-se în consideraţie pierderile prin ardere. În cazul aliajului $ZnAl_{10}Cu_5$ se introduce şi cantitatea necesară de magneziu, cînd şarja are temperatura de 470—500°C.

Creuzetele utilizate pentru elaborarea acestor materiale trebuie preîncălzite la 650—700°C; turnarea şarjelor se face cu ajutorul unor oale de turnare de asemenea preîncălzite, de preferat în forme (cochile) metalice.

Aspectul macroscopic al structurii lor (mărire × 150) este prezentat în figura 1 pentru $ZnAl_{10}Cu_5$, iar în figura 2, pentru $ZnAl_{25}Cu_{1,5}$.

Materialele consacrate în construcţia de lagăre cu alunecare (Bz14T şi Bz6ZnT) studiate în aceleaşi condiţii ca şi aliajele zinc-aluminiu, au fost elaborate de asemenea în şarje industriale şi corespund specificaţiilor prevăzute în standarde (Stas 197-53).

## 2. CARACTERISTICILE ANTIFRICŢIUNE

Încercările experimentale au fost realizate cu ajutorul unei maşini de încercat lagăre cu alunecare cu forţe şi viteze constante, putînd lua orice valori între limitele 0÷3 000 kgf pentru încărcarea totală a lagărului $P$, şi 0,043÷6,8 m/s pentru viteza periferică a fusului.

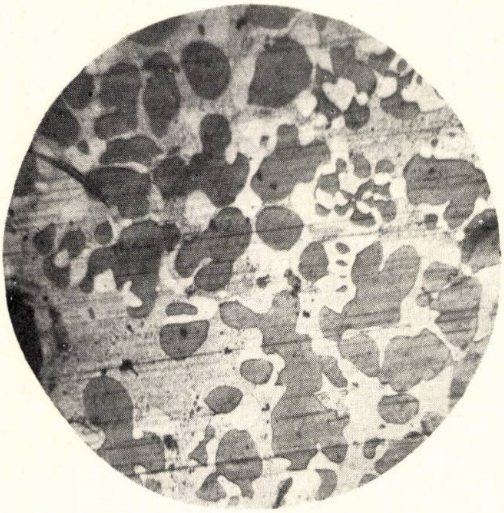


Fig. 1

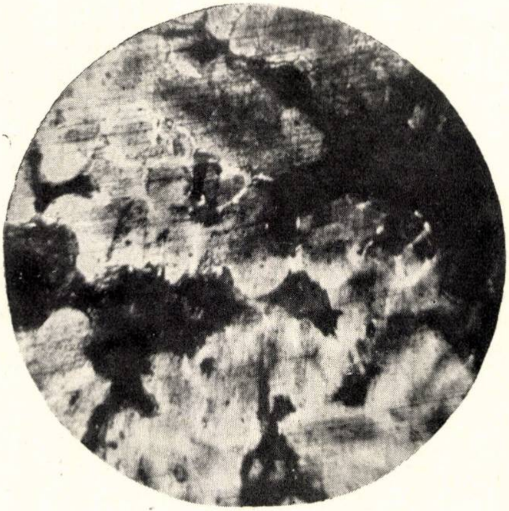


Fig. 2

Deoarece instalaţia experimentală şi metodologia utilizată pentru stabilirea caracteristicilor funcţionale ale materialelor considerate au fost prezentate în lucrări anterioare, [1], [2], [3], nu se vor reda decît principalele caracteristici ale lagărelor experimentale.

Astfel, caracteristicile geometrice (fig. 3) au fost următoarele :

— alungirea $\lambda = \frac{b}{d_2} = 0{,}7$

($b = 25{,}2$ mm este lăţimea cuzinetului, iar $d_2$ este diametrul cuzinetului, cu valoarea nominală de 36 mm),

— jocul relativ $\psi = \frac{d_2 - d_1}{d_2} = 1{,}5‰$,

— diametrul orificiului de alimentare cu lubrifiant $b_i = 4$ mm.

Cuzineţii au fost prelucraţi prin strunjire simplă din bare turnate, înălţimea medie a asperităţilor avînd valori $\delta_m \leqslant 0{,}005$ mm.

— Fusul a fost din OLC 16 cementat, călit şi rectificat, avînd o fineţe de prelucrare caracterizată prin $\delta_m \leqslant 0{,}0015$ mm, şi o duritate medie $HB \cong 550$.

Lubrifiantul utilizat a fost ulei 305, avînd curba de variaţie a viscozităţii cu temperatura redată în figura 4 ; presiunea la intrarea în lagăr era $p_i = 1{,}5$ kgf/cm$^2$, iar temperatura sa în baie se menţinea constantă ($t_b = 26$°C), cu ajutorul unui sistem special de răcire.

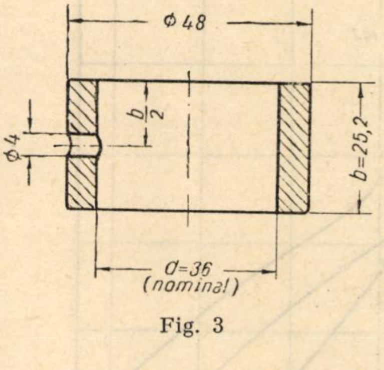


Fig. 3

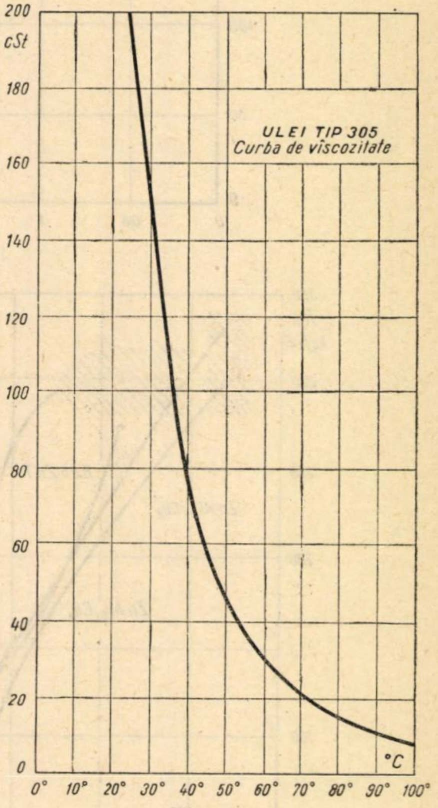


Fig. 4

Materialele au fost încercate în cazul a trei regimuri termice constante, caracterizate prin valorile $t_c = 45$ ; 60 ; 80°C, $t_c$ fiind temperatura cuzinetului măsurată în zona încărcată a lagărului, pe direcţia sarcinii la 1,5 mm distanţă de suprafaţa în frecare. S-a considerat că lagărul lucrează în

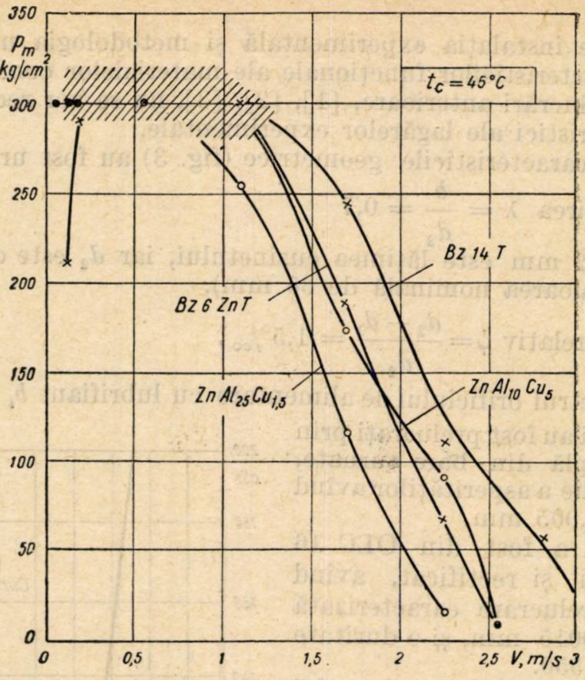

$p_m$ kg/cm²
350
300
250
200
150
100
50
0
0
0,5
1
1,5
2
2,5
V, m/s
3
$t_c = 45°C$
Bz 14 T
Bz 6 ZnT
Zn Al₂₅ Cu₁,₅
Zn Al₁₀ Cu₅

Fig 5

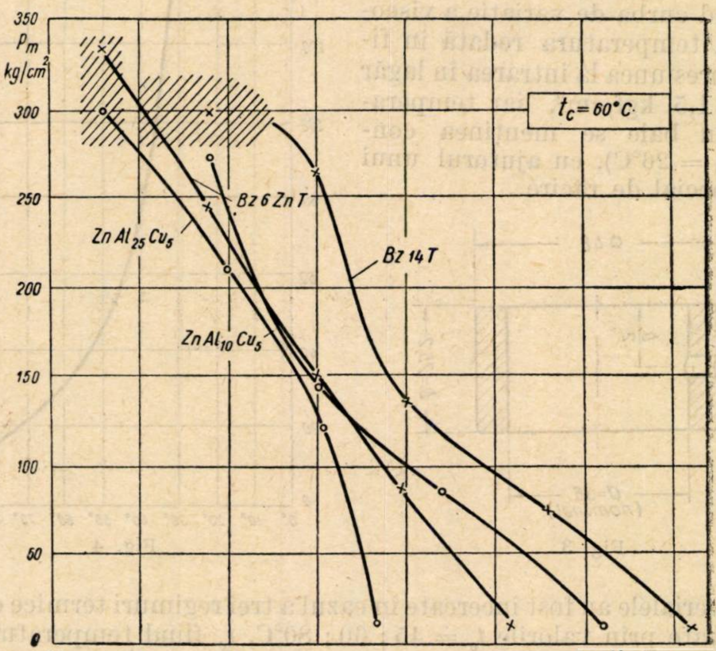

350
$p_m$ kg/cm²
300
250
200
150
100
50
0
2,5
3
3,5
4
4,5
5
5,5
V, m/s
6
$t_c = 60°C$
Bz 6 ZnT
Zn Al₂₅ Cu₅
Bz 14 T
Zn Al₁₀ Cu₅

Fig. 6

regim termic stabil dacă temperatura $t_c$ nu varia mai mult de $\pm 0{,}2$°C timp de $30 \div 60$ minute de funcţionare.

Regimul de rodaj a fost comun pentru toate materialele încercate.

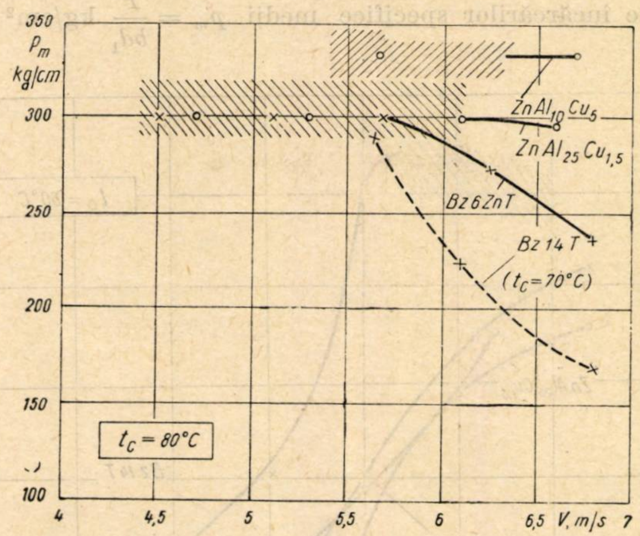


Fig. 7

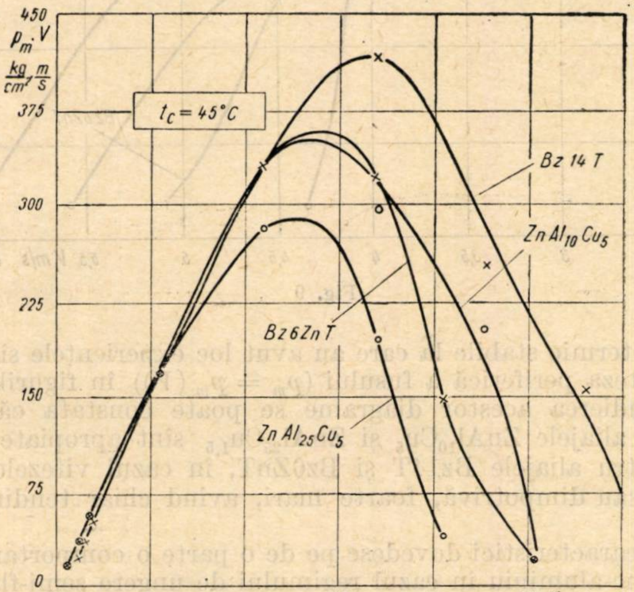


Fig. 8

Pentru fiecare din cele trei regimuri termice menţionate s-au determinat caracteristicile de sarcină $p_m = p_m^{\cdot}(V)$, produsul $p_m \cdot V = p_m \cdot V\,(V)$, coeficientul de frecare $f = f\,(V)$ şi debitul de lubrifiant $Q_s = Q_s\,(V)$.

Valorile încărcărilor specifice medii $p_m = \dfrac{P}{bd_1}$ kg/cm² pentru cele

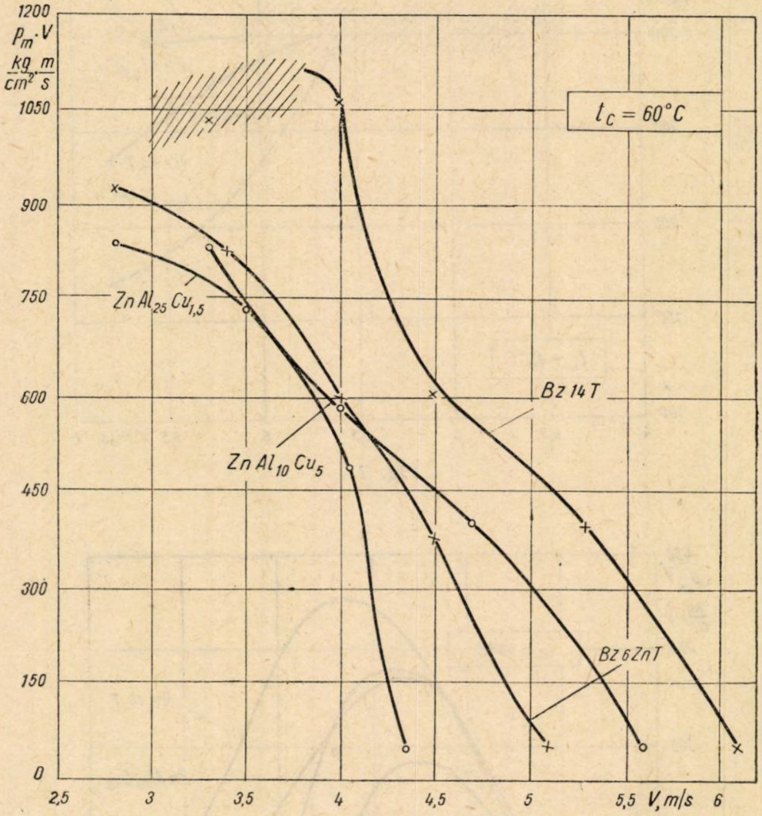


Fig. 9

trei regimuri termic stabile la care au avut loc experienţele sînt redate în funcţie de viteza periferică a fusului ($p_m = p_m\,(V)$) în figurile 5—7.

Din studierea acestor diagrame se poate constata că încercările suportate de aliajele $ZnAl_{10}Cu_5$ şi $ZnAl_{25}Cu_{1,5}$ sînt apropiate de valorile obţinute pentru aliajele Bz14T şi Bz6ZnT, în cazul vitezelor periferice foarte mici, sau dimpotrivă, foarte mari, avînd chiar tendinţa de a le depăşi.

Aceste caracteristici dovedesc pe de o parte o comportare mai bună a aliajelor zinc-aluminiu în cazul regimului de ungere semi-fluid şi pe de altă parte se datoresc unei capacităţi de evacuare a căldurii mai mari decît a bronzurilor.

Maşina de încercări utilizată nepermiţînd, după cum s-a specificat, încărcări mai mari de 3 000 kg (ceea ce corespunde unei valori $p_m = 333$ kg/cm²), nu s-au putut realiza întotdeauna valorile $t_c$ propuse, temperatura cuzinetului avînd valori mai scăzute (situaţie indicată prin regiunile haşurate din diagrame).

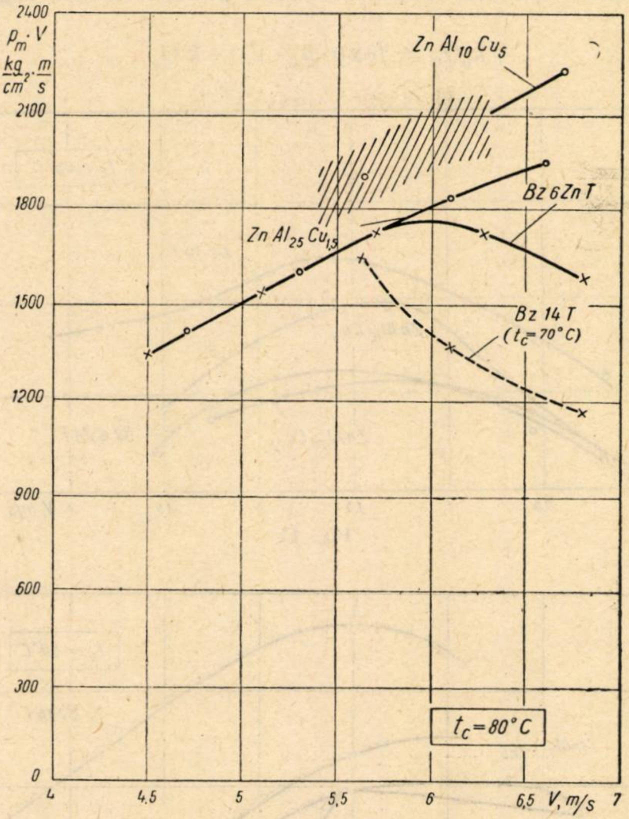


Fig. 10

În figurile 8—10 se prezintă valorile produsului în funcţie de viteza relativă; constatările precedente sînt confirmate şi de aspectul acestor diagrame.

Valorile debitului de scăpări laterale $Q_s$ sînt redate în figurile 11—13 şi nu lasă să se întrevadă tendinţa vreunui material de a avea un consum exagerat de lubrifiant; diferenţele uneori mari dintre valorile $Q_s$ pentru acelaşi $V$ se datorează încărcărilor diferite şi abaterilor inevitabile faţă de valoarea propusă pentru jocul în lagăr.

Coeficientul de frecare $f$ a fost dedus din relaţia [4]

$$f = \frac{kQ_s + k_0Q_0}{p_m V}, \tag{1}$$

în care

$$k = \frac{427}{3\,600} \cdot \frac{1}{d_1 b}\, c_v \gamma\, (t_e - t_b), \tag{2}$$

iar $k_0Q_0$ se deduce pe cale experimentală, pentru fiecare regim termic considerat

$$k_0Q_0 = f\text{exp} \cdot p_m \cdot V - k\, Q_s \tag{3}$$

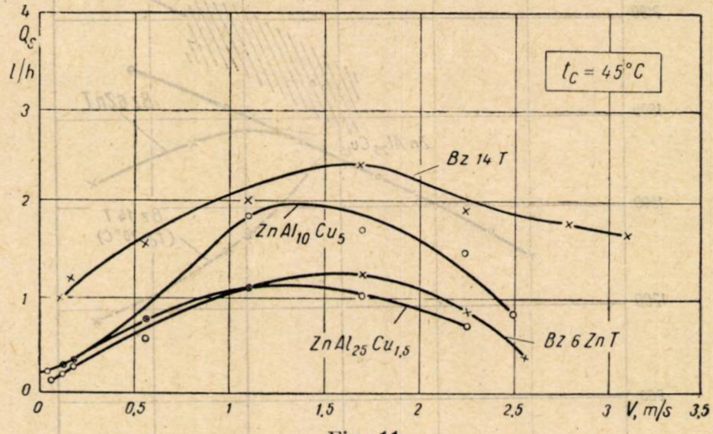


Fig. 11

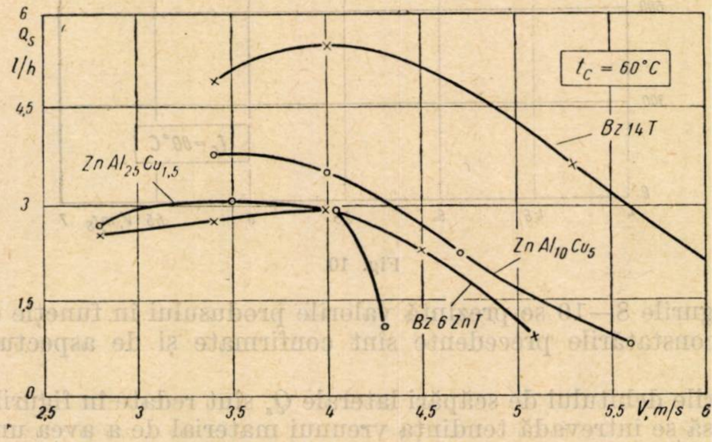


Fig. 12

unde $c_v$ este căldura specifică a uleiului, $\gamma$ greutatea specifică, iar $t_e$ temperatura medie a lubrifiantului (s-a constatat că $t_e \cong t_c - 2°C$).

Valorile experimentale ale lui $f$ ($f$exp) se determină cu ajutorul unui sistem mecanic de tip paralelogram, prezentat într-o lucrare anterioară [5]. În acest caz, pentru a se reduce la minimum erorile de măsură, lagărul se încarcă cu ajutorul unor greutăţi prinse direct de carcasa cuzinetului; deoarece maşina de încercat lagăre nu putea depăşi turaţia de 3 600 rot/min, insuficientă pentru atingerea temperaturii de 80°C cu încărcări reduse, valorile coeficientului de frecare au fost stabilite numai pentru două regimuri termice ($t_c$ = 45 şi 60°C). Rezultatele sînt prezentate în figurile 14 şi 15, din care se poate constata cu uşurinţă că aliajele zinc-

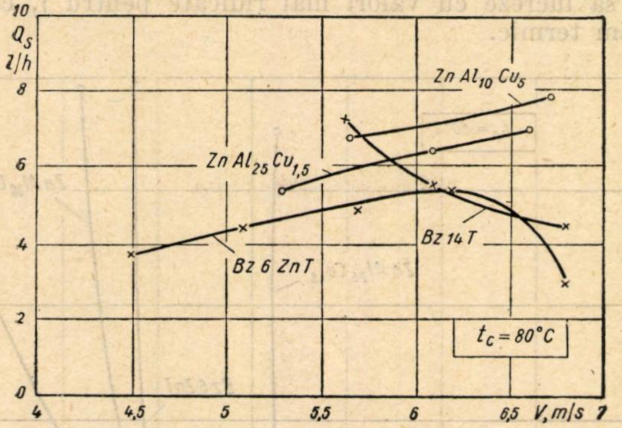


Fig. 13

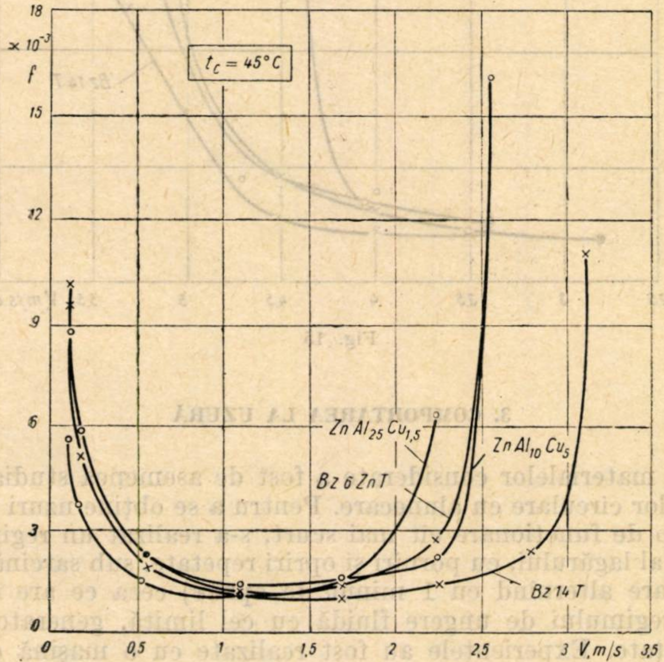


Fig. 14

aluminiu nu prezintă diferenţe mari faţă de bronzuri, iar la viteze periferice mici pot prezenta valori pentru *f* mai scăzute decît bronzurile. De altfel, conductibilitatea termică mai bună a aliajelor zinc-aluminiu le dă posibilitatea să lucreze cu valori mai ridicate pentru *f*, chiar în cazul aceluiaşi regim termic.

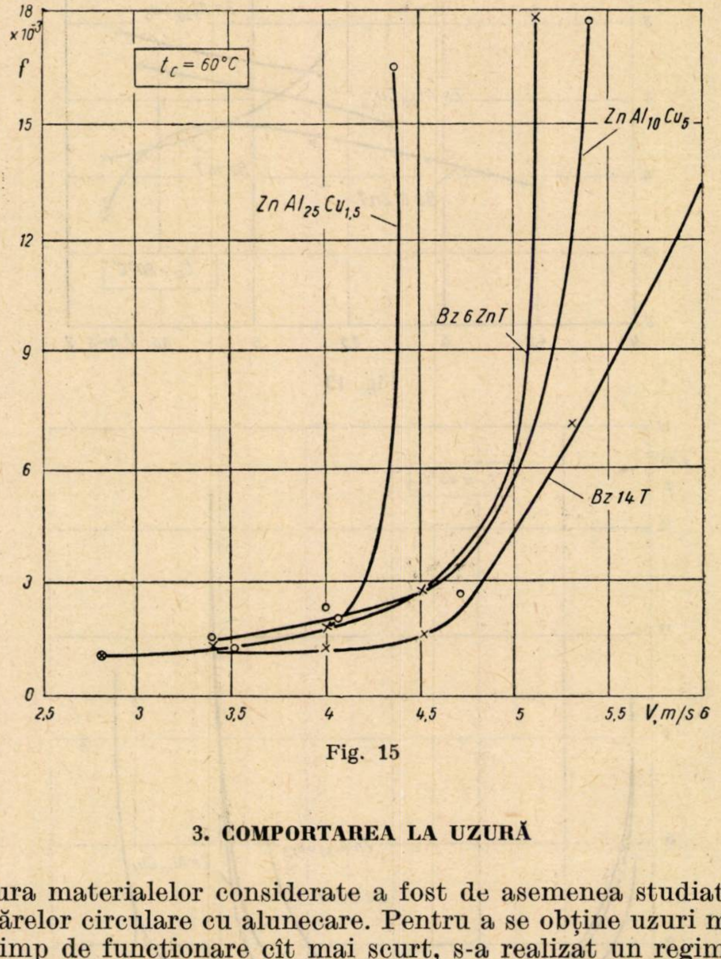


Fig. 15

## 3. COMPORTAREA LA UZURĂ

Uzura materialelor considerate a fost de asemenea studiată, pentru cazul lagărelor circulare cu alunecare. Pentru a se obţine uzuri măsurabile într-un timp de funcţionare cît mai scurt, s-a realizat un regim de lucru intermitent al lagărului, cu porniri şi opriri repetate, sub sarcină (3 minute de funcţionare alternînd cu 1 minut de oprire) ceea ce are ca rezultat alternarea regimului de ungere fluidă cu cel limită, generator de uzuri mai pronunţate. Experienţele au fost realizate cu o maşină de încercat lagăre, special amenajată pentru acest scop [6].

Caracteristicile constructive ale cuzineţilor experimentali, cît şi modul de alimentare cu lubrifiant, s-au păstrat identice cu cele de la maşina utilizată pentru stabilirea parametrilor funcţionali descrisă anterior.

Condiţiile de lucru, comune pentru toate materialele au fost : $p_m = 22$ kg/cm² şi $V = 1{,}81$ m/s. Durata totală de lucru pentru fiecare cuzinet încercat a fost de 80 ore (excluzînd perioada rodajului).

Uzura fiecărui cuzinet s-a determinat prin cîntărire ; nu s-au putut realiza măsurători geometrice suficient de precise, datorită variaţiei reduse a dimensiunilor, cît şi preciziei insuficiente a instrumentelor de măsură.

În tabela 3 se prezintă rezultatele obţinute : uzura absolută $U$ şi uzurile specifice $U_s$ (raportată la suprafaţa cuzinetului) şi $U_{sc}$ raportată la suprafaţă şi numărul de cicluri $c = 1{,}2 \times 10^3$ (pentru 80 ore de funcţionare).

*Tabela 3*

| Aliajul / Caracteristica | $ZnAl_{10}Cu_5$ | $ZnAl_{25}Cu_{1,5}$ | Bz14T | Bz6ZnT |
|---|---|---|---|---|
| Greutatea bucşei după rodaj (g) | 122,1610 | 105,6892 | 177,4545 | 176,6425 |
| Greutatea bucşei după 80 ore de funcţionare (g) | 122,1567 | 105,6869 | 177,4468 | 176,6400 |
| Uzura absolută $U$ (g) | 0,0043 | 0,0023 | 0,0077 | 0,0025 |
| $U_s = \dfrac{U}{\pi d_1 b}$ (g/cm²) | $0{,}148 \times 10^{-3}$ | $0{,}0794 \times 10^{-3}$ | $0{,}267 \times 10^{-3}$ | $0{,}0862 \times 1^{-3}$ |
| $U_{se} = \dfrac{U_s}{c}$ (g/cm² c) | $0{,}123 \times 10^{-3}$ | $0{,}0662 \times 10^{-3}$ | $0{,}233 \times 10^{-3}$ | $0{,}072 \times 10^{-3}$ |

Se constată că aliajul $ZnAl_{10}Cu_5$ prezintă uzuri mai reduse decît Bz14T şi $ZnAl_{25}Cu_{1,5}$ decît Bz6ZnT.

În figurile 16—19 se prezintă aspectul suprafeţelor active ale materialelor studiate (fig. 16 — $ZnAl_{10}Cu_5$ ; fig. 17 — $ZnAl_{25}Cu_{1,5}$ ; fig. 18 — Bz6ZnT ; fig. 19 — Bz14T), în zona încărcată a cuzinetului (mărire × 11). Se poate constata cu uşurinţă că rizurile produse în timpul funcţionării sînt mult mai reduse pentru materialele zinc-aluminiu decît pentru bronzuri, ceea ce demonstrează o bună capacitate de înglobare a particulelor abrazive care pătrund în lagăr. Această constatare se poate face de altfel şi cu ochiul liber, atît pentru fus, cît şi pentru cuzinet ; cuzineţii din aliajele zinc-aluminiu prezintă în zona de lucru o suprafaţă cu luciu metalic (oglindă) bine definită. Trebuie totodată remarcată rezistenţa la gripaj a aliajelor zinc-aluminiu, mult mai mare decît a bronzurilor.

## 4. CONCLUZII

Aliajele de înlocuire considerate ($ZnAl_{10}Cu_5$ şi $ZnAl_{25}Cu_{1.5}$) prezintă proprietăţi antifricţiune favorabile. Sarcinele suportate sînt apropiate de ale bronzurilor (ca valoare sînt invers proporţionale cu conţinutul de Al), iar în cazurile extreme (viteze periferice foarte reduse, sau dimpotrivă, viteze ridicate, deci temperaturi de lucru mari) sînt chiar superioare bronzurilor.

În limitele condiţiilor experimentale specificate, toate materialele au prezentat o funcţionare termic stabilă.

Valorile coeficientului de frecare sînt apropiate de ale bronzurilor, iar în cazul vitezelor de lucru reduse sînt chiar mai mici.

Conductibilitatea termică ridicată a aliajelor zinc-aluminiu permite evacuarea unei cantităţi mai mari de căldură din lagăr.

Uzura aliajelor zinc-aluminiu este mai redusă decît a bronzurilor cu care au fost comparate, iar suprafeţele lor active au căpătat o structură mult mai favorabilă funcţionării, decît bronzurile. În sfîrşit, tendinţa de gripare a acestor aliaje este mult mai redusă decît a bronzurilor.

*Primită la redacţie la 21 martie 1961.*

## ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАМЕНЯЮЩИХ АНТИФРИКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ЦИНК-АЛЮМИНИЙ ДЛЯ ПОДШИПНИКОВ СКОЛЬЖЕНИЯ

### РЕЗЮМЕ

Исследуются антифрикционные свойства и сопротивление трению некоторых сплавов цинк-алюминий ($ZnAl_{10}Cu_5$ и $ZnAl_{25}Cu_{1.5}$) наряду со свойствами обычных материалов для подшипников из категории бронз (Bz 6ZnT и Bz14T) с целью установления возможности замены последних.

Благоприятные антифрикционные свойства сплавов цинк-алюминий (выносят большие нагрузки в трудных условиях работы, обладают большим сопротивлением заеданию и пр.), а также их незначительный износ рекомендуют их для использования вместо бронз в случае функциональных параметров, заключенных в указанных в работе пределах.

## STUDY OF SOME ZINC-ALUMINIUM ANTI-FRICTION MATERIALS TO BE USED FOR JOURNAL BEARINGS

### ABSTRACT

Anti-friction properties and the resistance to wear of some zinc-aluminium alloys ($ZnAl_{10}Cu_5$ and $ZnAl_{25}Cu_{1.5}$ are studied concomitantly with those of some well-known bearing materials of the bronze class

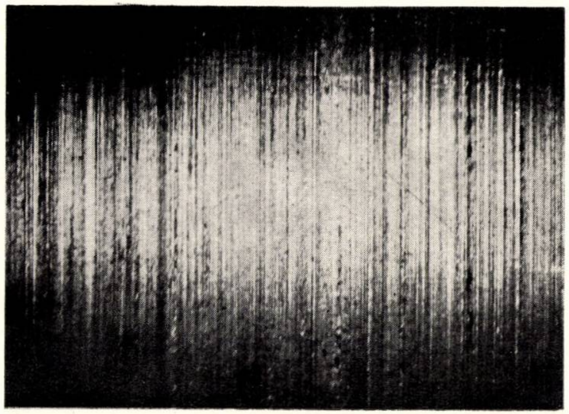


Fig. 16

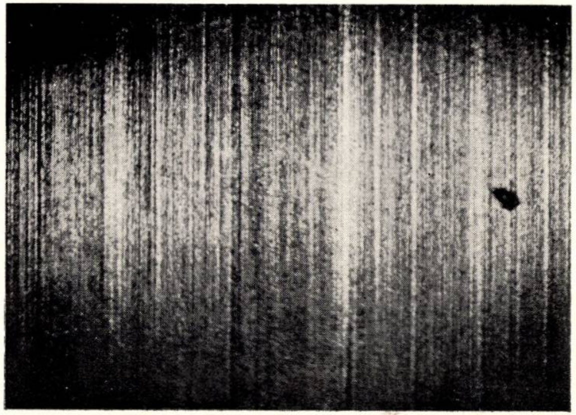


Fig. 17

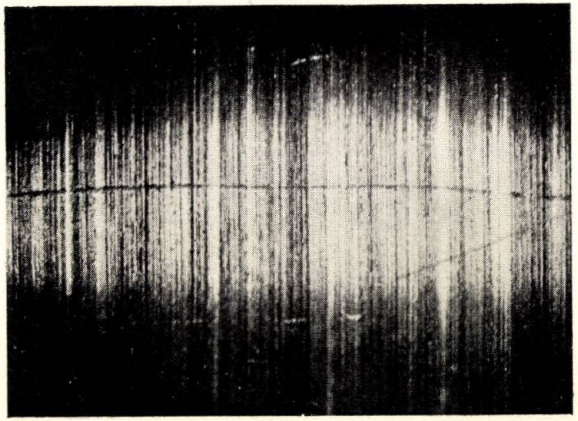


Fig. 18

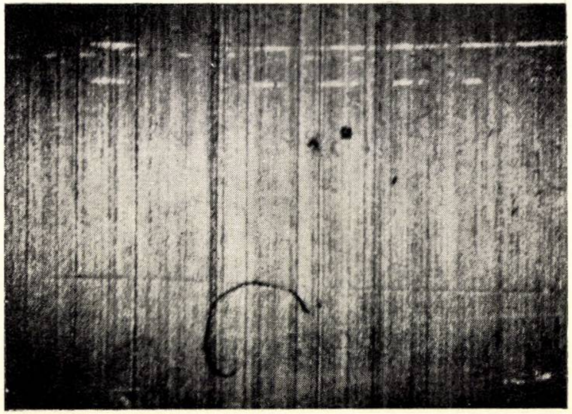


Fig. 19

(Bz6ZnT and Bz14T) in view of determining the possibility of replacing the latter by the former.

Favourable anti-friction properties of zinc-aluminium alloys (they stand heavy loads under difficult running conditions, are highly seizure-resisting etc.), as well as their reduced wear render them suitable for use in place of bronze, in case of the operating parameters shown in this paper.

## BIBLIOGRAFIE

1. GH. VASILCA, P. FREUND, *Studii experimentale asupra unor materiale antifricţiune de înlocuire pentru lagărele de alunecare.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată **VI**, *3*, 773—783 (1956).
2. GH. VASILCA, *Asupra utilităţii caracteristicii* $p = f(V)$ *la lagărele circulare cu alunecare.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VII**, *2*, 449—503 (1956).
3. GH. VASILCA AL. NICA, *Cercetări asupra caracteristicilor de funcţionare a lagărelor construite din materiale diferite.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *2*, 377—390 (1958).
4. GH. VASILCA, *Studiul coeficientului de frecare într-un lagăr circular cu ajutorul curbelor.* $p = g(V)$. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *1*, 75—84 (1957).
5. GH. VASILCA, AL. NICA, *Asupra preciziei de măsurare a momentului de frecare la lagărele circulare, cu ajutorul sistemelor mecanice tip paralelogram.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *1*, 229—238 (1958).
6. P. FREUND şi colab., *Banc experimental pentru studiul rezistenţei fusurilor la uzură în regim nepermanent.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *4*, 1275—1278 (1957).

bronze and the PT in view of determining the possibility of replacing the latter by the former.

Favourable anti-friction properties of zinc-aluminium alloys (they stand heavy loads under difficult running conditions, are highly corrosion-resistant, etc.), as well as their reduced wear render them suitable for use in place of bronze, in case of the operating parameters shown in this paper.

## BIBLIOGRAFIE

1. GH. VASILIU, D. PAVELESCU, *Studii experimentale asupra unor materiale [illegible] înlocuitoare pentru lagărele de alunecare.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VII**, 3, 773–784 (1956).
2. GH. VASILIU, *Asupra metodei caracteristicii [illegible] la lagărele [illegible].* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VII**, 2, 449–468 (1956).
3. GH. VASILIU, AL. ISBA, *Cercetări asupra caracteristicilor de funcționare a lagărelor [illegible] din materiale diverse.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **IX**, 2, 377–390 (1958).
4. GH. VASILIU, *Studiul experimental al frecării interne într-un lagăr circular cu ajutorul curbelor $\mu = f(\lambda)$.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, 1, 75–83 (1957).
5. GH. VASILIU, AL. ISBA, *Asupra procedeelor de măsurare a momentului de frecare în lagărele circulare, cu ajutorul sistemelor mecanice tip [illegible].* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **IX**, 1, 249–273 (1958).
6. D. PAVELESCU și colab., *[illegible]*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, 4, 1255–1278 (1957).

# STUDII

## ELASTICITATE—PLASTICITATE—REZISTENȚA MATERIALELOR

# ȚEVI GRELE DE EXTRACȚIE PENTRU POMPAJUL DE ADÎNCIME[1]

DE

N. S. PÎRVULESCU

Efectul presiunilor laterale asupra barelor, de a se opune flambajului provocat de forțe axiale de compresiune, a fost arătat [1] teoretic și verificat experimental. De asemenea, s-a arătat [2], că bare în formă de țeavă, considerate în întregime, pot să flambeze dacă sînt supuse la presiuni laterale interioare chiar dacă nu sînt comprimate după direcția axei; ceea ce s-a verificat ulterior [3].

Primul aspect (efectul presiunii exterioare) al acestei probleme, s-a pus în legătură cu propunerea de a îngreuna prăjinile grele de foraj cu adîncimea, pentru a compensa efectul hidrostatic al simplei cufundări în lichidul de foraj. Al doilea aspect (efectul presiunii interioare) s-a pus în legătură cu propunerea de a înlocui prăjinile grele, prin crearea unei apăsări hidraulice asupra sapei, cu ajutorul unei geale sau datorită forței axiale a turbinei de foraj.

Între timp am studiat [4] flambajul tijelor sub acțiunea unei compresiuni date de o parte din greutatea proprie [5], [6], [7]; ceea ce ne-a permis [8] să determinăm adîncimile critice ale pompelor cu prăjini tubulare. Efectul presiunii laterale interioare din prăjinile tubulare, presiune care crește liniar cu adîncimea, a fost asimilat cu efectul de flambaj sub greutate proprie. Tot astfel și problema flambajului țevilor de extracție [9] în pompajul de adîncime, poate fi redusă la problema flambajului sub greutate proprie.

Să considerăm (fig. 1) pistonul *1*, acționat prin intermediul garniturei de prăjini *2*, lucrînd în pompa *3* conectată la țevile de extracție *4*.

S-a arătat printr-o metodă energetică [1] și apoi prin considerarea derivatei forței tăietoare [2], [3] că, din punctul de vedere al flambajului, efectul presiunii laterale interioare a unei țevi este echivalent cu efectul forțelor axiale de compresiune, a căror valoare este dată de produsul presiunii interioare cu secțiune interioară.

---

[1] Întreprindere pentru exploatarea utilajului greu terasier și foraje.

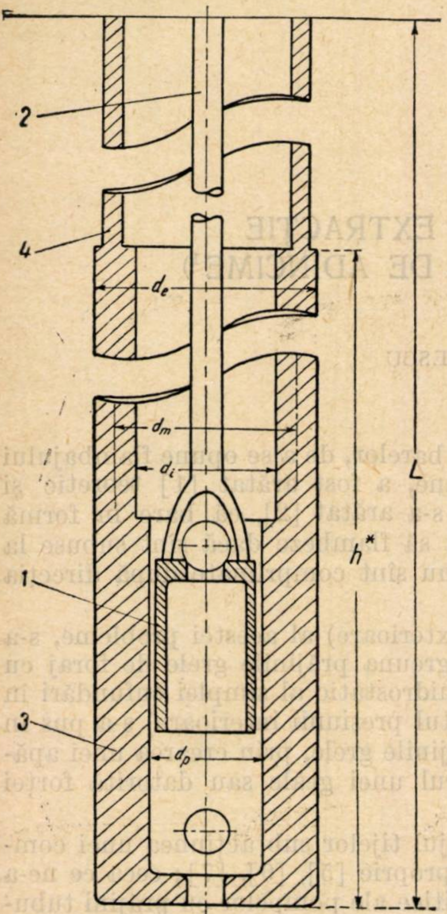


Fig. 1

Tot astfel, efectul presiunii laterale exterioare este echivalent cu efectul forțelor axiale de tracțiune, a căror valoare este dată de produsul presiunii exterioare cu secțiunea exterioară.

Justificarea rezidă, după cum s-a arătat [2], [3], în faptul că fenomenul de flambaj apare la o încărcare apreciată sub forma derivatei forței tăietoare, care apare nu numai în cazul forțelor axiale, dar și în cazul presiunilor laterale.

La o țeavă închisă la capete și supusă la presiuni interioare și exterioare, efectul presiunii laterale interioare, care poate provoca flambajul, este total compensat de efectul de tracțiune axială al presiunii interioare exercitată pe funduri, iar efectul presiunii laterale exterioare, care se opune flambajului, este total compensat de efectul de compresiune axială al presiunii exercitată tot prin funduri.

Revenind la schema alăturată (fig. 1), la cursa ascendentă a pistonului, deoarece pistonul preia acțiunea presiunii asupra fundului pompei, rămîne acțiunea presiunii laterale asupra țevilor de extracție și se poate produce flambajul acestora, dacă se îndeplinesc condițiile critice.

Forța axială $F_{1x}$, echivalentă presiunii laterale, în acest caz într-o secțiune normală la depărtarea $x$ de capătul de sus (pompă), conform celor arătate mai sus, este dat de expresia

$$F_{1x} = p_{xi}\, A_i - p_{xe}\, A_e \, , \tag{1}$$

în care

$p_{xi}$ – presiunea interioară este

$$p_{xi} = \gamma_1 \, (L - x), \tag{2}$$

$\gamma_1$ – greutatea specifică a lichidului,

$L$ – adîncimea pompei,

$p_{xe}$ — presiunea exterioară este

$$p_{xe} = \gamma_1 (L - l - x) = p_{xi} - \gamma_1 l, \tag{3}$$

$l$ — adîncimea nivelului lichidului din spatele țevilor de extracție;
$A_i$ — secțiunea interioară a țevii,
$A_e$ — secțiunea exterioară a țevii.

Primul termen din membrul 2 al relației (1) reprezintă forța axială echivalentă presiunii laterale interioare, care poate provoca flambajul; iar termenul al doilea reprezintă forța axială echivalente presiunii laterale exterioare, care se opune flambajului.

Dacă $p_{xe} = 0$, ceea ce este valabil pentru

$$x > h_1, \tag{4}$$

în care $h_1$ — înălțimea față de pompă a nivelului lichidului din spatele țevilor de extracție,

$$h_1 = L - l, \tag{5}$$

ținînd seama de (2), expresia (1) devine

$$F_{1x} = \gamma_1 (L - x) A_i. \tag{6}$$

Notînd cu $A_p$ secțiunea pistonului, dacă $A_i > A_p$, țevile sînt întinse cu forța $F_0$ dată de expresia

$$F_0 = p_0 (A_i - A_p), \tag{7}$$

în care presiunea $p_0$, se obține din (2) pentru $x = 0$ și anume

$$p_0 = \gamma_1 L. \tag{8}$$

La această forță se adaugă greutatea proprie a țevilor și prin urmare efortul de tracțiune din țeavă, $N_x$ la înălțimea $x$ este

$$N_x = F_0 + qx, \tag{9}$$

în care $q$ — greutatea țevilor pe unitatea de lungime este

$$q = \gamma_0 (A_e - A_i), \tag{10}$$

$\gamma_0$ — greutatea specifică a țevilor,

Forța echivalentă rezultantă $N_x^\star$ devine

$$N_x^\star = N_x - F_{1x}. \tag{11}$$

Ținînd seama de (6) și (9) relația (11) se poate pune sub forma

$$N_x^\star = q^\star x - F_0', \tag{12}$$

în care

$q^\star$ — greutatea echivalentă pe unitatea de lungime este

$$q^\star = q + q_1 ; \; q_1 = \gamma_1 A_i \tag{13}$$

şi ţinînd seama de (10)

$$q^{\star} = \gamma_0 (A_e - A_i) + \gamma_1 A_i, \tag{14}$$

$F_0'$ — forţa axială preluată de piston, neglijînd garnitura de prăjini, este

$$F_0' = \gamma_1 A_p L. \tag{15}$$

Din punctul de vedere al flambajului, lucrurile se petrec ca şi cum ţeava ar avea o greutate $q^{\star}$ pe unitatea de lungime şi ar fi rezemată la extremitatea inferioară cu o forţă de apăsare $F_0'$.

Dacă notăm cu $F_{1,0}$ greutatea lichidului din ţeava plină, ţinînd seama de (7) şi (15) avem

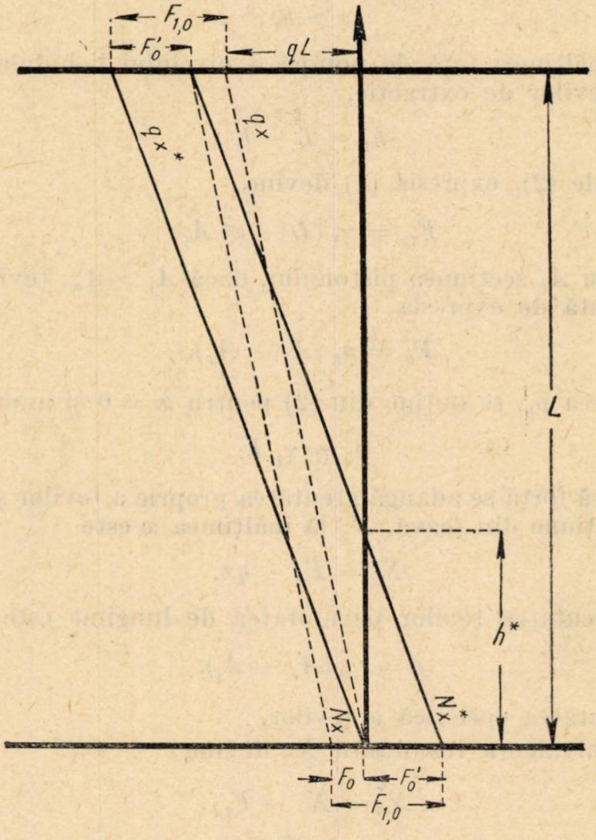


Fig. 2

$$F_{1,0} = F_0 + F_0' = \gamma_1 A_i L. \tag{16}$$

Ca şi în studiul flambajului la prăjini tubulare [8], s-a întocmit o diagramă (fig. 2), în care sînt redate variaţiile eforturilor $N_x$ şi $N_x^{\star}$.

Pentru a găsi lungimea comprimată echivalentă $h^\star$, în care s-a ținut seama și de efectul presiunii laterale, anulăm pe $N_x^\star$ din expresia (12), pentru $x = h^\star$, astfel

$$N_{h^\star}^\star = q^\star h^\star - F_0' = 0. \tag{17}$$

Ținînd seama de [14], [15], condiția (17) devine

$$\frac{h^\star}{L} = \frac{!\nu^2}{1+K}, \tag{18}$$

în care

$$\frac{A_p}{A_i} = \frac{d_p^2}{d_i^2} = \nu^2, \tag{19}$$

$d_p$ — diametrul pistonului,
$d_e$, $d_i$ — diametrele, respectiv exterior și interior, al țevilor.

$$K = T/F_{1,0}, \tag{20}$$

$T$ — greutatea țevilor de extracție, și anume

$$T = qL. \tag{21}$$

Notînd

$$d_e/d_i = \mu, \tag{22}$$

și ținînd seama de (10) și (16) relația (20) devine

$$K = (\mu^2 - 1)\, \gamma_0/\gamma_1 \,. \tag{23}$$

Prin urmare relația (18) devine

$$\frac{h^\star}{L} = \frac{\gamma_1 d_p^2}{\gamma_1 d_i^2 + \gamma_0 (d_e^2 - d_i^2)}. \tag{24}$$

S-a arătat [4], [5], [6], [7], că lungimea comprimată critică $h^\star$ este dată de expresia

$$h^\star = c_{j,\, j'}^{i,\, i'} \sqrt[3]{EI/q^\star}, \tag{25}$$

în care
$E$ — modulul de elasticitate,
$I$ — momentul de inerție, care pentru țevi este dat de expresia

$$I = \frac{\pi}{64}(d_e^4 - d_i^4). \tag{26}$$

Coeficientul de flambaj $c_{j,\, j'}^{i,\, i'}$, este o funcție de gradul de încărcare $h^\star/L$, în condiții de rezemare determinate de indicii $j$ și $i$. Astfel :
$j = 1$ pentru capătul de jos articulat,
$j = 2$ pentru capătul de jos încastrat,

$j' = 3$ în toate cazurile menționate,
$i = 1$ pentru capătul de sus încastrat,
$i = 2$ pentru capătul de sus articulat,
$i' = 0$ fără deplasare laterală,
$i' = 3$ cu deplasare laterală a capătului de sus normală pe tijă.

În cazul nostru putem considera, capătul de jos articulat, iar notările cu indicii respectivi sînt trecute în tabela 1.

*Tabela 1*

**Cazurile de rezemare**

| Fără deplasare laterală | Cu deplasare normală | Condițiile de rezemare |
|---|---|---|
| $c_{1,3}^{1,0}$ | $c_{1,3}^{1,3}$ | Articulat jos, încastrat sus |
| $c_{1,3}^{2,0}$ | $c_{1,3}^{2,3}$ | ambele capete articulate |

Valorile coeficientului de flambaj, în diferite condiții de rezemare, au fost calculate în lucrările citate pentru intervalul $2 > h/l > 1/3$.

În cazurile capătului de jos articulat, coeficientul de flambaj tinde asimptotic către o limită inferioară $\lambda$ a cărui valoare este
$\lambda = 1$ pentru cazurile cu deplasare normală,
$\lambda = 2$ pentru cazurile fără deplasare laterală.

S-a arătat [10] că pentru intervalul de subîncărcare al tijei $(h^* < L)$ se poate folosi formula aproximativă

$$c_{1,3}^{i,i'} = \lambda + \delta\,(h^*/L)^2, \qquad (27)$$

în care valorile lui $\delta$ sînt date în tabela 2.

*Tabela 2*

**Valorile $\delta$**

| Cazurile de rezemare | $c_{1,3}^{1,0}$ | $c_{1,3}^{1,3}$ | $c_{1,3}^{2,0}$ | $c_{1,3}^{2,3}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\delta$ | 1,12 | 0,52 | 1,65 | 1,95 |

Din relațiile (26) și (14) rezultă

$$\frac{I}{q^*} = \frac{(\mu^4 - 1)\, d_i^2}{16\,(K+1)\,\gamma_1}, \qquad (28)$$

înlocuind cu (25) se obține

$$h^* = c_{j,j'}^{i,i'} \sqrt[3]{\frac{E\, d_1^2\,(\mu^4 - 1)}{16\,\gamma_1\,(1+K)}}; \qquad (29)$$

comparînd cu (18) rezultă

$$L = \frac{c_{j,j'}^{i,i'}}{\nu^2} \sqrt[3]{\frac{E\, d_1^2}{16\, \gamma_1} (\mu^4 - 1)(1 + K)^2} \tag{30}$$

și ținînd seama de (19) și (23) se obține :

$$L = \frac{c_{j,j'}^{i,i'}}{d_p^2\, \gamma_1} \sqrt[3]{\frac{E}{16} (d_e^4 - d_i^4) [\gamma_1\, d_i^2\, \gamma_0 (d_e^2 - d_i^2)]^2}, \tag{31}$$

care se mai poate pune sub forma

$$L = \frac{c_{j,j'}^{i,i'}\, d_e^2}{\gamma_1\, d_p^2} \sqrt[3]{\frac{E\, \gamma_0^2\, d_e^2}{16}\, \xi} \tag{32}$$

și în care

$$\xi = \left(1 - \frac{d_i^4}{d_e^4}\right) \left[1 - \frac{d_i^2}{d_e^2} \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_0}\right)\right]^2. \tag{33}$$

Dacă raportul de compresiune $h^*/L$ este îndeajuns de mic, pentru a neglija termenul al doilea din expresia (27), aceasta devine

$$c_{1,3}^{i,i'} \approx \lambda \tag{34}$$

și care introdusă în (32) ne dă pentru $L$ o valoare acoperitoare.

Se înțelege că se poate folosi relația (27) pentru o mai mare precizie.

### *Observații*

Ținînd seama de (22), (23) relația (28) se poate pune sub forma

$$\frac{I}{q^*} - = \frac{1}{16\, \gamma_0} \frac{d_e^4 - d_i^4}{d_e^2 - d_i^2 \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_0}\right)}. \tag{35}$$

Neglijînd efectul de plutire $\gamma_1/\gamma_0$ ca mic față de unitate, relația precedentă devine

$$\frac{I}{q^*} \approx \frac{1}{16\, \gamma_0} (d_e^2 + d_i^2). \tag{36}$$

Fie :

$d_m$ — diametrul mediu al țevii,
$g$ — grosimea țevii.

Prin definiție avem

$$d_m = d_e - g = d_i + g, \tag{37}$$

și înlocuind în (36) se obține

$$\frac{I}{q^\star} = \frac{d_m^2}{8\gamma_0}\left[1 + \left(\frac{g}{d_m}\right)^2\right]. \tag{38}$$

Dacă $g/d_m$ este îndeajuns de mic față de unitate, putem neglija ultimul termen din paranteză și relația precedentă devine

$$\frac{I}{q^\star} \approx \frac{d_m^2}{8\gamma_0}, \tag{39}$$

Deci pentru țevile subțiri, valoarea raportului $I/q^\star$ este independentă de grosimea peretelui și depinde, dintre parametri geometrici, numai de diametrul mediu.

Această constatare ne permite să rezolvăm problema unei garnituri de secțiuni diferite ca și cum ar fi de secțiune constantă, întrucît volumul de rigiditate față de gravitație ($EI/q$), care apare în ecuația diferențială a fibrei medii deformate, rămîne constant de-a lungul garniturii.

Același procedeu l-am folosit [5] și în cazul flambajului garniturii de foraj bazați pe constatarea [4] că rigiditatea față de gravitație $(EI/q)^{1/3}$ a prăjinilor grele nu diferă prea mult de aceea a prăjinilor obișnuite de foraj.

Ținînd seama de (34) și (39) relația (25) devine

$$h^\star \approx \lambda \sqrt[3]{E\, dm^2/8\, \gamma_0}. \tag{40}$$

Prin urmare în aceste condiții (raport de compresiune mic și constantă rigiditate față de gravitație), lungimea comprimată echivalentă critică $h^\star$ rămîne constantă față de adîncimea și grosimea peretelui.

După cum pentru foraj este suficient să îngroșăm pereții prăjinilor pe porțiunea comprimată — folosind prăjini grele — pentru a mări apăsarea critică pe sapă, tot astfel în cazul țevilor de extracție putem folosi țevi grele de extracție (cu pereții îngroșați) pe porțiunea comprimată echivalentă.

Făcînd aceleași aproximații folosite mai sus, relația (24) devine

$$L \approx \frac{4g\, d_m \gamma_0}{d_r^2\, \gamma_1}\, h^\star \tag{41}$$

și ținînd seama de (40)

$$L \approx \frac{2g\, d_m\, \lambda}{\gamma_1\, d_p^2} \sqrt[3]{\gamma_0^2\, E\, d_m^2}\,, \tag{42}$$

în care $g$ este grosimea țevii pe porțiunea comprimată echivalentă.

Formula (41) se mai poate pune sub forma:

$$L \approx \frac{A_0 h^* \gamma_0}{A_p \gamma_1}, \tag{43}$$

în care $A_0$ este secțiunea țevilor grele

$$A_0 \approx \pi d_m g, \tag{44}$$

Ținînd seama de (15) obținem

$$F_0' = G_0, \tag{45}$$

în care:

$$G_0 = A_0 \gamma_0 h^*, \tag{46}$$

Cu alte cuvinte, *pentru a evita flambajul este necesar ca greutatea țevilor, pe porțiunea echivalent comprimată, să fie mai mare decît forța axială preluată de piston.*

După cum se vede, cu aproximațiile făcute, calculul se simplifică considerabil.

### *Aplicații*

Cu ajutorul formulei (40) s-a calculat lungimea comprimată critică echivalentă $h^*$ pentru dimensiunile obișnuite ale țevilor de extracție și s-au trecut în tabela 3.

S-a introdus în formulă valoarea asimptotică $\lambda = 2$, care corespunde cazului fără deplasare laterală și oricît de mare ar fi adîncimea pompei, întrucît se presupune că extremitatea inferioară se reazimă de peretele coloanei.

Pentru $\lambda = 1$ apare prima instabilitate, cînd capătul de jos caută să se rezeme de perete.

S-au luat în considerație pompele de tip *P* (care se introduc cu prăjinile) $2\,^1/_2'' \times 1\,^3/_4''$ ($d_i = 65$ mm; $d_p = 44$ mm) și $2 \times 1\,^1/_4''$ ($d_i = 50$ mm; $d_p = 32$ mm).

Cu formula (43) s-au calculat adîncimile critice *L*, pentru cele două dimensiuni de pistoane și s-au trecut în ultimele coloane (tabela 3).

*Tabela 3*

**Țevi de extracție**

| Diametrul nom. | $d_e$ mm | $d_i$ mm | $h^*$ m | $L$ în m | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $d_p = 32$ mm | $d_p = 44$ mm |
| 2 | 60,3 | 50,3 | 20,3 | 193 | — |
| $2^1/_2$ | 73,0 | 62,0 | 20,9 | 256 | 140 |
| 3 | 88,9 | 75,9 | 26,6 | 488 | 257 |
| $3^1/_2$ | 101,6 | 88,6 | 29,2 | — | 326 |
| 4 | 114,3 | 100,3 | 31,6 | — | 430 |

S-a mai luat în considerație, folosirea unor țevi grele (cu pereți îngroșați) pe porțiunea comprimată echivalent $h^*$. Aceste țevi grele ar avea ca diametru exterior, diametrul mufelor țevilor respective, iar ca diametru interior diametrul nominal al țevilor corespunzătoare pompei respective. Cu aceste dimensiuni s-au calculat valorile $h^*$ și $L$, în mod analog cazului precedent, și s-au trecut în tabela 4.

*Tabela 4*

Țevi grele

| Diametrul nom. | $d_e$ mm | $d_i$ mm | $h^*$ m | $L$ în m | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $d_p = 32$ mm | $d_p = 44$ mm |
| 2 | 77,7 | 50,3 | 22,4 | 671 | — |
| $2^1/_2$ | 93,2 | 50,3<br>62,0 | 24,2<br>25,5 | 1270<br>— | —<br>565 |
| 3 | 114,4 | 50,3<br>62,0 | 26,5<br>27,8 | 2495<br>— | —<br>1065 |
| $3^1/_2$ | 127,0 | 62,0 | 29,8 | — | 1610 |
| 4 | 141,3 | 62,0 | 32,5 | — | 2370 |

La rigoare se pot folosi formulele (29) cu (22), (23) și (32) cu (33) (34), care sînt mai precise.

## CONCLUZII

Constatăm că lungimile critice ale țevilor de extracție (tabela 3) sînt mult prea mici față de adîncimile obișnuite ale pompelor și prin urmare, în general, fenomenul de flambaj al țevilor de extracție apare sub acțiunea presiunii laterale în timpul cursei ascendente. Flambajul țevilor de extracție este însă limitat de pereții coloanei. Dacă diferența între diametrul exterior al țevilor de extracție și diametrul interior al coloanei este mare, săgeata țevilor buclate poate să fie mai mare decît grosimea spațiului inelar dintre prăjinile de pompaj și țevi, încît acestea să se frece între ele, chiar dacă sonda ar fi perfect rectilinie. Frecarea prăjinilor de țevi nu este dorită, nu numai din cauza consumului inutil de energie, ci mai ales pentrucă uzează atît prăjinile cît și țevile.

Cazurile citate [9] se referă la țevi de 2″ $^1/_2$ în coloană de 9″ $^5/_8$, unde grosimea spațiului inelar dintre țevi și coloană este considerabil.

Această uzură anormală, poate să apară la anumite devieri de la linia dreaptă a sondei, chiar fără buclajul datorit flambajului. Acesta din urmă însă agravează situația.

Pentru înlăturarea flambajului se poate tensiona coloana țevilor de extracție (tubing) : fie folosind țevi grele după cum a propus J. A. Stinson sau ancorînd țevile de coloana de burlane (casing) [9].

La ancorele obișnuite (de compresie), țevile se atîrnă de coloană, pentru ca suplimentul de sarcină dat de greutatea lichidului la cursa descendentă a pistonului să nu lungească țevile de extracție și să scurteze cursa pistonului. Pentru realizarea unei tensiuni în țevile de extracție se poate folosi ancora de tensiune, care lucrează în sens contrar ancorelor de compresiune și din care cauză poate să prezinte un risc în extragerea acestora.

La aplicațiile din tabela 4, s-au calculat dimensiunile prăjinilor grele care pot fi folosite deasupra pompei, în condiții precizate în tabelă și calculate cu formulele simplificate indicate.

În afara țevilor grele de deasupra pompei se pot folosi și dedesubtul pompei ca balast. Dacă lungimea eficace a țevilor grele de deasupra pompei este limitată în fenomenul de flambaj, țevile grele de sub pompă nu sînt limitate decît pe considerații de submersiune.

Din examinarea tabelei 4 se constată că adîncimile mari necesită deasupra pompei prăjini grele cu diametrul exterior considerabil. Se poate întîmpla ca în coloana de extracție să nu fie loc pentru asemenea țevi grele. Trebuie însă să se aibă în vedere, că flambajul fiind limitat de pereții coloanei, după cum s-a arătat, săgeata buclei este redusă la spațiul inelar redus între țeavă și coloană, ceea ce poate să nu afecteze garnitura de prăjini, cînd coloana de burlane este îndeajuns de rectilinie.

În lipsa țevilor grele, se poate folosi pe porțiunea comprimată echivalentă, țevi obișnuite însă de diametru mai mare, cît permite coloana de burlane, astfel încît să constituie un ghidaj. Se înțelege că devierea coloanei de la rectilinitate constituie un dezavantaj, care se agravează cu flambajul.

În unele cazuri de deviere se poate întîmpla ca folosirea unei ancore de tensiune să fie preferabilă, deși aceasta nu poate suprima efectul propriu-zis al devierei, ci numai al flambajului.

*Primită la redacție la 2 decembrie 1960.*

## ТЯЖЕЛЫЕ НАСОСНЫЕ ТРУБЫ ДЛЯ ГЛУБИННОЙ ОТКАЧКИ

### РЕЗЮМЕ

После краткого изложения задачи обращается внимание на эквивалентности между внутренним боковым давлением, действующим на трубы, и осевыми сжимающими силами, с точки зрения продольного изгиба, что было ранее показано автором при учете отклонения срезывающей силы и при применении энергетического метода.

Таким образом задача продольного изгиба насосных труб сводится к задаче продольного изгиба под действием части собственного веса, что также было рассмотрено автором.

Делаются замечания об условиях, дающих возможность устранения или ограничения продольного изгиба насосных труб.

Даются применения к обычным условиям работы.

В заключение дается анализ практических способов устранения или уменьшения трения штанг о стенки насосных труб.

# LE TUBING LOURD POUR LE POMPAGE DE PROFONDEUR

## RÉSUMÉ

Après un bref historique du problème, l'auteur attire l'attention sur l'équivalence, au point de vue du flambage, de la pression latérale intérieure agissant sur les tuyaux, avec les forces axiales de compression, ce qui a été déjà démontré par une méthode énergétique et par la prise en considération de la dérivée de la force de cisaillement.

De cette manière, le problème du flambage des tubings (fig. 1) peut être réduit à un problème de flambage sous son propre poids, qui a été étudié par l'auteur antérieurement. Tout se passe comme si le tuyau, ayant le poids $q^*$ exprimé par la relation (13), était appuyé à l'extrémité inférieure par la force $F_0'$, exprimée par la relation (11).

L'auteur fait des observations concernant les conditions auxquelles on devrait satisfaire afin d'éviter ou de limiter le flambage du tubing.

Il présente des applications dans les conditions usuelles. Pour conclure, il analyse les moyens pratiques permettant d'éliminer le frottement des tiges dans le tubing.

## BIBLIOGRAFIE

1. N. S. PÎRVULESCU, *Efectul presiunii hidrostatice asupra stabilității tijelor svelte verticale*. Revistele tehnice AGIR, Petrol, *1*, 13 (1948).
2. — *Efectul presiunii laterale asupra flambării ,,garniturii prăjinilor de foraj"*. Petrol și gaze, *2*, 6 (1951).
3. — *Flambajul țevilor sub acțiunea presiunilor laterale*. Studii și cercetări de mecanică și metalurgie, **IV** (1953).
4. — *Despre flambajul tijelor sub acțiunea unei compresiuni date de o parte din greutatea proprie*. Studii și cercetări de mecanică aplicată și metalurgie, **III**, *3—4* (1952).
5. — *Flambajul tijelor sub acțiunea unei compresiuni date de o parte din greutatea proprie*. Studii și cercetări de mecanică și metalurgie, **V**, *1—2* (1954).
6. — *On the Instability of Drill Pipe strings*. Revue de Mécanique Appliquée, I, *2*, (1956).
7. — *Неустойчивость бурильной колонны журнал прикладной механики*. **I**, *2* (1956).
8. — *Flambajul tijelor verticale încastrate la extremitatea inferioară și adîncimile critice ale pompelor cu prăjini tubulare*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VI**, *1—2* (1955).
9. ARTHUR LUBINSKI, K. A. BLENKAM, *Buckling of Tubing in Pumping Wells, Its Effects and Means for Controling Tt*. Journal of Petroleum Technology, March 1957, Dalles 1, Texas U.S.A.
10. N. S. PÎRVULESCU, *Formules de flambage pour les barres lourdes*. Revue de mécanique appliquée, **II**, *2* (1960).

# STUDII

## ELASTICITATE – PLASTICITATE – REZISTENȚA MATERIALELOR

# SARCINA DE RUPERE A GRINZILOR STATIC NEDETERMINATE DE BETON ARMAT CU SECȚIUNEA VARIABILĂ [1]

DE

VALERIU PETCU [2]

Sarcina de rupere la structuri static nedeterminate este funcție de tipul de încărcare, de schema de rupere, caracterizată prin poziția articulațiilor plastice și de valoarea momentelor de plastificare ale secțiunilor critice (secțiuni în care apar articulațiile plastice).

În cazul grinzilor static nedeterminate de beton armat, operația de stabilire a caracteristicilor schemei de rupere este în principiu dificilă, datorită posibilităților variate de distribuție a betonului și armăturii în lungul grinzii.

În particular, la grinzile static nedeterminate de beton armat cu secțiunea constantă, stabilirea secțiunilor de armătură în secțiunile din cîmp și de pe reazeme și distribuirea ulterioară a armăturii în lungul grinzii proporțional cu valorile momentelor încovoietoare conduce la o schemă unică de rupere a acestei categorii de grinzi, caracterizată prin formarea a trei articulații plastice – una în cîmp și două pe reazeme.

Variația înălțimii secțiunii la grinzile static nedeterminate de beton armat influențează direct asupra distribuției momentelor de plastificare în lungul grinzii, ceea ce are ca rezultat apariția a trei scheme posibile de rupere plastică, funcție de modul de rezemare, de legea de variație a secțiunii și de modul de încărcare (fig. 1).

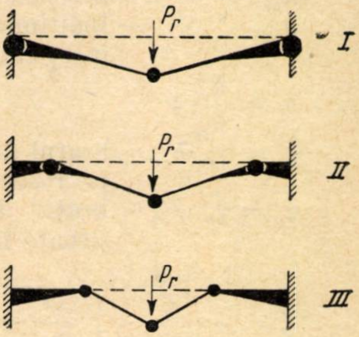


Fig. 1.

---

[1] Comunicare prezentată la Sesiunea științifică jubiliară a Universității „Al. I. Cuza" din Iași, 28–30 octombrie 1960.

[2] Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor (INCERC), București.

Cele trei scheme posibile de rupere se deosebesc între ele prin poziția articulațiilor plastice corespunzătoare momentelor negative. La schema I, aceste articulații plastice apar pe reazeme, la schema II — în cuprinsul vutelor, iar la schema III — la începutul vutelor.

Existența acestor trei scheme de rupere complică evident determinarea sarcinii de rupere la această categorie de grinzi.

În cele ce urmează se prezintă un procedeu simplu de determinare a sarcinii de rupere la grinzi static nedeterminate de beton armat cu vute drepte, în condițiile unor scheme de rezemare și încărcare date, cu realizarea simultană a unei distribuții raționale a armăturii în lungul grinzii.

## NOTAȚII

$a$ — lungimea vutei;

$t$ — distanța de la punctul de anulare a diagramei de momente la reazem;

$y$ — distanța măsurată de la începutul vutei pînă la secțiunea considerată;

$M_p$ — moment de plastificare;

$M_{pr}$ — momentul de plastificare în secțiunea de pe reazem;

$M_{py}$ — momentul de plastificare în secțiunea situată la distanța $y$ față de începutul vutei;

$A_{fr}$ — secțiunea de armătură în secțiunea de pe reazem;

$A_{fy}$ — secțiunea de armătură în secțiunea grinzii situată la distanța $y$ de începutul vutei;

$A_f$ — secțiune de armătură;

$h_{oc}$ — înălțimea utilă a secțiunii situate la începutul vutei;

$h_{or}$ — înălțimea utilă a secțiunii de pe reazem;

$h_{ov}$ — înălțimea utilă a secțiunii situate la distanța $y$ de începutul vutei;

$\eta = \dfrac{h_{or}}{h_{oc}}$;

$z_r = \gamma_r \cdot h_{or}$ — brațul de pîrghie al cuplului interior din secțiunea de pe reazem;

$z_v = \gamma_v \cdot h_{ov}$ — brațul de pîrghie al cuplului interior din secțiunea situată la distanța $y$ de începutul vutei;

$\gamma = 1 - 0{,}5\ \xi$;

$\xi = -\dfrac{\alpha}{2} + \sqrt{\dfrac{\alpha^2}{2} + \alpha}$ — poziția relativă a axei neutre (după Murașov);

$\alpha = 3.n.\mu$;

$n = \dfrac{E_a}{E_b}$ — coeficientul de echivalență;

$\mu = \dfrac{A_f}{b.h_0}$ — procentul de armare;

$$\mu_r = \frac{A_{fr}}{b.h_{or}}; \ \mu_v = \frac{A_{fv}}{b.h_{ov}}; \ \varepsilon = \mu.\gamma;$$

$E_a$ — modulul de elasticitate al armăturii;
$E_b$ — modulul de elasticitate al betonului;
$\sigma_c$ — limita de curgere a armăturii.

★

*Soluția optimă a problemei propuse constă în stabilirea legii de distribuție a armăturii pe lungimea vutelor, potrivit căreia cele trei scheme de rupere conduc la aceeași sarcină de rupere.*

Această lege, pentru orice schemă de rezemare și tip de încărcare ale grinzii, este exprimată prin relația

$$\frac{A_{fv}, z_v}{A_{fr} \cdot z_r} = \frac{M_{pv}}{M_{pr}},$$

de unde

$$\frac{A_{fv}}{A_{fr}} = \frac{z_r}{z_v} . \frac{M_{pv}}{M_{pr}} = \frac{\gamma_r}{\gamma_v} . \frac{h_{or}}{h_{ov}} . \frac{M_{pv}}{M_{pr}}. \tag{1}$$

Folosirea directă a relației (1) este practic imposibilă, datorită volumului mare de calcule. Factorii care alcătuiesc această relație indică însă posibilitatea efectuării unor simplificări care, fără să conducă la erori inadmisibile, permite să se stabilească un procedeu de calcul simplu și eficace.

*a*) Grinzile de beton armat cu secțiunea variabilă sînt în general solicitate de forțe concentrate. În aceste condiții diagrama de momente între reazem și punctul de anulare este liniară, fapt care permite exprimarea raportului $\frac{M_{pv}}{M_{pr}}$ sub forma (fig. 2).

$$\frac{M_{pv}}{M_{pr}} = \frac{t - a + y}{t}. \tag{2}$$

*b*) Valoarea raportului $\frac{\gamma_r}{\gamma_v}$ se obține pe baza teoriei lui Murașov, [1] referitoare la calculul momentului de plastificare al secțiunii de beton armat.

Conform acestei teorii, momentul de plastificare al unei secțiuni dreptunghiulare de beton armat este dat de relația

$$M_p = A_f \cdot (1 - 0,5 \cdot \xi) \cdot h_o \cdot \sigma_c = \mu\,(1 - 0,5\,\xi) \cdot bh_0^2 \cdot \sigma_c = \mu \cdot \gamma \cdot bh_0^2 \cdot \sigma_c = \varepsilon \cdot bh_0^2 \cdot \sigma_c.$$

Coeficientul $\varepsilon$ variază după o curbă care poate fi aproximată cu dreapta

$$\varepsilon = 0,65\,\mu + \frac{0,02}{3n}, \tag{3}$$

erorile față de valorile exacte nedepășind ±3 % pentru procente de armare cuprinse între 0,3 și 2 %.

În aceste condiții rezultă

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{\mu} = 0{,}65 + \frac{0{,}02}{3n\mu}. \tag{4}$$

Relația (1) se poate scrie deci sub forma

$$\frac{\mu_y \cdot bh_{oy}}{\mu_r \cdot bh_{or}} = \frac{0{,}65 + \dfrac{0{,}02}{3n\mu_r}}{0{,}65 + \dfrac{0{,}02}{3n\mu_y}} \cdot \frac{h_{or}}{h_{oy}} \cdot \frac{t - a + y}{t},$$

de unde rezultă

$$\mu_y = \frac{t - a + y}{t}\left(\mu_r + \frac{0{,}01}{n}\right)\left(\frac{h_{or}}{h_{oy}}\right)^2 - \frac{0{,}01}{n}, \tag{5}$$

Pentru raportul $\frac{A_{fy}}{A_{fr}}$ rezultă deci valoarea

$$\frac{A_{fy}}{A_{fr}} = \frac{h_{oy}}{h_{or}}\left[\frac{t - a + y}{t} \cdot \left(1 + \frac{0{,}01}{n \cdot \mu_r}\right)\left(\frac{h_{or}}{h_{oy}}\right)^2 - \frac{0{,}01}{n \cdot \mu_r}\right].$$

Cu notațiile

$$k_1 = \frac{t - a + y}{t} \tag{6}$$

și

$$k_2 = \frac{h_{oy}}{h_{or}} \tag{7}$$

relația de mai sus devine

$$\frac{A_{fy}}{A_{fr}} = k_2 \cdot \left[\left(\frac{k_1}{k_2^2} - 1\right)\left(1 + \frac{0{,}01}{n \cdot \mu_r}\right) + 1\right]. \tag{8}$$

Expresia $1 + \frac{0{,}01}{n \cdot \mu_r}$ variază în mod curent între limitele 1,10 și 1,30. Întrucît diferența între cele două limite este destul de mică, se poate admite valoarea maximă pentru cazul $\frac{k_1}{k_2^2} - 1 > 0$, respectiv valoarea minimă pentru $\frac{k_1}{k_2^2} - 1 < 0$.

Prin această simplificare raportul $\frac{A_{fy}}{A_{fr}}$ rezultă în cazurile extreme cu maximum 14% mai mare decît valoarea exactă și numai pentru o zonă suficient de mică situată în vecinătatea secțiunii definită de relația $\frac{k_1}{k_2^2} - 1 = 0$

Pe baza acestor rezultate, relația (8) devine

$$\frac{A_{fv}}{A_{fr}} = k_2 \cdot \left(1{,}30\,\frac{k_1}{k_2^2} - 0{,}30\right),\ \text{pentru}\ \frac{k_1}{k_2^2} - 1 > 0\,, \tag{9}$$

respectiv

$$\frac{A_{fv}}{A_{fr}} = k_2 \cdot \left(1{,}10\,\frac{k_1}{k_2^2} - 0{,}10\right),\ \text{pentru}\ \frac{k_1}{k_2^2} - 1 < 0\,, \tag{10}$$

Relațiile (9) și (10) sînt reprezentate în diagrama din figura 2.

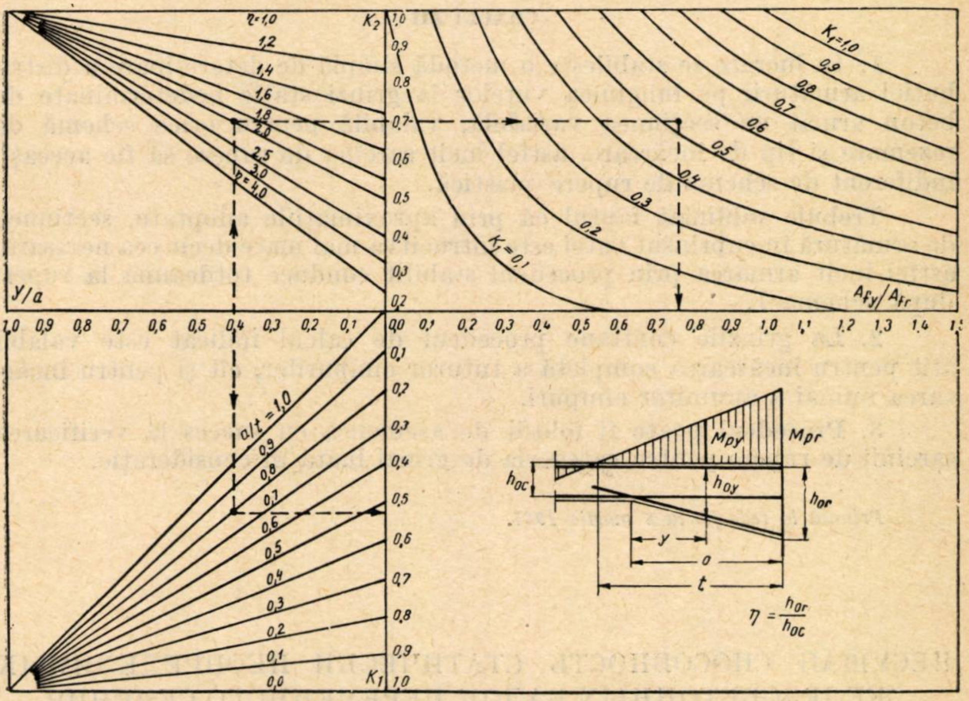


Fig. 2

În aceeași diagramă sînt reprezentate relația (6) și relația (7) scrisă sub forma

$$k_2 = \frac{1}{\eta}\left[1 + (\eta - 1)\cdot\frac{y}{a}\right].$$

Diagrama din figura 2 constituie un procedeu simplu și comod pentru determinarea distribuției armăturii pe lungimea vutei, astfel încît teoretic, sarcina de rupere să fie aceeași indiferent de poziția articulațiilor plastice corespunzătoare momentelor negative. Practic, prin aproximațiile adoptate, soluția dată de diagrama din figura 2 conduce totdeauna la o schemă de rupere în care articulațiile plastice corespunzătoare momentelor negative se formează pe reazeme.

Modul de conducere a calculului este următorul :

Se împarte vuta într-un număr convenabil de părți, definite prin distanțele $y$ și se determină coeficienții $k_1$ pentru aceste secțiuni. Raportul $\frac{A_{fv}}{A_{fr}}$ se stabilește apoi prin intermediul coeficientului $k_2$, ținînd seama de coeficienții $k_1$, determinați anterior. Aceste operații sînt indicate pe diagramă printr-o linie întreruptă.

## CONCLUZII

1. În lucrare se stabilește o metodă simplă de determinare a distribuției armăturii pe lungimea vutelor la grinzi static nedeterminate de beton armat cu secțiunea variabilă, valabilă pentru orice schemă de rezemare și tip de încărcare, astfel încît sarcina de rupere să fie aceeași, indiferent de schema de rupere plastică.

Trebuie subliniat faptul că prin aproximațiile adoptate, secțiunea de armătură în cuprinsul vutei este întrucîtva mai mare decît cea necesară, astfel încît armarea prin procedeul stabilit conduce totdeauna la ruperi după schema I.

2. La grinzile continue procedeul de calcul indicat este valabil atît pentru încărcarea completă a tuturor cîmpurilor, cît și pentru încărcarea numai a anumitor cîmpuri.

3. Procedeul poate fi folosit de asemenea cu succes la verificarea sarcinii de rupere pentru categoria de grinzi luată în considerație.

*Primită la redacție la 8 martie 1961.*

## НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

### РЕЗЮМЕ

Излагается простой способ распределения арматуры по длине свода у статически неопределимых железобетонных балок переменного сечения так, чтобы несущая способность была одинаковой независимо от положения пластических шарниров, соответствующих отрицательных моментов.

Принятые приближения всегда ведут к схеме разрушения, в которой пластические шарниры, соответствующие отрицательным моментам, образуются на опорах.

# ULTIMATE LOAD OF REDUNDANT REINFORCED CONCRETE BEAMS OF VARIABLE CROSS-SECTION

## ABSTRACT

A simple method is presented for placing the steel reinforcement along the haunches of redundant reinforced concrete beams of variable cross-section, in such a manner that the ultimate load be the same, whatever the position of plastic hinges corresponding to negative moments is.

The approximations adopted always lead to a failure scheme where plastic hinges corresponding to negative moments are formed on supports.

## BIBLIOGRAFIE

1. В. И. Мурашев, *Трещиноустойчивость, жесткость и прочность железобетона*. Машстройиздат, Москва, 1950.

# STUDII

## ELASTICITATE-PLASTICITATE-REZISTENȚA MATERIALELOR

# ASUPRA PROBLEMEI ELASTODINAMICE A STRUCTURILOR SUBȚIRI, NEOMOGENE

DE

LIVIU LIBRESCU

## 1. INTRODUCERE ȘI IPOTEZE

În cele ce urmează vom considera problema vibrațiilor structurilor subțiri de mică curbură, construite din $(2n + 1)$ straturi ortotrope, simetric dispuse pe grosime în raport cu suprafața mediană. În abordarea acestei probleme vom ține seama atît de componenta transversală a forțelor de inerție, cît și de componentele tangențiale ale forțelor de inerție.

Vom adopta pentru aceste structuri ipotezele folosite de noi într-o serie de lucrări anterioare, ipoteze ce se reduc la a admite că :

*a*) toate straturile care alcătuiesc structura sînt împreunate rigid, astfel încît aceasta se deformează ca un tot ;

*b*) pentru structura în ansamblu rămîne valabilă ipoteza Love-Kirchhoff.

În cele ce urmează vom raporta suprafața mediană a structurii la un sistem ortogonal de coordonate $(\alpha, \beta)$ în general vorbind neconjugat, sistem ce coincide cu direcțiile principale de ortotropie. Se va nota cu $j$ un strat oarecare din cele $(2n + 1)$ straturi considerate, iar mărimile statice, fizice și geometrice ce caracterizează stratul $j$ se vor afecta cu indicele $j$.

## 2. ECUAȚII DE BAZĂ

### 2a. Legile fizice

În baza ipotezelor *a*) și *b*) în lucrarea [1] au fost deduse legile fizice pentru aceste structuri, legi care sînt exprimate prin relațiile

$$T_\alpha = \overset{1}{F}_\alpha (\varepsilon_1 + \overset{1}{\mu}_\beta \varepsilon_2) ; \quad T_\beta = \overset{1}{F}_\beta (\varepsilon_2 + \overset{1}{\mu}_\alpha \varepsilon_1),$$
$$T_{\alpha\beta} = - T_{\beta\alpha} = \frac{\overset{2}{F}_\alpha}{2} (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)\, \omega, \tag{1}$$

$$M_\alpha = -\overset{1}{G}_\alpha(\varkappa_1 + \overset{3}{\mu}_\beta \varkappa_2); \quad M_\beta = -\overset{1}{G}_\beta(\varkappa_2 + \overset{3}{\mu}_\alpha \varkappa_1),$$

$$M_{\alpha\beta} = -M_{\beta\alpha} = \overset{2}{G}_\alpha(1 - \overset{4}{\mu}_\beta)\,\tau \tag*{(2)$^{1)}$}$$

şi reciproc

$$\varepsilon_1 = \overset{1}{N}_\alpha(T_\alpha - \overset{1}{\mu}_\alpha T_\beta); \quad \varepsilon_2 = \overset{1}{N}_\beta(T_\beta - \overset{1}{\mu}_\beta T_\alpha),$$

$$\omega = \frac{2}{\overset{2}{F}_\alpha(1 - \overset{2}{\mu}_\beta)}\, T_{\alpha\beta}, \tag*{(3)}$$

$$\varkappa_1 = -\overset{1}{D}_\alpha(M_\alpha - \overset{3}{\mu}_\alpha M_\beta); \quad \varkappa_2 = -\overset{1}{D}_\beta(M_\beta - \overset{3}{\mu}_\beta M_\alpha),$$

$$\tau = \overset{2}{D}_\alpha(1 - \overset{4}{\mu}_\alpha)\, M_{\alpha\beta}, \tag*{(4)$^{2)}$}$$

unde expresiile rigidităţilor şi a coeficienţilor Poisson reduşi sînt date în tabela 1.

*Tabela 1*

**Expresia rigidităţilor şi a coeficienţilor Poisson**

$$\overset{1}{F}_\alpha = 2\sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_\alpha^j(\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \overset{j}{\mu}_\alpha \overset{j}{\mu}_\beta}; \quad \overset{1}{F}_\beta = 2\sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_\beta^j(\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \overset{j}{\mu}_\alpha \overset{j}{\mu}_\beta};$$

$$\overset{2}{F}_\alpha = 2\sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_\alpha^j K^j(\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \overset{j}{\mu}_\alpha \overset{j}{\mu}_\beta} \sqrt{\frac{E_\beta^j}{E_\alpha^j}}.$$

$$\overset{1}{N}_\alpha = \frac{1}{\overset{1}{F}_\alpha(1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)}; \quad \overset{1}{N}_\beta = \frac{1}{\overset{1}{F}_\beta(1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)}.$$

$$\overset{1}{D}_\alpha = \frac{1}{\overset{1}{G}_\alpha(1 - \overset{3}{\mu}_\alpha \overset{3}{\mu}_\beta}; \quad \overset{1}{D}_\beta = \frac{1}{\overset{1}{G}_\beta(1 - \overset{3}{\mu}_\alpha \overset{3}{\mu}_\beta)}; \quad \overset{2}{D}_\alpha = \frac{1}{\overset{2}{G}_\alpha[1 - (\overset{4}{\mu}_\beta)^2]}.$$

$$\overset{1}{G}_\alpha = \frac{2}{3}\sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_\alpha^j\left(\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3\right)}{1 - \overset{j}{\mu}_\alpha \overset{j}{\mu}_\beta}; \quad \overset{1}{G}_\beta = \frac{2}{3}\sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_\beta^j\left(\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3\right)}{1 - \overset{j}{\mu}_\alpha \overset{j}{\mu}_\beta};$$

$$\overset{2}{G}_\alpha = \frac{2}{3}\sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_\alpha^j K^j\left(\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3\right)}{1 - \overset{j}{\mu}_\alpha \overset{j}{\mu}_\beta}.$$

---

1) Notaţiile utilizate în această lucrare, fără o menţiune specială, corespund sensului dat, de exemplu, în lucrarea [1].

2) Relaţiile fizice date prin relaţiile (1), (2), (3) şi (4) au fost deduse în ipoteza că suprafaţa mediană este referită la linii de curbură. O astfel de restricţie nu este însă esenţială. Ele rămîn valabile în cazul mai general al coordonatelor ortogonale dar neconjugate.

$$\overset{1}{\mu}_\alpha = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\mu_\alpha^j E_\beta^j (\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_\beta^j (\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}; \qquad \overset{1}{\mu}_\beta = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\mu_\beta^j E_\alpha^j (\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_\alpha^j (\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}};$$

$$\overset{3}{\mu}_\alpha = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_\beta^j \mu_\alpha^j \left(\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3\right)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_\beta^j \left(\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3\right)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}; \qquad \overset{3}{\mu}_\beta = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_\alpha^j \mu_\beta^j \left(\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3\right)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_\alpha^j \left(\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3\right)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}};$$

$$\overset{2}{\mu}_\beta = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_\alpha^j \mu_\beta^j K^j (\xi_j - \xi_{f-1})}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_\alpha^j K^j (\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \sqrt{\frac{E_\beta^j}{E_\alpha^j}}}; \qquad \overset{4}{\mu}_\beta = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_\alpha^j \mu_\beta^j K^j \left(\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3\right)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_\alpha^j K^j \left(\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3\right)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \sqrt{\frac{E_\beta^j}{E_\alpha^j}}}.$$

### 2b. Ecuațiile de echilibru și de compatibilitate

În baza ipotezelor proprii teoriei structurilor de mică curbură ecuațiile de echilibru și de compatibilitate vor fi date de

$$\frac{\partial T_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial \beta} = -X; \quad \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + \frac{\partial T_\beta}{\partial \beta} = -Y,$$

$$\frac{T_\alpha}{R_1} - 2\frac{T_{\alpha\beta}}{R_{12}} + \frac{T_\beta}{R_2} + \frac{\partial Q_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial Q_\beta}{\partial \beta} + Z = 0, \tag{5}$$

$$Q_\alpha = \frac{\partial M_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta}; \quad Q_\beta = \frac{\partial M_\beta}{\partial \beta} - \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha}, \quad T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha} = 0,$$

unde $X$, $Y$, $Z$, în absența sarcinilor superficiale, sînt date de relațiile

$$X = -m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad Y = -m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \quad Z = -m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

$m$ fiind masa structurii corespunzînd ariei unitare a suprafeței mediane și respectiv

$$\frac{\partial \tau}{\partial \beta} - \frac{\partial \varkappa_2}{\partial \alpha} = 0; \qquad \frac{\partial \varkappa_1}{\partial \beta} - \frac{\partial \tau}{\partial \beta} = 0. \tag{6}$$

$$\frac{\varkappa_2}{R_1} + \frac{\varkappa_1}{R_2} + 2\frac{\tau}{R_{12}} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial \beta} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial \alpha} = 0,$$

$$\zeta_1 = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \beta} - \frac{1}{2}\frac{\partial \omega}{\partial \alpha}; \qquad \zeta_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \alpha}.$$

### 2c. Relațiile geometrice

Sînt date de

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial \alpha} - k_1 w \, ; \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial \beta} - k_2 w, \tag{7}$$

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{2w}{R_{12}},$$

$$\varkappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \, ; \quad \varkappa_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \, ; \quad \tau = \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \, \partial \beta}, \tag{8}$$

unde

$$k_1 = \frac{1}{R_1} \, ; \quad k_2 = \frac{1}{R_2} .$$

## 3. DEDUCEREA ECUAȚIILOR REZOLVENTE

În cele ce urmează, în scopul reducerii ecuațiilor diferențiale ce caracterizează aceste structuri la un sistem de ecuații în deplasarea normală $w$ și o funcție de efort $c$, vom relua procedeul datorit lui P. M. Naghdi. În acest scop vom diferenția prima ecuație a sistemului (5) în raport cu $\alpha$ a doua ecuație a aceluiași sistem în raport cu $\beta$ și vom ține seama de relațiile (7).

Se obțin în acest fel ecuațiile

$$\frac{\partial^2 T_\alpha}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 T_{\alpha\beta}}{\partial \alpha \, \partial \beta} = m \frac{\partial^2}{\partial t^2} ( \varepsilon_1 + k_1 w) \, ; \quad \frac{\partial^2 T_{\alpha\beta}}{\partial \alpha \, \partial \beta} + \frac{\partial^2 T_\beta}{\partial \beta^2} = m \frac{\partial^2}{\partial t^2} ( \varepsilon_2 + k_2 w). \tag{9}$$

În aceste ecuații vom exprima pe $\varepsilon_1$ și $\varepsilon_2$ prin eforturi conform relațiilor (3) și în baza aceasta ecuațiile (9) devin

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - m \overset{1}{N}_\alpha \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) T_\alpha + m \overset{1}{N}_\alpha \overset{1}{\mu}_\alpha \frac{\partial^2 T_\beta}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 T_{\alpha\beta}}{\partial \alpha \, \partial \beta} = m k_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - m \overset{1}{N}_\beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) T_\beta + m \overset{1}{N}_\beta \overset{1}{\mu}_\beta \frac{\partial^2 T_\alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 T_{\alpha\beta}}{\partial \alpha \, \partial \beta} = m k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{10}$$

Prin scăderea celor două ecuații se obține ecuația;

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - m ( \overset{1}{N}_\alpha + \overset{1}{N}_\beta \overset{1}{\mu}_\beta ) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] T_\alpha - \left[ \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - m ( \overset{1}{N}_\beta + \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N} \; ) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] T^\beta =$$

$$= m (k_1 - k_2) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{11}$$

care se observă uşor că este verificată identic dacă se exprimă eforturile $T_\alpha$ şi $T_\beta$ prin relaţiile

$$T_\alpha = \frac{\partial^2 c}{\partial \beta^2} - m(\overset{1}{N}_\beta + \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha)\frac{\partial^2 c}{\partial t^2} + F_1,$$

$$T_\beta = \frac{\partial^2 c}{\partial \alpha^2} - m(\overset{1}{N}_\alpha + \overset{1}{\mu}_\beta \overset{1}{N}_\beta)\frac{\partial^2 c}{\partial t^2} + F_2, \qquad (12)$$

$c$ fiind o funcţie potenţială, iar $F_1$ şi $F_2$, soluţii particulare ale ecuaţiei

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - m(\overset{1}{N}_\alpha + \overset{1}{\mu}_\beta \overset{1}{N}_\beta)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]F_1 - \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - m(\overset{1}{N}_\beta + \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]F_2 =$$

$$= m(k_1 - k_2)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \qquad (13)$$

Eforturile $T_\alpha$ şi $T_\beta$ fiind definite de relaţia (12), expresia eforturilor $T_{\alpha\beta}$ se obţine adunînd ecuaţiile (10). Se obţine în acest fel ecuaţia

$$2\frac{\partial^2 T_{\alpha\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} + \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - m(\overset{1}{N}_\alpha - \overset{1}{\mu}_\beta \overset{1}{N}_\beta)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]T_\alpha +$$

$$+ \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - m(\overset{1}{N}_\beta - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]T_\beta = m(k_1 + k_2)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \qquad (14)$$

în care ţinînd seama de relaţiile (12) se obţine exprimarea lui $\dfrac{\partial^2 T_{\alpha\beta}}{\partial \alpha \partial \beta}$ prin funcţia potenţială $c$,

$$\frac{\partial^2 T_{\alpha\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} = -\frac{\partial^4 c}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + m\overset{1}{N}_\beta \frac{\partial^4 c}{\partial \alpha^2 \partial t^2} + m\overset{1}{N}_\alpha \frac{\partial^4 c}{\partial \beta^2 \partial t^2} -$$

$$- m^2 \overset{1}{N}_\alpha \overset{1}{N}_\beta (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)\frac{\partial^4 c}{\partial t^4}, \qquad (15)$$

în timp ce $F_1$ şi $F_2$ satisfac şi la ecuaţia

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - m(\overset{1}{N}_\alpha - \overset{1}{\mu}_\beta \overset{1}{N}_\beta)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]F_1 + \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - m(\overset{1}{N}_\beta - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]F_2 =$$

$$= m(k_1 + k_2)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \qquad (16)^{1)}$$

---

[1] Se poate arăta că din sistemul (13), (16) se poate lua numai o soluţie particulară, iar soluţia generală a sistemului omogen asociat nu aduce nici un arbitrariu în plus faţă de ceea ce aduce funcţia necunoscută $c$. Într-adevăr soluţia omogenă a lui (13) nu poate fi decît de forma

$$F_1^\star = \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - m(\overset{1}{N}_\beta + \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]f,$$

$$F_2^\star = \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - m(\overset{1}{N}_\alpha + \overset{1}{\mu}_\beta \overset{1}{N}_\beta)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]f,$$

cu $f$ o funcţie arbitrară.

Dar se observă şi din (12) şi din relaţia care conduce la (15) că funcţia $f$ apare în exprimarea lui $T_\alpha$, $T_\beta$, $T_{\alpha\beta}$ sub acelaşi operator ca şi $c$, deci ea nu poate aduce nici un arbitrariu nou.

În acest fel eforturile $T_\alpha$ și $T_\beta$ sînt exprimate prin intermediul funcției potențiale $c$ și al funcțiilor $F_1$ și $F_2$ (rel (12) și (15)), $F_1$ și $F_2$ fiind soluții particulare ale ecuațiilor (13) și (16).

Pentru a construi sistemul de ecuații în deplasarea normală $w$ și funcția potențială $c$, vom face în prealabil următoarele observații:

*a*) Primele două ecuații de echilibru sînt identic satisfăcute exprimînd eforturile tangențiale $T_\alpha$, $T_\beta$, $T_{\alpha\beta}$ prin relațiile (12), (15).

*b*) Ultima ecuație de echilibru este identic satisfăcută de eforturile de alunecare exprimate prin relațiile (1).

*c*) Relațiile geometrice (8) satisfac identic primele două ecuații din sistemul ecuațiilor de compatibilitate (6).

Rezultă că din ecuațiile de echilibru și compatibilitate trebuie a fi satisfăcute numai ecuațiile a treia, a patra și a cincea a fiecărui sistem în parte. Eliminînd în ecuațiile de echilibru și de compatibilitate sus-amintite eforturile transversale $Q_\alpha$, $Q_\beta$ și respectiv deformațiile transversale $\zeta_1$, $\zeta_2$ se obțin ecuațiile

$$\frac{T_\alpha}{R_1} + \frac{T_\beta}{R_2} - 2\,\frac{T_{\alpha\beta}}{R_{12}} + \frac{\partial^2 M_\alpha}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 M_\beta}{\partial\beta^2} - 2\,\frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}}{\partial\alpha\,\partial\beta} + Z = 0, \tag{17}$$

$$\frac{\varkappa_1}{R_2} + \frac{\varkappa_2}{R_1} + 2\,\frac{\tau}{R_{12}} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial\beta^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0, \tag{18}$$

ecuații care trebuie în cele din urmă a fi satisfăcute.

Exprimînd în ecuația (17) eforturile prin intermediul relațiilor (12), iar momentele prin intermediul deplasării normale $w$ (relațiile (2) și (8)), se obține una din ecuațiile căutate

$$\begin{aligned} &\frac{1}{R_1}\frac{\partial^2 c}{\partial\beta^2} + \frac{1}{R_2}\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2} - 2\,\frac{T_{\alpha\beta}}{R_{12}} + \frac{F_1}{R_1} + \frac{F_2}{R_2} - \\ &- m\left[\frac{1}{R_1}(\overset{1}{N}_\beta + \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha) + \frac{1}{R_2}(\overset{1}{N}_\alpha + \overset{1}{\mu}_\beta \overset{1}{N}_\beta)\right]\frac{\partial^2 c}{\partial t^2} - \overset{1}{G}_\alpha \frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4} - \\ &- \overset{1}{G}_\beta \frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4} - 2\left[\overset{1}{G}_\alpha \overset{3}{\mu}_\beta + \overset{2}{G}_\alpha (1 - \overset{4}{\mu}_\beta)\right]\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + Z = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Considerînd acum ecuația (18) în care vom exprima deformațiile tangențiale prin funcția potențială $c$ (relațiile (3), (12) și (15)) și deformațiile de încovoiere prin deplasarea normală $w$ (4) se obține a doua ecuație la care trebuie să satisfacă $c$ și $w$

$$\frac{2}{R_{12}}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\frac{1}{R_2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{R_1}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+\overset{1}{N}_\beta\frac{\partial^4 c}{\partial\alpha^4}+\overset{1}{N}_\alpha\frac{\partial^4 c}{\partial\beta^4}-2\left[\overset{1}{\mu}_\alpha\overset{1}{N}_\alpha-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\overset{2}{F}_\alpha(1-\overset{2}{\mu}_\beta)}\right]\frac{\partial^4 c}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}-m\left[\frac{\overset{1}{N}_\beta}{\overset{1}{F}_\alpha}+\frac{2\overset{1}{N}_\beta}{\overset{2}{F}_\alpha(1-\overset{2}{\mu}_\beta)}\right]\frac{\partial^4 c}{\partial\alpha^2\,\partial t^2}-$$

$$-m\left[\frac{\overset{1}{N}_\alpha}{\overset{1}{F}_\beta}+\frac{2\overset{1}{N}_\alpha}{\overset{2}{F}_\alpha\,(1-\overset{2}{\mu}_\beta)}\right]\frac{\partial^4 c}{\partial\beta^2\,\partial t^2}+\frac{2m^2}{\overset{2}{F}_\alpha(1-\overset{2}{\mu}_\beta)}\frac{\overset{1}{N}_\alpha}{\overset{1}{F}_\beta}\frac{\partial^4 c}{\partial t^4}+$$

$$+\overset{1}{N}_\beta\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial\alpha^2}-\overset{1}{\mu}_\beta\frac{\partial^2 F_1}{\partial\alpha^2}\right)+\overset{1}{N}_\alpha\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial\beta^2}-\overset{1}{\mu}_\alpha\frac{\partial^2 F_2}{\partial\beta^2}\right)=0. \qquad (20)$$

În felul acesta ecuațiile de bază ale teoriei structurilor de mică curbură au fost reduse la sistemul format din ecuațiile (19), (20) și (15) în $c$, $w$, $T_{\alpha\beta}$, $F_1$ și $F_2$ fiind integrale particulare ale ecuațiilor (13) și (16).

Rezolvarea acestui sistem prezintă dificultăți serioase, problema simplificîndu-se numai în anumite cazuri particulare.

În caz contrar se impune o simplificare a relațiilor obținute. Această simplificare o vom face bazați pe următoarea observație datorită lui P. M. Naghdi [2], observație care se degajă ușor din analiza membrului doi al ecuațiilor (9); efectul forțelor de inerție tangențială, forțe care sînt prezente în sistemul de ecuații dedus anterior se datorește în parte deplasării normale $w$ și în parte eforturilor tangențiale.

Din sistemul inițial de ecuații se pot obține alte două sisteme, simplificate; unul care se obține prin neglijarea contribuției lui $w$ în forțele de inerție tangențiale și altul care se obține din cel anterior prin neglijarea contribuției eforturilor tangențiale în expresia forțelor de inerție tangențiale. Ultima neglijare ne conduce la studierea vibrațiilor transversale.

În cele ce urmează vom identifica contribuția lui $w$ și a eforturilor tangențiale în efectul forțelor de inerție tangențiale, întovărășind termenii respectivi cu factorul $\delta_2$, respectiv $\delta_1$.

Cu această mențiune sistemele de ecuații se scriu astfel

$$\frac{1}{R_1}\frac{\partial^2 c}{\partial\beta^2}+\frac{1}{R_2}\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2}-2\frac{T\alpha\beta}{R_{12}}+\delta_2\frac{F_1}{R_1}+\delta_2\frac{F_2}{R_2}-\overset{1}{G}_\alpha\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4}-$$

$$-\overset{1}{G}_\beta\frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4}-2\,[\overset{1}{G}_\alpha\overset{3}{\mu}_\beta+\overset{2}{G}_\alpha(1-\overset{4}{\mu}_\beta)]\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^2\,\partial\beta^2}-\delta_1\,m\left[\frac{\overset{1}{N}_\beta}{R_1}(1+\overset{1}{\mu}_\beta)+\right.$$

$$\left.+\frac{\overset{1}{N}_\alpha}{R_2}(1+\overset{1}{\mu}_\alpha)\right]\frac{\partial^2 c}{\partial t^2}+Z=0\,; \qquad (21)$$

$$\frac{2}{R_{12}}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\frac{1}{R_2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{R_1}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+\overset{1}{N}_\beta\frac{\partial^4 c}{\partial\alpha^4}+\overset{1}{N}_\alpha\frac{\partial^4 c}{\partial\beta^4}-2\left[\overset{1}{\mu}_\alpha\overset{1}{N}_\alpha-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\overset{2}{F}_\alpha(1-\overset{2}{\mu}_\beta)}\right]\frac{\partial^4 c}{\partial\alpha^2\,\partial\beta^2}-\delta_1 m\overset{1}{N}_\beta\left[\frac{1}{\overset{1}{F}_\alpha}+\frac{2}{\overset{2}{F}_\alpha(1-\overset{2}{\mu}_\beta)}\right]\frac{\partial^4 c}{\partial\alpha^2\,\partial t^2}-$$

$$-\delta_1 m\overset{1}{N}_\alpha\left[\frac{1}{\overset{1}{F}_\beta}+\frac{2}{\overset{2}{F}_\beta(1-\overset{2}{\mu}_\beta)}\right]\frac{\partial^4 c}{\partial\beta^2\,\partial t^2}+2\,\delta_1\frac{m^2}{\overset{2}{F}_\alpha(1-\overset{2}{\mu}_\beta)}\frac{\overset{1}{N}_\alpha}{\overset{1}{F}_\beta}\frac{\partial^4 c}{\partial t^4}+$$

$$+\delta_2\overset{1}{N}_\alpha\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\overset{1}{\mu}_\alpha\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\right)F_1+\delta_2\overset{1}{N}_\beta\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\overset{1}{\mu}_\beta\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)F_2=0, \qquad (22)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-m\overset{1}{N}_\alpha(1+\overset{1}{\mu}_\alpha)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]F_1-\left[\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-m\overset{1}{N}_\beta(1+\overset{1}{\mu}_\beta)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]F_2=$$

$$=\delta_2 m(k_1-k_2)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \qquad (23)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-m\overset{1}{N}_\alpha(1-\overset{1}{\mu}_\alpha)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]F_1+\left[\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-m\overset{1}{N}_\beta(1-\overset{1}{\mu}_\beta)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]F_2=$$

$$=\partial_2 m(k_1+k_2)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \qquad (24)$$

Neglijarea, de exemplu, a contribuției deplasării $w$ în efectul forțelor de inerție tangențiale atrage după sine $\delta_2=0$ în ecuațiile (21)÷(24).

Neglijarea contribuției eforturilor tangențiale în efectul forțelor de inerție tangențiale atrage după sine $\delta_1=0$ în ecuațiile (21) ÷ (24). Cazul vibrațiilor transversale se obține făcînd în aceleași ecuații (21) ÷ (24) $\delta_1=\delta_2=0$.

În cazul general $\delta_1=\delta_2=1$.

## 4. CAZUL VIBRAȚIILOR STRUCTURILOR CILINDRICE CIRCULARE PLASATE ÎNTR-UN CURENT FLUID SUPERSONIC

Ca o aplicație a rezultatelor obținute anterior, vom studia problema vibrațiilor structurilor de formă cilindrică circulară, plasate într-un curent fluid, ideal, supersonic, curent ce-l vom considera potențial și izentropic cu viteza la infinit $U$. În cele ce urmează vom considera vectorul viteză dirijat paralel cu axa structurii cilindrice.

În abordarea acestei probleme vom considera fie cazul fluidului interior, fie cazul fluidului exterior. În fiecare caz vom avea grijă a afecta mărimile ce caracterizează apartenența la domeniul interior sau exterior cu indicele *i* sau *e*.

Expresia componentelor vectorului forţelor exterioare este dată de

$$X = -m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,;\; Y = -m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,;\; Z = -m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p_i - p_e. \qquad (25)$$

Expresia componentei $Z$ a fost dedusă de V. V. Bolotin, deducerea fiind expusă detaliat în lucrarea [3]. Ea este dată de relaţia

$$Z = -(m + m_*)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\,U\,m_*\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha\,\partial t} - U^2\,m_*\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\,, \qquad (26)$$

unde

$$m_* = \rho_0\,\psi\,R, \qquad (27)$$

defineşte masa adăugată a scurgerii, $\psi$ fiind definit de relaţiile

$$\frac{1}{\psi_i} = \mu\,R\frac{I_{n-1}}{I_n} - n\,;\quad \frac{1}{\psi_e} = \mu\,R\frac{K_{n-1}}{K_n} + n\,, \qquad (28a)$$

în cazul îndeplinirii inegalităţii

$$\left|\frac{\omega}{a} - M\,k\right| < k \qquad (28b)^{1)}$$

şi de

$$\frac{1}{\psi_i} = \mu\,R\frac{J_{n-1}}{J_n} - n\,;\quad \frac{1}{\psi_e} = n - \mu\,R\,\frac{H^{(2)}_{n-1}}{H^{(2)}_n} \qquad (29a)$$

în cazul îndeplinirii inegalităţii

$$\left|\frac{\omega}{a} - M\,k\right| > k \qquad (29b)$$

$\mu$ fiind definit de

$$\left|\left(\frac{\omega}{a} - M\,k\right)^2 - k^2\right| = \mu^2. \qquad (30)$$

În aceste relaţii $I_n\,(\mu\,R)$, $K_n\,(\mu\,R)$ sînt funcţii cilindrice de argument imaginar, $J_n\,(\mu\,R)$ funcţii Bessel de argument real, $H^{(2)}_n\,(\mu\,R)$ funcţii Hankel de rangul doi, $\omega$ frecvenţa, $k = \frac{\pi}{\lambda}$ unde $\lambda$ este lungimea semiundei în direcţia generatoarei.

---

[1] În cadrul inegalităţii (28*b*) situaţia $\left|\frac{\omega}{a} - Mk\right| \ll k$ corespunde cazului cînd efectul compresibilităţii este neglijabil (viteza sunetului $a \to \infty$). În acest caz coeficientul $\psi_i$ şi $\psi_e$ se calculează conform relaţiilor (28 *a*), funcţiile cilindrice corespunzătoare avînd argumentul $\mu R = ikR$.

Ecuațiile problemei le vom scrie pornind de la ecuațiile generale (21) ÷ (24) în care vom face $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_{12}} = 0\,;\ \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}$ liniile $\alpha$ și $\beta = R\theta$ reprezentînd respectiv lungimea arcurilor generatoarei și a cercului director.

Vom aborda problema sub o formă ceva mai puțin generală neglijînd contribuția adusă de deplasarea normală în efectul forțelor de inerție tangențiale. Această neglijare atrage după sine $\delta_2 = 0$, conform convenției adoptate și de aici rezultă că punînd $F_1 = F_2 = 0$, ecuațiile (23), (24) sînt identic satisfăcute. Ecuațiile problemei în acest caz devin

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2} - \overset{1}{G}_\alpha \frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4} - \overset{1}{G}_\beta \frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4} - 2\,[\overset{1}{G}_\alpha \overset{3}{\mu}_\beta + \overset{2}{G}_\alpha (1 - \overset{4}{\mu}_\beta)]\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} -$$

$$- \delta_1\, m \frac{\overset{1}{N}_\alpha}{R}(1 + \overset{1}{\mu}_\alpha)\frac{\partial^2 c}{\partial t^2} = (m + m_*)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\ U m_* \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\, \partial t} + U^2 \mathrm{m}_* \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2},$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} + \overset{1}{N}_\beta \frac{\partial^4 c}{\partial\alpha^4} + \overset{1}{N}_\alpha \frac{\partial^4 c}{\partial\beta^4} - 2\left[\overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha - \frac{1}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)}\right]\frac{\partial^4 c}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} -$$

$$- \delta_1\, m\, \overset{1}{N}_\beta \left[\frac{1}{\overset{1}{F}_\alpha} + \frac{2}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)}\right]\frac{\partial^4 c}{\partial\alpha^2\partial t^2} - \delta_1\, m\, \overset{1}{N}_\alpha \left[\frac{1}{\overset{1}{F}_\beta} +\right.$$

$$\left. + \frac{2}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)}\right]\frac{\partial^4 c}{\partial\beta^2\,\partial t^2} + 2\ \delta_1 \frac{m^2}{\overset{2}{F}_\alpha\ (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)}\ \frac{\overset{1}{N}_\alpha}{\overset{1}{F}_\beta}\frac{\partial^4 c}{\partial t^4} = 0\,. \tag{31}$$

În ipoteza cilindrului de lungime infinită vom considera drept soluții ale sistemului de ecuații (31)

$$c = c_*\ e^{i(\omega t - k\alpha)} \cos n \frac{\beta}{R},$$

$$w = w_*\ e^{i(\omega t - k\alpha)} \cos n \frac{\beta}{R}, \tag{32}$$

unde $\qquad i = \sqrt{-1}\,.$

Substituind expresiile (32) în sistemul (31) se obține un sistem omogen de două ecuații în $c_*$ și $w_*$. Netrivialitatea valorilor lui $c_*$ și $w_*$ impune condiția nulității determinantului

$$\begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{vmatrix} = 0, \tag{33}$$

în care

$$
\begin{aligned}
l_{11} &= -\frac{1}{R}k^2,\\
l_{12} &= \overset{1}{N}_\beta k^4 + \overset{1}{N}_\alpha \varkappa^4 - 2\left[\overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha - \frac{1}{\overset{2}{F}_\alpha(1-\overset{2}{\mu}_\beta)}\right]\varkappa^2 k^2 -\\
&\quad - \delta_1 m \overset{1}{N}_\beta\left[\frac{1}{\overset{1}{F}_\alpha} + \frac{2}{\overset{2}{F}_\alpha(1-\overset{2}{\mu}_\beta)}\right]k^2\omega^2 - \delta_1 m \overset{1}{N}_\alpha\left[\frac{1}{\overset{1}{F}_\beta} +\right.\\
&\quad \left. + \frac{2}{\overset{2}{F}_\alpha(1-\overset{2}{\mu}_\beta)}\right]\varkappa^2\omega^2 + 2\delta_1\frac{m^2}{\overset{2}{F}_\alpha(1-\overset{2}{\mu}_\beta)}\frac{\overset{1}{N}_\alpha}{\overset{1}{F}_\beta}\omega^4,\\
l_{21} &= -\{\overset{1}{G}_\alpha k^4 + \overset{1}{G}_\beta \varkappa^4 + 2[\overset{1}{G}_\alpha \overset{3}{\mu}_\beta + \overset{2}{G}_\alpha(1-\overset{4}{\mu}_\beta)] - (m+m_*)\,\omega^2 +\\
&\qquad + 2\,U m_*\omega k - U^2 m_* k^2\},\\
l_{22} &= -\frac{1}{R}k^2 + \delta_1 m\frac{\overset{1}{N}_\alpha}{R}(1+\overset{1}{\mu}_\alpha)\,\omega^2,
\end{aligned}
\tag{34}
$$

prin $\varkappa$ notîndu-se $\varkappa = \dfrac{n}{R}$.

Dezvoltînd acest determinant obținem drept ecuație de frecvențe

$$
\begin{aligned}
&k^8 + a_1k^6\varkappa^2 + a_2k^4\varkappa^4 + a_3k^2\varkappa^6 + a_4\varkappa^8 + \frac{a^5}{R^2}k^4 = \delta_1\omega^2 m\Big(b_1k^6 +\\
&\quad + b_2k^4\varkappa^2 + b_3k^2\varkappa^4 + b_4\varkappa^6 + \frac{b_5}{R^2}k^2\Big)\underline{+ 2\,\delta_1 U m m_*\omega^3(b_6k^3 +}\\
&\underline{+ b_7 k\varkappa^2)} - \underline{\delta_1\omega^4 m^2 P_1(b_8\varkappa^4 + 2b_9\varkappa^2k^2 + b_{10}k^4)} + \underline{2\,\delta_1 U^2 m^2 m_*\omega^4 P_1 k^2} -\\
&\underline{- \delta_1\omega^4 m(m+m_*)(b_{11}k^2 + b_{12}\varkappa^2)} - \underline{4\,\delta_1 U m_* m^2\omega^5 P_1 k} + U^2 m_* k^2(b_{13}k^4 -\\
&- b_{14}\varkappa^2k^2 + b_{15}\varkappa^4) - 2\,U m_*\omega k(b_{13}k^4 - b_{14}\varkappa^2k^2 + b_{15}\varkappa^4) + \omega^2(m +\\
&+ m_*)(b_{13}k^4 - b_{14}\varkappa^2k^2 + b_{15}\varkappa^4).
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Coeficienții $a_i$, $b_i$ și $P_1$ ce apar în ecuația (35) sînt exprimați prin relațiile date în tabela 2. Ecuația (35) este o ecuație transcendentă în $\omega$ deoarece $m_*$ este o funcție transcendentă de frecvența $\omega$ și de viteza curentului $U$. Rezolvarea ei se face de obicei prin metode grafice, frecvențele proprii obținîndu-se grafic ca puncte de intersecție a curbelor corespunzînd membrului drept și stîng al ecuației (35).

Făcînd în ecuația (35) $\delta_1 = 0$ adică considerînd cazul vibrațiilor transversale se reobține ecuația dedusă în lucrarea [4].

*Tabelul 2*

**Expresia coeficienţilor** $a_i$, $b_i$. $P_1$

$$a_1 = 2\left[\frac{\overset{1}{F}_\beta\,(1-\overset{1}{\mu}_\alpha\overset{1}{\mu}_\beta)}{\overset{2}{F}_\alpha\,(1-\overset{2}{\mu}_\beta)} + \frac{\overset{2}{G}_\alpha}{\overset{1}{G}_\alpha}\,(1-\overset{4}{\mu}_\beta) + \overset{3}{\mu}_\beta - \overset{1}{\mu}_\beta\right];$$

$$a_2 = \frac{\overset{1}{G}_\beta}{\overset{1}{G}_\alpha} + \frac{\overset{1}{F}_\beta}{\overset{1}{F}_\alpha} + \frac{4\overset{1}{F}_\beta}{\overset{2}{F}_\beta\,\overset{1}{G}_\alpha}\left[\overset{1}{G}_\alpha\overset{3}{\mu}_\beta + \overset{2}{G}_\alpha\,(1-\overset{4}{\mu}_\beta)\right]\left[\frac{1-\overset{1}{\mu}_\alpha\overset{1}{\mu}_\beta}{1-\overset{2}{\mu}_\beta} - \frac{\overset{2}{F}_\beta\,\overset{1}{\mu}_\alpha}{\overset{1}{F}_\alpha}\right];$$

$$a_3 = \frac{2\overset{1}{F}_\beta}{\overset{2}{F}_\alpha\,\overset{1}{G}_\alpha}\left\{\frac{\overset{2}{F}_\beta}{\overset{1}{F}_\alpha}\left[\overset{1}{G}_\alpha\overset{3}{\mu}_\beta - \overset{1}{G}_\beta\overset{1}{\mu}_\alpha + \overset{2}{G}_\alpha\,(1-\overset{4}{\mu}_\beta)\right] + \overset{1}{G}_\beta\,\frac{1-\overset{1}{\mu}_\alpha\overset{1}{\mu}_\beta}{1-\overset{2}{\mu}_\beta}\right\};$$

$$a_4 = \frac{\overset{1}{F}_\beta\,\overset{1}{G}_\beta}{\overset{1}{F}_\alpha\,\overset{1}{G}_\alpha};\qquad a_5 = \frac{\overset{1}{F}_\beta\,(1-\overset{1}{\mu}_\alpha\overset{1}{\mu}_\beta)}{\overset{1}{G}_\alpha}.$$

$$b_1 = \frac{1}{\overset{1}{F}_\alpha} + \frac{2}{\overset{2}{F}_\alpha\,(1-\overset{2}{\mu}_\beta)};\; b_2 = \frac{\overset{1}{F}_\beta}{\overset{1}{F}_\alpha}\left[\frac{1}{\overset{1}{F}_\beta} + \frac{2}{\overset{2}{F}_\alpha\,(1-\overset{2}{\mu}_\beta)}\right] + \frac{2}{\overset{1}{G}_\alpha}\left[\frac{1}{\overset{1}{F}_\alpha} + \frac{2}{\overset{2}{F}_\alpha\,(1-\overset{2}{\mu}_\beta)}\right]\Big[\overset{1}{G}_\alpha\overset{3}{\mu}_\beta +$$

$$+\,\overset{2}{G}_\alpha\,(1-\overset{4}{\mu}_\beta)\Big];$$

$$b_3 = \frac{\overset{1}{G}_\beta}{\overset{1}{G}_\alpha}\left[\frac{1}{\overset{1}{F}_\alpha} + \frac{2}{\overset{2}{F}_\alpha\,(1-\overset{2}{\mu}_\beta)}\right] + 2\,\frac{\overset{1}{F}_\beta}{\overset{1}{F}_\alpha\,\overset{1}{G}_\alpha}\left[\overset{1}{G}_\alpha\overset{3}{\mu}_\beta + \overset{2}{G}_\alpha\,(1-\overset{4}{\mu}_\beta)\right]\left[\frac{1}{\overset{1}{F}_\beta} + \frac{2}{\overset{2}{F}_\alpha\,(1-\overset{4}{\mu}_\beta)}\right];$$

$$b_4 = \frac{\overset{1}{F}_\beta\,\overset{1}{G}_\beta}{\overset{1}{F}_\alpha\,\overset{1}{G}_\alpha}\left[\frac{1}{\overset{1}{F}_\beta} + \frac{2}{\overset{2}{F}_\alpha\,(1-\overset{2}{\mu}_\beta)}\right];\; b_5 = \frac{\overset{1}{F}_\beta\,(1+\overset{1}{\mu}_\alpha)}{\overset{1}{F}_\alpha\,\overset{1}{G}_\alpha};$$

$$b_6 = \frac{1}{\overset{1}{G}_\alpha}\left[\frac{1}{\overset{1}{F}_\alpha} + \frac{2}{\overset{2}{F}_\alpha\,(1-\overset{2}{\mu}_\beta)}\right];\; b_7 = \frac{\overset{1}{F}_\beta}{\overset{1}{F}_\alpha\,\overset{1}{G}_\alpha}\left[\frac{1}{\overset{1}{F}_\beta} + \frac{2}{\overset{2}{F}_\alpha\,(1-\overset{2}{\mu}_\beta)}\right];$$

$$b_8 = \overset{1}{G}_\beta;\; b_9 = \overset{1}{G}_\alpha\overset{3}{\mu}_\beta + \overset{2}{G}_\alpha\,(1-\overset{4}{\mu}_\beta);\; b_{10} = \overset{1}{G}_\alpha;$$

$$b_{11} = \frac{1}{\overset{1}{G}_\alpha}\left[\frac{1}{\overset{1}{F}_\alpha} + \frac{2}{\overset{2}{F}_\alpha\,(1-\overset{2}{\mu}_\beta)}\right];\; b_{12} = \frac{\overset{1}{F}_\beta}{\overset{1}{F}_\alpha\,\overset{1}{G}_\alpha}\left[\frac{1}{\overset{1}{F}_\beta} + \frac{2}{\overset{2}{F}_\alpha\,(1-\overset{2}{\mu}_\beta)}\right];$$

$$b_{13}=\frac{1}{\overset{1}{G}_{\alpha}};\quad b_{14}=2\left[\frac{\overset{1}{\mu}_{\beta}}{\overset{1}{G}_{\alpha}}-\frac{\overset{1}{F}_{\beta}(1-\overset{1}{\mu}_{\alpha}\overset{1}{\mu}_{\beta})}{\overset{2}{F}_{\alpha}\overset{1}{G}_{\alpha}(1-\overset{2}{\mu}_{\beta})}\right];\quad b_{15}=\frac{\overset{1}{F}_{\beta}}{\overset{1}{F}_{\alpha}\overset{1}{G}_{\alpha}};$$

$$P_{J}=\frac{1}{\overset{1}{F}_{\alpha}\overset{2}{F}_{\alpha}\overset{1}{G}_{\alpha}(1-\overset{2}{\mu}_{\beta})}$$

Vom proceda în cele ce urmează la o restrîngere a generalității, considerînd frecvențele cele mai joase. Pentru cazul frecvențelor cele mai joase, din analiza termenilor ecuației (35) se observă că termenii subliniați sînt mult mai mici decît cei nesubliniați.

Prin neglijarea termenilor menționați, ecuația de frecvențe pentru tonul fundamental devine :

$$\begin{aligned}&k^8+a_1k^6\varkappa^2+a_2k^4\varkappa^2+a_3k^2\varkappa^6+a_4\varkappa^8+\frac{a_5}{R^2}k^4=\\&\delta_1\omega^2m\Big((b_1k^6+b_2k^4\varkappa^2+b_3k^2\varkappa^4+b_4\varkappa^6+b_5\frac{k^2}{R^2}\Big)+\\&+U^2m_*k^2(b_{13}k^4-b_{14}\varkappa^2k^2+b_{15}\varkappa^4)-2\,Um_*\,\omega k\,(b_{13}k^4-\\&-b_{14}\varkappa^2k^2+b_{15}\varkappa^4)+\omega^2(m+m_*)(b_{13}k^4-b_{14}\varkappa^2k^2+b_{15}\varkappa^4).\quad(36)\end{aligned}$$

Cazul $m_*=0$ ne conduce la determinarea expresiei frecvențelor proprii în vid

$$\omega_1^2=\frac{k^8+a_1k^6\varkappa^2+a_2k^4\varkappa^2+a_3k^2\varkappa^6+a_4\varkappa^8+\frac{a_5}{R^2}k^4}{m\left[b_{13}k^4-b_{14}\varkappa^2k^2+b_{15}\varkappa^4+\delta_1\left(b_1k^6+b_2k^4\varkappa^2+b_3k^2\varkappa^4+b_4\varkappa^6+b_5\frac{k^2}{R^2}\right)\right]}\quad(37)$$

În baza expresiei (37) a frecvențelor proprii în vid ecuația (36) se mai poate scrie sub forma

$$\omega_1^2-\omega^2=\frac{m_*}{m}\left(\omega-kU\right)^2\cdot$$

$$\cdot\frac{b_{13}k^4-b_{14}\varkappa^2k^2+b_{15}\varkappa^4}{b_{13}k^4-b_{14}\varkappa^2k^2+b_{15}\varkappa^4+\delta_1\left[b_1k^6+b_2k^4\varkappa^2+b_3k^2\varkappa^4+b_4\varkappa^6+b_5\frac{k^2}{R^2}\right]}\quad(38)$$

În cazul existenței unui mediu fluid la viteza de curgere nulă ($U=0$) expresia frecvenței vibrațiilor proprii devine

$$\frac{\omega_1}{\sqrt{1+\frac{m_*}{m}\cdot\frac{b_{13}k^4-b_{14}\varkappa^2k^2+b_{15}\varkappa^4}{b_{13}k^4-b_{14}\varkappa^2k^2+b_{15}\varkappa^4+\delta_1\left[b_1k^6+b_2k^4\varkappa^2+b_3k^2\varkappa^4+b_4\varkappa^6+b_5\frac{k^2}{R^2}\right]}}}.\quad(39)$$

Din relația (38) se observă că pentru viteza a cărei expresie este dată de relația

$$U_* = \frac{\omega_1}{k}\sqrt{\frac{m}{m_*}}\sqrt{1 + \frac{\delta_1\left[b_1 k^6 + b_2 k^4 \varkappa^2 + b_3 k^2 \varkappa^4 + b_4 \varkappa^6 + b_5 \dfrac{k^2}{R^2}\right]}{b_{13}k^4 - b_{14}k^2\varkappa^2 + b_{15}\varkappa^4}} = \frac{\overline{\omega}_1}{k}\sqrt{\frac{m}{m_*}} \tag*{(40) 1)}$$

se obține $\omega = 0$ Această viteză $U_*$ este o viteză de instabilitate statică a structurii — viteză critică.

Într-adevăr, reluînd raționamentul lui V. V. Bolotin [3], din expresia soluțiilor date de relația (32) pentru $\omega = 0$ avem

$$c = c_* e^{-ik\alpha} \cos n \frac{\beta}{R}, \tag*{(41a)}$$

$$w = w_* e^{-ik\alpha} \cos n \frac{\beta}{R}. \tag*{(41b)}$$

Să considerăm acum micile deplasări $u_0(\theta, \alpha)$, $v_0(\theta, \alpha)$, $w_0(\theta, \alpha)$ ca fiind abateri de la starea de tensiune fără momente. Să considerăm în plus $w(\theta, \alpha)$ ca fiind deplasarea ce rezultă în urma scurgerii curentului fluid. În acest caz expresia componentei $Z$ în baza lui (26) și (41b) devine

$$Z = U^2 k^2 m_* (w + w_0). \tag*{(42)}$$

Substituind expresiile (41) și (42) în ecuațiile (31), punînd condiția netrivialității valorilor lui $c_*$ și $w_*$ și ținînd seama de relațiile (37) și (40) se obține că

$$w = \frac{w_0}{\dfrac{U_*^2}{U^2} - 1}, \tag*{(43)}$$

de unde se deduce ușor că pentru viteza curentului $U$ apropiată de viteza $U_*$, deplasarea normală crește foarte mult, fapt care justifică de ce viteza $U_*$ este o viteză critică.

Conform convenției adoptate punînd în relațiile (37), (38), (39) $\delta_1 = 0$, reobținem rezultatele deduse în lucrarea [4], pentru cazul vibrațiilor transversale.

Ținînd seama de efectul forțelor de inerție tangențiale și mai precis de contribuția eforturilor tangențiale în efectul forțelor de inerție tangențiale, conform aceleași convenții, $\delta_1 = 1$ și astfel termenii ce sînt pe lîngă $\delta_1$ identifică influența pe care o au forțele de inerție tangențiale asupra mărimilor sau în ecuațiile caracterizate de relațiile sus-menționate.

*Primită la redacție la 16 februarie 1961*

---

1) $\overline{\omega}_1 = \omega_1 |_{\delta_1 = 0}$

# К УПРУГО-ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ НЕОДНОРОДНЫХ ТОНКИХ КОНСТРУКЦИЙ

## РЕЗЮМЕ

Рассматривается задача колебаний тонких пологих конструкций построенных путем симметрического наложения $a(2n+1)$ ортотропных слоев. Исходя из гипотез, применяемых автором в ряде предыдущих работ, уравнения теории пологих конструкций (ес (1) ÷ (8)) были сведены к системе, составленной из уравнений (19), (20) и (15) в потенциальной функции $c$ нормального перемещения $w$, усилий $T_{\alpha\beta}$, $F_1$ и $F_2$, причем они являются частными интегралами уравнений (13) и (16). Отмечается, что эта система была получена без пренебрежения касательными силами инерции. Показывается, что эта система уравнений поддается упрощению если учесть то, что эффект касательных сил инерции частично обусловлен перемещением $w$ и частично касательными усилиями $T_\alpha$ и $T_\beta$.

В уравнениях (21)—(24) выявляется вклад величины $w$ и касательных усилий в эффект касательных сил инерции, путем умножения соответствующих членов на множитель $\delta_2$ соответственно $\delta_1$. Пренебрежение вклада $w$ в эффект касательных сил инерции дает $\delta_2=0$, а пренебрежение вклада касательных усилий в эффект касательных сил инерции $\delta_1 = 0$. Полное пренебрежение касательными силами инерции ведет за собой $\delta_1 = \delta_2 = 0$ в указанных уравнениях. В главе IV рассматриваются колебания конструкций круглой цилиндрической формы бесконечной длины, расположенных в потоке сжимаемой жидкости, находящемся внутри или вне конструкции.

Пренебрегая вкладом $w$ в эффект касательных сил инерции, уравнения задачи определятся системой (31). На основании решений (32) выводится уравнение частот (35), которое для наименьших частот упрощается, причем оно определяется соотношением (38).

В продолжении выводится выражение скорости статической неустойчивости конструкций (соотношение (40)).

В соотношениях (37), (38), (39), (40) члены перед $\delta_1$ выявляют вклад касательных сил инерции в величины или в вышеуказанные уравнения.

# ON THE ELASTO-DYNAMIC PROBLEM OF THIN MULTILAYER SHELLS

## ABSTRACT

The problem of the vibrations of thin shallow structures constructed by the symmetrical superposition of $(2n+1)$ orthotropic layers is considered. Proceeding from the assumptions made in a series of previous

papers, the equation of the theory of shallow structures (eqs. (1) $\div$ (8)) are reduced to the system of equations (19), (20) and (15) in the potential function $c$, the normal displacement $w$, and the stress $T_{\alpha\beta}$ $F_1$ and $F_2$ being integrals of equations (13) and (16). It is mentioned that this system is obtained without neglecting the tangential forces of inertia. It is shown, that this system of equations may be simplified by taking into account the fact that the effect of the tangential forces of inertia is partly due to displacements $w$ and partly to the tangential stress.

În equations (21) — (24) the contribution of w and of the tangential stresses resultants to the tangential forces of inertia is identified by associating therespective terms to the factors $\delta_2$ and $\delta_1$ respectively. The disregarding of the contribution of w in the effect of the tangential forces of inertia implies $\delta_1 = 0$, while the disregarding of the contribution of the tangential stresses in the effect of the tangential forces of inertia implies $\delta_1 = 0$. The total neglecting of the tangential forces of inertia is equivalent to $\delta_1 = \delta_2 = 0$ in the aforementioned equations. Further, the vibration of circular cylindrical multilayer shells of infinite lenght in a compressible fluid flowing inside or outside the structure are considered. By neglecting the contribution of w in the effect of the tangential forces of inertia, the equations of the problem are given by system (31). The equation of frequency (35), which is simplified for the lowest frequencies has the form (38) and may be deduced from solutions (32).

Finally, the expression of the flow velocity for which the structure becomes statically unstable is deduced (eq. (40)).

In relations (37), (38), (39), (40) the terms associated with $\delta_1$, identify the contribution brought by the tangential forces of inertia in the aforementioned equations.

## BIBLIOGRAFIE

1. L. LIBRESCU, *În legătură cu teoria structurilor elastice subțiri alcătuite din straturi ortotrope, simetric dispuse pe grosime în raport cu suprafața mediană.* Studii și cercetări de mecanică aplicată **X**, *3* (1959); Revue de Mécanique Appliquée, **V**, *1* (1960).
2. P.M. NAGHDI, *On the general problem of elasto-kinetics in the theory of shallow shells.* Proceeding of the symposium on the theory of thin elastic shells, Delft, 24—28 August 1959; North — Holland Publishing Company — Amsterdam, 1960.
3. В. В. БОЛОТИН, *Колебания и устойчивость цилиндрических оболочек в потоке сжимаемой жидкости.* Инж. Сборник, **XXIV**, 1956.
4. L. LIBRESCU, *Vibrațiile structurilor elastice subțiri de formă cilindrică circulară, plasate într-un curent fluid supersonic.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **XII**, 1 (1961).

# ASUPRA EFECTULUI ELEMENTELOR VIBROIZOLANTE

DE

H. SANDI [1])

1. În vederea reducerii amplitudinilor vibraţiilor elementelor de construcţie sau utilajelor, produse de diversele sarcini dinamice, se utilizează frecvent elemente vibroizolante. Elementele vibroizolante pot fi active (cînd intervin în zona de legătură a sursei de vibraţie cu elementul de construcţie) sau pasive (cînd intervin în zona de legătură a elementului de construcţie în regim de vibraţie cu un utilaj sensibil la acţiunea vibraţiilor). Întrucît oportunitatea introducerii elementelor vibroizolante este condiţionată de proprietăţile mecanice ale ansamblului element de construcţie-element vibroizolant-utilaj, iar o alegere greşită a caracteristicilor mecanice poate duce la o amplificare a efectului sarcinilor dinamice, este necesar un calcul dinamic al efectelor introducerii elementelor vibroizolante.

Obiectul prezentei lucrări constă în deducerea unor relaţii generale, care să permită calculul practic al efectelor elementelor vibroizolante active sau pasive.

2. Se vor admite următoarele ipoteze referitor la problemele propuse :

*a*) Elementul de construcţie suport este un solid deformabil care poate fi studiat pe baza ipotezelor dinamicii liniare.

*b*) Elementul vibroizolant este solid, are proprietăţi reologice descriptibile prin relaţii liniare şi are masa neglijabilă în raport cu celelalte mase ce intervin în problemă.

*c*) Utilajul montat pe elementul de construcţie poate fi asimilat cu un sistem de solide rigide, iar poziţia sa relativă faţă de elementul de construcţie poate fi caracterizată printr-un număr finit de parametri.

Un exemplu de schemă a sistemului avut în vedere este prezentat în figura 1.

Problemele practice propuse sînt următoarele :

I. Să se determine forţele dinamice transmise elementului de construcţie prin elementul vibroizolant (activ) dacă se cunosc forţele dinamice aplicate utilajului.

---

1) INCERC (Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor, Bucureşti).

II. Să se determine deplasările dinamice ale utilajului, transmise prin elementul vibroizolant (pasiv), dacă se cunosc deplasările dinamice ale elementului de construcţie în ipoteza absenţei utilajului.

3. Calculele vor fi efectuate iniţial în ipoteza că toate forţele şi deplasările dinamice sînt periodice monocromatice, de pulsaţie $\omega$.

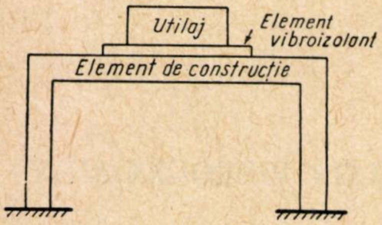


Fig. 1

Se va introduce spaţiul de configuraţie al deplasărilor relative între elementul de construcţie şi utilaj $\{U\}$. În acest spaţiu, deplasările utilajului vor fi reprezentate prin vectorul $U_0(t)$, iar deplasările elementului de construcţie vor fi reprezentate prin vectorul $U_P(t)$. Deplasările elementului de construcţie în ipoteza absenţei utilajului vor fi notate prin $U_P^0(t)$. În spaţiul de configuraţie, forţele active care acţionează asupra utilajului vor fi notate prin $F_0(t)$, iar forţele de legătură transmise prin elementul vibroizolant elementului de construcţie, vor fi notate prin $F(t)$.

Tensorul (real) de inerţie al utilajului va fi notat prin $\mathcal{A}$. Tensorul complex) de deformabilitate al elementului vibroizolant (imaginea Fourier a tensorului de influenţă dinamic) va fi notat prin $\mathcal{B}(\omega)$. Tensorul (complex) de deformabilitate al elementului de construcţie va fi notat prin $\mathcal{C}(\omega)$.

Dacă elementul vibroizolant este omogen, tensorul complex $\mathcal{B}(\omega)$ va fi exprimat sub forma unui tensor real, înmulţit cu un scalar complex. Dacă elementul de construcţie are formele proprii de vibraţie $\varkappa_r$ (P) ($\varkappa_r = 1 \ldots \infty$) (ortonormale în raport cu energia cinetică pentru pulsaţie unitară) corespunzătoare unor vectori $V_r$ ($V_r = pr._{\{U\}}\, \varkappa_r\, (P)$ tensorul $\mathcal{C}(\omega)$ va avea expresia

$$\mathcal{C}(\omega) = \sum_r \frac{V_r \times V_r}{-\omega^2 + \omega_r^2 (1 + i\,\gamma_r)}, \tag{1}$$

unde semnul înmulţirii reprezintă produsul general, $\omega_r$ sînt pulsaţiile proprii, iar $\gamma_r$ sînt respectiv coeficienţii de rezistenţă neelastică după modurile proprii de vibraţie.

Ipoteza neglijării masei elementului vibroizolant implică aplicabilitatea principiului acţiunii şi reacţiunii între forţele transmise de acesta elementului de construcţie şi utilajului.

Vectorii variind periodic monocromatic în timp vor fi reprezentaţi sub forma complexă

$$U(t) = \mathrm{Re}\,[\mathcal{U}(\omega)\, e^{i\omega t}]. \tag{2}$$

În aceste condiţii, ecuaţiile problemei sînt :

*a*) Ecuaţia de mişcare a utilajului

$$-\,\omega^2 \mathcal{A}\mathcal{U}_0(\omega) = \mathcal{F}_0(\omega) - \mathcal{F}(\omega). \tag{3a}$$

*b*) Relaţia reologică a elementului vibroizolant

$$\mathcal{U}_0(\omega) - \mathcal{U}_P(\omega) = \mathcal{B}(\omega)\,\mathcal{F}(\omega). \tag{3b}$$

*c*) Formula de mişcare a elementului de construcţie

$$\mathcal{U}_p(\omega) = \mathcal{U}_p^0(\omega) + \mathcal{C}(\omega)\,\mathcal{F}(\omega). \tag{3c}$$

Sumînd relaţiile (3b) şi (3c), se obţine relaţia

$$\mathcal{U}_0(\omega) = \mathcal{U}_p^0(\omega) + [\mathcal{B}(\omega) + \mathcal{C}(\omega)]\,\mathcal{F}(\omega). \tag{3d}$$

Problema I revine la determinarea vectorului $\mathcal{F}(\omega)$ dacă se dă vectorul $\mathcal{F}_0(\omega)$, iar vectorul $\mathcal{U}_p^0(\omega)$ este nul.

Problema II revine la determinarea vectorului $\mathcal{U}_0(\omega)$ dacă se dă vectorul $\mathcal{U}_p^0(\omega)$, iar vectorul $\mathcal{F}_0(\omega)$ este nul.

Soluţia oricăreia din cele două probleme se poate obţine uşor din sistemul relaţiilor (3a) şi (3d).

Prima problemă are soluţia

$$\mathcal{F}(\omega) = \{\mathcal{E} - \omega^2 \mathcal{A}[\mathcal{B}(\omega) + \mathcal{C}(\omega)]\}^{-1}\,\mathcal{F}_0(\omega). \tag{4a}$$

A doua problemă are soluţia

$$\mathcal{U}_0(\omega) = \{\mathcal{E} - \omega^2 [\mathcal{B}(\omega) + \mathcal{C}(\omega)]\,\mathcal{A}\}^{-1}\,\mathcal{U}_p^0(\omega). \tag{4b}$$

Relaţiile (4a) şi (4b) rezultă din particularizarea relaţiilor

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \{\mathcal{E} - \omega^2 \mathcal{A}[\mathcal{B} + \mathcal{C}]\}^{-1}\{\mathcal{F}_0 + \omega^2 \mathcal{A}\mathcal{U}_p^0\}, \\ \mathcal{U}_0 &= \{\mathcal{E} - \omega^2 [\mathcal{B} + \mathcal{C}]\mathcal{A}\}^{-1}\{\mathcal{U}_p^0 + [\mathcal{B} + \mathcal{C}]\,\mathcal{F}_0\}. \end{aligned} \tag{4c}$$

În relaţiile (4a), (4b) şi (4c) s-a notat prin $\mathcal{E}$ tensorul unitate, iar exponentul negativ indică tensorul invers.

Aplicarea acestor relaţii în fiecare caz practic arată dacă efectul elementului vibroizolant este favorabil sau defavorabil.

4. În cazul forţelor dinamice oarecare determinate, relaţiile (4a) şi (4b) sînt direct aplicabile pentru transformatele Fourier ale termenilor liberi şi soluţiilor. Presupunînd că pentru transformările Fourier sînt îndeplinite condiţii suficiente de convergenţă, din expresia (4a) rezultă soluţia

$$F(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega t}\{\mathcal{E} - \omega^2 \mathcal{A}[\mathcal{B} + \mathcal{C}]\}^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} F_0(\tau)\, d\tau. \tag{5}$$

Analog poate fi utilizată expresia (4b) pentru a se obţine soluţia în cazul elementului vibroizolant pasiv.

În cazul forţelor dinamice aleatoare staţionare, se deduce din relaţia (4a) expresia

$$\begin{aligned} \overline{F(t) \times F(t+\tau)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega\tau}\{\mathcal{E} - \omega^2 \mathcal{A}[\mathcal{B} + \mathcal{C}]\}^{-1} \times \{\mathcal{E} - \\ - \omega^2 \mathcal{A}[\mathcal{B} + \mathcal{C}]\}^{-1*}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\vartheta}\,\overline{F_0(t) \times F_0(t+\vartheta)}\, d\vartheta, \end{aligned} \tag{6}$$

pentru tensorii corelativi de ordinul 2 ai termenului liber şi soluţiei; se presupune că valoarea medie a forţelor este nulă (pentru ea ar fi valabilă relaţia (5)); asteriscul notează conjugatul complex.

Analog poate fi utilizată expresia (4b) pentru cazul elementului vibroizolant pasiv.

5. Ca aplicație se va considera cazul plan reprezentat în figura 2. Masivul rigid este caracterizat prin deplasarea verticală $u_0$ și rotația $\varphi_0$ prin masa $m$ și momentul de inerție central $I$. Asupra sa lucrează forța $Q_0$ și cuplul $M_0$ (considerate periodice monocromatice).

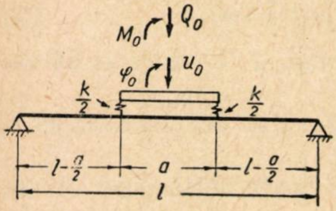


Fig. 2

Elementul vibroizolant activ este alcătuit din două resorturi elastice de rigidități $\frac{k}{2}$.

Elementul de construcție este o grindă elastică de secțiune constant, de masă distribuită $\mu$, lungime $l$ și pulsații proprii $\omega_r = r^2\,\omega_1$.

Tensorul $\mathcal{A}$ are expresia

$$\mathcal{A} = \left\|\begin{matrix} m & 0 \\ 0 & I \end{matrix}\right\| \tag{7}$$

Tensorul $\mathcal{B}(\omega)$ are expresia

$$\mathcal{B} = \frac{1}{k}\left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{a^2} \end{matrix}\right\| \tag{8}$$

Formele proprii de vibrație ale grinzii sînt

$$\varkappa_r(x) = \sqrt{\frac{2}{\mu l}}\,\sin\frac{r\pi x}{l} \to V_r = \sqrt{\frac{2}{\mu l}}\left\|\begin{matrix} \sin^2\frac{r\pi}{2}\cos\frac{r\pi a}{2l} \\ \frac{2}{a}\cos\frac{r\pi}{2}\sin\frac{}{2l} \end{matrix}\right\| \tag{9}$$

Tensorul $C(\omega)$ are expresia (v. rel. (1))

$$\mathcal{C} = \frac{2}{\mu l}\left\|\begin{matrix} \sum\limits_r \dfrac{\sin\frac{2r\pi}{2}\cos^2\frac{r\pi a}{2l}}{-\omega^2+\omega_r^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{4}{a^2}\sum\limits_r \dfrac{\cos^2\frac{2r\pi}{2}\sin^2\frac{r\pi a}{2l}}{-\omega^2 \pm \omega_r^2} \end{matrix}\right\| \tag{10}$$

Tensorul $\mathcal{E}-\omega^2\,\mathcal{A}\,[\mathcal{B}+\mathcal{C}]$ are expresia

$$\mathcal{E}-\omega^2\,\mathcal{A}\,[\mathcal{B}+\mathcal{C}] = \left\|\begin{matrix} 1-m\omega^2\left(\dfrac{1}{k}+\dfrac{2}{\mu l}\sum\limits_r\dfrac{\sin^2\frac{r\pi}{2}\cos^2\frac{r\pi a}{2l}}{-\omega^2+\omega_r^2}\right) & 0 \\ 0 & 1-\dfrac{4\,I\,\omega^2}{a^2}\left(\dfrac{1}{k}+\dfrac{2}{\mu l}\sum\limits_r\dfrac{\cos^2\frac{r\pi}{2}\sin^2\frac{r\pi a}{2l}}{-\omega^2+\omega_r^2}\right) \end{matrix}\right\| \tag{11}$$

Rezultă expresia pentru forțele și cuplurile dinamice aplicate grinzii

$$Q(t)=\frac{Q_0(t)}{1-m\,\omega^2\left(\dfrac{1}{k}+\dfrac{2}{\mu l}\sum_r\dfrac{\sin^2\dfrac{r\pi}{2}\,\cos^2\dfrac{r\pi a}{2\,l}}{\omega_r^2-\omega^2}\right)}$$

$$M(t)=\frac{M_0(t)}{1-\dfrac{4\,\mathrm{I}\,\omega^2}{a^2}\left(\dfrac{1}{k}+\dfrac{2}{\mu l}\sum_r\dfrac{\cos^2\dfrac{r\pi}{2}\,\sin^2\dfrac{r\pi a}{2\,l}}{\omega_r^2-\omega^2}\right)}. \tag{12}$$

În aceste relații nu apar diferențe de fază între forțele aplicate utilajului și cele transmise grinzii, deoarece corpurile sînt presupuse perfect elastice, ceea ce conduce la coeficienți de deformabilitate reali. Considerarea amortizării ar introduce o diferență de fază (exprimată prin argumentul factorului de amplificare complex). Analiza relațiilor (12) arată ușor domeniile în care forțele sînt amplificate și cele în care ele sînt atenuate. În scopul dimensionării elementului vibroizolant, relațiile (12) trebuie explicitate în raport cu rigiditatea $k$ (aceasta rezultă ca o funcție de raportul de atenuare necesar, de caracteristicile dinamice ale grinzii și utilajului și de pulsația forțelor active). În ultimă analiză relațiile (12) pot fi folosite ca expresii pentru factorii de amplificare, ca în teoria rezonanței.

*Primită la redacție la 1 noiembrie 1960.*

## ОБ ЭФФЕКТЕ ВИБРОИЗОЛИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ

### РЕЗЮМЕ

В работе исследуется эффект виброизолирующих элементов, вставленных между машинами или оборудованиями и строительными элементами. После описания общих уравнений явления, получаются решения, которые имеют практические применения как для случая активных (вставленных между вибрирующими машинами и строительным элементом), так и для случая пассивных (вставленных между строительным элементом в режиме вибрации и чувствительным к действию вибраций оборудованием) виброизолирующих элементов.

Полученные решения применяются к простому практическому случаю.

## ON THE EFFECT OF VIBRATION INSULATING ELEMENTS

### ABSTRACT

The paper deals with the effect of vibration-insulating elements, inserted between machines and structures. After giving the general equations of the phenomenon of interaction between machine and structure,

solutions are obtained which may be applied to vibration insulating elements both active (inserted between the source of vibration and the structure) and passive (inserted between the vibrating structure and the equipment sensitive to vibration effects). The solutions are applied to a simple practical case.

## BIBLIOGRAFIE

1. И. М. БАБАКОВ, *Теория колебаний*, ГИФМЛ, Москва, 1958.
2. G. BUZDUGAN şi colab., *Fundaţii de maşini*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1958.
3. В. В. ЛЕБЕДЕВ, *Случайные процессы в электрических и механических системах*. ГИФМЛ, Москва, 1958.
4. H. SANDI, *A theoretical investigation of the interaction between ground and structure during earthquakes*. Proc. of the 2-nd World Conference on Earthquake Engineering, Tokyo, 1960.
5. J. SNEDDON, *Преобразования Фурье*. III, Москва, 1955.
6. Е. С. СОРОКИН, *Динамический расчет несущих конструкций зданий*. Госстройиздат, Москва, 1956.

# STUDIUL GRAFIC AL MIŞCĂRII UNOR OSCILATORI NELINIARI CU DOUĂ GRADE DE LIBERTATE

DE

ALFRED BRAIER [1]

## § 1. INTRODUCERE

**1.** Pentru studierea oscilaţiilor neliniare ale sistemelor cu un grad de libertate este larg utilizată metoda planului de fază [1], care permite şi construcţia soluţiei ecuaţiei diferenţiale ce descrie mişcarea.

Se cunosc mai multe metode de construcţie efectivă a traiectoriilor din planul de fază ale unor oscilatori neliniari cu un grad de libertate. Astfel sînt metoda izoclinelor [2], metoda lui Liénard [1] (valabile pentru sisteme neliniare autonome), la care s-au adăugat recent metoda lui Ku [3]—[4], precum şi cea dată în [5], (valabile pentru sisteme neliniare neautonome, la care perturbaţia exterioară este o funcţie arbitrară de timp) etc.

Trebuie menţionat că metodele de construcţie efectivă a traiectoriilor din planul de fază se folosesc pe scară largă pentru calculul proceselor tranzitorii din sitemele de reglaj automat, liniare sau neliniare, cu un grad de libertate [4].

**2.** În lucrarea de faţă se propune o metodă de construcţie efectivă a traiectoriilor de fază, precum şi a soluţiilor care descriu mişcarea unui număr de 36 clase de oscilatori neliniari cu două grade de libertate, autonomi sau perturbaţi de funcţii oarecare de timp. Pentru aceleaşi clase de oscilatori se arată şi cum pot fi determinate perturbaţiile exterioare ce trebuie aplicate sistemului pentru a-i corecta mişcarea într-un mod impus arbitrar, obţinîndu-se astfel o stabilizare forţată a oscilaţiilor.

---

[1] Institutul politehnic, Iaşi.

## § 2. SISTEME PARAMETRICE CU UN GRAD DE LIBERTATE

**3.** În acest paragraf vor fi trecute în revistă patru metode de construcție a traiectoriilor de fază, valabile pentru unele sisteme neliniare cu un grad de libertate, conținînd un parametru. Construcțiile care se expun vor fi utilizate în cele ce urmează pentru studierea sistemelor neliniare cu două grade de libertate.

### I. Metoda A

**4.** Fie

$$\ddot{x} + f(x, \lambda) = F(t), \tag{A}$$

ecuația diferențială care descrie funcționarea unui sistem neliniar și neautonom, în care $\lambda$ este un parametru. Ecuația diferențială a traiectoriilor din planul de fază este

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{f(x, \lambda) - F(t)}{\dot{x}}. \tag{1}$$

Să considerăm mai întîi $F(t) \equiv 0$. Atunci

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{f(x, \lambda)}{\dot{x}}. \tag{1'}$$

Utilizînd ideea metodei lui Ku [3], construim în planul de fază $(O_1, x, \ddot{x})$ familia de curbe $\ddot{x} = f(x, \lambda)$. Pentru $\lambda = \lambda_1$ se obține situația din figura 1*a*. La momentul $t_k$ starea sistemului, caracterizată prin mărimile $x_k$, $\dot{x}_k$ și $\ddot{x}_k$, este reprezentată în planele de fază $(O_1, x, \ddot{x})$ și $(O, x, \dot{x})$ prin respectiv punctele $P'_k$ și $P_k$, în care $P'_k$ se găsește pe curba $\ddot{x} = f(x, \lambda_1)$ construită în figura 1*a*. Purtînd pe axa $Ox$ din figura 1*b* un segment $x_k P''_k = x_k P'_k$ se obține punctul $P''_k$. Ecuația (1′) arată că tangenta la traiectoria de fază din planul $(O, x, \dot{x})$ este perpendiculară pe dreapta $P''_k P_k$. Se obține astfel

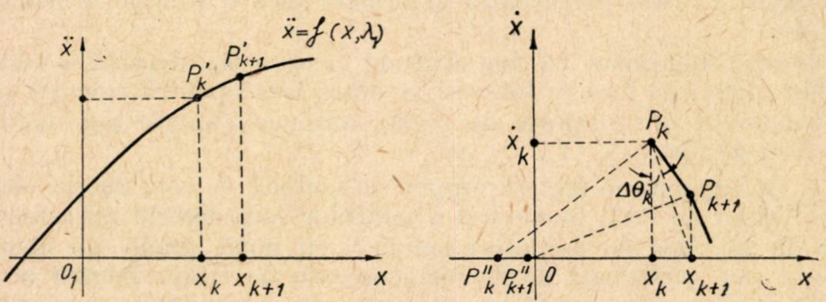


Fig. 1 *a–b*

un alt punct $P_{k+1}$ al curbei integrale, în care sistemul ajunge după intervalul de timp

$$\Delta t_k = \frac{\Delta x_k}{\dot{x}_k} = \operatorname{tg} \Delta\theta_k \approx \Delta\theta_k . \tag{2}$$

Se repetă procedeul începînd cu punctul $P_{k+1}$. Dacă la sfîrșitul intervalului $\Delta t_k$ parametrul $\lambda$ își schimbă valoarea, devenind de pildă $\lambda = \lambda_2$, atunci în planul $(O_1, x, \ddot{x})$ se va utiliza acum pentru construcție curba $\ddot{x} \neq f(x, \lambda_2)$.

**5.** Modificînd întrucîtva procedeul lui Ku, se pot suprapune cele două plane de fază din figura 1, obținîndu-se situația din figura 2*a*. În felul acesta se poate utiliza numai planul de fază uzual $(O, x, \dot{x})$ în care *urmează de construit familia de curbe*

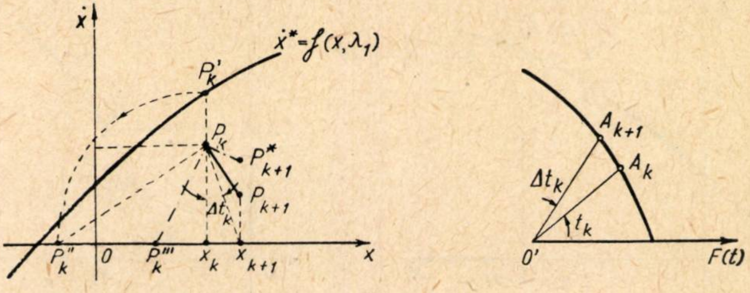
$$\dot{x}^{\star} = f(x, \lambda), \tag{3}$$

unde $\dot{x}^{\star} = \ddot{x}$ (adică $\dot{x}^{\star}$ are dimensiunile lui $\ddot{x}$) [1]).

**6.** Pentru studiul ecuației complete (*A*) se înlocuiește funcția $F(t)$ printr-o funcție în scară. Admitem că în decursul intervalului $\Delta t_k$ perturbația este constantă și egală cu $F(t_k)$. Atunci familia de curbe (3) devine

$$\dot{x}^{\star} = f(x, \lambda) - F(t_k) \tag{3'}$$

și deci perturbația $F(t_k)$ produce o translație a familiei (3), paralel cu $O\dot{x}$, înspre $\dot{x} < 0$ dacă $F(t_k) > 0$ și reciproc, dacă $F(t_k) < 0$. În construcția grafică *trebuie numai deplasat punctul* $P_k''$ de pe axa $Ox$ și anume *la dreapta dacă* $F(t_k) > 0$ *și la stînga dacă* $F(t_k) < 0$, obținîndu-se $P_k'''$. Tangenta $P_k P_{k+1}^{\star}$ la traiectria de fază ce trece prin $P_k$ este evident acum perpendiculară pe dreapta $P_k''' P_k$ (fig. 2*a*).



*a* *b*

Fig. 2 *a*—*b*

**7.** După cum s-a propus în [5], se pot obține mărimile succesive $F(t_k)$ pe cale pur grafică, utilizîndu-se (2) și o reprezentare a lui $F(t)$ în coordonate polare. Atunci (fig. 2) $F(t_k) = O'A_k = P_k'' P_k'''$. Unghiul $\Delta t_k$

---

[1]) Dacă pentru $x$ și $\dot{x}$ se utilizează respectiv scările *a* și *b* atunci scara lui $\dot{x}^{\star}$ este $b^2/a$, scara timpului fiind $a/b$.

obținut în figura 2*a* și transportat pe graficul lui $F(t)$ permite determinarea lui $F_{k+1} = O'A_{k+1}$ ş.a.m.d.

**8.** Dispunînd de $x_k$ și $\Delta t_k$ succesivi se poate construi cu ușurință graficul soluției $x = x(t)$.

## II. Metoda B

**9.** Fie ecuația

$$\ddot{x} + f(\dot{x}, \lambda) = F(t), \tag{B}$$

și să considerăm mai întîi cazul $F(t) \equiv 0$. Utilizînd ideea metodei propusă în [5], se reprezintă în planele $(O_2, \dot{x}, \ddot{x})$ și $(O, x, \dot{x})$ starea sistemului la momentul $t_k$ prin respectiv punctele figurative $P_k' (\dot{x}_k, \ddot{x}_k)$ și $P_k (x_k, \dot{x}_k)$. Ținînd seama că (fig. 3*a*)

$$\operatorname{tg} \alpha_k = \frac{\ddot{x}_k}{\dot{x}_k} = \left(\frac{d\dot{x}}{dx}\right)_k, \tag{4}$$

este evident că panta dreptei $O_2 P_k'$ este egală cu cea a tangentei la traiectoria de fază ce trece prin punctul $P_k$ al planului de fază $(O, x, \dot{x})$. De aceea, este necesar de construit în planul $(O_2, \dot{x}, \ddot{x})$ familia de curbe $\ddot{x} + f(\dot{x}, \lambda) = 0$. Pentru $\lambda = \lambda_1$ se obține situația din figura 3*a*. Plecînd de la $x_k$, $\dot{x}_k$ se determină $P_k$ și apoi punctul $P_k'$ în care paralela la $O_2 \ddot{x}$ dusă prin $\dot{x}_k$ intersectează curba $\ddot{x} + f(\dot{x}, \lambda_1) = 0$. Se construiește apoi $P_k P_{k+1} \parallel O_2, P_k'$ (fig. 2*b*) ş.a.m..d. Dacă la sfîrșitul intervalului de timp $\Delta t_k'$ dat de (2) parametrul $\lambda$ devine $\lambda = \lambda_2$, pentru construcția expusă trebuie utilizată acum curba $\ddot{x} + f(\dot{x}, \lambda_2) = 0$ din planul $(O_2, \dot{x}, \ddot{x})$.

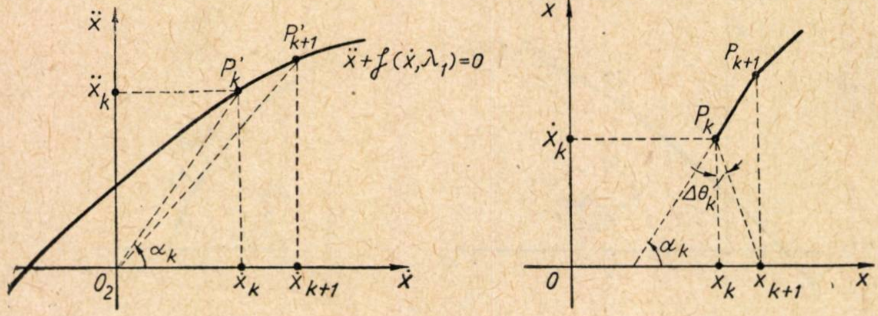


Fig. 3 *a—b*

**10.** Pentru simplificarea construcțiilor grafice suprapunem planul $(O_2, \dot{x}, \ddot{x})$ peste planul $(O, x, \dot{x})$, după o rotație prealabilă cu $\pi/2$, în sens pozitiv (fig. 4*a*). Rezultă că este suficient să se utilizeze un singur plan de fază $(O, x, \dot{x})$ în care *urmează de construit familia de curbe*

$$x^* = f(\dot{x}, \lambda), \tag{5}$$

în care $x^* = -\ddot{x}$ (avînd deci dimensiunile lui $\ddot{x}$).

Punctul $P'_k$ se găsește pe paralela la $Ox$ dusă prin $P_k$, iar tangenta $P_k P_{k+1}$ la traiectoria de fază prin $P_k$ este evident perpendiculară pe dreapta $OP'_k$.

**11.** Pentru studierea ecuației complete (B) se înlocuiește perturbația $F(t)$ printr-o funcție în scară. Dacă în intervalul $\Delta t_k$ ea este egală cu $F(t_k)$, atunci familia de curbe (5) devine

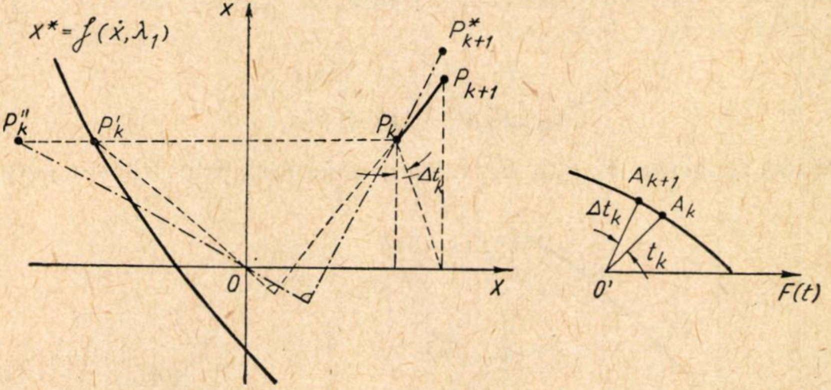


Fig. 4 *a—b*

$$x^* = f(\dot{x}, \lambda) - F(t_k), \tag{5'}$$

și deci perturbația produce o translație a familei (5), paralel cu $Ox$ și de mărime $F(t_k)$, în spre $x < 0$ dacă $F(t_k) > 0$ și reciproc dacă $F(t_k) < 0$. În construcția grafică aceasta revine numai la deplasarea punctului $P'_k$ la stînga dacă $F(t_k) > 0$ și la dreapta dacă $F(t_k) < 0$, obținîndu-se punctul $P''_k$. Acum $P_k P^*_{k+1} \perp OP''_k$ (fig. 4*a*). Reprezentînd perturbația $F(t)$ în coordonate polare (fig. 4*b*) obținem $F(t_k) = O'A_k = P'_k P''_k$ ș.a.m.d.

### III. Metoda C

**12.** Să considerăm ecuația

$$\ddot{x} + f(\dot{x}, \lambda) + x = F(t); \tag{C}$$

ecuația diferențială a traiectoriilor din planul de fază este

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{f(\dot{x}, \lambda) + x - F(t)}{\dot{x}}. \tag{6}$$

Mărginindu-ne la început la cazul $F(t) \equiv 0$,

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{f(\dot{x}, \lambda) + x}{\dot{x}}. \tag{6'}$$

Ţinînd seama de (6′) utilizăm aici construcţia grafică a lui Liénard [1], *urmînd a reprezenta în planul* $(O, x, \dot{x})$ *familia de curbe*

$$x + f(\dot{x}, \lambda) = 0. \tag{7}$$

Pentru $\lambda = \lambda_1$ are loc situaţia din figura 5*a*. Atunci, deoarece $P'_k P_k = x_k - OP'_k = x_k + f(\dot{x}_k, \lambda_1)$,

$$\operatorname{tg} \alpha_k = \frac{P''_k P'_k}{P'_k P_k} = \frac{\dot{x}_k}{x_k + f(\dot{x}_k, \lambda_1)},$$

şi deci (6′) tangenta $P_k P_{k+1}$ la traiectoria de fază prin $P_k$ este perpendiculară pe dreapta $P''_k P_k$. Dacă la sfîrşitul intervalului de timp $\Delta t_k$ parametrul devine $\lambda = \lambda_2$, punctul $P'_{k+1}$ se va găsi pe curba $x + f(\dot{x}, \lambda_2) = 0$.

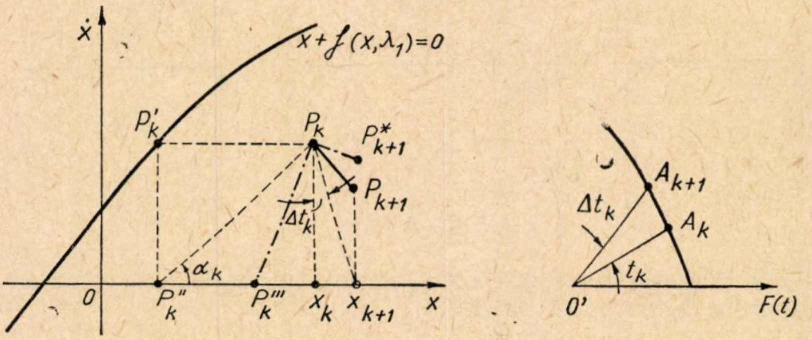


Fig. 5 *a–b*

**13**. Pentru studierea ecuaţiei (C) se înlocuieşte, de asemenea, perturbaţia printr-o funcţie în scară. Atunci, în intervalul de timp $\Delta t_k$, (7) devine

$$x + f(\dot{x}, \lambda) - F(t_k) = 0, \tag{7′}$$

adică perturbaţia produce o translaţie a familei de curbe (7) corespunzătoare sistemului neperturbat, paralel cu $Ox$ şi de mărime $F(t_k)$, înspre $x > 0$ dacă $F(t_k) > 0$ şi reciproc dacă $F(t_k) < 0$. În construcţia grafică *se impune numai deplasarea punctului* $P''_k$ *la dreapta dacă* $F(t_k) > 0$ *şi la stînga dacă* $F(t_k) < 0$, obţinîndu-se un nou punct, $P'''_k$. De data aceasta $P_k P^*_{k+1} \perp P'''_k P_k$ (fig. 5*a*). Dacă se reprezintă perturbaţia în coordonate polare (fig. 5*b*), atunci $F(t_k) = O'A_k = P''_k P'''_k$ ş.a.m.d.

## IV. Metoda D

**14**. Fie, acum, ecuaţia

$$\ddot{x} + \dot{x} + f(x, \lambda) = F(t), \tag{D}$$

cu traiectoriile din planul de fază date prin

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{f(x, \lambda) + \dot{x} - F(t)}{\dot{x}}. \tag{8}$$

Considerînd mai întîi cazul $F(t) \equiv 0$ se obţine

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{f(x, \lambda) + \dot{x}}{\dot{x}}. \tag{8'}$$

Se poate utiliza aici o construcţie asemănătoare cu cea a lui Liénard, care necesită *reprezentarea în planul* $(O, x, \dot{x})$ *a familiei de curbe*

$$\dot{x} + f(x, \lambda) = 0. \tag{9}$$

Pentru $\lambda = \lambda_1$ are loc situaţia din figura 6*a*. Dacă se construieşte $P_k''$ la distanţa $P_k P_k'$ de piciorul perpendicularei din $P_k$ pe $Ox$, atunci, deoarece $P_k P_k' = -f(x_k, \lambda_1) - \dot{x}_k$, rezultă (8′) că tangenta $P_k P_{k+1}$ la traiectoria de fază prin $P_k$ este perpendiculară pe dreapta $P_k'' P_k$.

**15**. Procedînd ca mai înainte cu ecuaţia completă ($D$), se conchide că în prezenţa perturbaţiei $F(t_k)$ ce lucrează în intervalul $\Delta t_k$, familia de curbe (9) devine

$$\dot{x} + f(x, \lambda) - F(t_k) = 0, \tag{9'}$$

adică perturbaţia produce o translaţie a familiei de curbe (9), paralel cu axa $O\dot{x}$ şi de mărime $F(t_k)$, în spre $\dot{x} > 0$ dacă $F(t_k) > 0$ şi reciproc, dacă $F(t_k) < 0$. În construcţia grafică se impune numai *deplasarea punctului* $P_k''$ *în poziţia* $P_k'''$, *la dreapta dacă* $F(t_k) > 0$ *şi la stînga dacă* $F(t_k) < 0$. Acum $P_k P_{k+1}^* \perp P_k''' P_k$ ş.a.m.d. (fig. 6*a*). Perturbaţia s-a reprezentat grafic în figura 6*b*.

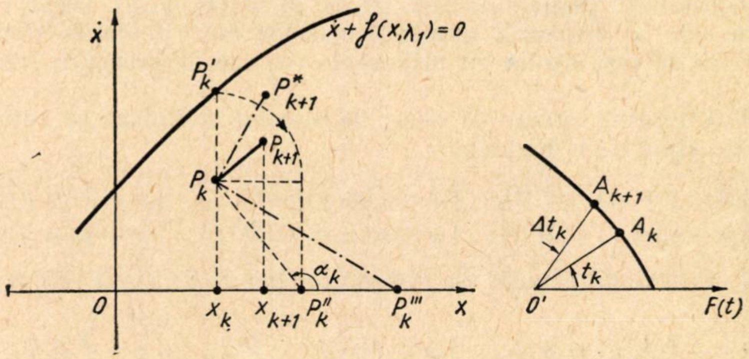


Fig. 6 *a—b*

**16**. Observaţie. Pentru ecuaţia ($D$) trebuie rotit în planul de fază segmentul $P_k P_k'$ în jurul lui $P_k$, cu $\pi/2$, în sens trigonometric negativ (fig. 6*a*), pe cînd pentru ecuaţia (A) segmentul corespunzător se roteşte în jurul piciorului perpendicularei pe axa $Ox$, de asemenea de $\pi/2$, dar în sens trigonometric pozitiv (fig. 2*a*).

### V. Studiul unor oscilatori neliniari neautonomi

**17**. După cum s-a menționat, parametrul $\lambda$ care a intervenit în ecuațiile (A), (B), (C) și (D) poate fi constant, și atunci se construiește o singură curbă în planul de fază, sau poate fi funcție de timp și atunci se construiește o familie de curbe în planul de fază.

În particular, în aceste ecuații poate interveni direct timpul $t$ și atunci cele patru metode expuse permit studierea a patru tipuri de oscilatori neliniari neautonomi și anume

$$\ddot{x} + f(x, t) = F(t), \qquad \ddot{x} + f(\dot{x}, t) = F(t), \tag{E}$$

$$\ddot{x} + f(\dot{x}, t) + x = F(t), \qquad \ddot{x} + \dot{x} + f(x, t) = F(t). \tag{F}$$

În acest caz, planul de fază se acoperă cu o familie de curbe, corespunzătoare fiecare la o anumită valoare a lui $t$. Pentru o ecuație dată aceste curbe se construiesc o dată pentru totdeauna iar construcția efectivă a traiectoriilor de fază, pentru diverse condiții inițiale și diverse perturbații exterioare $F(t)$ se poate efectua pe calc.

Menționăm că ecuația $(E_1)$ admite drept cazuri particulare ecuațiile lui Hill și Mathieu.

## § 3. SISTEME NELINIARE CU DOUĂ GRADE DE LIBERTATE

**18**. Trecem acum la studiul unui număr de sisteme neliniare cu două grade de libertate. Fie $x$, $y$ variabilele dependente. Construcțiile de mai departe se bazează pe metodele expuse la paragraful precedent; vom considera pe $y$ drept parametru în ecuația relativă la $x$ și reciproc, utilizînd pentru construcții planele de fază $(O, x, \dot{x})$ și $(O^{*}, y, \dot{y})$. După cum se va vedea în cele ce urmează, numărul claselor de sisteme de două ecuații neliniare ce se pot studia cu mijloacele expuse în prezenta lucrare, este de 36.

**19**. Un prim număr de clase de sisteme neliniare se compune din ecuații de tipul (A). Ele sînt

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \ddot{x} + f(x, y) = F(t), \\ \ddot{y} + \varphi(x, y) = H(t); \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{x} + f(x, \dot{y}) = F(t), \\ y + \varphi(\dot{x}, y) = H(t); \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{x} + f(x, \dot{y}) = F(t), \\ \ddot{y} + \varphi(x, y) = H(t). \end{cases}$$

**20**. Cele două ecuații ale sistemului pot fi de tipul (B) și se obține atunci

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \ddot{x} + f(\dot{x}, y) = F(t), \\ \ddot{y} + \varphi(x, \dot{y}) = H(t); \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{x} + f(\dot{x}, \dot{y}) = F(t), \\ \ddot{y} + \varphi(\dot{x}, \dot{y}) = H(t); \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{x} + f(\dot{x}, \dot{y}) = F(t), \\ \ddot{y} + \varphi(x, \dot{y}) = H(t). \end{cases}$$

**21**. Atunci cînd cele două ecuații sînt ambele de tipul (C), rezultă clasele

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \ddot{x} + f(\dot{x}, y) + x = F(t), \\ \ddot{y} + \varphi(x, \dot{y}) + y = H(t); \end{cases} \quad \begin{cases} x + f(\dot{x}, \dot{y}) + x = F(t), \\ \ddot{y} + \varphi(\dot{x}, \dot{y}) + y = H(t); \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{x} + f(\dot{x}, \dot{y}) + x = F(t), \\ \ddot{y} + \varphi(x, \dot{y}) + y = H(t). \end{cases}$$

**22.** Alte sisteme la care sînt valabile construcțiile grafice propuse sînt cele formate din două ecuații de tipul (D):

$$\begin{cases}\ddot{x}+\dot{x}+f(x, y)=F(t),\\ \ddot{y}+\dot{y}+\varphi(x, y)=H(t);\end{cases} \quad \begin{cases}\ddot{x}+\dot{x}+f(x, \dot{y})=F(t),\\ \ddot{y}+\dot{y}+\varphi(\dot{x}, y)=H(t);\end{cases} \quad \begin{cases}\ddot{x}+\dot{x}+f(x, \dot{y})=F(t),\\ \ddot{y}+\dot{y}+\varphi(x, y)=H(t).\end{cases} \tag{IV}$$

**23.** Sistemele de ecuații neliniare formate dintr-o ecuație de tipul (A) și alta de tipul (B) sînt în număr de patru

$$\begin{array}{ll}\begin{cases}\ddot{x}+f(x, y)=F(t),\\ \ddot{y}+\varphi(x, \dot{y})=H(t);\end{cases} & \begin{cases}\ddot{x}+f(x, \dot{y})=F(t),\\ \ddot{y}+\varphi(\dot{x}, \dot{y})=H(t);\end{cases}\\ \begin{cases}\ddot{x}+f(x, \dot{y})=F(t),\\ \ddot{y}+\varphi(x, \dot{y})=H(t);\end{cases} & \begin{cases}\ddot{x}+f(x, y)=F(t),\\ \ddot{y}+\varphi(\dot{x}, \dot{y})=H(t).\end{cases}\end{array} \tag{V}$$

**24.** Cele două ecuații pot fi de tipul (A) și (C), adică

$$\begin{array}{ll}\begin{cases}\ddot{x}+f(x, y)=F(t),\\ \ddot{y}+\varphi(x, \dot{y})+y=H(t);\end{cases} & \begin{cases}\ddot{x}+f(x\,\dot{y})=F(t),\\ \ddot{y}+\varphi(\dot{x}, \dot{y})+y=H(t);\end{cases}\\ \begin{cases}\ddot{x}+f(x, \dot{y})=F(t),\\ \ddot{y}+\varphi(x, \dot{y})+y=H(t);\end{cases} & \begin{cases}\ddot{x}+f(x, y)=F(t),\\ \ddot{y}+\varphi(\dot{x}, \dot{y})+y=H(t).\end{cases}\end{array} \tag{VI}$$

**25.** Dacă ecuațiile sistemului sînt de tipul (A) și (D) rezultă

$$\begin{array}{ll}\begin{cases}\ddot{x}+f(x, y)=F(t),\\ \ddot{y}+\dot{y}+\varphi(x, y)=H(t);\end{cases} & \begin{cases}\ddot{x}+f(x, \dot{y})=F(t),\\ \ddot{y}+\dot{y}+\varphi(\dot{x}, y)=H(t);\end{cases}\\ \begin{cases}\ddot{x}+f(x, \dot{y})=F(t),\\ \ddot{y}+\dot{y}+\varphi(x, y)=H(t);\end{cases} & \begin{cases}\ddot{x}+f(x, y)=F(t),\\ \ddot{y}+\dot{y}+\varphi(\dot{x}, y)=H(t).\end{cases}\end{array} \tag{VII}$$

**26.** Alte patru sisteme de ecuații sînt formate dintr-o ecuație de tipul (B) și alta de tipul (C)

$$\begin{array}{ll}\begin{cases}\ddot{x}+f(\dot{x}, y)=F(t),\\ \ddot{y}+\varphi(x, \dot{y})+y=H(t);\end{cases} & \begin{cases}\ddot{x}+f(\dot{x}\,\dot{y})=F(t),\\ \ddot{y}+\varphi(\dot{x}, \dot{y})+y=H(t);\end{cases}\\ \begin{cases}\ddot{x}+f(\dot{x}, \dot{y})=F(t),\\ \ddot{y}+\varphi(x, \dot{y})+y=H(t);\end{cases} & \begin{cases}\ddot{x}+f(\dot{x}, y)=F(t),\\ \ddot{y}+\varphi(\dot{x}, \dot{y})+y=H(t).\end{cases}\end{array} \tag{VIII}$$

**27.** Cele două ecuații mai pot fi de tipurile (B) și (D)

$$\begin{array}{ll}\begin{cases}\ddot{x}+f(\dot{x}, y)=F(t),\\ \ddot{y}+\dot{y}+\varphi(x, y)=H(t);\end{cases} & \begin{cases}\ddot{x}+f(\dot{x}, \dot{y})=F(t),\\ \ddot{y}+\dot{y}+\varphi(\dot{x}, y)=H(t);\end{cases}\\ \begin{cases}\ddot{x}+f(\dot{x}, \dot{y})=F(t),\\ \ddot{y}+\dot{y}+\varphi(x, y)=H(t);\end{cases} & \begin{cases}\ddot{x}+f(\dot{x}, y)=F(t),\\ \ddot{y}+\dot{y}+\varphi(\dot{x}, y)=H(t).\end{cases}\end{array} \tag{IX}$$

**28**. În sfîrşit, ultimele sisteme de ecuaţii pentru care este valabil procedeul grafic care se propune, sînt formate din ecuaţii de tipurile (C) şi (D)

$$
\text{(X)}\qquad
\begin{cases}\ddot{x}+f(\dot{x},y)+x=F(t),\\ \ddot{y}+\dot{y}+\varphi(x,y)=H(t);\end{cases}
\qquad
\begin{cases}\ddot{x}+f(\dot{x},\dot{y})+x=F(t),\\ \ddot{y}+\dot{y}+\varphi(\dot{x},y)=H(t);\end{cases}
$$
$$
\begin{cases}\ddot{x}+f(\dot{x},\dot{y})+x=F(t),\\ \ddot{y}+\dot{y}+\varphi(x,y)=H(t);\end{cases}
\qquad
\begin{cases}\ddot{x}+f(\dot{x},y)+x=F(t),\\ \ddot{y}+\dot{y}+\varphi(\dot{x},y)=H(t).\end{cases}
$$

**29**. Pentru a ilustra procedeul grafic propus, să analizăm cîteva exemple. Fie, de pildă, primul sistem (I), adică

$$
\begin{cases}\dot{x}+f(x,y)=F(t),\\ \dot{y}+\varphi(x,y)=H(t).\end{cases}\tag{10}
$$

Pentru simplitate să considerăm mai întîi sistemul neperturbat adică ecuaţiile

$$
\begin{cases}\ddot{x}+f(x,y)=0,\\ \ddot{y}+\varphi(x,y)=0.\end{cases}\tag{10'}
$$

În baza metodei A, trebuie de construit în respectiv planele de fază $(0, x, \dot{x})$ şi $(O^{\star}, y, \dot{y})$ familiile de curbe

$$
\dot{x}^{\star}=f(x,y) \quad \text{şi} \quad \dot{y}^{\star}=\varphi(x,y),\tag{11}
$$

în care $y$ şi respectiv $x$ sînt consideraţi ca parametri. În figura 7*a* s-a reprezentat planul $(O, x, \dot{x})$ cu cîteva curbe din prima familie (11), corespunzătoare lui $y = y_k$ şi $y = y_{k+1}$. De asemenea, în figura 7*b* s-au reprezentat curbele $x = x_k$ şi $x = x_{k+1}$ din planul de fază $(O^{\star}, y, \dot{y})$.

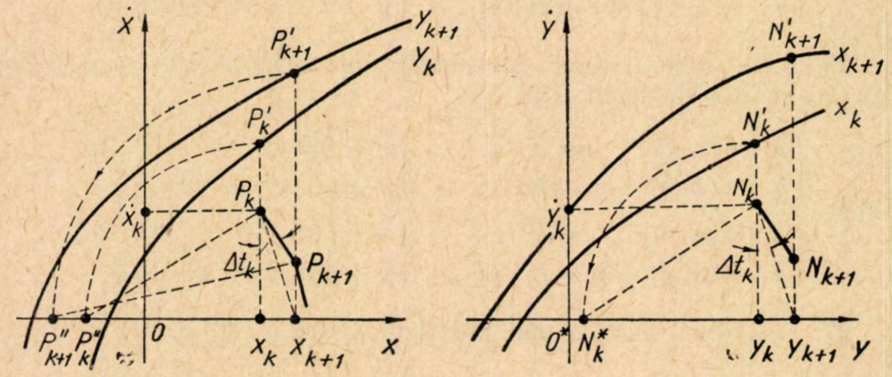


Fig. 7 *a—b*

La momentul $t = t_k$ starea sistemului cu două grade de libertate este fixată prin $x = x_k$, $\dot{x} = \dot{x}_k$, $y = y_k$ şi $\dot{y} = \dot{y}_k$; această stare este reprezentată prin punctele figurative $P_k$ şi $N_k$. Se începe construcţia într-unul din plane, de pildă $(O, x, \dot{x})$. Atunci, în baza metodei $A$, expusă la paragraful precedent, punctul $P_k'$ se găsește pe curba $y = y_k$; se determină $P_k''$ și tangenta $P_k P_{k+1}$ la traiectoria de fază din planul $(O, x, \dot{x})$ este perpendiculară pe dreapta $P_k'' P_k$. Presupunem că s-a înlocuit curba integrală prin segmentul $P_k P_{k+1}$. Sistemul ajunge în $P_{k+1}$ în timpul $\Delta t_k$ (fig. 7*a*).

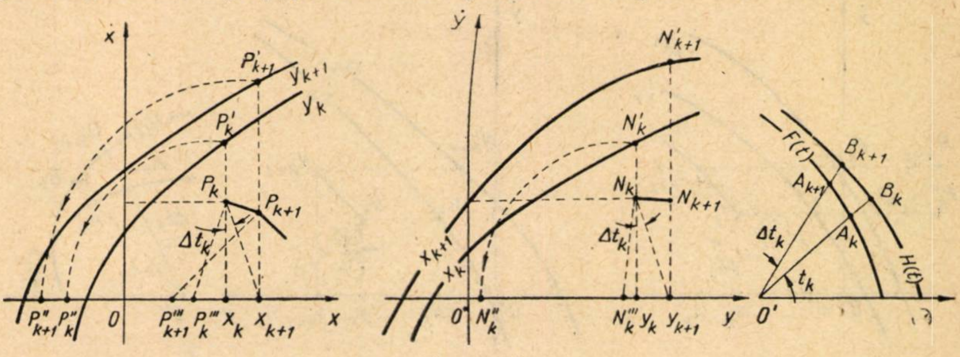


Fig. 8 *a-b-c*

În planul $(O^*, y, \dot{y})$ construcția este absolut analoagă și în același mod se determină direcția $N_k N_{k+1}$ a tangentei la traiectoria de fază corespunzătoare. Dar, punctul $N_{k+1}$ nu mai poate fi ales arbitrar după ce în primul plan de fază s-a fixat punctul $P_{k+1}$, deoarece trecerea sistemului din starea $N_k$ la $N_{k+1}$ trebuie să aibă loc în același interval de timp $\Delta t_k$. De aceea, trebuie dusă dreapta $N_k y_{k+1}$ paralel cu $P_k x_{k+1}$ și atunci paralela la $O^* \dot{y}$ dusă prin $y_{k+1}$ determină punctul $N_{k+1}$ precum și pe $N'_{k+1}$, pe dreapta $x = x_{k+1}$, după care se continuă construcția trecînd succesiv dintr-un plan de fază în celălalt.

În decursul construcției este foarte probabil ca pentru unele valori $y$ (sau $x$) să nu fie construite curbele $y =$ const. (sau $x =$ const.) respective. Evident că atunci se fixează punctele corespunzătoare $P'$ (sau $N'$) prin interpolare, între două valori apropiate.

**30.** În prezența perturbațiilor externe $F(t)$ și $H(t)$, construcția grafică pentru sistemul (10) rămîne în fond aceeași. Trebuie numai deplasate punctele $P_k''$ și $N_k''$, pe respectiv axele $Ox$ și $O^*y$, așa cum s-a arătat la § 2 (fig. 2). Reprezentînd perturbațiile în coordonate polare se ajunge la situația din figura 8*c*. În construcțiile din figura 8 s-a utilizat faptul că $P_k'' P_k''' = O'A_k$, $P''_{k+1} P'''_{k+1} = O'A_{k+1}$ și $N_k'' N_k''' = O'B_k$.

**31.** Să mai dăm un exemplu de utilizare a metodei grafice; fie al treilea sistem (VIII), anume

$$\begin{cases} \ddot{x} + f(\dot{x}, \dot{y}) = F(t), \\ \ddot{y} + \varphi(x, \dot{y}) + y = H(t). \end{cases} \tag{12}$$

Datorită formei ecuațiilor, se construiește în planul de fază $(O, x, \dot{x})$ familia de curbe $x^* = f(\dot{x}, \dot{y})$, în care $\dot{y}$ joacă rol de parametru și în planul $(O^*, y, \dot{y})$

familia de curbe $y + f(\dot{x}, \dot{y}) = 0$, cu $x$ drept parametru (fig. 9). Ținînd seama de procedeul metodelor B și C, se poate urmări cu ușurință construcția în figurile 9*a* și 9*b*, în care s-a avut în vedere și prezența perturbațiilor $F(t)$ și $H(t)$. Acestea produc deplasarea punctelor $P'$ și $N'$, așa

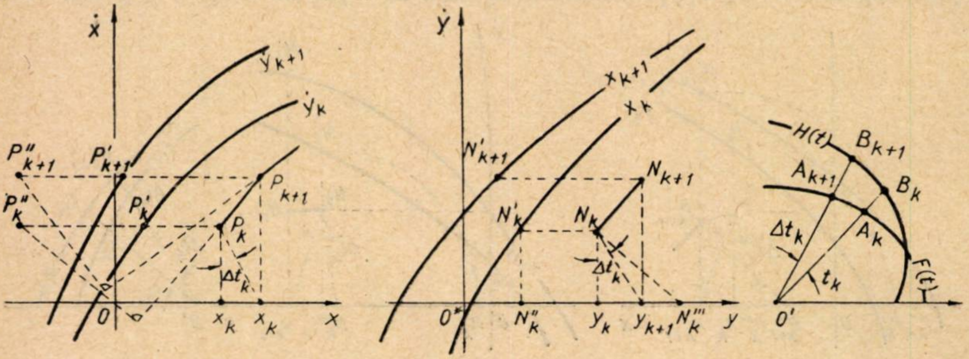


Fig. 9 *a-b-c*

cum s-a indicat la expunerea metodelor B și C. Evident că porțiunile $P_k P_{k+1}$ și $N_k N_{k+1}$ din traiectoriile de fază trebuie parcurse în același interval de timp $\Delta t_k$.

## § 4. STABILIZAREA FORȚATĂ A OSCILATORILOR STUDIAȚI

32. În acest paragraf se va arăta că metoda grafică expusă permite și determinarea perturbațiilor externe $F(t)$ și $H(t)$ ce trebuie aplicate oscilatorilor (I)—(X), pentru a-i forța să execute o mișcare impusă arbitrar. Acest efect se va denumi stabilizare forțată.

Se va trece mai întîi în revistă stabilizarea forțată a celor patru tipuri (A), (B), (C) și (D) de oscilatori neliniari.

33. *Tipul A*. Presupunem că trebuie determinată perturbația ce urmează a fi aplicată oscilatorului

$$\ddot{x} + f(x, \lambda_1) = F(t),$$

pentru a-l sili să descrie mișcarea reprezentată prin curba integrală dată ($\mathcal{C}$) din planul de fază $(O, x, \dot{x})$. Pentru aceasta se înlocuiește curba ($\mathcal{C}$) printr-o linie poligonală (fig. 10*a*). Ținînd seama de modul de construcție a curbei integrale (fig. 2), punctul $P_k'''$ se găsește la intersecția perpendicularei pe $P_k P_{k+1}$ cu axa $Ox$. Punctul $P_k''$, care dictează panta tangentei la traiectoria neperturbată prin $P_k$ (în lipsa unei perturbații externe) se obține în conformitate cu procedeul expus, de asemenea pe axa $Ox$. Segmentul $P_k'' P_k'''$ reprezintă mărimea forței $F(t_k)$ ce trebuie să lucreze în intervalul $\Delta t_k$ pentru a produce efectul de mișcare cerut. Se repetă apoi construcția cu segmentul $P_{k+1} P_{k+2}$ ș.a.m.d .Perturbația se poate reprezenta fie în coordonate polare, fie în coordonate carteziene, cum s-a procedat în figura 10*b*, obţinîndu-se o funcţie în scară.

**34.** *Tipul B.* Pentru a urmări modul cum se determină perturbaţia în cazul oscilatorului

$$\ddot{x} + f(\dot{x}, \lambda_1) = F(t),$$

se poate folosi figura 4. Presupunem că $P_k P^*_{k+1}$ este primul element al liniei poligonale $(\mathscr{C})$ care s-a impus în planul de fază. El trebuie să fie

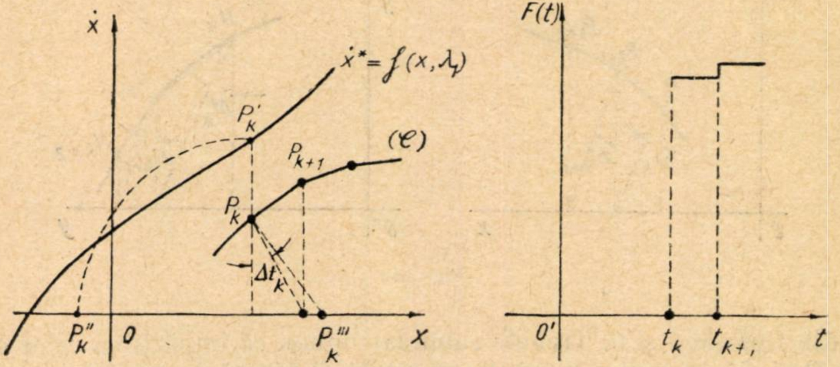


Fig. 10

perpendicular pe o dreaptă ce trece prin originea coordonatelor planului de fază. Construind această dreaptă se obţine punctul $P''_k$, la intersecţia dreptei cu paralela la $Ox$ dusă prin $P_k$. Aceeaşi paralelă intersectează curba $\lambda = \lambda_1$ în $P'_k$ şi deci $P'_k P''_k$ reprezintă mărimea forţei $F(t_k)$ ce trebuie să acţioneze în intervalul $\Delta t_k$.

**35.** *Tipul C.* În cazul oscilatorului

$$\ddot{x} + f(\dot{x}, \lambda_1) + x = F(t),$$

trebuie procedat în modul următor (fig. 5). Dacă $P_k P^*_{k+1}$ este primul element al liniei poligonale impuse, atunci perpendiculara pe $P_k P^*_{k+1}$ intersectează axa $Ox$ în $P'''_k$. Procedeul uzual a lui Liénard conduce la punctul $P''_k$ şi evident $P''_k P'''_k$ constituie forţa $F(t_k)$ ce trebuie aplicată în intervalul $\Delta t_k$.

**36.** *Tipul D.* Dacă se pune aceeaşi problemă de stabilizare forţată a oscilatorului

$$\ddot{x} + \dot{x} + f(x, \lambda_1) = F(t),$$

se poate urmări cu uşurinţă procedeul pe figura 6. Punctul $P''_k$ se obţine la intersecţia perpendicularei pe $P_k P^*_{k+1}$ cu axa $Ox$, iar $P''_k$ rezultă prin procedeul uzual; $P''_k P'''_k$ reprezintă de asemenea pe $F(t_k)$.

**37.** *Oscilatorii* $(E)-(F)$. Se poate acum rezolva problema stabilizării forțate pentru oricare din cele 4 tipuri de sisteme neliniare neautonome $(E)-(F)$, determinîndu-se perturbația externă $F(t)$ în modul indicat.

**38.** *Sistemele* $(I)-(X)$. De asemenea, se poate acum rezolva și problema stabilizării forțate pentru oricare din cele 36 tipuri de sisteme neliniare cu două grade de libertate (I)—(X), cînd se impun traiectoriile $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}^*$, în cele două plane de fază. După cum s-a văzut în acest paragraf, construcția este inversă celei expuse mai înainte și ilustrată prin exemplele din figurile 8 și 9. Trebuie subliniat numai că împărțirea celor două curbe $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}^*$ în linii poligonale nu poate fi făcută în mod arbitrar, ci numai astfel încît segmentele corespunzătoare să fie parcurse în același interval de timp (fig. 11).

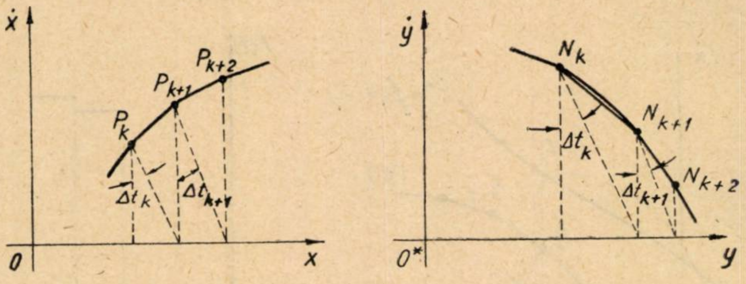


Fig. 11

**39.** *Observație*. În cazul cînd mișcarea care se impune este dată grafic sub forma $x = x(t)$ și $y = y(t)$, se obține prin derivare grafică $\dot{x}(t)$ și $\dot{y}(t)$, după care se construiesc curbele $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}^*$ din planele de fază corespunzătoare.

*Primită la redacție la 19 februarie 1960.*

# ГРАФИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

## РЕЗЮМЕ

Излагается графический метод, основанный на построении в фазовой плоскости, позволяющий изучение движения некоторых типов нелинейных осцилляторов с двумя степенями свободы. Применяемый способ также дает возможность определить возмущения, которые нужно приложить к этим системам для изменения их движения произвольно заданным образом.

# GRAPHISCHE UNTERSUCHUNG DER BEWEGUNG VON NICHTLINEAREN OSZILLATOREN MIT ZWEI FREIHEITSGRADEN

## ZUSAMMENFASSUNG

Es wird eine graphische Methode dargelegt, die auf eine Konstruktion in der Phasenebene begründet ist, und die Bewegung einiger nicht linearer Oszillatorentypen mit zwei Freiheitsgraden zu untersuchen gestattet. Das Verfahren ermöglicht ferner, die Störungen zu bestimmen, die diesen Systemen auferlegt werden müssten, um deren Bewegung in beliebiger Weise zu korrigieren.

## BIBLIOGRAFIE

1. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. Гостехиздат, Москва, 1955.
2. V. V. Stepanov., *Curs de ecuații diferențiale*. Ed. tehnică, București, 1955.
3. Y. H. Ku, J. Franklin Inst., **255**, *1*, 9—31 (1953).
4. Я. З. Цыпкин, *Проблемы теории нелинейных систем автоматического регулирования и управления*. Изд. АН ССР, Москва, 1957, III.
5. A. Braier. Bul. Inst. polit. Iași (serie nouă), **IV** (VIII), *3—4*, 107—112 (1958).

# NOTE

# UNELE REZULTATE EXPERIMENTALE ÎN LEGĂTURĂ CU ÎNCOVOIEREA DINAMICĂ A BARELOR

DE

M. MIȘICU și Fl. DINCĂ

Această parte a lucrării este o continuare a studiului intitulat *Încovoierea dinamică a barelor cu proprietăți viscoelastice* apărute în nr. 2 și 3 din 1961 al revistei Studii și cercetări de mecanică aplicată și are ca scop să justifice valorile adoptate pentru parametrii utilizați în lucrarea sus-menționată.

6. Pentru determinarea parametrilor viscoelastici este necesară punerea lor în corespondență cu mărimi măsurabile direct pe cale experimentală. În cele ce urmează se va face acest lucru pentru corpul Maxwell. În acest scop să considerăm ecuația vibrațiilor transversale libere pentru o bară corespunzătoare unui model Maxwell

$$EI\,\frac{\partial^4 \dot{u}}{\partial z^4} + m\left(\dddot{u} + \frac{\ddot{u}}{\tau}\right) = 0, \qquad (6.1)$$

mărimile care intră în (6.1) fiind cele precizate anterior. Dacă $Z\ (z)$ sînt funcțiile proprii ale problemei, λ fiind valorile proprii (pentru simplificarea scrisului vom renunța la indici) atunci punînd soluția sub forma

$$U = ZT, \qquad (6.2)$$

unde $Z$ este funcția numai de $z$ și $T$ este funcția numai de $t$, se obține pentru determinarea funcției $T$ următoarea ecuație :

$$\dddot{T} + \frac{\ddot{T}}{\tau} + \omega^2\,\dot{T} = 0, \qquad (6.2')$$

cu

$$\omega^2 = \lambda^4\,\frac{EI}{m}. \qquad (6.3)$$

Ecuaţia caracteristică corespunzătoare ecuaţiei (6.2) este

$$r^3 + \frac{r^3}{\tau} + \omega^2 r = 0\,, \tag{6.4}$$

ale cărei soluţii sînt

$$r_0 = 0,\ r_1 = -\frac{1}{2\,\tau} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\tau^2} - 4\,\omega^2}. \tag{6.5}$$

Soluţia ecuaţiei diferenţiale, în afara unei constante aditive este

$$T = Ce^{-\frac{t}{2\tau}} \cos\,(\nu t + \beta). \tag{6.6}$$

Fie

$$T_\alpha = Ce^{-\frac{t+\alpha}{2\tau}} \cos\,[\nu\,(\tau + \alpha) + \beta], \tag{6.7}$$

unde $\alpha$ este dat de relaţia

$$\alpha = \frac{2\pi}{\nu}, \tag{6.8}$$

fiind perioada termenului oscilator în (6.6).
Raportul celor două soluţii este

$$\frac{T}{T_\alpha} = e^{\frac{\alpha}{2\tau}} = e^{\frac{\pi}{\tau\nu}}. \tag{6.9}$$

Logaritmul acestui raport, se numeşte decrement logaritmic, evaluează disiparea de energie în timpul unui ciclu şi se notează cu $\Delta$

$$\Delta = \frac{\pi}{\tau\nu}. \tag{6.10}$$

Notăm cu $\psi$ raportul $\frac{\delta w}{w}$ unde $\delta w$ este energia disipată de bară în timpul unui ciclu, $w$ este energia acumulată de bară în momentul în care se produce deformaţia maximă. Pentru a exprima acest raport considerăm un element oarecare din bară care execută vibraţii libere sub acţiunea forţelor elastice care se dezvoltă prin abatere de la poziţia de echilibru. Forţa elastică corespunzătoare este $F = ku$ iar energia potenţială corespunzătoare deplasării maxime este

$$w = \frac{1}{2} ku^2, \tag{6.11}$$

în acest punct energia cinetică fiind nulă. Fie $u_0$ şi $u_1$ două deplasări maxime consecutive. În acest caz

$$\psi = \frac{\Delta\, w}{w} = \frac{w_0 - w_1}{w_0} = \frac{u_0^2 - u_1^2}{u_0^2}, \tag{6.12}$$

sau ținînd seama că $u_0 \approx u_1$

$$\psi = \frac{2\,(u_0 - u_1)}{u_1} \approx 2 \ln \frac{u_0}{u_1} = 2\,\Delta\,. \tag{6.13}$$

Ținînd seama de (6.10 și (6.13) se obține

$$\tau\nu = \frac{2\,\pi}{\psi}\,. \tag{6.14}$$

Ultima formulă îl determină pe $\tau\nu$ în funcție de $\psi$, acesta din urmă putîndu-se determina direct. În formula (6.12) $\psi$ este exprimat prin intermediul a două amplitudini maxime succesive. Vom da încă o formulă pentru calculul lui $\psi$ cu ajutorul a două amplitudini nesuccesive. Fie $u_0$, $u_1$, $u_2 \ldots u_n + 1$ amplitudini maxime nesuccesive.

După formula (6.12) avem

$$\begin{aligned} \psi &= 1 - \left(\frac{u_1}{u_0}\right)^2, \\ \psi &= 1 - \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2, \\ &\vdots \\ \psi &= 1 - \left(\frac{u_n}{u_{n=1}}\right)^2, \end{aligned} \tag{6.15}$$

sau

$$\begin{aligned} 1 - \psi &= \left(\frac{u_1}{u_0}\right)^2, \\ 1 - \psi &= \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2, \\ &\vdots \\ 1 - \psi &= \left(\frac{u_n}{u_{n=1}}\right)^2. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Înmulțind termen cu termen egalitățile precedente se obține

$$\begin{aligned} (1 - \psi)^n &= \left(\frac{u_n}{u_0}\right)^2, \\ \psi &= 1 - \left(\frac{u_n}{u_0}\right)^{\frac{2}{n}}. \end{aligned} \tag{6.17}$$

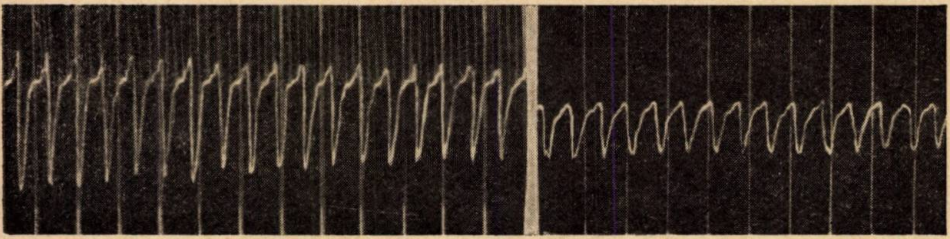


Fig. 5. — Oscilogramă reprezentînd vibrația amortizată a unei epruvete (f = 14 Hz).

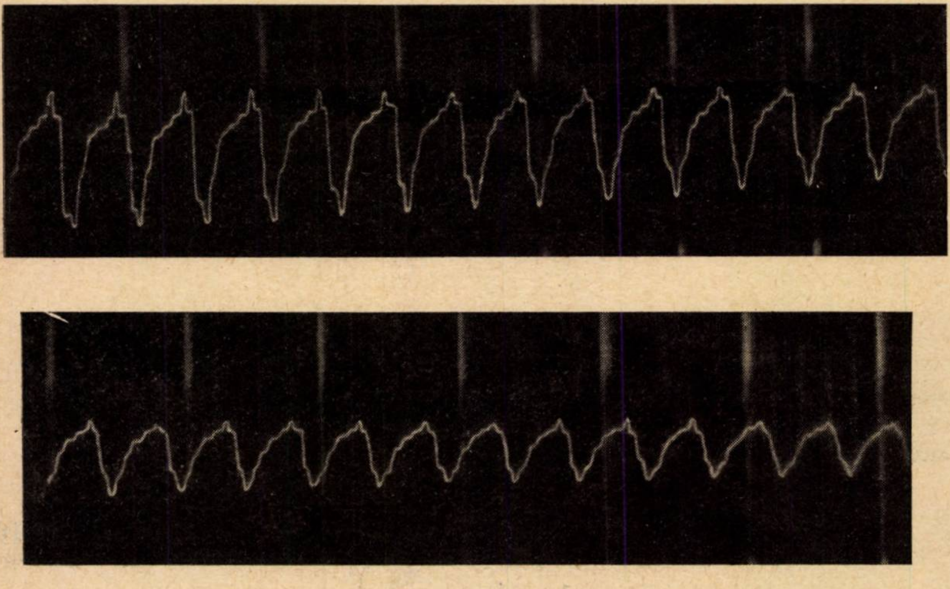


Fig. 6. — Oscilogramă reprezentînd vibrația amortizată a unei epruvete (f = 24 Hz).

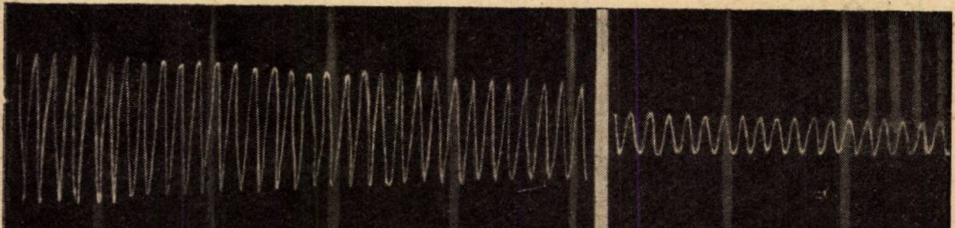


Fig. 7. — Oscilogramă reprezentînd vibrația amortizată a unei epruvete (f = 66 Hz).

În figurile 5, 6, 7, 8, sînt date oscilogramele vibrațiilor libere pentru bare de oțel decupate într-o serie de eșantioane de conducte. Barele au fost încastrate la un capăt și libere la celălalt. Rezultatele sînt date în tabela I.

| Frecvențele Hz | Coeficientul de disipație | Oscilograma din figura |
|---|---|---|
| 14 Hz | Ampl. mari 0,049 | 5 |
| | Ampl. mici 0,034 | |
| 21 Hz | Ampl. mari 0,048 | 6 |
| | Ampl. mici 0,045 | |
| 66 Hz | Ampl. mari 0,028 | 7 |
| | Ampl. mici 0,028 | |
| 158 Hz | Ampl. mari 0,015 | 8 |
| | Ampl. mici 0,013 | |

Se remarcă următoarele : coeficienții de disipație descresc cu frecvența atît la amplitudini mari cît și la amplitudini mici (valorile lui $\psi$ din liniile 1, 3, 5, 7 respectiv 2, 4, 6, 8). Valorile lui $\psi$ sînt mai mari pentru amplitudini mari, tinzînd pentru amplitudini mici către valoarea $\psi = 0{,}013$ dată în literatură ca fiind cea care caracterizează frecarea interioară pură. Acest fapt se explică prin aceea că în cazul amplitudinilor mari apar și alți factori disipativi, cum ar fi frecarea cu aerul, influența reazemelor care sînt importante în acest caz.

O serie de experiențe efectuate pe machetele unor traversări date în fotografiile din figura 9 au indicat faptul că coeficienții de disipație cresc sensibil față de cei anteriori aceasta se explică prin apariția unor factori disipativi suplimentari datorați existenței cablurilor.

Acest fapt a fost confirmat de experiențele făcute pe o traversare realizată în țară. În figurile 10*a* și 10*b* sînt date două oscilograme din care s-au dedus următorii coeficienți de disipație :

| Frecv. în Hz | $\psi$ | $\psi$ mediu |
|---|---|---|
| 1,75 | 0,311 | 0,280 |
| 1,68 | 0,25 | |

Rezultatul mediu este mai mare decît cel recomandat de către Sorokin (0,11) pentru coșurile de oțel, care a fost adoptat și în această lucrare în calculele numerice din paragraful 5.

În cazul frecvenţelor superioare amortizarea scade destul de rapid după cum rezultă şi din încercări pe epruvete sau pe traversarea menţionată. La aceasta s-au obţinut următoarele frecvenţe proprii :

| $n = 1$ | $n = 3$ | $n = 5$ | $n = 7$ | $n = 9$ | $n = 11$ | Observaţii |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,7 | — | — | 15,7 | 29,18 | 47,3 | date experimentale |
| 0,358 | 3,223 | 8,953 | 17,548 | 29,01 | 43,33 | calculate |

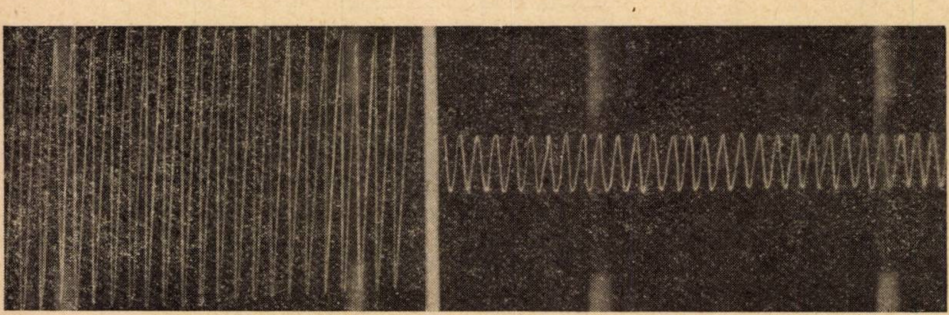


Fig. 8 — Oscilogramă reprezentînd vibraţia amortizată a unei epruvete (f = 158 Hz).

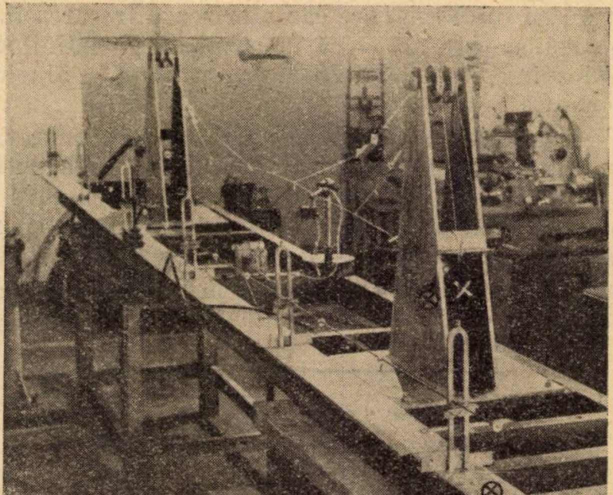
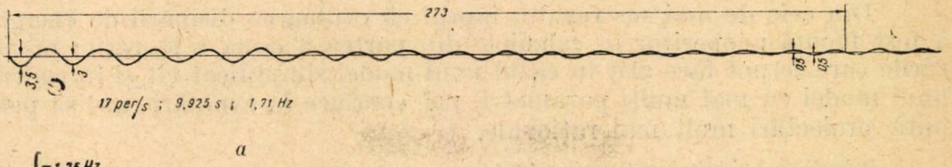


Fig. 9. — Cele două machete pe care s-au efectuat experienţele.

În figurile 11 *a* și *b* este reprezentată instalația experimentală cu ajutorul căreia s-au dedus rezultatele precedente, precum și o porțiune din conducta pe care s-au efectuat experiențele.



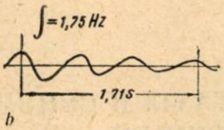


Fig. 10 *a* și *b*. — Oscilograme reprezentînd vibrațiile amortizate ale unei conducte de gaz metan.

Faptul că frecvențele determinate mai sus experimental sînt pentru $n < 11$ mai ridicate decît cele teoretice este o consecință a blocării și

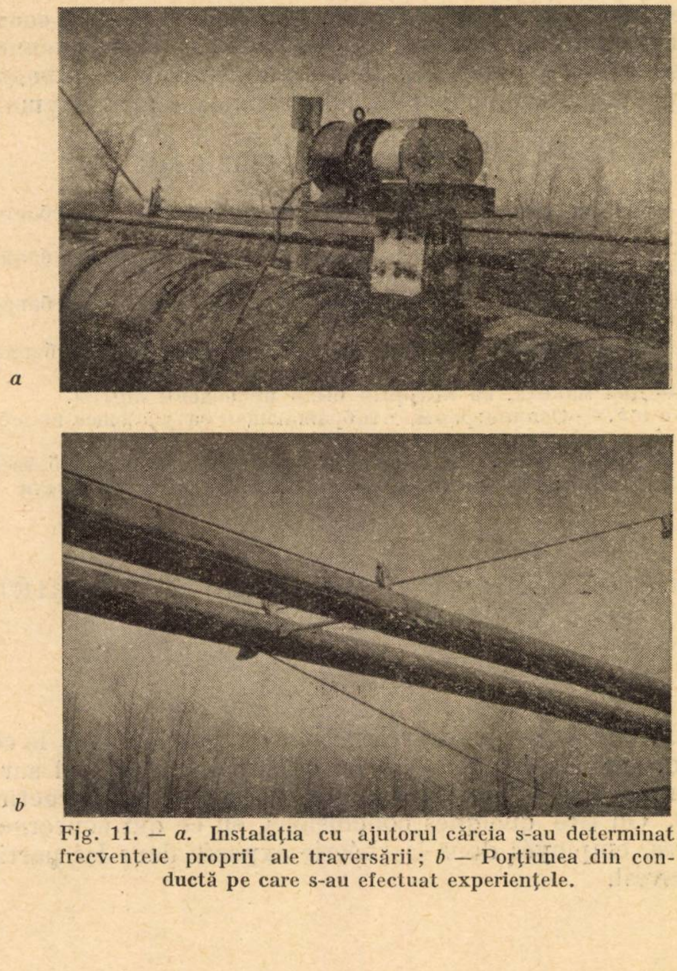


Fig. 11. — *a*. Instalația cu ajutorul căreia s-au determinat frecvențele proprii ale traversării ; *b* — Porțiunea din conductă pe care s-au efectuat experiențele.

încordării cablelor de suspensie, operaţie mărind amortizarea. Cu toate acestea, pentru $n = 3\,m$, $m = 1, 2$ frecvenţele proprii sînt identice cu cele teoretice corespunzînd undelor de vibraţie a porţiunilor de conductă între suspensii.

Din cele de mai sus rezultă faptul că evaluarea disipării de energie a fost făcută acoperitor în calculele din partea a doua a lucrării; precizările care se pot face atît în cazul unui model simplificat cît şi în cadrul unui model cu mai mulţi parametri, pot conduce la evaluări care să permită proiectări mult mai raţionale.

*Primită la redacţie la 24 aprilie 1961.*

## НЕКОТОРЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В СВЯЗИ С ДИНАМИЧЕСКИМ ИЗГИБОМ СТЕРЖНЕЙ

### РЕЗЮМЕ

Определяется время релаксации, которое ставится в соответствие с коэффициентом диссипации как на образцах, макетах висячих трубопроводов, так и на сооружении. Делаются некоторые выводы относительно выбора параметров теории, изложенной в предыдущих частях.

### ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 5. — Осцилограмма, отображающая затухающее колебание образца ($f$=14 гц).

Рис. 6. — Осцилограмма, отображающая затухающее колебание образца ($f$=24 гц).

Рис. 7. — Осцилограмма, отображающая затухающее колебание образца ($f$=66 гц).

Рис. 8. — Осцилограмма, отображающая затухающее колебание образца ($f$=158 гц).

Рис. 9. — Два макета, на которых были проведены опыты.

Рис. 10 *a* и *b*. — Осцилограмма отображающая затухающее колебание газопровода.

Рис. 11 *a* — Установка, с помощью которой определяли собственные частоты поперечных балок; *b* — часть трубопровода, на которой были проведены опыты.

## FLEXION DYNAMIQUE DES BARRES À PROPRIÉTÉS VISCO-ÉLASTIQUES. III

### RÉSUMÉ

On détermine le temps de relaxation en relation avec le coefficient de dissipation, sur des éprouvettes, en effectuant le travail sur des maquettes traversées par des conduites, ainsi que sur une construction récemment réalisée. On tire quelques conclusions, en ce qui concerne le choix des paramètres, employés dans la théorie exposée dans les parties précédentes du travail.

## EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 5. — Oscillogramme représentant la vibration amortie d'une éprouvette ($f$ = 14 Hz).

Fig. 6. — Oscillogramme représentant la vibration amortie d'une éprouvette ($f$ = 24 Hz).

Fig. 7. — Oscillogramme représentant la vibration amortie d'une éprouvette ($f$ = 66 Hz).

Fig. 8. — Oscilogramme représentant la vibration amortie d'une éprouvette ($f$ = 158 Hz).

Fg. 9. — Les deux maquettes ayant servi aux expériences.

Fig. 10 *a* et *b*. — Oscillogrammes représentant les vibrations amorties d'une conduite de gaz méthane.

Fig. 11. — *a*. Installation à l'aide de laquelle on a déterminé les fréquences propres du trajet ; *b*. Portion de la conduite ayant servi aux expériences.

## — REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE —

# CERCETĂRI EXPERIMENTALE ASUPRA SUFLERIEI AERODINAMICE SUBSONICE A INSTITUTULUI DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA" AL ACADEMIEI R.P.R.

DE

I. STROESCU şi AL. MARINESCU

Prezentarea de faţă constituie o sumară expunere asupra caracteristicilor principale de construcţie şi de funcţionare ale sufleriei aerodinamice subsonice de la secţia de aeromecanică a Institutului de mecanică aplicată al Academiei R.P.R.

În domeniul aerodinamicii experimentale ţara noastră îşi are tradiţia sa care o situează printre primele ţări ce au întreprins astfel de cercetări de laborator, bucurîndu-se de o frumoasă apreciere dincolo de hotarele sale.

Faţă însă de dezvoltarea pe care aerodinamica o capătă neîncetat datorită multiplelor ei aplicaţiuni în diverse probleme noi şi domenii practice ale vieţii moderne, iar pe de altă parte şi în faţa necesităţilor experimentale devenite din ce în ce mai exigente şi mai riguroase, s'a simţit mult nevoia realizării unei suflerii aerodinamice mai mari şi care să fie dotată cu o aparatură modernă de cercetare.

Astfel s-a realizat sufleria subsonică de 2 × 2,5 m la secţia de aeromecanică din Institutul de mecanică aplicată (fig. 1). Trebuie remarcat că astfel de instalaţii au fost construite şi funcţionează astăzi în multe ţări.

Această suflerie a fost concepută, calculată şi proiectată de un colectiv din cadrul Institutului, conform indicaţiunilor şi directivelor tov. acad. E. Carafoli, directorul Institutului de mecanică aplicată „Traian Vuia".

Ca tip această suflerie face parte din categoria celor cu *circuit închis*, întoarcerea aerului făcîndu-se pe un singur canal lateral.

În zona experimentală vena fluidă este *închisă*, fapt care asigură o economie de energie, iar pe de altă parte o mai bună distribuţie a vitezelor în cîmpul experimental.

Sufleria se prezintă cu patru coturi de cîte 90° fiecare, prevăzute cu palete deflectoare profilate, verticale (fig. 2, 3) care asigură o corectă distribuție a aerului în circuit.

Întregul circuit închis (fig. 2 și 3) este format din elemente sau tronsoane, care în ordinea succesiunii lor sînt următoarele :

Zona experimentală (fig. 4) are o lungime de 4 m și o secțiune transversală dreptunghiulară de 2,5 m latura orizontală și de 2 m latura verticală. Colțurile acestui dreptunghi sînt însă puțin teșite, astfel, secțiunea reală devine octogonală, avînd o arie de 4,68 m².

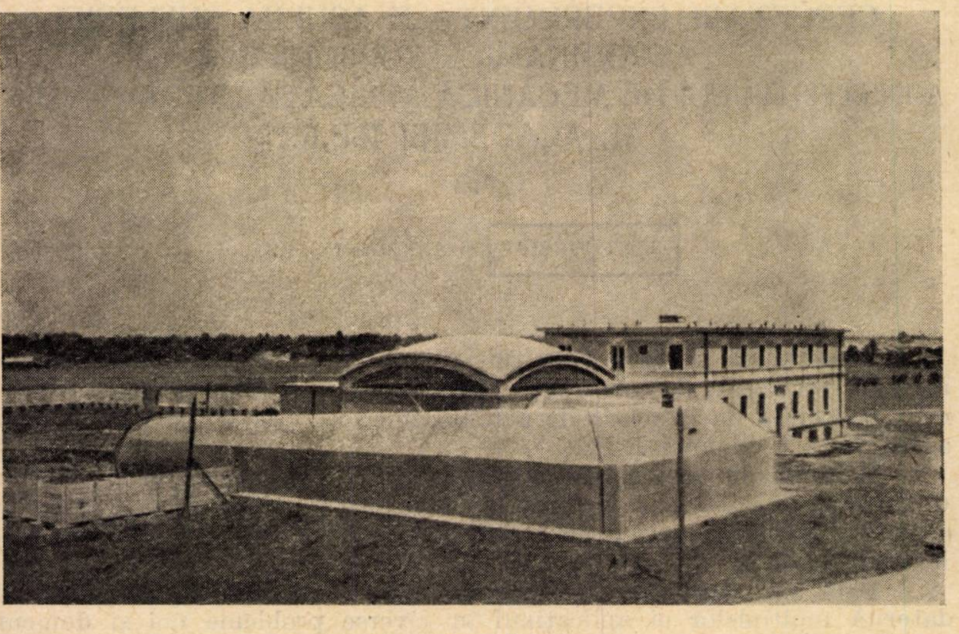


Fig. 1

Aici se pot încerca modele, de exemplu machete de avioane, avînd o anvergură pînă la 1,8 m. ; corpuri fusiforme cu o lungime de peste 2 m avînd diametrul pînă la 0,8 m ; machete de elice sau de roți eoliene cu un diametru de 0,8 m, machete de construcții civile și industriale speciale, expuse vînturilor mari, machete de vehicule rapide etc.

În trasarea și construcția acestei zone experimentale s-au prevăzut dispozitivele de rigoare în vederea compensării efectelor *stratului limită* asupra gradientului de presiune statică de-a lungul axului ei de simetrie.

Pereții laterali sînt vitrați și prevăzuți cu uși de acces în interior.

În continuare, către aval, urmează primul difuzor, lung de circa 11 m, cu o deschidere de 7° și de-a lungul căruia se trece lent de la secțiunea octogonală a zonei experimentale la o secțiune circulară.

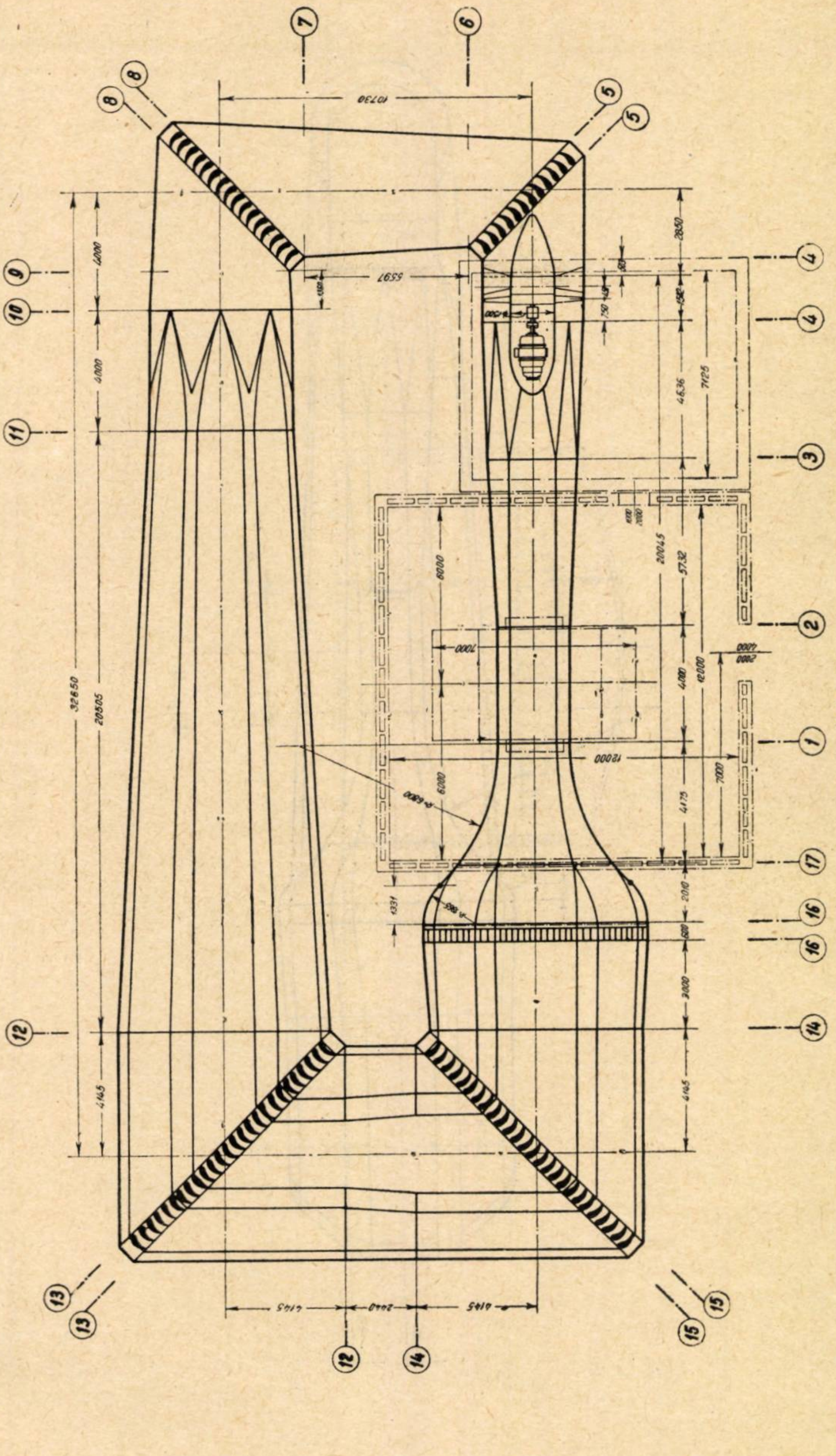

①
②
③
④
⑤
⑥
⑦
⑧
⑨
⑩
⑪
⑫
⑬
⑭
⑮
⑯
⑰
32850
20505
4145
4000
4000
10730
5597
2850
4536
7125
20045
5732
4000
4175
12000
7000
6000
6000
7000
2010
2000
1331
4145
2440
4145
R 6800

Fig. 2

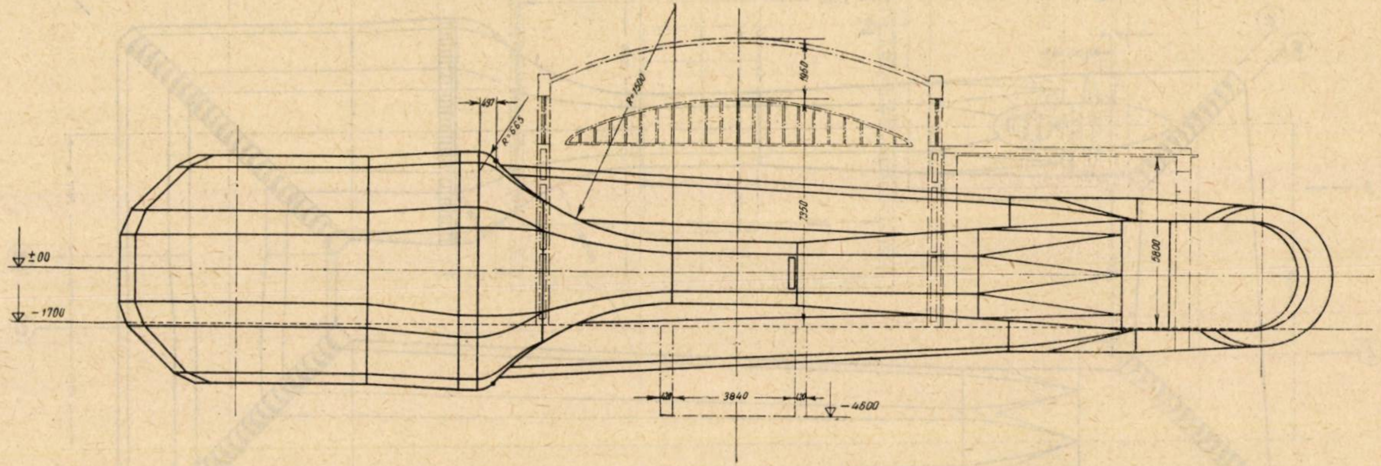

497
R=665
R=1500
1950
7350
5800
±00
−1700
420
3840
420
−4600

Fig. 3

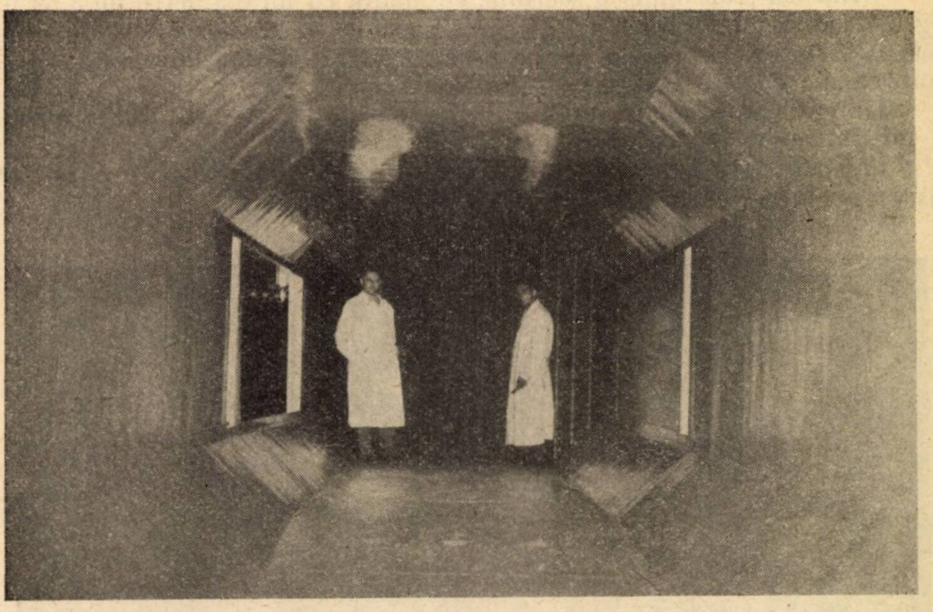


Fig. 4

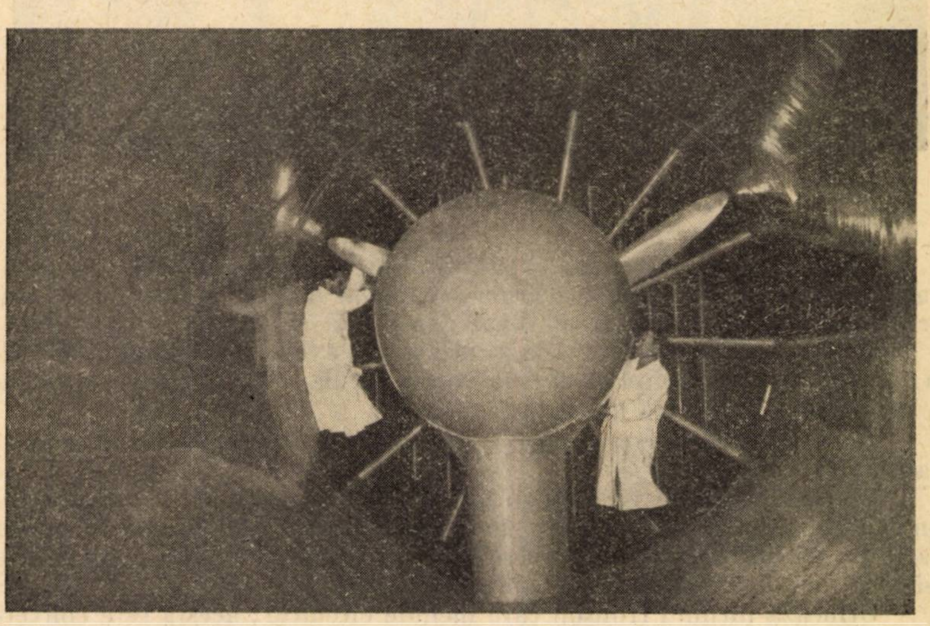


Fig. 5

Urmează tronsonul cu secţiune circulară, cu un diametru de 3,52 m (fig. 5); pe axul acestuia se găseşte montat un carenaj aerodinamic metalic în interiorul căruia se află motorul sufleriei, un electromotor asincron trifazic de 340 C.P.

În exteriorul carenajului aerodinamic axial, se află ventilatorul, cu un diametru de 3,5 m.

În spate sînt dispuse radial 13 palete fixe care au rolul de a redresa mişcarea elicoidală a aerului care iese din ventilator.

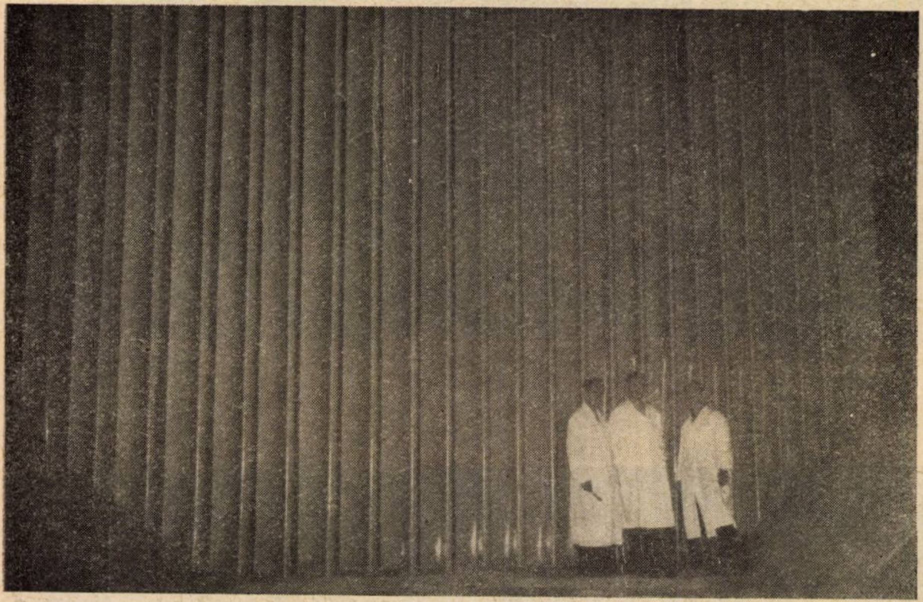


Fig. 6

După primul cot, urmează un tronson tot cu secţiunea circulară, evazat către aval, la capătul căruia se află al doilea cot, care dirijează aerul pe o direcţie paralelă cu axul general al sufleriei.

De la al doilea cot şi pînă la al treilea cot avem un tronson mai lung, un difuzor cu o divergenţă de 6° de-a lungul căruia se face treptat revenirea de la secţiunea circulară la cea octogonală.

După al treilea cot urmează un tronson de secţiune octogonală, evazat către aval.

De aici, revenind pe axul sufleriei, avem o porţiune de canal octogonal, care reprezintă secţiunea maximă a sufleriei (7,52 × 7,52 m cu o arie de 468 $m^2$), canal în care se află filtrul aerodinamic, precum şi o ţesătură metalică fină, antiturbulentă (fig. 6).

Urmează ultimul tronson care închide circuitul; acesta este convergentul sufleriei care se termină prin racordarea sa pe începutul zonei experimentale.

Se remarcă o succesiune a secțiunilor transversale ale circuitului caracterizată printr-o *continuă creștere a suprafețelor respective*, începînd de la finele zonei experimentale pînă la începutul convergentului.

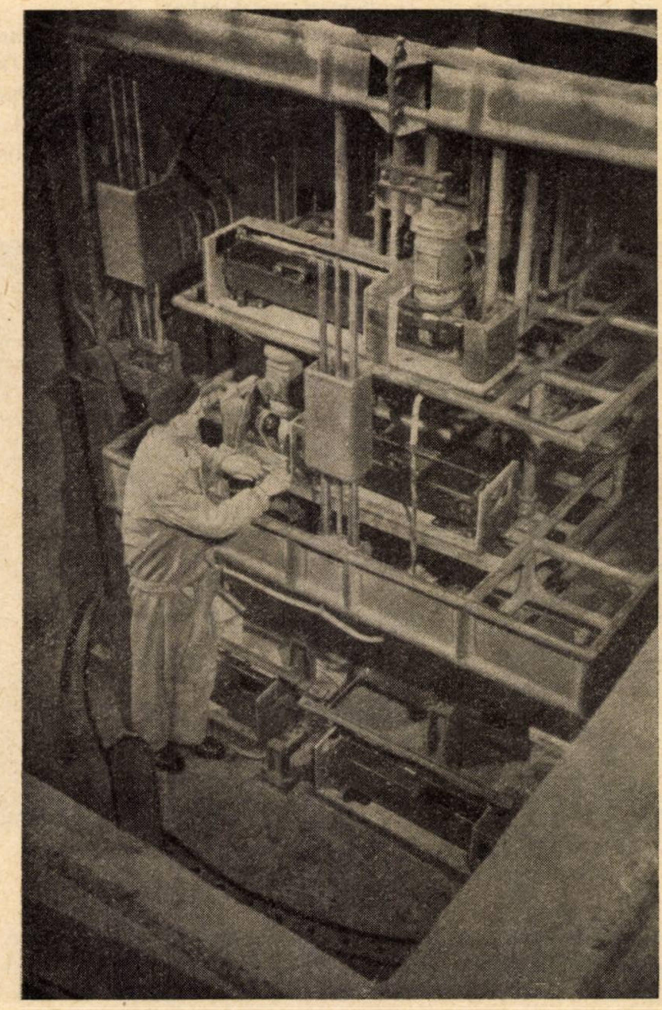


Fig. 7

S-a putut realiza astfel un coeficient de contracție de 10, valoare destinată să contribuie atît la micșorarea gradului de turbulență a sufleriei cît și la o bună distribuție a vitezelor.

Porțiunea finală a convergentului, zona experimentală, primul difuzor și tronsonul cilindric al grupului motor-ventilator se găsesc în interiorul unei săli.

Tronsoanele aflate în interiorul clădirii sînt construite din pereţi de lemn bulonaţi pe o serie de cadre şi grinzi metalice.

Tronsonul cu secţiunea circulară care corespunde grupului motor-ventilator este realizat din metal şi este prevăzut cu capace amovibile pentru accesul în interior, la motor şi ventilator.

Variaţia vitezei curentului de aer în suflerie se obţine continuu, prin *variaţia pasului ventilatorului*, comandată electric în timpul funcţionării.

În sala de experienţe se sufla un tablou prevăzut cu instrumentele de măsură şi control necesar aparatajului electric, precum şi comenzilor automate ale motorului şi a variaţiei pasului ventilatorului. Aceste comenzi acţionează electric sau pneumatic.

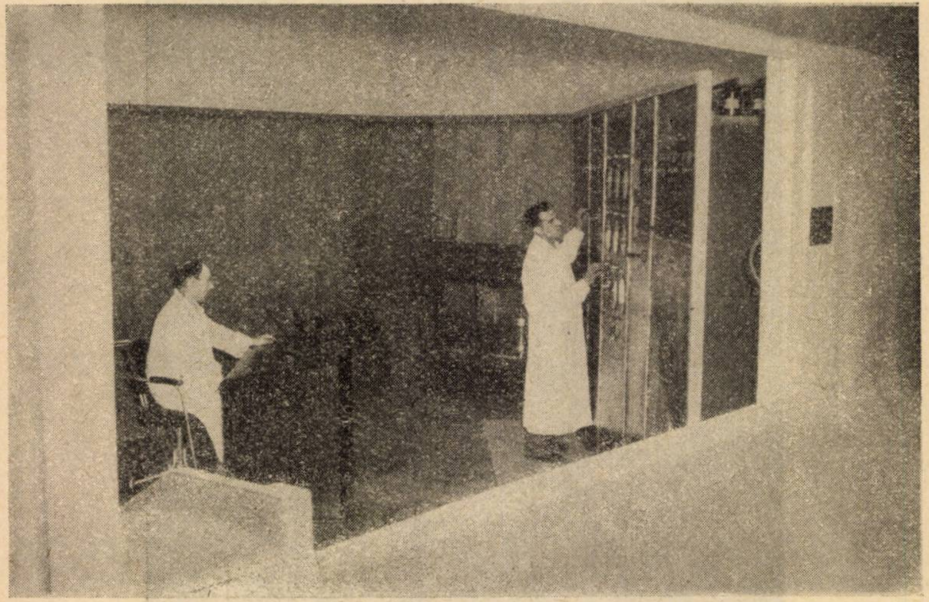


Fig. 8

Sub zona experimentală, se află balanţa aerodinamică automată cu şase componente (fig. 7). Această balanţă este concepută şi proiectată de un colectiv al secţiei de aeromecanică şi realizată la noi în ţară, la Întreprinderea ,,Balanţa'' Sibiu, la ,,Uzinele 23 August'' şi la atelierele ,,Prototip'' din Bucureşti.

Balanţa constă dintr-un complex mecanic deformabil cu articulaţii pe cuţite, complex care separă automat componentele forţelor şi momentelor aerodinamice ce apar pe machetă. Măsurarea forţelor se face printr-o serie de aparate de cîntărire, ce transmit electric rezultatele măsurătorilor la cadranele contoarelor fixate pe punctul de comandă al balanţei.

Acest panou cuprinde un număr de 9 contoare (fig.8) concepute şi construite la noi indicînd simultan forţele aerodinamice ce iau naştere

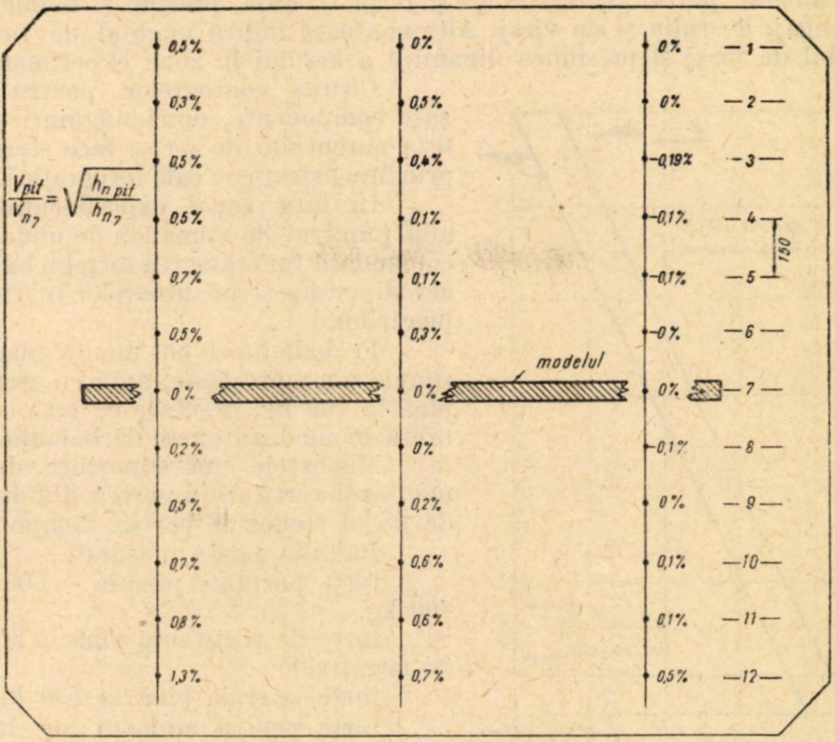

$\frac{V_{pit}}{V_{n7}}=\sqrt{\frac{h_{n\,pit}}{h_{n7}}}$
0,5%
0,3%
0,5%
0,5%
0,7%
0,5%
0%
0,2%
0,5%
0,7%
0,8%
1,3%
0%
0,5%
0,4%
0,1%
0,1%
0,3%
0%
0%
0,2%
0,6%
0,6%
0,7%
modelul
0%
0%
0,19%
0,1%
0,1%
0%
0%
0,1%
0%
0,1%
0,1%
0,5%
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
150

Fig. 9

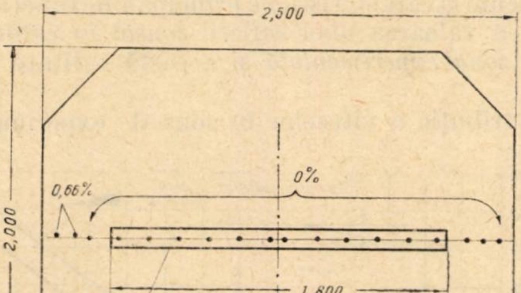

2,500
2,000
0,66%
0%
1,600
machela

Fig. 10

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

pe machetă : portanța, rezistența și forța laterală, precum și momentele de tangaj, de ruliu și de viraj. Alte contoare indică unghiul de tangaj, unghiul de viraj și presiunea dinamică a aerului în zona experimentală.

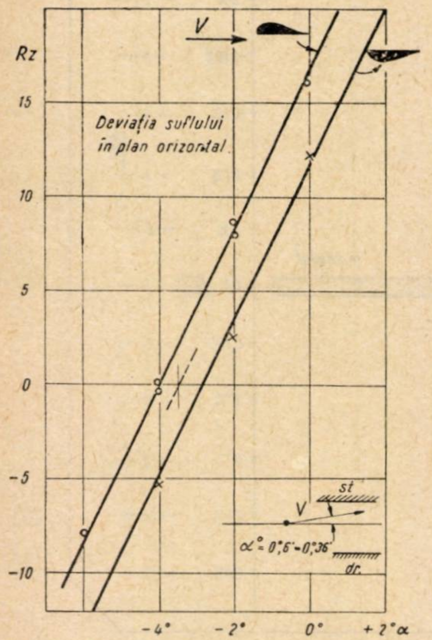


Fig. 11

Citirea contoarelor pentru cele șase componente, două unghiuri și viteza curentului de aer se face simultan prin înregistrare pe cale fotografică.

În fața zonei experimentale se află pupitrul de comandă de unde este comandată funcționarea întregii balanțe aerodinamice și a contoarelor în timpul lucrărilor.

Pe balanță se pot monta machete simple sau motorizate, avînd o greutate pînă la 100 kg, greutate ce este echilibrată în mod automat de balanță.

Machetele sînt suportate de doi montanți verticali în partea din față și de un al treilea la partea dinapoi.

Balanța poate măsura :

forțe portante pînă la + 800 și — 400 kg,

forțe de rezistență pînă la 300 kg (și negative),

forțe laterale pînă la 150 kg,

forțe pentru moment de tangaj pînă la + 170 și — 70 kg pentru moment de ruliu de + 120 și — 60 kg și pentru moment de viraj de 60 kg.

Vom trece acum la caracteristicile principale de funcționare ale sufleriei.

Este știut că valoarea unei suflerii *constă în calitatea aerodinamică a vînei fluide în zona experimentală* și această calitate constă, la rîndul său, în :

1) buna distribuție a vitezelor în zona de experimentare,

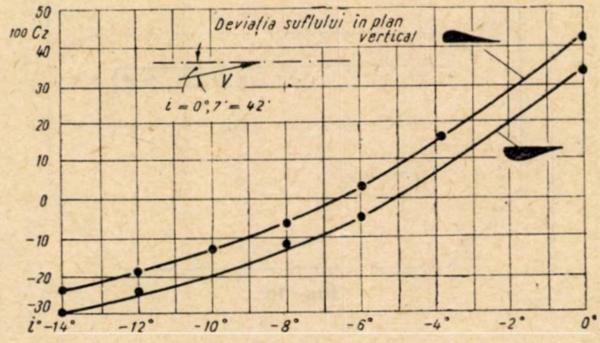
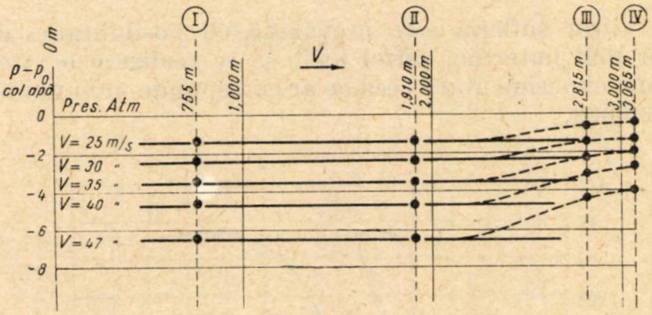


Fig. 12

2) valoarea gradului de turbulență a vînei fluide,
3) în valoarea numărului de similitudine aerodinamică a lui Reynolds, realiza $\left(\mathcal{R} = \frac{L \cdot V}{\nu}\right)$.

Pentru acest motiv primele cercetări experimentale asupra sufleriei s-au realizat la aceste trei caracteristici.



Presiunea statica în lungul zonei experimentale

Fig. 13

Cercetările asupra distribuției vitezelor în cîmpul aerodinamic experimental, s-au făcut în trei planuri verticale perpendiculare pe axul de simetrie al sufleriei și anume unul la începutul zonei experimentale, unul în dreptul bordului de atac al machetelor și unul către finele zonei experimentale, obținîndu-se valorile acestei distribuții de viteze pe cîte trei linii orizontale pentru fiecare plan (la partea de sus, la mijloc în dreptul modelului și la partea de jos a zonei experimentale) precum și pe cîte trei linii verticale (la stînga, la mijloc și la dreapta zonei experimentale). Figurile 9 și 10 reprezintă această distribuție de viteze în planul vertical ce trece prin zona în care se plasează machetele pentru experimentare.

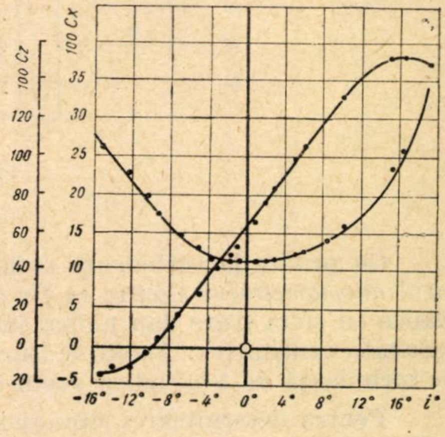


Fig. 14

Figura 9 indică această distribuție pe verticală, măsurată cu sonda Pitot și cu micromanometrul. Valorile numerice au fost obținute din relația $\frac{V \cdot \text{pit}}{V\,\text{ref.}} = \sqrt{\frac{h\,\text{pit,}}{h\,\text{ref,}}}$ iar variațiile sînt reprezentate convențional, în procente. Figura 10 reprezintă distribuția vitezelor pe o linie orizontală care se confundă cu bordul de atac al unei machete.

În ceea ce privește valoarea numărului Reynolds, realizată în actualele condiții ale sufleriei, se poate calcula de exemplu, pentru o machetă de aripă cu o alungire standard $\lambda = 5$, avînd o anvergură de 1,8 m și deci coarda profilului de 0,66 m, numărul Reynolds realizat este

$$R = \frac{L.\ V}{\nu} = \frac{0{,}360\ \text{m} \times 60\ \text{m/s}}{15{,}1 \times 10^{-6}} = 1\ 430\ 000\,.$$

Pentru viitor sufleria este prevăzută cu posibilitatea de adaptare a unui motor mai puternic, astfel încît să se realizeze o viteză de circa 100 m/s în zona experimentată ceea ce ar corespunde unui număr Reynolds de peste 2 000 000.

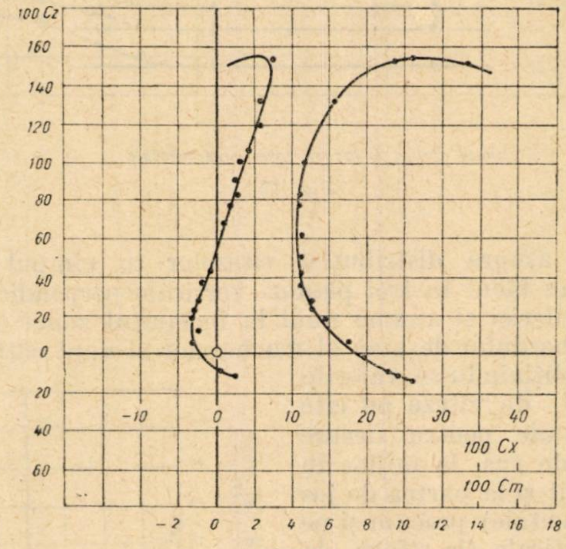


Fig. 15

Cu privire la turbulența sufleriei, s-au executat măsurători cu ajutorul *anemometrului electric cu fir cald*, care spre deosebire de cercetările clasice cu sfera (care dau numai indicații comparative) a putut da direct rezultate cantitative. Aceste măsurători au indicat de la început un grad de turbulență de 1%, adică vecin cu acel al tuturor sufleriilor obișnuite.

Pentru determinarea direcției curentului de aer în zona experimentală față de axul geomteric, s-au executat cercetări cu metoda aripii normale și răsturnate, atît în plan orizontal cît și în plan vertical. Figurile 11 și 12 reprezintă aceste rezultate.

Cercetările executate la 5 viteze diferite, pentru determinarea variației presiunii statice de-a lungul zonei experimentale au indicat că această variație se menține la o valoare constantă. Figura 13 reprezintă rezultatele obținute.

S-au executat cercetări pentru determinarea coeficientului prizelor presiunilor de referință ale sufleriei și pentru etalonarea balanței speciale cu lichid, care indică viteza curentului de aer în zona experimentală în timpul experiențelor pe machete, fără nevoia prezenței în suflerie a sondei Pitot.

Graficele din figurile 14 și 15 reprezintă rezultatele obținute în cercetările preliminare cu o aripă oarecare, plan convexă executate *numai cu scopul indicativ de a se vedea modul de funcționare al balanței automate cu șase componente.* Rezultatele obținute nu au avut a suporta corecțiile de presiune barometrică, de temperatură a aerului din suflerie sau a temperaturii alcoolului din micromanometre și nici corecțiunile de influență a vînei complet ghidată de pereți. Aceste corecții care se fac de obicei în lucrările curente, n-au fost necesare scopului imediat urmărit în această cercetare provizorie de verificare a balanței.

Cu rezultatele acestei prime serii de cercetări asupra sufleriei în sine, precum și cu al altor multe experiențe și tatonări mai mărunte de care nu s-a mai vorbit aici, această suflerie aerodinamică a putut fi declarată ca fiind aptă pentru darea în folosință și astfel s-a și început o activitate utilă printr-o serie de experiențe pe modele prezentate de beneficiari.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДОЗВУКОВОЙ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТРУБЫ ИНСТИТУТА ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ ИМЕНИ ТРАЯНА ВУЯ АКАДЕМИИ РНР

### РЕЗЮМЕ

Работа содержит две части.

I. Описание аэродинамической трубы

а) общая аэродинамическая картина движения,

б) группа двигатель-вентилятор, автоматические шестикомпонентные весы, измерительная аппаратура.

II. Экспериментальные результаты, полученные при исследованиях по наладке аэродинамической трубы

1) скорость в рабочей части, 2) распределение скорости, 3) распределение статического давления в рабочей части, 4) коэффициент турбулентности трубы, 5) направление струи в рабочей части.

# RECHERCHES EXPÉRIMENTALES SUR LA SOUFFLERIE AÉRODYNAMIQUE SUBSONIQUE DE L'INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE «TRAIAN VUIA» DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

## RÉSUMÉ

Le travail est divisé en deux parties :

I. Description de la soufflerie :

*a*) aspect aérodynamique général du circuit ;

*b*) groupe moteur-ventilateur ; balance automatique à six composantes ; appareils de mesure.

II. Résultats expérimentaux obtenus lors des recherches et travaux de mise au point de la soufflerie :

1) vitesse dans la zone expérimentale ; 2) distribution des vitesses ; 3) distribution de la pression statique dans la zone expérimentale ; 4) facteur de turbulence de la soufflerie ; 5) direction du courant d'air dans la zone expérimentale.

# RECENZII

P. P. TEODORESCU : *Probleme plane în teoria elasticității*. București, Ed. Academiei R.P.R., 1961, 696 pagini, 260 pagini tabele.

Ultima carte apărută în Editura Academiei R.P.R. merită să fie semnalată în mod deosebit; este vorba de primul volum al monografiei ,,Probleme plane în teoria elasticității'' de P. P. Teodorescu.

Teoria elasticității este o disciplină ale cărei baze au fost puse încă în secolul trecut de savanți ca A. Cauchy, A. Clebsch, G. Kirchhoff, G. Lamé, D. I. Jurawski, A. Love, A. Golovin, L. Navier, V. de Saint-Venant și alții. De asemenea literatura contemporană este reprezentată prin oameni de știință de renume mondial ca B. G. Galerkin, S. P. Timoshenko, I. I. Sokolnikoff, N. I. Mushelișvili, A. E. Green, P. F. Papkovici și alții. Literatura în acest domeniu este extrem de bogată și pe lîngă un număr impresionant de studii și memorii cu caracter izolat, există numeroase tratate.

Bazată pe o vastă documentare și o bogată activitate personală a autorului ei, monografia de care ne ocupăm reprezintă o contribuție de seamă a școlii romînești în acest domeniu.

Cartea, concepută în proporții ample, reprezintă o tratare intensivă a problemei plane. Problemele puse sînt tratate cu toată rigoarea matematică; rezultatele sînt comparate cu cele obținute pe cale elementară în rezistența materialelor, domeniul de aplicație al teoriei simplificate este totdeauna bine precizat. Pentru cazurile complexe, un număr mare de tabele, trecute în anexă, dispensează pe calculator de o muncă migăloasă.

La simpla parcurgere a paginilor cărții, constați că teoria elasticității nu reprezintă o punere cap la cap a cazurilor cunoscute, pe baza funcțiilor biarmonice.

Problemele își găsesc o succesiune firească; importanța cea mai mare este acordată problemei statice, unde criteriul de clasificare este forma conturului, legată de sistemul de coordonate cel mai convenabil.

Introducerea cărții (cap. I) cuprinde elemente generale de teoria elasticității (obiect, ipoteze fundamentale, echilibrul elastic, deformații, legea lui Hooke, problemele fundamentale, lucru mecanic, teoreme de existență și unicitate, corpuri simplu și multiplu conexe, principiul lui St. Venant).

Partea întîia a lucrării abordează problema plană a teoriei elasticității. Capitolul II separă starea de tensiune plană și starea de deformație plană. Capitolul III prezintă diferitele aspecte ale teoriei, utilizînd coordonatele carteziene (variația tensiunilor și a deformațiilor în plan, rezolvarea în tensiuni și în deplasări a problemei plane, funcția de tensiune și de deplasare, proprietăți de simetrie și de antisimetrie etc.).

După o succintă examinare a aproximației de calcul a problemei plane (cap. IV), se trece la expunerea metodelor de calcul utilizate în acest domeniu (cap. V).

Sînt prezentate astfel integrale particulare ale ecuației biarmonice, metodele generale de calcul (directă, indirectă, semiindirectă, metode elementare, metode variaționale, reprezentări Fourier, metode operaționale, metoda funcțiilor de variabilă complexă, metoda diferențelor finite, aproximarea condițiilor pe contur în puncte, analogia cu plăcile plane și metode experimentale).

Partea a doua și cea mai dezvoltată tratează calculul grinzilor pereți cu contur dreptunghiular. Din punct de vedere al formei și dimensiunilor sînt tratate grinda obișnuită, planul, semiplanul, sfertul de plan, banda și semibanda elastică, grinda perete. Din punctul de vedere al rezemării, sînt studiate rezemarea simplă, continuitatea pe reazeme, încastrarea și grinzile pe mediu elastic.

Ca metode de calcul sînt utilizate cu predilecție soluțiile prin polinoame și dezvoltări în serie, fiind însă ilustrate și celelalte procedee.

Proprietățile de simetrie și antisimetrie sînt folosite cu succes, simplificînd substanțial volumul de calcul, acolo unde aceasta este posibil.

Dezvoltările teoretice sînt ilustrate prin numeroase aplicații numerice și diagrame. O atenție deosebită, a fost dată examinării valabilității formulelor din rezistența materialelor, comparate cu soluțiile mai exacte din teoria elasticității.

Cele 696 pagini de text sînt completate cu 260 pagini tabele și diagrame originale, care ușurează efectuarea aplicațiilor numerice.

Lucrarea reprezintă o contribuție deosebit de valoroasă a autorului, atît prin partea originală, cît și cea de sinteză. Ea va fi consultată cu interes de un cerc larg de cititori, cercetători în domeniul mecanicii aplicate, a construcțiilor, precum și de studenții facultăților tehnice ale institutelor de învățămînt superior.

*M. Soare*

---

П. Ф. ФИЛЧАКОВ, *Теория фильтрации под гидротехническими сооружениями*. I. (Teoria filtrării pe sub construcțiile hidrotehnice. I). Издательство Академии Наук Украинской ССР, Киев, 1959.

Autorul acestei lucrări, cunoscut specialist în problemele din teoria scurgerii fluidelor prin medii poroase, a împărțit expunerea sa în două volume, rezervînd pentru primul expunerea principiilor teoretice și a metodelor exacte de calcul. În urma acestui fapt materia primului volum a fost concentrată în două capitole, cel dintîi avînd ca obiect prezentarea bazelor teoriei funcțiilor de o variabilă complexă, în timp ce al doilea se ocupă de reprezentările conforme și de problemele la limită ale teoriei filtrării sub presiune.

Expunerea referitoare la teoria funcțiilor de o variabilă complexă este foarte amplă, începînd cu cele mai elementare noțiuni asupra numerelor complexe. Urmează apoi la definirea variabilei complexe și a funcțiilor de o astfel de variabilă, introducîndu-se imediat noțiunea de funcție analitică. Se trece după aceea la un studiu destul de amănunțit al seriilor cu termeni complecși și apoi la prezentarea cîtorva funcții elementare uzuale. Ultimele paragrafe cuprind rezultatele fundamentale ale teoriei și anume teorema lui Cauchy, formula lui Cauchy, seria Taylor, seria Laurent, studiul punctelor singulare, prelungirea analitică și suprafețele lui

Riemann. Datorită expunerii clare şi simple a problemelor, acest capitol poate servi ca o bună introducere în teoria funcţiilor de o variabilă complexă şi pune la îndemînă toate elementele necesare pentru aplicaţii.

Capitolul al doilea începe cu o expunere destul de amănunţită a problemelor reprezentărilor conforme. Se prezintă mai întîi o serie de reprezentări prin funcţii elementare, insistîndu-se în special asupra funcţiei liniare, se trece apoi la reprezentarea diferitelor domenii pe un semi-plan şi apoi la reprezentarea Schwarz-Cristoffel, care ocazionează o digresiune asupra integralelor eliptice şi a funcţiilor eliptice ale lui Jacobi.

Urmează apoi interpretarea hidrodinamică a rezultatelor teoriei funcţiilor de o variabilă complexă şi definirea problemelor la limite pentru ecuaţia lui Laplace. Fundamentarea experimentală a teoriei filtraţiei prin legea lui Darcy deschide partea rezervată obiectului propriu-zis al lucrării. Se prezintă apoi metoda de studiu a lui N. N. Pavlovski şi cîteva aplicaţii şi anume radierul plan aşezat pe un strat permeabil de grosime finită şi radierul plan prevăzut cu unul sau două rînduri de palplanşe, aşezat pe un strat permeabil de grosime infinită, în diverse variante. Faţă de volumul total al lucrării numărul de exemple pare mic, însă o apreciere definitivă nu poate fi făcută decît după apariţia volumului al doilea. Din acest motiv este dificil să se exprime o părere asupra utilităţii practice a lucrării, cu toate că, aşa cum se prezintă primul volum, aceasta promite de a fi de un real folos pentru acei care se iniţiază în acest domeniu.

*T. Oroveanu*

---

Г. Н. АБРАМОВИЧ, *Теория турбулентних струй* (Teoria jeturilor turbulente), Физматгиз, Москва, 1960, 715 p.

Această lucrare reprezintă o expunere sistematică, bogată şi completă a teoriei vinelor turbulente, bazată în special pe contribuţia şcolii sovietice. Trebuie precizat de la început că tratarea teoretică a vinelor turbulente înseamnă aplicatea teoriilor lui Prandtl şi Reichardt şi a dezvoltărilor lor din turbulenţa liberă, adică stadiul practic actual al teoriei turbulenţei libere, la cele mai diverse moduri de scurgere sub formă de vine, atît în compresibil, cît şi în incompresibil.

Partea întîi a cărţii, consacrată vinelor turbulente în fluid incompresibil, cuprinde următoarele capitole :

Capitolul I. Proprietăţile generale ale vinelor turbulente.

Capitolul II. Teoria vinei turbulente pentru cazul vînei înecate.

Capitolul III. Teoria dîrei turbulente din spatele corpului.

Capitolul IV. Amestecul turbulent pe frontiera dintre doi curenţi plan-paraleli de fluid care se mişcă în acelaşi sens sau în sens contrar.

Capitolul V. Vîna de fluid incompresibil în curentul însoţitor.

Modul de tratare a acestor capitole, care reprezintă în fond cazuri particulare ale turbulenţei libere, prezintă etapele : schema geometrică a scurgerii, expunerea teoriilor specifice fiecărui caz şi care sînt variante ale teoriei lui Prandlt (cea veche şi cea nouă), a lui Taylor (transportul vîrtejurilor) şi a lui Reichardt (amestecarea turbulentă) ; deducerea, pe baza asemănării de distribuţie adimensională în lungul scurgerii, a repartiţiei vitezei medii, a temperaturii şi a concentraţiei, de asemenea studiul lărgirii vînei şi variaţia vitezei medii în aval ; în sfîrşit comparaţia cu diverse date experimentale.

Cîteva chestiuni mai speciale ca distribuţia fluctuaţiilor turbulente în diferitele porţiuni ale vînei înecate (mediul înconjurător în repaus) sau zone de amestec turbulent în cazul presiunii variabile, precum şi influenţa neuniformităţii iniţiale a curentului asupra porţiunii principale a vînei merită toată atenţia.

Trebuie remarcat în acelaşi timp că, limitată la interesul practic al determinării repartiţiei unei mărimi medii, teoria lungimii de amestec a lui Prandtl, unde lungimea de amestec $l = l(x)$, adică nu variază într-o secţiune, îşi găseşte o confirmare aplicativă deplină, ilustrată de autor şi prin faptul că variaţia fluctuaţiei de energie turbulentă $\sqrt{\overline{u'^2}} \sim l \dfrac{dU}{dy} \sim \text{cont} \dfrac{dU}{dy}$ urmează fidel datele experimentale. Se utilizează de asemenea permanent relaţiile generale ale constanţei impulsului într-o secţiune, a bilanţului de energie pentru vîna neizotermică, ca şi analogia dintre transportul cantităţii de mişcare, a căldurii şi materiei (difuziunea concentraţiei de material).

Partea a doua, care se ocupă de vinele de gaz turbulente, cuprinde capitolele :

Capitolul VI. Teoria turbulenţei libere în curent compresibil.

Capitolul VII. Vine de gaz turbulente.

Capitolul VIII. Vîna de gaz turbulentă în prezenţa frontului flăcării.

Se consideră ecuaţia mediată Reynolds în direcţia scurgerii şi ecuaţia bilanţului energetic, introducîndu-se fluctuaţia densităţii, iar pentru vine de gaz cu temperatură foarte ridicată şi fluctuaţia viscozităţii (efectul disociaţiei), tratîndu-se apoi cu ajutorul teoriei semiempirice a lungimii de amestec şi a ipotezei de similitudine de distribuţie a mărimilor adimensionale în lungul scurgerii. Pentru studiul teoretic al vinelor de gaz în prezenţa frontului flăcării se consideră ecuaţia bilanţului energetic al entalpiei, adăugîndu-se energia reacţiilor chimice şi analog ecuaţia concentraţiei de combustibil care dă energia de ardere. Sînt extrem de interesante următoarele paragrafe : — zona amestecării turbulente pe frontiera curenţilor de gaz însoţitori de mare viteză ; — ţîşnirea vînei de gaz supersonice din gutaj în cazul unui regim necalculat ; — determinarea temperaturii de ardere în vînă ; — cercetări experimentale asupra flăcării de difuziune.

Această parte a doua, de un interes practic deosebit, are un caracter ceva mai descriptiv în sensul că nu sînt expuse toate caracteristicile scurgerii compresibile din aceste cazuri — cum ar fi repartiţia fluctuaţiilor de energie turbulentă sau date experimentale mai ample asupra diverselor mărimi specifice turbulenţei.

Partea a treia, consacrată vinelor în spaţiu mărginit, cuprinde următoarele capitole :

Capitolul IX. Scurgerea fluidului într-un canal în spatele unui corp neaerodinamic.

Capitolul X. Vîna turbulentă într-un spaţiu înfundat.

Capitolul XI. Scurgerea formată de vîna turbulentă semimărginită.

În aceste capitole se tratează scurgerea incompresibilă care ia naştere atunci cînd vîna fluidă se dezvoltă într-un spaţiu mărginit total sau parţial. Se examinează spectrul liniilor de curent, distribuţia vitezelor, linia punctelor de întoarcere a curentului cu ajutorul rezultatelor din cazul vinelor libere şi prin utilizarea, ca primă indicaţie, a scurgerii potenţiale plane în jurul unui corp plasat într-un canal. Se studiază de asemenea interacţiunea dintre stratul limită turbulent pe o placă şi vîna de fluid cu originea la o oarecare distanţă de placă, astfel că în porţiunea principală a vînei există o modificare a acesteia datorită prezenţei stratului limită dezvoltat. Sînt date rezultate experimentale privind profilele de viteză în diferitele secţiuni ale scurgerii atît pentru vine în spaţiu mărginit, cît şi pentru interacţiunea vînă-strat limită.

Partea a patra a lucrării *Unele aplicaţii practice ale teoriei vinelor turbulente* este formată din capitolele :

Capitolpl XII. Vine în spaţiu nemărginit.

Capitolul XIII. Vine în spaţiu mărginit.

Aceste capitole cuprind rezultate extrem de interesante ale aplicării teoriei vinelor turbulente la diverse cazuri întîlnite în practică, cum sînt: calculul părţii deschise a tunelului aerodinamic; perdele de aer; — vîna turbulentă înecată verticală de gaz preîncălzit; transmisia de căldură de la aburi la vîna de apă; rezistenţa etanşeizării prin labirinte a suflerieі; calculul camerei de amestecare a ejectorului etc.

După cum rezultă din prezentarea succintă a bogatului conţinut al acestei cărţi, ea va interesa în egală măsură şi în cel mai înalt grad pe inginerul proiectant, pe cercetătorul ştiinţific de specialitate şi mai ales pe cercetătorii de laborator care se ocupă de diversele probleme ale ventilaţiei, aerajului, studiul jeturilor, pentru care această lucrare dă indicaţii deosebit de preţioase.

*St. N. Săvulescu*

G. A. ŞAUMEAN : *Maşini automate*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1957, p. 618.

Lucrarea prof. G. A. Şaumean, doctor în ştiinţe tehnice, constituie o sinteză a experienţei înaintate acumulate în exploatarea şi proiectarea maşinilor automate. Avînd la dispoziţie realizările inovatorilor şi întreprinderilor fruntaşe din U.R.S.S., cercetările institutelor de specialitate şi de învăţămînt superior, precum şi numeroase studii personale, autorul a căutat să dezvolte lucrarea pe linia unei organizări juste a cuprinsului, urmărind în acelaşi timp legile comune ale majorităţii maşinilor automate de diferite construcţii şi cu diferite destinaţii şi scoate în evidenţă avantajele lor prin exemplificări de calcule de rentabilitate şi productivitate maximă

În acest sens de la început sînt atacate probleme de analiza productivităţii maşinilor şi reducerea preţului de cost, sarcini principale în asigurarea continuă a satisfacerii maxime a necesităţilor materiale şi culturale ale oamenilor muncii. Cercetarea amănunţită a timpilor de lucru, a celor de mers în gol, a pierderilor de timp, scoate la iveală posibilităţile de mărire a productivităţii maşinilor şi de automatizare a lucrărilor în scopul eliberării omului de munca fizică grea.

Al doilea capitol, ocupîndu-se de procesul tehnologic, dă indicaţii asupra alegerii celor mai raţionale operaţii, a unei tehnologii superioare, asupra prelucrării simultane, cu scule multiple şi la mai multe posturi, cu agregare în serie, paralel sau serie-paralel. Capitolul se încheie cu metodele de alimentare cu material şi cu o clasificare a maşinilor după criterii tehnologice.

În capitolul al treilea, urmărindu-se acelaşi scop al măririi productivităţii se expune legătura cu regimurile de prelucrare, domenii în care cercetătorii sovietici au adus contribuţii de mare importanţă.

În capitolul al patrulea începe descrierea propriu-zisă a maşinilor automate; se ocupă cu schema structurală formată în general din mecanismul motor, mecanismul de comandă-distribuţie, mecanismele de transmisie şi mecanismele de execuţie. După o scurtă trecere în revistă a mecanismelor de comandă mecanice, în special a celor cu came, care s-au impus de mult în tehnică, a acţionărilor hidraulice, pneumatice, electrice, trece la schemele cinematice ale maşinilor automate clasificate în trei grupe principale: 1) maşini-unelte neaşchietoare (alimentare, textile, chimice, agricole, poligrafice etc.) şi maşini-unelte aşchietoare cu volum mic de muncă; 2) maşini-unelte aşchietoare propriu-zise; 3) maşini automate intermediare constînd dintr-o combinaţie a celor din grupa 1 şi 2. În general, în acest capitol problemele sînt tratate din punctul de vedere al mecanismului de distribuţie.

Tratarea mecanismelor cu came formează un capitol special (V), acestea fiind întrebuințate des la mașinile automate, datorită universalității mișcării și a simplității construcției lor.

Capitolul următor (VI) se ocupă cu mecanismele de execuție : mecanisme speciale pentru executarea curselor de lucru, de gol, de alimentare, de prindere a materialului, de rotire și fixare a poziției etc. Este de semnalat astfel tratarea amănunțită a mecanismelor cu cruce de Malta.

În capitolul al șaptelea se exprimă proiectarea ciclului de lucru printr-o coordonare a condițiilor de prelucrare ale piesei (forma, dimensiuni, toleranțe, material etc.) cu caracteristicile tehnice ale diferitelor mașini automate. Sînt indicate 12 reguli pentru întocmirea proceselor tehnologice raționale pe strunguri automate.

Dispozitivele de acționare ale mașinilor automate sînt arătate în capitolul VIII.

În continuare, lucrarea cuprinde sistemele automate de mașini (cap. IX), reluînd problemele indicilor calitativi ai producției în aceste cazuri, ale agregării mașinilor, ale productivității, ai coeficienților de utilizare a liniei automate etc. și se încheie (cap. X) cu exemplificări și recomandări din exploatarea mașinilor automate. Nu este neglijată nici tehnica securității muncii, în afara problemelor de transport, de ungere și de îndepărtare a deșeurilor.

Lucrarea prof. G. A. Șaumean, bogat încadrată de descrierea diverselor sisteme și mașini automate, de calcule corespunzătoare necesare atît la proiectarea diferitelor piese și ansambluri de mașini cum și la proiectarea noilor procese tehnologice și a noilor sisteme de mașini, expune și rezolvă problemele particulare și generale ale construcțiilor de mașini automate, în raport cu scopul principal al rentabilității socialiste, folosirea la maximum a tehnicii noi în scopul atingerii unei productivități ridicate a muncii.

*Chr. Pelecudi*

М. П. БОНДЕР, *Новое в конструировании механизмов* (Noutăți în construcția mecanismelor), Государственное издательство технической литературы УССР, Киев, 1960, 192 p.

Lucrarea se ocupă de unele probleme ale construcției de mecanisme care în mod curent în teoria mecanismelor sînt neglijate. Este vorba astfel de luarea în considerare, la proiectarea mecanismelor, a condițiilor reale ale fenomenelor de frecare și uzură, a dimensiunilor pieselor, a materialelor din care sînt confecționate etc.

Se urmărește eliminarea ipotezelor simplificatoare : a invariabilității forțelor de frecare în mișcarea de regim a mașinii, a independenței coeficientului de frecare de presiune și de viteza relativă a suprafețelor de contact, a distribuției liniare a presiunilor etc.

În acest sens materialul lucrării este judicios organizat în trei capitole. Primul cuprinde problemele legate de legile de mișcare a pieselor în mecanisme, stăruind asupra mișcării cu accelerație și a dependențelor inițiale ale presiunilor specifice, coeficientului de frecare etc. În capitolul al doilea, se dau calculele cuplelor cinematice de bază, de rotație și translație, cu unul sau două reazeme. În ultimul capitol autorul studiază condițiile de funcționare reale ale mecanismelor și ajunge la recomandări pentru micșorarea influenței dăunătoare a frecării de repaus și a presiunilor marginale, în scopul utilizării capacității maxime ale mecanismelor și a evitării construcțiilor necorespunzătoare sau supradimensionate.

Considerăm că lucrarea, bogat documentată, cu o expunere clară a problemelor dificile de mare importanță în funcționarea corectă a mecanismelor, constituie un ajutor real proiectanților din acest domeniu.

*Chr. Pelecudi*

⁂ *Institut International de la Soudure — Assemblée Annuelle* (Institutul Internațional de sudură — Colocviu de metalizare prin pulverizare. Consfătuire anuală). Liège, 1960.

La Liège, în Belgia, există sediul Institutului Internațional al sudurii la care au aderat 27 de state, printre care și țara noastră.

Comisia I de sudură cu gaz care cuprinde și metalizarea prin pulverizare a organizat un colocviu internațional pentru discutarea unor probleme concrete de metalizare prin pulverizare, cu un cîmp limitat pentru a putea fi aprofundate fiecare într-o ședință de lucru; aceste probleme au fost discutate în cadrul a 13 comunicări.

Problema forțelor care intervin pentru realizarea aderenței straturilor metalizate a fost analizată de către C. D. Steffens în Comunicarea intitulată *Noi considerații referitoare la metalizarea prin pulverizare.* Autorul constată că pe suprafețele metalice se găsesc forțe disponibile care sînt în măsură să rețină atomii sau moleculele din exterior. Această fixare are loc prin schimbarea electronilor, intensitatea forței disponibile depinzînd de puterea de emisie a electronilor, care este sensibil influențată de curățenia suprafeței. Acest mecanism de fixare nu este singurul posibil, este însă determinant pentru metalele cu mare afinitate reciprocă și rețea de electrozi nesaturați. Autorul analizează în continuare efectul care îl au asupra aderenței rugozitățile micro- sau macroscopice de pe suprafață. Cu această ocazie analizează și fenomenele de sudură prin presiune care au loc cînd particulele incandescente lovesc diverse asperități de pe suprafața de contact.

Problema metodelor prin care se poate realiza o bună aderență este discutată și în alte comunicări. Astfel N. Aubry în comunicarea intitulată *Utilizarea unui material plastic ca bază pentru ancorarea particulelor* se constată încă o dată că sablarea cu nisip sau alice ca mijloc de pregătire a suprafeței este destul de scumpă. În comunicare se prezintă cercetările făcute pentru utilizarea unui strat subțire din material plastic pe bază de nylon dizolvat în fenol. Acest strat se aplică în mod simplu pe piesă după ce în prealabil aceasta a fost degresată. după care urmează pulverizarea cu metal. Stratul plastic depus reduce însă sensibil aderența stratului metalizat în comparație cu aderența ce se obține prin sablare, totuși aderența este suficientă în cazul metalizării cu zinc.

Obținerea unor straturi rezistente la temperaturi înalte a fost una din problemele principale discutate la acest colocviu.

M. A. Levinstein în comunicarea *Progrese recente în metalizarea cu arc plasmă* arată că prin utilizarea unui aparat de metalizare cu arc electric pentru topirea materialului de adaos și a unui gaz inert ca argonul sau azotul cu 10% hidrogen, pentru pulverizarea acestui material, se poate obține o flacără cu o temperatură foarte ridicată. S-au făcut cercetări pentru determinarea proprietăților unui strat avînd temperatura de topire mai mare decît 2482°C. Materialele utilizate au fost tungstenul, molibdenul, carbura de tantal, carbura de hafniu și oxidul de ceriu, de zirconiu și de hafniu. Se arată caracteristicile straturilor astfel obținute și forma epruvetelor utilizate. Se face o analiză comparativă între calitățile stratului depus, utilizînd materialul de adaos sub formă de sîrmă și sub formă de pulbere.

Tot pentru obţinerea suprafeţelor rezistente la temperaturi înalte D. G. Moore a făcut experienţe de metalizare prin pulverizare cu oxid de aluminiu. S-au făcut cercetări pentru determinarea mărimii particulelor pulverizate şi a vitezelor lor de zbor. Aplicîndu-se o metodă specială de analiză s-a putut determina care sînt etapele de formare ale arcului. S-a stabilit prin calcule teoretice care este gradientul de răcire şi importanţa valorii lui. Aceeaşi problemă se tratează şi în comunicarea *Metalizarea prin pulverizare a oxizilor metalici pentru temperaturi ridicate şi alte aplicaţii* de N. N. Ault şi W. W. Wheildon.

Se arată că temperatura flăcării ce se obţine utilizînd gaze combustibile este de 2760°C, iar în cazul utilizării arcului electric şi a unui gaz monoatomic pentru pulverizare temperatura flăcării poate ajunge pînă la 16 000°C prin procedeul cu jetul de plasmă. În urma experienţelor a rezultat că toate materialele susceptibile de a se topi şi de a forma un lichid stabil pot fi utilizate la metalizarea prin pulverizare. În general, se dă preferinţă oxizilor ($SiO_2-TiO_2-ZrO_2-CrO_2$). Stratul depus are o conductibilitate termică foarte redusă şi poate rezista la şocuri termice. Se poate topi suprafaţa stratului iar baza să rămînă în stare solidă. Se arată că se pot obţine straturi care să nu se topească la temperatura de 2204°C, limită impusă astăzi straturilor refractare.

În comunicarea prezentată de H. S. Miller intitulată *Protecţia împotriva coroziunii la temperaturi înalte prin straturi depuse cu pistolul* domeniul de protecţie este împărţit în funcţie de temperatură: pînă la 510°C, de la 538—1093°C, de la 1093—2482°C. Pentru fiecare din aceste domenii se fac recomandări de procedee şi de materiale. Ca urmare a experienţelor făcute se ajunge la concluzia că straturile ,,Sandvici" realizate după cum urmează dau rezultatele cele mai bune: un metal de bază rezistent la temperatură înaltă, deasupra două straturi de materiale refractare diferite acoperite cu un film exterior de nylon fenolic.

De asemenea s-a discutat şi problema protecţiei împotriva coroziunii la temperatura mediului ambiant.

În comunicarea *Metalizarea prin pulverizare contra coroziunii fierului şi oţelului*, T. P. Hoar face unele consideraţii generale asupra metodelor clasice ale metalizării prin pulverizare cu zinc. Se arată că în cazul protecţiei catodice porozitatea stratului depus nu este un inconvenient şi că metalizarea cu zinc asigură o bună protecţie în atmosferă corosivă salină, iar aluminiul în atmosferă industrială. Rezultate foarte bune dau straturile mixte zinc-aluminiu (Al 60%) pentru atmosfere diverse. De asemenea, rezultate foarte bune se obţin prin combinaţia strat metalizat peste care se aplică vopsele.

Rezultatele aplicării metalizării prin pulverizare de zinc în construcţiile hidrotehnice sînt expuse de către J. Friedli în comunicarea intitulată *Experienţe făcute prin metalizarea cu zinc ca protecţie împotriva coroziunii în construcţiile hidrotehnice.*

În această comunicare se scoate în evidenţă importanţa aplicării sablării pentru pregătirea suprafeţei de bază şi se dau parametri optimi de lucru. De asemenea se arată care trebuie să fie grosimea optimă a stratului de zinc în cazul apei dulci, deoarece în acest caz protecţia catodică nu are nici un rol, importanţă avînd densitatea şi aderenţa stratului. Şi în această comunicare se scoate în evidenţă importanţa acoperirii stratului metalizat cu un strat de vopsea.

Aspectul economic al metalizării este tratat în două comunicări *Cîteva idei referitoare la aspectul economic al metalizării prin pulverizare* de W. E. Ballard şi *Consideraţii economice privind aplicarea metalizării la vase de pescuit şi alte ambarcaţiuni mici* de A. R. Old. În ambele comunicări sînt analizate elementele ce trebuie luate în consideraţie la stabilirea preţului de cost al metalizării cu unele cazuri diferite.

În foarte multe ţări metalizarea prin pulverizare a ajuns la un stadiu avansat, procedeul fiind standardizat. E. Kovalski în comunicarea prezentată face o analiză a 26 de norme, indicații și recomandări elaborate de diferite instituții din diverse țări. În mod special discută problema condițiilor de recepționare a lucrărilor de metalizare.

Și problema pregătirii cadrelor de metalizatori a fost dezbătută în două comunicări. A. Hedde și L. Zambeaux au arătat care este metoda și programul de instruire al metalizatorilor în Franța, iar Dr. C. G. Keel a expus situația și programul din Elveția.

*V. Marcu și P. Freund*

F. H. RAYMOND, *L'automatique des informations* (Automatica informațiilor). Masson et Cie. Paris, 1957, 187 p.

Apărută în Editura Masson et Cie., în colecția ,,Evolution des Sciences'' lucrarea deși se adresează unui cerc mai larg de cititori, prezintă problemele științifice la un nivel ridicat, bine catalogate și rezolvate.

În partea introductivă, autorul face o scurtă revedere a automaticii, despre care susține de la început : ,,Automatica conține ideea de program, de reguli și aceea de adaptare la circumstanțe, în condiții prevăzute și catalogate, datorită cărora mașinile și procesele s-ar bucura de oarecare autonomie, dar fără cea mai mică introducere a liberului arbitru''. Acest prim capitol se ocupă de reglare, de servomecanisme și mașini de calcul, expunînd pe scurt cîteva date istorice și probleme matematice, ca și unele observații și recomandări legate de ele. Deoarece însă materia de lucru a mașinilor de calcul este informația, autorul expune cantitatea de informații și semnificația conceptului de memorie.

În capitolul II, începînd cu raportul dintre măsura mărimilor și numere, expune reprezentarea fizică a unui număr natural și explicații legate de logica binară. În capitolul următor prezintă sumar mașinile de calcul analogic, trecînd în revistă analizatoarele diferențiale mecanice și calculatoarele analogice electrice cu reprezentare prin curenți sau tensiuni electrice. Capitolul IV se ocupă de reprezentarea informațiilor, de diverse coduri, despre redonanță și despre posibilitatea de detectare a erorilor și chiar corijarea lor, încheind cu expunerea asupra măsurii confuziei prelucrată după W. H. Klautz. Capitolul următor prezintă structura mașinilor digitale și trece în revistă axiomele algebrei Boole. În capitolul VI se stăruie asupra caracterului de universalitate al calculatoarelor automatice, mașini care execută lucrări imaginate și organizate de om. Mai departe se expune structura digitală de bază a unei mașini simple cu memorie $M$, organ de comandă $C$, organ de acționare $Op$, sistem de comutație $R$ și organe de legătură exterioare $E$. Ulterior se arată, referitor la fiecare organ, modul de funcționare, clasele de transferuri ale informațiilor, pentru ca în cele din urmă să se expună diversele programe simple, deschise, buclate etc., lucrarea încheindu-se cu capitolul VIII, consacrat problemei programării.

În cele din urmă autorul se întreabă dacă automatele digitale sînt capabile de a gîndi și răspunde la aceasta subliniind complexitatea creierului uman față de mașini. Menționează în acest sens și remarca lui Shannon care le consideră cu totul fără inteligență, dar foarte abile și neobosite pentru un lung lanț de operații.

Mașinile de calculat produc un volum mare de lucrări într-un timp minim, avînd posibilitatea unui control logic intern pentru operații după un program dat de om.

Lucrarea este editată în bune condiții și are meritul că pe lîngă o prezentare a problemelor din acest domeniu, dă foarte succint și rezolvările lor, astfel că poate fi cercetată de un număr mare de cititori.

*Chr. Pelecudi*

I. A. GAÈTAN GRANGER, *Possibilités du décolletage automatique sur tours multibroches* (Posibilități de prelucrare din bare pe strunguri automate multiax). Editions Eyrolles, Paris, 1961, 206 p.

Printre piesele de mare consum în construcția de mașini se pot cita buloanele și șuruburile, care se fabrică prin diferite metode, dintre care cea mai veche și mereu perfecționată este prelucrarea din bare profilate, după forma și dimensiunea capului de șurub sau bulon. Această prelucrare este denumită în terminologia franceză ,,décolletage'' și se execută pentru fabricația de mare serie, sau de masă, pe strunguri automate cu mai multe axe.

Autorul cărții mai sus indicate a consacrat cea mai mare parte a carierii sale de inginer studiului și obținerii unei cît mai mari productivități a strungului automat multiax, expunînd în lucrarea sa rezultate foarte interesante asupra tehnologiei avansate și perspectivelor de noi progrese în prelucrările din bare, pe astfel de strunguri.

Planul lucrării este cît se poate de judicios, tratînd în opt capitole diferitele probleme așa cum se succed în gama lor normală de operații.

Primul capitol este consacrat instalării mașinii, montajului suporților pentru bare, rodajului, reglajului, alegerii parametrilor și expunerii unui exemplu de confecționare a unei piese simple pe un strung automat cu opt axe.

Capitolul al doilea tratează despre operația de bază pe care autorul o definește ca fiind aceea care necesită un minimum de rotații ale diferitelor axe, suficient celorlalte operații conexe, operație pe care o consideră foarte importantă pentru a stabili cadența sau debitul de fabricație.

Capitolele III și IV completează tehnologia de prelucrare, studiind timpii efectivi de execuție, timpii morți datoriți pregătirii materialului după efectuarea unui ciclu și timpilor neproductivi datoriți diverselor cauze : schimbarea barelor și sculelor așchietoare, reglajului și controlului, erorilor de manevrare etc. Capitolul IV se încheie cu expunerea unei formule a producției orare medii.

Capitolul V se ocupă de montajele multiple, adică acelea care permit să se obțină, în cursul unei evoluții, mai multe piese, fie similare, fie diferite. Autorul expune gama de operații, completînd-o cu crochiuri succesive pentru astfel de prelucrări de mare productivitate.

În ultimele trei capitole autorul tratează fondul problemei anunțată prin titlul lucrării și anume chestiunile referitoare la posibilitățile strungului automat multiax, după cum urmează :

— În capitolul VI se trec în revistă posibilitățile actuale ale utilajului pentru prelucrările din bară, cu examinarea detaliată a cîtorva exemple de ,,décolletage''.

— În capitolul VII autorul studiază posibilitățile eventuale de perfecționare a tehnologiei, făcînd unele sugestii utile.

— Ultimul capitol este destinat examinării unor posibilități de perspectivă mai îndepărtate, posibilități pe care autorul le denumește virtuale, completîndu-le cu sugestii personale de inovații și perfecționări ale strungurilor automate cu mai multe axe.

În concluzie, putem constata că lucrarea recenzată cuprinde o expunere completă și foarte documentată, într-o formă concisă, în care apar uneori constatări caustice sau spirituale. Această lucrare, care reprezintă o adevărată disecție meticuloasă a domeniului de prelucrări pe strungurile automate multiax, are o incontestabilă utilitate pentru întreprinderile de metalurgie prelucrătoare și mai ales pentru construcția de mașini și instalații.

*V. Marcu*

**A. SOMMERFELD**, *Mechanik der deformierbaren Medien* (Mecanica mediilor deformabile), ed. a IV-a, Akad. Verlaggesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig, 1957, 372 + XII p.

Această lucrare a lui A. Sommerfeld reprezintă al doilea volum dintr-un ciclu de șase volume privind fizica teoretică ; a IV-a ediție a lucrării a apărut după moartea autorului, fiind prelucrată și completată, în spiritul ediției originale, de către E. Fucs. Scrisă într-un stil propriu de către un fizician de mare renume, cartea cuprinde opt capitole, în care se studiază, pe cît posibil, simultan, corpurile solide și corpurile fluide.

În capitolul I, după ce se stabilește teorema fundamentală a cinematicii, datorită lui Helmholtz, se fac cîteva considerații asupra unor probleme de calcul vectorial și tensorial. Capitolul al II-lea este destinat staticii mediilor deformabile. După o introducere cu caracter general privind toate felurile de medii, se dau rezultate valabile pentru fluide compresibile și incompresibile, apoi pentru corpuri elastice. Se consideră de asemenea și influența frecării, în special la fluidele incompresibile. Al III-lea capitol cuprinde probleme de dinamica mediilor deformabile. Se consideră astfel ecuațiile lui Euler atît pentru fluide incompresibile cît și pentru fluide compresibile. Se introduce apoi influența frecării și criteriul de turbulență al lui Reynold. În sfîrșit se dau ecuațiile de mișcare ale corpului elastic. Se tratează de asemenea unele probleme privind capilaritatea.

Capitolul al IV-lea este consacrat teoriei vîrtejurilor. Se stabilesc teoremele lui Helmholtz, se dă o analogie electromagnetică și se studiază, în special, liniile paralele de vîrtejuri. Al V-lea capitol cuprinde teoria valurilor. Se studiază valurile plane, la adîncimi mai mari sau mai mici, valurile circulare, precum și valurile lăsate de corăbii și fenomenul Mach. În capitolul al VI-lea sînt tratate mișcările cu vîrtej în domenii limitate. Menționăm astfel aleia de vîrtejuri a lui Kârmán și stratul limită al lui Prandtl.

Capitolul al VII-lea este destinat unor completări la probleme de hidrodinamică. Menționăm în special studiul făcut cu privire la turbulență. În capitolul al VIII-lea se fac completări la probleme de elasticitate. Găsim astfel probleme de încovoiere și torsiune, introducerea noțiunii de tensiuni inițiale, considerații asupra posibilităților de rezistență ale materialelor, considerații asupra proprietăților plastice ale unor materiale. Menționăm, de asemenea, problema semispațiului elastic, tratată atît în caz static cît și din punct de vedere al propagării undelor.

Fiecare capitol este însoțit de enunțurile unui număr de probleme, pentru care se dau la sfîrșit unele indicații. Într-un apendice se fac unele complemente de analiză tensorială.

Cartea lui A. Sommerfeld este scrisă într-un stil deosebit de clar și cuprinde rezultate clasice. Menționăm, în special, încercarea autorului de a prezenta — pe cît posibil — într-o formă unitară problemele de mecanica fluidelor cu problemele de mecanica corpului solid. Credem că această lucrare, devenită clasică, poate fi citită cu interes atît de cercetătorii din mecanica mediilor continue deformabile cît și de cei ce se inițiază în această direcție.

*P. P. Teodorescu*

---

ARMANDO LENCASTRE, *Manuel d'Hydraulique Générale* (Manual de hidraulică generală). Editions Eyrolles, Paris, 1961, 411 p.

Cartea inginerului Lencastre este un breviar, conținînd elementele necesare proiectării construcțiilor și instalațiilor hidraulice. Prima parte conține noțiuni și teoreme de bază, exemple de calcul, precum și o bogată bibliografie. Prezentarea se remarcă prin claritate, prin buna ordonare a materialului şi prin folosirea celor mai recente lucrări de specialitate. Exemplele contribuie la sistematizarea calculelor, iar bibliografia este deosebit de bogată.

Partea a doua cuprinde, peste 180 de pagini, tabelele şi abacele necesare efectuării calculelor numerice corespunzătoare capitolelor tratate.

Lucrarea de faţă este interesantă prin aceea că prezintă metodele de calcul folosite în literatura occidentală. Pentru proiectanţii noştri, acest interes este însă numai parţial, deoarece în prezent există breviare hidraulice mult mai complete, ca cel al lui P. G. Kiselev, tradus şi în limba romînă.

*Dan. Gh. Ionescu*

A. M. KUETHE, J. D. SCHETZER, *Foundations of Aerodynamics* (Bazele aerodinamicii). John Wiley a. Sons, New York 1959, 446 p.

Cartea *Foundations of Aerodynamics* de A. M. Kuethe şi J. D. Schetzer este ediţia a II-a a lucrării cu acelaşi titlu apărută în 1950.

Faţă de prima ediţie, autorii au adus unele modificări şi completări impuse de progresele pe care le-a făcut aerodinamica în această perioadă.

În linii mari, planul lucrării este următorul : primele şase capitole se ocupă de scurgerea fluidului perfect, capitolele VII–XI iau în consideraţie compresibilitatea fluidului nevîscos, iar capitolele XII–XVI sînt consacrate studiului efectelor vîscozităţii atît în scurgere incompresibilă cît şi compresibilă. Urmează apoi tabele şi patru anexe consacrate unor probleme speciale de mare actualitate.

Mai pe larg cuprinsul cărţii este următorul :

În primele două capitole sînt introduse unele noţiuni de bază privind proprietăţile fluidelor şi formulele uzuale de calcul şi analiză vectorială utilizate în aerodinamică.

Capitolul al III-lea intitulat *Dinamica mediului fluid* se ocupă cu ecuaţiile de bază ale scurgerii fluidelor incompresibile.

Capitolul următor se ocupă cu scurgerea în jurul corpurilor. Sînt prezentate noţiunile de sursă, dublet, vîrtej şi aplicaţiile lor la studiul scurgerii în jurul cilindrilor cu şi fără circulaţie.

Capitolele V şi VI sînt dedicate studiului profilelor subţiri, distribuţiei de vîrtejuri pentru profile subţiri, influenţa curburii asupra unghiului de portanţă nulă şi coeficientului de moment, precum şi studiului aripilor de anvergură finită şi soluţiile clasice pentru acest caz.

În capitolul VII sînt indicate modificările ecuaţiilor fundamentale ale scurgerii fluidelor în cazul cînd se ia în consideraţie compresibilitatea.

Problema relaţiilor energiei a primit o deosebită atenţie din partea autorilor care au rescris capitolul VIII unde este expusă această chestiune.

Aplicaţiile scurgerii unidimensionale compresibile sînt tratate în capitolul IX. În mod special s-a insistat asupra problemei transferului de căldură care în prima ediţie nu era inclus.

Capitolul X se ocupă cu undele şi anume : undele Mach, undele de şoc plane, normale şi oblice, undele de şoc conice şi reflexia undelor.

Studiul aripilor în curent compresibil subsonic şi supersonic se face în capitolul XI. Prezentarea se face din punct de vedere al teoriei suprafeţelor portante.

Noţiunile de bază privind dinamica fluidului vîscos constituie obiectul capitolului XII.

În continuare, se tratează despre scurgerea laminară incompresibilă în tuburi și în lungul unei plăci. Se dă apoi relația integrală a lui Kármán și se expune analiza stratului limită a lui Poolhausen.

Capitolul XIV se ocupă cu stratul limită laminar în regim compresibil.

Următorul capitol tratează despre condițiile de trecere de la scurgerea turbulentă la cea laminară, iar ultimul capitol (XVI) se ocupă de scurgerea turbulentă.

Urmează apoi cele 4 anexe dintre care prima se ocupă de analiza dimensională, a doua de legătura dintre ecuația lui Navier-Stokes și ecuația energiei, iar anexa C face o prezentare comparativă a rezultatelor teoretice și experimentale pentru diverse forme de aripi.

Ultima anexă este consacrată unei prezentări succinte a comportării fluidelor reale la viteze foarte mari (scurgeri hipersonice).

În încheiere este dată o culegere de probleme, foarte utilă pentru studenți.

Din modul cum este ordonat și prezentat materialul, credem că obiectivul pe care și-l propun autorii, de a prezenta într-o formă cît mai clară pentru studenți noțiunile de bază ale aerodinamicii, este cu prisosință atins.

Chiar dacă analiza matematică a fenomenelor este mai succintă, credem că, prezentarea și interpretarea din punct de vedere fizic a acestora poate fi utilă celor care lucrează în probleme de aerodinamică.

*Ș. Săndulescu*

* * * *Proceedings of the third japan congress on testing materials* (Comunicările celui de-al treilea Congres japonez pentru încercări de materiale). The Japan Society for Testing Materials, Kyoto, Japan, 1960, 166 + 100 + X p.

În afara unei prezentări a stadiului actual al industriei japoneze, făcută într-un apendice de 100 pagini, lucrarea conține 43 de comunicări din cele 96 de comunicări prezentate la al treilea Congres japonez pentru încercări de materiale, care a avut loc la Tokyo la 15—16 septembrie 1959.

Un număr de 29 de comunicări se ocupă de materialele metalice. Multe din aceste comunicări tratează probleme privind rezistența la oboseală, precum și influența solicitărilor variabile. Cîteva lucrări sînt dedicate problemelor de fluaj. Menționăm o formulă de corecție, dată de K. Takase, pentru contracția locală ce apare în cazul încercării la întindere a unei epruvete de secțiune dreptunghiulară. De asemenea, se consideră structura anelastică a cristalelor din care sînt alcătuite diferite metale.

Alte 8 comunicări tratează problema materialelor nemetalice. Aceste comunicări privesc rezistența diferitelor mortare de ciment, precum și diferite probleme legate de betoane. Menționăm astfel încercările privind permeabilitatea betonului, efectuate de J. Murata. Un studiu interesant este dedicat rezistenței la oboseală a cauciucului în stare de vibrație.

Metodele și aparatajele de încercat fac obiectul altor 6 comunicări. Menționăm astfel o metodă de măsurare a deformațiilor cu ajutorul metodei moarării (bazată pe un efect de interferență a luminii pentru o rețea trasată pe material). Se studiază și diferite vibrografe.

Articolele publicate sînt foarte interesante pentru cercetătorii care se ocupă cu încercări de materiale. Ele denotă o preocupare continuă a cercetătorilor japonezi în această direcție.

*P. P. Teodorescu*

# LISTA PUBLICAŢIILOR PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE

Nikolai Semenovici Kurnakov, Izd. Akademii nauk SSSR.

Valentin Alexeevici Karghin, Izd. Akademii nauk SSSR.

Lina Solomonovna Ştern, Izd. Akademii nauk SSSR.

D. P. Serdincenko ş.a., Piotr Nikolaevici Cirvinskii (1880—1955). Moskva, Izd-vo Akademii Nauk SSSR, 1960, 95 p.

P. P. Dobronravina, Grigorii Abramovici Şain. Moskva, Izd-vo Akademii nauk SSSR, 1960, 70 p.

A. Z. Valfiş, *Ţelîe tociki v mnogomernîh şarah* (Punctele întregi în sferele multidimensionale). Tbilisi, Izd-vo gruzinskoi SSR, 1959, 460 p. (Matematiceskii Institut im. A. M. Razmadze).

Iu. Bonder, *O tenzornom metode v teorii neustanovivşihsia prostranstvennîh tecenii tipa ,,dvoinoi volnî"* (Despre metoda tensorială în teoria scurgerilor spaţiale nepermanente de tipul ,,undei duble"). Extras din ,,Prikladn. Matem. i Mehan." Akad. nauk. SSSR, tom. XXIV, vîp. 6, 1960, 9 p.

— Trudî Moskovskogo Instituta injenerov jeleznodorojnogo transporta im. I. V. Stalina.

E. D. Safarov, *Krivîie raspredeleniia i obespecennosti i ih primenenie k ghidrologhiceskim rascetam* (Curbele de distribuţie şi de aprovizionare şi aplicarea lor în calculele hidrologice). Erevan, Izd-vo Akad. nauk Armianskoi SSR, 1947, 132 p.

V. M. Kovan ş.a., *Sborka v maşinostroenii* (Asamblarea în construcţia de maşini) Ocerk istorii razvitia, Moskva, Izd-vo Akad. nauk SSSR, 1960, 75 p.

G. Gheorghiev, *O differenţialnoi gheometrii vektornîh polei i o nekotorîh ee prilojeniah* (Asupra geometriei diferenţiale a cîmpurilor de vectori şi cîteva aplicaţii). Extras din ,,Bîlgarska Akad. na Naukite Atd. za Fiz.-Mat. i tehn. nauki" Sofia, 1959, tom. IV, kn. 1, 14 p.

Robert R. Long, *Mechanics of Solids and Fluids*. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., 1961, 156 p.

* * *, *Laboratoires d'Hydraulique et de Mécanique des Fluides*. Travaux et Publications, publicată de : Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique, d'Electronique et d'Hydraulique. Institut de Mécanique des Fluides, Toulouse, 1960.

A. Jante, *Über die Spülung von Zweitaktmotoren*. Comunicări ale Academiei de Ştiinţe din Berlin, 1960.

### Lucrări primite de la Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt E. V. (DVL)

A. WALTZ, *Beitrag zur Berechnung kompressibler Grenzschichten mit W ärmeübergang.*
R. SCHWARZENBERGER, *Über exakte Lösungen der gasdynamischen Grundgleichungen.*
E. MÉITER, *Flow of an Incompressible Fluid through an Oscillating Staggered Cascade.*

### Lucrări primite de la The College of Aeronautics Cranfield

K. C. GARNER, *Load Compensation Techniques Using Multi-Tapped Potentiometers.*
A. S. L. CHAN, *The Design of Michell Optimum Structures.*

### Lucrări primite de la Norges Geotekniske Institut, Oslo (1961)

E. M. SERGEJEV, *Sandkolmation.*
L. BJERRUM ş.a., *Fundamental Shear Strength Properties of the Lilla Edet Clay.*
N. SIMONS, *Shear Strength Properties of two Normally Consolidated Norwegian Clays.*
O. EIDE ş.a., *Settlements of a Foundation on Clay.*
H. DOHLEN, *Construction of an Eearth Fill Dam at Bordalsvatn.*
* * * *Drainage around Buildings.*

În

EDITURA ACADEMIEI R.P.R.

au apărut:

**Probleme de automatizare**

I

**A doua consfătuire asupra automatizărilor industriale în R.P.R.**
**(5–8 Iunie 1957)**
1960, 345 p., 15 lei

II

**Folosirea maşinilor electronice de calcul în industrie şi economie**
1961, 171 p., 8,55 lei

III

**Sesiunea asupra problemelor teoretice şi practice**
**privitoare la automatizările industriale**
1961, 188 p., 8,80 lei

R F 2557

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

5
ANUL XII
1961

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
1848

# STUDII ȘI CERCETĂRI DE

# MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

## COMITETUL DE REDACŢIE

*Redactor responsabil:*

ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri:

ACADEMICIAN N. PROFIRI;
A. BELEŞ, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
CR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
R. BOGDAN, conferenţiar la Institutul de petrol, gaze şi geologie, Bucureşti;
N. TIPEI, conferenţiar la Institutul politehnic, Bucureşti;
M. ARCAN, şef secţie; Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor (INCERC), Bucureşti.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
APARE DE 6 ORI PE AN
*Redacţia*: INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"
**Str. Const. Mille 15, tel. 17.34.09**

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

# STUDII ŞI CERCETĂRI
# DE
# MECANICĂ APLICATĂ

5

ANUL XII

1961

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

**Revista**

## *STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ*

*publică:*

— Studii originale *de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.*

— Note (*lucrări mai scurte*) *cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.*

— Referate ştiinţifice şi tehnice *în care se expune*: *stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.*

— Recenzii *asupra cărţilor şi studiilor romîne sau străine.*

*Domeniile de specialitate ale revistei sînt:*

— *Aeromecanică* (*mecanica fluidelor, aerodinamică, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie* (*aeromotori*).

— *Hidromecanică* (*hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine hidraulice şi pompe, amenajări hidraulice*).

— *Construcţii de maşini* (*cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue*).

— *Mecanică generală* (*rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice*).

— *Statica şi dinamica construcţiilor* (*metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode de executarea lucrărilor de construcţii*).

— *Tehnica măsurătorilor* (*aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică*).

*Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.*

★

*Articolele vor fi redactate într-o formă concisă şi clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părţile cunoscute ale problemei.*

*Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar şi citeţ cu cerneală. Figurile şi graficele se vor desena în tuş pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar şi în număr cît mai mic.*

*Literatura citată în text se va insera la sfîrşitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariţie, iar pentru revistă se va indica şi numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.*

*Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză şi germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.*

*Aceleaşi norme sînt valabile şi pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.*

*Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, Bucureşti, str. C. Mille 15, raionul Gh. Gheorghiu-Dej.*

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

# STUDII ŞI CERCETĂRI
# DE
# MECANICĂ APLICATĂ

Tomul XII, nr. 5 1961

## SUMAR

**STUDII**

*ELASTICITATE—PLASTICITATE—REZISTENŢA MATERIALELOR* Pag.

ŞTEFAN BĂLAN, SANDU RĂUTU şi VALERIU PETCU, Scheme de rupere la grinzi static nedeterminate cu secţiunea variabilă . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 949
J. BRILLA, Probleme de contact ale semiplanului elastic anizotrop . . . . . . . . . 959
M. TANNENBAUM, Unele probleme în legătură cu calculul la starea limită de rezistenţă a elementelor de beton precomprimat . . . . . . . . . . . . . . . . . 989
N.S. PÎRVULESCU, Smulgerea burlanelor din filet conic . . . . . . . . . . . . . . 1005
VALERIU PETCU, Un principiu fundamental în proiectarea structurilor static nedeterminate de beton armat în domeniul plastic . . . . . . . . . . . . . . . . . 1017

*TEORIA MECANISMELOR*

D. MANGERON şi C. DRĂGAN, Studiul mecanismelor spaţiale prin metoda acceleraţiilor reduse. I. Mecanisme spaţiale cu patru organe . . . . . . . . . . . . 1025
CHR. PELECUDI, R. C. BOGDAN şi L. CALMACIUC, Asupra solicitărilor şi deformaţiilor la încovoiere ale capacelor la mecanismele bielă-manivelă . . . . . . . 1047
SZEKELY IMRE, Studiu asupra blocului conic dinţat compus din roţi dinţate conicoevolventice . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1057

*AEROMECANICĂ*

N. N. PATRAULEA, Aripi inelare cu jet de bord de fugă . . . . . . . . . . . . 1075

*HIDROMECANICĂ*

E. RĂZVAN, Metodica de studiu a mişcării macroturbulente a fluidelor grele şi unele rezultate obţinute . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1081

*UNGERE—FRECARE—UZURĂ* Pag.

V. N. CONSTANTINESCU, Considerații asupra determinării distribuției presiunilor în lagărele alimentate sub presiune . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1101
D. PAVELESCU și I. ILIUC, Metode pentru măsurarea grosimii filmului de lubrifiant la lagăre circulare . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1117
V. MARCU și N. PASCU, Considerații asupra măririi rezistenței la uzură a supapelor de la motoare . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1133

**NOTE**

T. OROVEANU, Asupra formulei generalizate a lui Dupuit . . . . . . . . . . . 1147

**REFERATE ȘTIINȚIFICE ȘI TEHNICE**

OLGA BIȚĂ și I. DINCĂ, Date noi în tehnica rodării motoarelor cu ardere internă 1150

**RECENZII** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1161

**PUBLICAȚII PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACȚIE** . . . . . . . . . . . . . . 1175

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ „ТРАЯН ВУЯ”

# ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

**Том XII, № 5** **1961**

## СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

**СТАТЬИ**

*УПРУГОСТЬ — ПЛАСТИЧНОСТЬ — СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ*

ШТЕФАН БАЛАН, САНДУ РЭУТУ И ВАЛЕРИУ ПЕТКУ, Схемы разрушения статически неопределимых балок переменного сечения . . . . 949
И. БРИЛЛА, Контактная задача упругой анизотропной полуплоскости . 959
М. ТАННЕНБАУМ, Некоторые задачи в связи с предельным состоянием прочности элементов из предварительно напряженного бетона . . . 989
Н. С. ПЫРВУЛЕСКУ, Выдергивание обсадных труб из конической резьбы 1005
ВАЛЕРИУ ПЕТКУ, Основной принцип при проектировании железобетонных статически неопределимых конструкций в пластической области . 1017

*ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ*

Д. МАНЖЕРОН и К. ДРЭГАН, Исследование пространственных механизмов методом приведенных ускорений. I. Четырехзвенные пространственные механизмы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1025
ГР. ПЕЛЕКУДИ, Р. К. БОГДАН и Л. КАЛМАЧУК, О нагрузках и деформациях изгиба головок кривошипно-шатунных механизмов . . . . 1047
СЕКЕЛИ ИМРЕ, Исследование зубчатого конического блока, составленного из конусно-эвольвентных шестерен . . . . . . . . . . . . . 1057

*АЭРОМЕХАНИКА*

Н. Н. ПАТРАУЛЯ, Кольцевые крылья со струей задней кромки . . . . . 1075

*ГИДРОМЕХАНИКА*

Е. РЭЗВАН, Методика исследования макротурбулентного движения и некоторые полученные результаты . . . . . . . . . . . . . . . . 1081

### *СМАЗКА – ТРЕНИЕ – ИЗНОС*

Стр.

В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, К определению распределения давлений в подшипниках, питаемых под давлением . . . . . . . . . . . . . . . . 1101

Д. ПАВЕЛЕСКУ и И. ИЛЮК, Методы измерения толщины смазочной пленки круглым подшипником . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1117

В. МАРКУ и Н. ПАСКУ, К увеличению износостойкости клапанов двигателей . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1133

### ЗАМЕТКИ

Т. ОРОВЯНУ, К обобщенной формуле Дюпуи . . . . . . . . . . . . . 1147

### НАУЧНЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕФЕРАТЫ

ОЛЬГА БИЦА и И. ДИНКА, Новые данные о притирке двигателей внутреннего сгорания . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1150

**РЕЦЕНЗИИ** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1161

**ПУБЛИКАЦИИ, ПОСТУПИВШИЕ ПУТЕМ ОБМЕНА В РЕДАКЦИЮ** . . . 1175

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

**Журнал**

## „ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ"

*публикует:*

— Оригинальные исследования *высокого уровня, представляющие общий научный интерес, связанный с практикой.*

— Заметки (*краткие работы*) *оригинального характера, представляющие уточнение некоторого вопроса.*

— Научные и технические рефераты, *в которых излагаются: современное состояние определенной задачи с выявлением нового подхода к ней, замечания и обсуждения некоторых работ по прикладной механике.*

— Рецензии *на румынские или зарубежные книги и исследования. В журнале публикуются работы по следующим специальностям:*

— *Аэромеханика (механика жидкостей и газов, аэродинамика, газодинамика, механика самолета, аэроупругость, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, термоаэродинамика реактивных двигателей, вентиляция, ветродвигатели).*

— *Гидромеханика (гидравлика, гидромеханические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства).*

— *Машиностроение (кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей, механика сплошных твердых сред).*

— *Общая механика (сопротивление материалов, упругость, пластичность, вибрация и удары, устойчивость, электрические и гидравлические аналогии).*

— *Статика и динамика сооружений (методы статистического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, механика грунтов, устойчивость грунтов, методы производства строительтых работ).*

— *Техника измерений (электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в технике).*

*Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех отечественных специалистов и зарубежных сотрудников.*

★

*Статьи должны быть написаны в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений (относящихся к уже известным частям проблемы).*

*Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала, формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует делать китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.*

*Литература, цитированная в тексте должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, заглавие, том, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов — и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.*

*Кроме текста, для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском языке или же на русском, французском, английском или немецком языках. Резюме должно составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к работам зарубежных сотрудников, редактированным на русском, английском, французском или немецком языках.*

*Рукописи препровождаются по адресу: Институт прикладной механики. Бухарест, ул. Константин Милле, № 15, район Г. Георгиу-Деж.*

## Le périodique

### «*STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ*»
### («*ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE*»)

*publie :*

— *des* études originales *à caractère hautement scientifique, recherches fondamentales d'intérêt général, orientées vers l'activité pratique;*

— *des* notes (*communications brèves*) *à caractère général, ou constituant une mise au point d'une certaine question;*

— *des* exposés scientifiques et techniques *où l'on expose : l'état actuel d'un certain problème, en soulignant son aspect nouveau; des remarques et discussions concernant certains travaux de mécanique appliquée;*

— *des* notes bibliographiques *au sujet des livres et des études roumains et étrangers.*

*Les domaines de spécialité de la revue sont les suivants :*

— *aéromécanique* (*mécanique des fluides, aérodynamique, dynamique des gaz, mécanique de l'avion, aéroélasticité, aérodynamique des moteurs à combustion interne, thermo-aérodynamique des moteurs à réaction, ventilation, aéromoteurs*)*;*

— *hydromécanique* (*hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines hydrauliques et pompes*)*;*

— *constructions mécaniques* (*cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des machines, automation, étude des surfaces, technologie des milieux solides continus*)*;*

— *mécanique générale* (*résistance des matériaux, élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques*)*;*

— *statique et dynamique des constructions* (*méthodes de calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilité des terrains, méthodes d'exécution des travaux de construction*)*;*

— *technique des mesures* (*appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation des ultra-sons et des isotopes radioactifs en technique*).

*La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires en publiant, dans ce but, les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.*

★

*Les articles seront rédigés dans un style concis et clair, étant évitées les introductions trop longues concernant les données connues des problèmes.*

*Les manuscrits seront envoyés en trois exemplaires, dactylographiés, aux formules écrites de manière lisible, à l'encre. Les figures, ainsi que les diagrammes, seront tracés à l'encre de Chine sur du papier calque. On utilisera le nombre de figures strictement indispensable.*

*Les références bibliographiques seront mentionnées à la fin de l'article. On y indiquera le nom de l'auteur, le titre de l'ouvrage, le tome, la page, le lieu de la parution et, pour les périodiques on ajoutera le numéro auquel on se réfère. On ne fera pas mention des travaux non publiés.*

*Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé en roumain ou, éventuellement, en russe, français, anglais ou allemand (environ une page pour 20 pages dactylographiées de texte).*

*Les mêmes normes sont valables pour les collaborateurs étrangers, qui peuvent rédiger leurs travaux en russe, anglais, français ou allemand.*

*Les manuscrits seront envoyés à l'adresse suivante : Institut de Mécanique Appliquée «Traian Vuia», 15, str. Constantin Mille, Bucarest, Roumanie.*

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE «TRAIAN VUIA»

# ÉTUDES ET RECHERCHES
# DE
# MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome XII, nº 5 1961

## SOMMAIRE

**ÉTUDES**

*ÉLASTICITÉ—PLASTICITÉ—RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX*

Page

ŞTEFAN BĂLAN, SANDU RĂUTU and VALERIU PETCU, Failure schemes for statically indeterminate beams of variable cross-section . . . . . . . . . . . . 949

J. BRILLA, Contact problems of an elastic anisotropic half-plane . . . . . . . . . . 959

M. TANNENBAUM, Quelques problèmes soulevés par le calcul à l'état-limite de la résistance des éléments de béton précontraint . . . . . . . . . . . . . . . . 989

N. S. PÎRVULESCU, La force d'arrachement du filet conique des tubes pour le tubage des sondes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1005

VALERIU PETCU, A basic principle for the design of statically indeterminate reinforced concrete structures in the plastic range . . . . . . . . . . . . . . . . . 1017

*THÉORIE DES MÉCANISMES*

D. MANGERON et C. DRĂGAN, Etude des mécanismes dans l'espace par la méthode des accélérations réduites. I. Mécanismes dans l'espace à quatre organes . . . . 1025

CHR. PELECUDI, R. C. BOGDAN und L. CALMACIUC, Über die Biegebelastungen und -Verformungen der Deckel bei Kurbelgetrieben . . . . . . . . . . . . . . 1047

SZEKELY IMRE, Untersuchung des aus Kegel-Evolventen-Zahnrädern gebildeten Blockes 1057

*AÉROMÉCANIQUE*

N. N. PATRAULEA, Annular wings with jet-flap . . . . . . . . . . . . . . . . 1075

*HYDROMÉCANIQUE*

E. RĂZVAN, Méthodes pour l'étude du mouvement macroturbulent des fluides lourds et quelques-uns des résultats obtenus . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1081

*LUBRIFICATION – FROTTEMENT – USURE* Page

V. N. CONSTANTINESCU, Considerations on the pressure distribution in hydrostatic bearings . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1101
D. PAVELESCU and I. ILIUC, Methods for measuring the lubricant film thickness in journal bearings . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1117
V. MARCU et N. PASCU, Considérations sur l'augmentation de la résistance à l'usure des soupapes de moteurs . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1133

**NOTES**

T. OROVEANU, Sur la formule généralisée de Dupuit . . . . . . . . . . . . . . 1147

**RAPPORTS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES**

OLGA BIŢĂ and I. DINCĂ, New data on the running-in of internal combustion engines 1150
**REVUE BIBLIOGRAPHIQUE** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1161
**PUBLICATIONS REÇUES À LA RÉDACTION** . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1175

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

# SCHEME DE RUPERE LA GRINZI STATIC NEDETERMINATE CU SECŢIUNEA VARIABILĂ

DE

ŞTEFAN BĂLAN
MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI R. P. R.
SANDU RĂUTU [1] şi VALERIU PETCU [2]

Aplicarea calculului în domeniul plastic la grinzi static nedeterminate este condiţionată de cunoaşterea mecanismului de rupere, respectiv a poziţiilor secţiunilor critice (secţiuni în care se formează articulaţiile plastice).

În particular, la grinzile static nedeterminate cu secţiunea constantă există o schemă unică de rupere, caracterizată prin formarea a trei articulaţii plastice pentru fiecare deschidere — una în cîmp şi două pe reazeme.

Variaţia secţiunii la grinzile static nedeterminate modifică însă legea de distribuţie a momentelor de plastificare în lungul grinzii, ceea ce are drept consecinţă apariţia a trei scheme posibile de rupere plastică, funcţie de modul de rezemare, de legea de variaţie a secţiunii şi de modul de încărcare. Schemele se deosebesc prin poziţia articulaţiilor plastice corespunzătoare momentelor negative.

Aceste scheme sînt prezentate în figura 1 pentru cazul particular al grinzii dublu încastrate cu vute simetrice drepte.

— Schema I este caracterizată prin două articulaţii plastice pe reazeme (fig. 1 *a*) şi una în cîmp.

— Schema II este caracterizată prin două articulaţii plastice situate în cuprinsul vutelor (fig. 1 *b*) şi una în cîmp.

— Schema III este caracterizată prin trei articulaţii plastice situate în zona de secţiune constantă (fig. 1 *c*).

---

[1] Institutul de construcţii Bucureşti.

[2] Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor (INCERC) Bucureşti.

Trebuie observat faptul că schemele I şi III de rupere constituie limitele superioară şi inferioară ale schemei II. În consecinţă, rezultatele date de schemele I şi III se pot deduce din cele obţinute pentru schema II de rupere, prin particularizările corespunzătoare.

Stabilirea schemei reale de rupere, constînd în determinarea poziţiilor articulaţiilor plastice, este o condiţie indispensabilă în vederea obţinerii capacităţii portante reale a grinzii considerate. Aceasta implică efectuarea unor studii teoretice şi experimentale sistematice pentru fiecare tip de grindă, luîndu-se în considerare legile curente de variaţie a secţiunii, modul de încărcare şi caracteristicile materialelor din care se execută aceste elemente de construcţie.

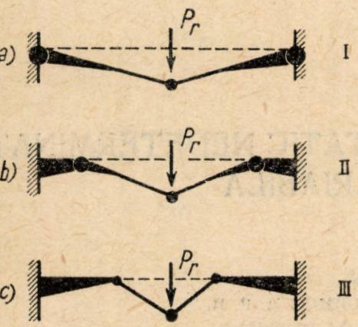


Fig. 1, *a*, *b*, *c*

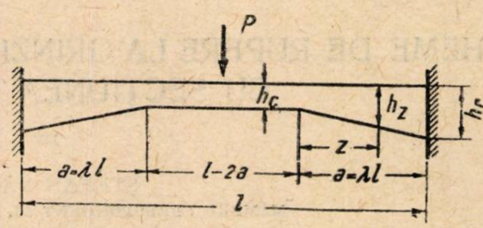


Fig. 2

În cele ce urmează se prezintă studiul teoretic şi verificarea experimentală a schemelor de rupere pentru grinda dublu încastrată cu secţiunea dreptunghiulară, cu vute simetrice drepte, alcătuită din mateţial ideal-plastic, solicitată de o forţă concentrată în mijlocul deschiderii (fig. 2).

## NOTAŢII

$P$ — sarcina care solicită grinda,
$P_1$ — sarcina corespunzătoare formării primei articulaţii plastice,
$P_r$ — sarcina de rupere (corespunzătoare formării ultimei articulaţii plastice),
$r = \frac{P_r}{P_1}$ — coeficientul de redistribuţie,
$M_0 = \frac{P.l}{4}$ — momentul de simplă rezemare,
$M_c$ — momentul maxim în cîmp, în stadiul elastic,

$M_r$ — momentul de pe reazem, în stadiul elastic,
$M_{pc}$ — momentul de plastificare în cîmp,
$M_{pr}$ — momentul de plastificare pe reazem,
$M_{pz}$ — momentul de plastificare în secțiunea situată la distanța $z$ de începutul vutei,
$l$ — deschiderea grinzii,
$a$ — lungimea vutei,
$h_c$ — înălțimea secțiunii în cîmp,
$h_r$ — înălțimea secțiunii pe reazem,
$h_z$ — înălțimea secțiunii situată la distanța $z$ de începutul vutei,
$z$ — distanța măsurată de la începutul vutei pînă la o secțiune curentă din cuprinsul vutei,

$$\lambda = \frac{a}{l}; \quad \eta = \frac{h_r}{h_c}; \quad \xi = \frac{z}{a}; \quad K = \frac{M_r}{M_0}.$$

## I. STUDIUL TEORETIC

### 1. SARCINA DE RUPERE. POZIȚIA ARTICULAȚIILOR PLASTICE

Pentru grinda dublu încastrată cu vute simetrice drepte, schema II conduce la sarcina de rupere dată de relația :

$$P_r\left(\frac{l}{2} - a + z\right) = 2\,(M_{pc} + M_{pz}).$$

Deoarece

$$\frac{M_{pz}}{M_{pc}} = \frac{h_z^2}{h_c^2} = [1 + (\eta - 1)\xi]^2,$$

pentru sarcina de rupere rezultă următoarea expresie :

$$P_r = \frac{1 + [1 + (\eta - 1)\xi]^2}{1 - 2.\lambda + 2\cdot\lambda\cdot\xi} \cdot \frac{4\,M_{pc}}{l}. \tag{1}$$

Poziția articulațiilor plastice corespunzătoare momentelor negative rezultă din condiția de minimum a sarcinii de rupere.

Valoarea coeficientului $\xi$, care caracterizează atît poziția articulațiilor plastice cît și minimumul sarcinii de rupere este dată de ecuația

$$\frac{dP}{d\xi} = 0.$$

După efectuarea operaţiilor, ecuaţia capătă următoarea formă:

$$\lambda(\eta-1)^2\cdot\xi^2+2(\eta-1)^2.(1-2\lambda)\cdot\xi+2(\eta-1-2\eta\cdot\lambda)=0. \qquad (2)$$

Această ecuaţie este rezolvată grafic în diagrama din figura 3.

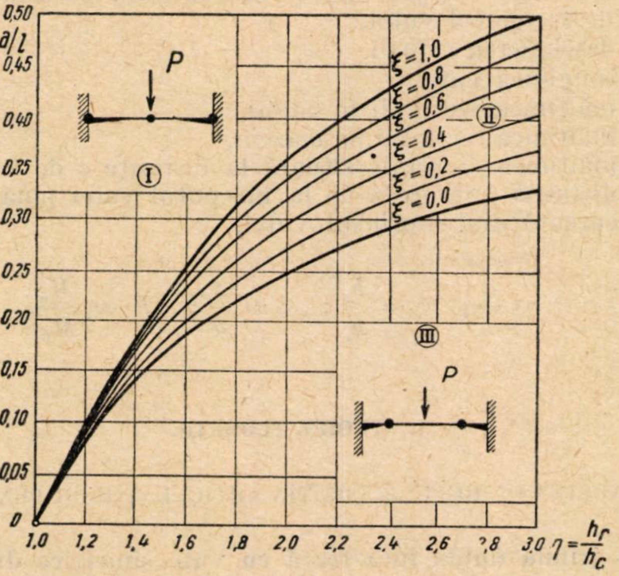


Fig. 3

*Observaţii*

1. Dacă ruperea are loc după schema I (fig. 1 *a*), $\xi=1$, şi ecuaţia (2) devine

$$\lambda\cdot(\eta-1)^2+2(\eta-1)^2(1-2\lambda)+2(\eta-1-2\eta\lambda)=0,$$

de unde rezultă

$$\lambda=\frac{2\eta(\eta-1)}{4\eta+3(\eta-1)^2}.$$

2. Dacă ruperea are loc după schema III (fig. 1 *c*) $\xi=0$ şi ecuaţia (2) devine

$$\eta-1-2\eta\cdot\lambda=0,$$

de unde rezultă

$$\lambda=\frac{\eta-1}{2\eta}.$$

*Concluzii*

*a*) Pentru $\lambda\geqslant\frac{2\eta(\eta-1)}{4\eta+3(\eta-1)^2}$ ruperea are loc după schema I (fig. 1 *a*).

*b*) Pentru $\frac{\eta-1}{2\eta}<\lambda<\frac{2\eta(\eta-1)}{4\eta+3(\eta-1)^2}$ ruperea are loc după schema II (fig. 1 *b*), poziţia articulaţiilor plastice corespunzătoare momentelor negative fiind dată de ecuaţia (2).

*c*) Pentru $\lambda\leqslant\frac{\eta-1}{2\eta}$ ruperea are loc după schema III (fig. 1 *c*).

## 2. COEFICIENTUL DE REDISTRIBUŢIE

În studiul comportării structurilor în domeniul plastic un deosebit interes îl prezintă coeficientul de redistribuţie, ca indice sintetic al rezervei plastice de rezistență.

Pentru stabilirea valorii acestui coeficient este necesar să se cunoască sarcina corespunzătoare formării primei articulații plastice.

Pentru cazul studiat, în stadiul elastic momentul maxim din cîmp şi momentul de pe reazem au valorile

$$M_c = (1-k)\,\frac{P\cdot l}{4}\,; \quad M_r = k\cdot\frac{P\cdot l}{4}, \tag{3}$$

în care

$$k = \frac{\eta}{2}\cdot\frac{(\eta - 4\lambda^2\eta + 4\lambda^2)}{(\eta+1)\,\lambda + (1-2\lambda)\,\eta^2}. \tag{4}$$

Valorile coeficientului $k$ se stabilesc cu ajutorul diagramei din figura 4.

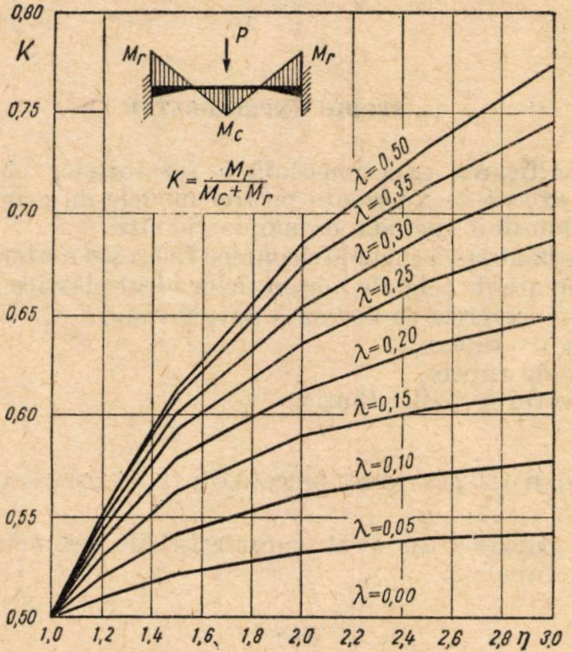


Fig. 4

În cazul tipurilor de grindă şi de încărcare luate în consideraţie, prima articulaţie plastică apare totdeauna în cîmp.

În momentul formării acestei articulații, prima relație (3) devine

$$M_{p_c} = (1-k)\,\frac{P_1\cdot l}{4},$$

de unde rezultă valoarea sarcinii corespunzătoare apariţiei primei articulaţii plastice

$$P_1 = \frac{1}{1-k} \cdot \frac{4M_{pc}}{l}. \tag{5}$$

Sarcina de rupere fiind dată de relaţia (1), coeficientul de redistribuţie are expresia

$$r = \frac{P_r}{P_1} = (1-k) \cdot \frac{1+[1+(\eta-1)\xi]^2}{1-2\lambda+2\lambda\xi}. \tag{6}$$

*Observaţii*

1. Dacă ruperea are loc după schema I (fig. 1 *a*) $\xi = 1$ şi coeficientul de redistribuţie are valoarea:

$$r = (1-k)(\eta^2+1).$$

3. Dacă ruperea are loc după schema III (fig. 1*c*) $\xi = 0$ şi coeficientul de redistribuţie devine:

$$r = \frac{2(1-k)}{1-2\lambda}.$$

## II. STUDIU EXPERIMENTAL

Pentru verificarea experimentală a rezultatelor obţinute pe cale teoretică, s-au executat experienţe pe trei modele de grinzi executate la scară redusă, folosind metoda cromoplasticităţii.

S-a recurs la această metodă deoarece foloseşte materiale cu proprietăţi foarte apropiate de cele ale materialelor ideal-plastice şi este capabilă să redea cu toată exactitatea necesară date privind

— schema de rupere,
— sarcina de rupere,
— coeficientul de redistribuţie.

### 1. CARACTERISTICILE GRINZILOR EXPERIMENTALE

Modelele grinzilor au avut caracteristicile geometrice prezentate în figura 5 şi în tabela 1.

*Tabela 1*

**Caracteristicile modelelor**

| Grinda | $h_c$ mm | $h_r$ mm | $\lambda$ | $\eta$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 8 | — | — |
| 2 | 8 | 11 | 0,25 | 1,38 |
| 3 | 8 | 14 | 0,25 | 1,75 |
| 4 | 8 | 18 | 0,25 | 2,25 |

Din diagrama prezentată în figura 3 rezultă că prima grindă se rupe după schema I, a doua după schema II pentru $\xi = 0{,}4$ iar a treia grindă după schema III.

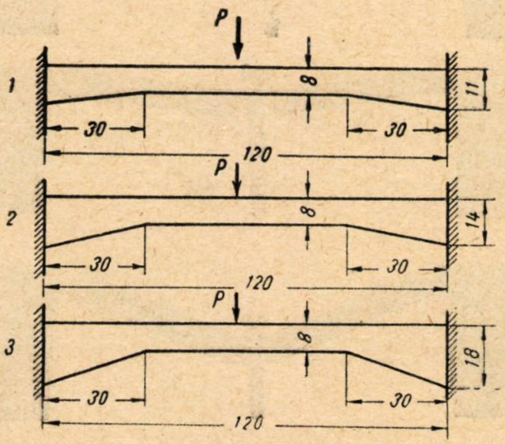


Fig. 5

## 2. REZULTATE EXPERIMENTALE

În figurile 6, 7, 8 și 9 se prezintă modelele înainte și după încercare. Coincidența pozițiilor articulațiilor plastice obținute pe cale experimentală (marcate de schimbările de culoare ale materialului) cu cele obținute pe cale teoretică justifică pe deplin teoria elaborată privind schemele de rupere a grinzilor static nedeterminate cu secțiunea variabilă.

## CONCLUZII

1. Grinzile static nedeterminate cu secțiunea variabilă prezintă 3 scheme posibile de rupere, funcție de legea de variație a secțiunii și de schemele de rezemare și încărcare.

2. Tratarea teoretică a acestor scheme, pentru diferite materiale de construcție (oțel, beton armat) în funcție de factorii care le influențează, permite stabilirea unor criterii simple de determinare a schemei reale de rupere.

3. Verificarea rezultatelor teoretice pe cale experimentală, prin folosirea cromoplasticității, constituie o garanție a valabilității și exactității lor.

*Primită la redacție la 13 iunie 1961.*

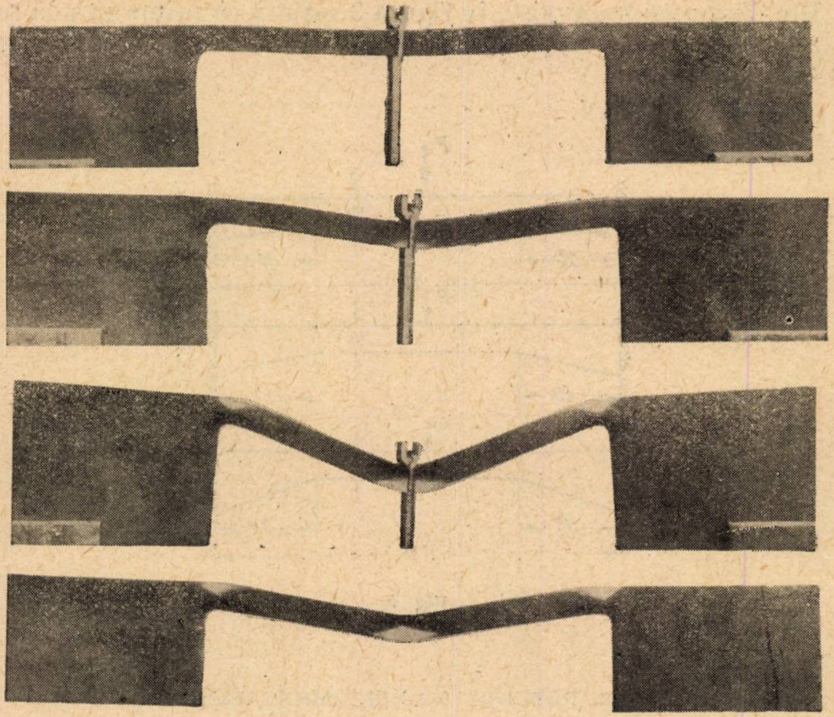


Fig. 6, *a*, *b*, *c*, *d*

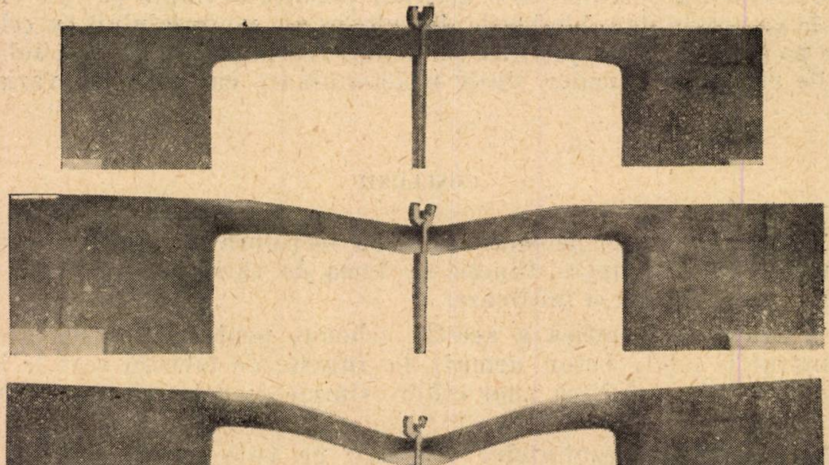


Fig. 7, *a*, *b*, *c*

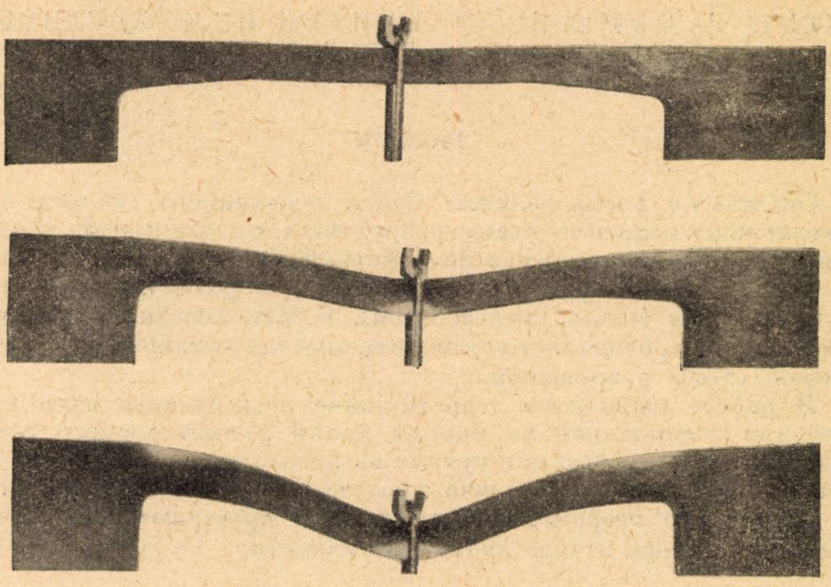


Fig. 8, *a*, *b*, *c*

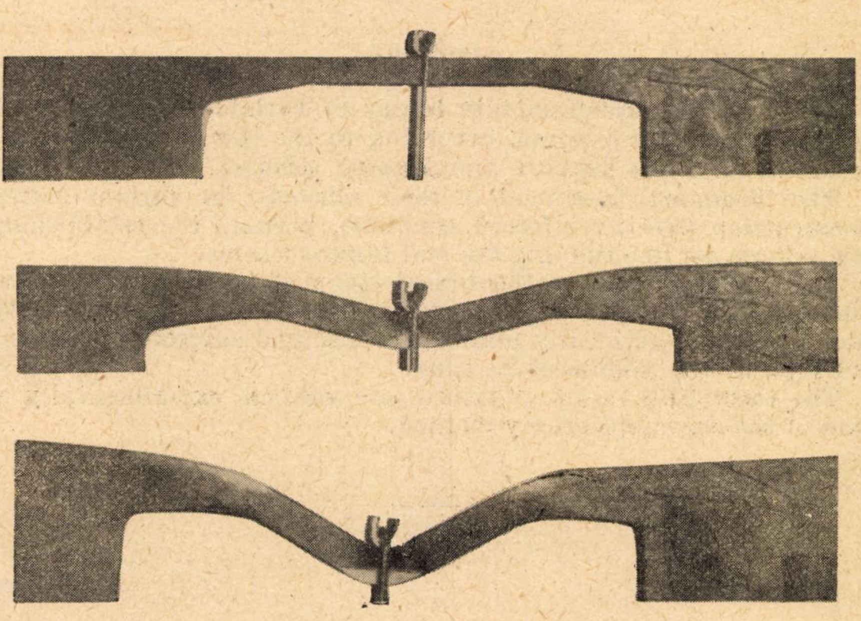


Fig. 9, *a*, *b*, *c*

# СХЕМЫ РАЗРУШЕНИЯ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

## РЕЗЮМЕ

Статически неопределимые балки переменного сечения имеют три возможных основных схемы разрушения, в зависимости от закона изменения сечения и способа закрепления на опорах и нагружения.

Теоретическая трактовка этих схем для различных строительных материалов (сталь, железобетон), в зависимости от влияющих на них факторов, позволяет установить простые критерии определения истинной схемы разрушения.

В работе излагается теоретическое исследование схем разрушения для защемленной по концам балки прямоугольного сечения с прямыми симметрическими вутами из идеально пластического материала, нагруженной по середиче пролета сосредоточенной силой.

Полученные теоретические результаты проверяются экспериментально при помощи метода хромопластичности.

# FAILURE SCHEMES FOR STATICALLY INDETERMINATE BEAMS OF VARIABLE CROSS-SECTION

## ABSTRACT

The statically indeterminate beams of variable cross-section have three possible failure schemes, according to the law of variation of the cross-section and the support and loading schemes.

The theoretical treatment of these schemes, for various materials of construction (steel, reinforced concrete), permits the establishing of simple criteria for determining the real failure scheme.

This paper presents a theoretical study of the failure schemes for the doubly built-in beam of rectangular cross-section, with symmetrical haunches made of an ideally plastic material and subjected to a concentrated load at the middle of its span.

The theoretical results obtained are verified experimentally with the aid of the chromoplasticity method.

# STUDII

## ELASTICITATE–PLASTICITATE–REZISTENȚA MATERIALELOR

# PROBLEME DE CONTACT ALE SEMIPLANULUI ELASTIC ANIZOTROP¹)

DE

J. BRILLA ²)

## 1. INTRODUCERE

Spre deosebire de cazul corpurilor izotrope, problemele de contact ale teoriei plane a elasticității corpurilor anizotrope au fost relativ puțin studiate. Distribuția de tensiuni între ștanțe rigide și un semiplan elastic anizotrop, presupunînd că frecarea pe segmentele de contact este neglijabilă, a fost studiată de G. N. Savin [10], [11], [12], [14], [15] și mai tîrziu de A. E. Green și W. Zerna [6]. Distribuția de tensiuni în secțiunile de contact este similară în această ipoteză cu aceea pe semiplanul izotrop.

Pentru un semiplan anizotrop, distribuția de tensiuni — în ipoteza continuității contactelor ștanțelor rigide și semiplanului anizotrop, adică cînd alunecarea este exclusă iar frecarea nu este neglijabilă este caracteristică. Distribuția de tensiuni în secțiunile de contact diferă calitativ de cazul izotrop, după cum a demonstrat autorul pentru cazul unei ștanțe rigide cu o bază dreaptă [2], [3] și ulterior pentru *n* ștanțe [4]. Ștanța rigidă cu o bază dreaptă și încărcare centrală este supusă unei rotații iar distribuția de tensiuni sub ștanța cu o bază orizontală este asimetrică, adică rezultanta tensiunilor acționează excentric. Cazul special al ștanțelor rigide cu laturi orizontale a fost tratat, în afară de autor, de L. A. Galin [5]. Soluția dată de acesta este însă mai complicată și nu dă informații cu privire la efectul de moment al tensiunii, nici asupra diferențelor în distribuția de tensiuni.

În articolul de față se studiază problemele de contact pentru *n* ștanțe, cînd semiplanul anizotrop aderă la ștanțe, soluțiile fiind date sub formă explicită.

---

¹) Comunicare prezentată la al X-lea Congres Internațional de mecanică aplicată, Stresa, 31 aug. — 7 sept. 1960.

²) Ustav stavebnictva a archtiektury SAV, Bratislava.

## 2. ECUAŢII FUNDAMENTALE

Proprietăţile elastice ale plăcilor anizotrope supuse la o stare de tensiune plană pot fi exprimate prin legea lui Hooke

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\,\sigma_x + a_{12}\,\sigma_y + a_{16}\,\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= a_{12}\,\sigma_x + a_{22}\,\sigma_y + a_{26}\,\tau_{xy}, \\ \gamma_{xy} &= a_{16}\,\sigma_x + a_{26}\,\sigma_y + a_{66}\,\tau_{xy}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Apoi, dacă se introduce funcţia de tensiune $F$, obţinem

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}. \tag{2.2}$$

Dacă asupra plăcii nu acţionează forţe masice, soluţia trebuie să satisfacă ecuaţia diferenţială a plăcilor anizotrope

$$a_{22}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 2a_{26}\frac{\partial^4 F}{\partial x^3\,\partial y} + (2a_{12}+a_{66})\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\,\partial y^2} - 2a_{16}\frac{\partial^4 F}{\partial x\,\partial y^3} + a_{11}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \tag{2.3}$$

şi condiţiile la limită de-a lungul laturilor.

## 3. SEMIPLANUL ELASTIC ANIZOTROP

Să cercetăm un semiplan elastic anizotrop $y > 0$ solicitat de-a lungul laturii $y = 0$ (fig. 1) de sarcinile $p(x)$ şi $t(x)$, care satisfac condiţiile lui Dirichlet.

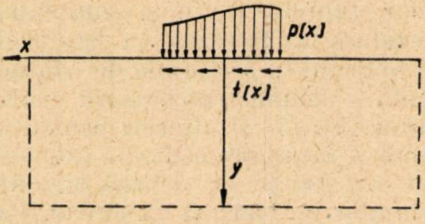


Fig. 1

Exprimăm condiţiile la limită

$$\sigma_y = -p(x), \quad \tau_{xy} = -t(x) \text{ pe } y = 0, \tag{3.1}$$

cu ajutorul integralelor Fourier. Deoarece sarcinile $p(x)$ şi $t(x)$ sînt mărimi reale vom obţine [3]

$$p(x) = \frac{1}{\pi}\,\mathcal{R}e\int_0^\infty \psi(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda, \quad t(x) = \frac{1}{\pi}\,\mathcal{R}e\int_0^\infty \chi(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda, \tag{3.2}$$

unde

$$\psi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi)\, e^{-i\lambda\xi}\, d\xi, \quad \chi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} t(\xi)\, e^{-i\lambda\xi}\, d\xi. \tag{3.3}$$

Soluția ecuației diferențiale a plăcii anizotrope (2.3) va fi găsită sub forma integralei Fourier

$$F = \frac{1}{\pi}\, \mathcal{R}e \int_{0}^{\infty} \widetilde{F}(\lambda, y)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda \tag{3.4}$$

Apoi, după substituire în (2.3), obținem pentru $F$ o ecuație diferențială ordinară

$$a_{11} = \widetilde{F}^{\mathrm{IV}} - 2i\lambda\, a_{16} \widetilde{F}''' - \lambda^2 (2a_{12} + a_{66}) \widetilde{F}'' + 2i\lambda^3 a_{26} \widetilde{F}' + \lambda^4 a_{22} \widetilde{F} = 0. \tag{3.5}$$

Soluția acestei ecuații va fi găsită sub forma exponențială

$$\widetilde{F} = A\, e^{i\lambda\mu y}. \tag{3.6}$$

Prin substituirea acesteia în ecuația (3.5), se obține ecuația caracteristică

$$a_{11} \mu^4 - 2a_{16} \mu^3 + (2a_{12} + a_{66}) \mu^2 - 2a_{26} \mu + a_{22} = 0, \tag{3.7}$$

care este în concordanță cu ecuația caracteristică a soluției generale [7] a ecuației diferențiale a plăcilor anizotrope.

După cum a demonstrat S. G. Lehnițchi, rădăcinile acestei ecuații pentru o placă dintr-un material oarecare nu pot fi reale. Ele sînt complex conjugate două cîte două. Alegem $\mu_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $\mu_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ în așa fel încît să avem $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$, ceea ce este întotdeauna posibil.

Rădăcinile ecuației pot fi distincte una de alta sau repetate.

Pentru rădăcini distincte obținem

$$\widetilde{F} = A\, e^{i\lambda\mu_1 y} + B e^{i\lambda\mu_2 y} + C e^{i\lambda\bar{\mu}_1 y} + D e^{i\lambda\bar{\mu}_2 y}, \tag{3.8}$$

unde $A$, $B$, $C$, $D$ sînt funcții de $\lambda$.

Pentru rădăcini repetate obținem

$$\widetilde{F} = (A + By) e^{i\lambda\mu y} + (C + Dy)\, e^{i\lambda\bar{\mu} y}. \tag{3.9}$$

Deoarece soluția corespunzătoare rădăcinilor repetate poate fi obținută printr-o simplă modificare a metodelor folosite în cazul izotrop sau printr-o transformare afină a soluției pentru plăcile izotrope vom considera acum doar soluția corespunzătoare rădăcinilor distincte ale ecuației caracteristice.

În cazul unui semiplan $y > 0$, solicitat de o sarcină care satisface condițiile lui Dirichlet, vom presupune că tensiunile la infinit sînt egale cu zero. Astfel, se pot folosi numai acei termeni ai integralei generale $F$ pentru care avem $\mathcal{R}e\,\{i\lambda\mu y\} < 0$.

Substituind pe $\widetilde{F}$ în ecuația (3.4) se obține

$$F = \frac{1}{\pi}\,\mathcal{R}e \int_0^{\infty} (A\, e^{i\lambda z_1} + B e^{i\lambda z_2})\, d\lambda, \tag{3.10}$$

unde $z_1 = x + \mu_1 y$, $z_2 = x + \mu_2 y$.

Apoi, din condițiile la limită obținem

$$F = \frac{1}{\pi}\mathcal{R}e\left\{\frac{1}{\mu_2-\mu_1}\int_0^{\infty}\frac{1}{\lambda^2}\,[\psi(\lambda)\,(\mu_2 e^{i\lambda z_1} - \mu_1 e^{i\lambda z_2}) + \chi(\lambda)\,(e^{i\lambda z_1} - e^{i\lambda z_2})]\, d\lambda\right\}. \tag{3.11}$$

Integrala (3.11) este considerată în sensul teoriei distribuțiilor. Tensiunile se obțin, ținînd seama de (2.2), sub forma

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{1}{\pi}\mathcal{R}e\left\{\frac{1}{\mu_2-\mu_1}\int_0^{\infty}[\mu_1\mu_2\,\psi(\lambda)\,(\mu_1 e^{i\lambda z_1} - \mu_2 e^{i\lambda z_2}) + \right.\\
&\quad \left. + \chi(\lambda)\,(\mu_1^2 e^{i\lambda z_1} - \mu_2^2 e^{i\lambda z_2})]\, d\lambda\right\},\\
\sigma_y &= -\frac{1}{\pi}\mathcal{R}e\left\{\frac{1}{\mu_2-\mu_1}\int_0^{\infty}[\psi(\lambda)\,(\mu_2 e^{i\lambda z_1} - \mu_1 e^{i\lambda z_2}) + \right.\\
&\quad \left. + \chi(\lambda)\,(e^{i\lambda z_1} - e^{i\lambda z_2})]\, d\lambda\right\},\\
\tau_{xy} &= \frac{1}{\pi}\mathcal{R}e\left\{\frac{1}{\mu_2-\mu_1}\int_0^{\infty}[\mu_1\mu_2\,\psi(\lambda)\,(e^{i\lambda z_1} - e^{i\lambda z_2}) + \right.\\
&\quad \left. + \chi(\lambda)\,(\mu_1 e^{i\lambda z_1} - \mu_2 e^{i\lambda z_2})]\, d\lambda\right\}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Înlocuind pe $\psi(\lambda)$, $\chi(\lambda)$ cu ajutorul relațiilor (3.3), schimbînd ordinea integrării și integrînd în raport cu $\lambda$, obținem

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{1}{\pi}\mathcal{I}m\left\{\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\mu_1\mu_2\, p(\xi)\left(\frac{\mu_1}{\xi - x_1} - \frac{\mu_2}{\xi - x_2}\right) + \right.\right.\\
&\quad \left.\left. + t(\xi)\left(\frac{\mu_1^2}{\xi - x_1} - \frac{\mu_2^2}{\xi - x_2}\right)\right] d\xi\right\},\\
\sigma_y &= \frac{1}{\pi}\mathcal{I}m\left\{\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[p(\xi)\left(\frac{\mu_2}{\xi - x_1} - \frac{\mu_1}{\xi - x_2}\right) + \right.\right.\\
&\quad \left.\left. + t(\xi)\left(\frac{1}{\xi - x_1} - \frac{1}{\xi - x_2}\right)\right] d\xi\right\},\\
\tau_{xy} &= -\frac{1}{\pi}\mathcal{I}m\left\{\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\mu_1\mu_2\, p(\xi)\left(\frac{1}{\xi - x_1} - \frac{1}{\xi - x_2}\right) + \right.\right.\\
&\quad \left.\left. + t(\xi)\left(\frac{\mu_1}{\xi - x_1} - \frac{\mu_2}{\xi - x_2}\right)\right] d\xi\right\}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Folosind notația

$$\begin{aligned}\Phi'(z_1) &= \frac{1}{2\pi i(\mu_1-\mu_2)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu_2 p(\xi)+t(\xi)}{\xi-z_1}d\xi,\\ \Psi'(z_2) &= -\frac{1}{2\pi i(\mu_1-\mu_2)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu_1 p(\xi)+t(\xi)}{\xi-z_2}d\xi,\end{aligned}\tag{3.14}$$

obținem

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2\,\mathcal{Re}\,\{\mu_1^2\Phi'(z_1)+\mu_2^2\Psi'(z_2)\},\\ \sigma_y &= 2\,\mathcal{Re}\,\{\Phi'(z_1)+\Psi'(z_2)\},\\ \tau_{xy} &= -2\,\mathcal{Re}\,\{\mu_1\Phi'(z_1)+\mu_2\Psi'(z_2)\}\end{aligned}\tag{3.15}$$

și

$$\begin{aligned}u &= 2\,\mathcal{Re}\,\{p_1\Phi(z_1)+p_2\Psi(z_2)\}-\gamma_0 y+\alpha_0,\\ v &= 2\,\mathcal{Re}\,\{q_1\Phi(z_1)+q_2\Psi(z_2)\}+\gamma_0 x+\beta_0,\end{aligned}\tag{3.16}$$

unde

$$p_i = a_{11}\mu_i^2+a_{12}-a_{16}\mu_i,\quad q_i = a_{12}\mu_i+\frac{a_{22}}{\mu_i}-a_{26}\quad(i=1,\,2),\tag{3.17}$$

iar $\alpha_0$, $\beta_0$, $\gamma_0$ sînt constante arbitrare care reprezintă deplasările rigide și rotația semiplanului în totalitatea lui. Ele nu depind de sarcină și pot fi luate egale cu zero.

Aceste rezultate sînt în concordanță cu soluția obținută de G. N. Savin [13] care folosește metodele funcțiilor de variabilă complexă.

## 4. PROBLEMA LA LIMITĂ MIXTĂ

Să analizăm acum problema la limită mixtă pentru un semiplan elastic anizotrop. Notăm prin $L=\sum_{j=1}^{p}L_j$ un număr finit de segmente $L_j=(a_j,\,b_j)$ ale laturii $y=0$ a semiplanului $y>0$ (fig. 2), iar restul laturii

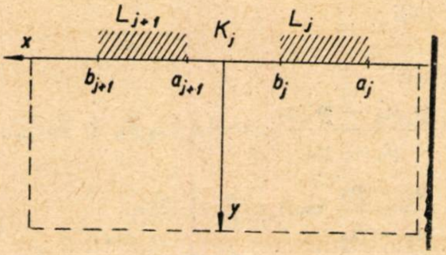


Fig. 2

cu $K=\sum_{j=0}^{p}K_j=\sum_{j=0}^{p}(b_j,\,a_{j+1})$, unde $b_0=-\infty$, $a_{p+1}=\infty$. Să considerăm componentele deplasării $u=g(x)+\gamma_j$, $v=h(x)+kx+\delta_j$, sau derivatele lor de ordinul întîi $\dfrac{\partial u}{\partial x} = g'(x) = f_1(x)$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = h'(x) + k = f_2(x)$ date pe $L$, şi componentele sarcinii exterioare $p(x)$, $t(x)$ date pe $K$.

Cu ajutorul soluţiei obţinută anterior, putem studia separat efectul lui $p(x)$, $t(x)$ pe $K$. De aceea, putem lua $p(x) = t(x) = 0$ pe $K$, fără a reduce caracterul general al soluţiei.

Astfel, condiţiile la limită se pot scrie

$$\begin{aligned} & p(x) = 0, \quad t(x) = 0, \quad \text{pe } K \\ & \frac{\partial u}{\partial x} = f_1(x), \quad \frac{\partial v}{\partial x} = f_2(x) \quad \text{pe } L. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Pentru a putea folosi formulele (3.13) la determinarea distribuţiei de tensiuni în semiplan, trebuie să găsim tensiunile necunoscute $\sigma_y = -p(x)$ şi $\tau_{xy} = -t(x)$ pe $L$.

Vom presupune că $f_1(x)$ şi $f_2(x)$ satisfac condiţia lui Hölder pe $L$ şi vom exprima pe $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ pe $L$ cu ajutorul formulelor (3.16), punînd $\gamma_0 = 0$. Folosind formulele lui Plemelj [8] pentru valorile la limită ale integralei Cauchy, precum şi relaţiile

$$\mathcal{R}e\, \frac{p_1 - p_2}{\mu_1 - \mu_2} = 0, \qquad \mathcal{R}e\, \frac{q_1\mu_2 - q_2\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} = 0, \tag{4.2}$$

care pot fi găsite prin aplicarea relaţiilor dintre rădăcinile şi coeficienţii ecuaţiei caracteristice (3.7), obţinem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{\pi}\, \mathcal{I}m\, \frac{p_1\mu_2 - p_2\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} \int_L \frac{p(\xi)\, d\xi}{\xi - x} + \mathcal{R}e\, \frac{p_1\mu_2 - p_2\mu_1}{\mu_1 - \mu_2}\, p(x) + \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\, \mathcal{I}m\, \frac{p_1 - p_2}{\mu_1 - \mu_2} \int_L \frac{t(\xi)\, d\xi}{\xi - x}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{\pi}\, \mathcal{I}m\, \frac{q_1\mu_2 - q_2\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} \int_L \frac{p(\xi)\, d\xi}{\xi - x} + \frac{1}{\pi}\, \mathcal{I}m\, \frac{q_1 - q_2}{\mu_1 - \mu_2} \int_L \frac{t(\xi)\, d\xi}{\xi - x} + \\ &\quad + \mathcal{R}e\, \frac{q_1 - q_2}{\mu_1 - \mu_2}\, t(x). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Folosim notaţiile

$$\begin{aligned} A_1 &= \mathcal{I}m\, \frac{p_1\mu_2 - p_2\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} = a_{11}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1), \\ A_2 &= \mathcal{I}m\, \frac{p_1 - p_2}{\mu_1 - \mu_2} = a_{11}(\beta_1 + \beta_2), \\ A_3 &= \mathcal{I}m\, \frac{q_1\mu_2 - q_2\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} = a_{22}\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} + \frac{\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}\right), \\ A_4 &= \mathcal{I}m\, \frac{q_1 - q_2}{\mu_1 - \mu_2} = a_{22}\, \frac{\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2)} \end{aligned} \tag{4.4}$$

şi

$$\begin{aligned} B_1 &= \mathcal{R}e\, \frac{p_1 \mu_2 - p_2 \mu_1}{\mu_1 - \mu_2} = a_{11} (\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2) - a_{12}, \\ B_4 &= \mathcal{R}e\, \frac{q_1 - q_2}{\mu_1 - \mu_2} = - a_{22} \frac{\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2)}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Analog cu (4.2), se poate verifica uşor că

$$\begin{aligned} A_1 &= A_4, \\ B_1 &= - B_4. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Apoi putem scrie

$$\begin{aligned} B_1 p(x) + \frac{A_1}{\pi} \int_L \frac{p(\xi)\, d\xi}{\xi - x} + \frac{A_2}{\pi} \int_L \frac{t(\xi)\, d\xi}{\xi - x} &= f_1(x), \\ - B_1 t(x) + \frac{A_3}{\pi} \int_L \frac{p(\xi)\, d\xi}{\xi - x} + \frac{A_1}{\pi} \int_L \frac{t(\xi)\, d\xi}{\xi - x} &= f_2(x). \end{aligned} \tag{4.7}$$

În felul acesta am obţinut un sistem de ecuaţii integrale singulare pentru determinarea tensiunilor necunoscute $p(x)$ şi $t(x)$.

După înmulţirea celei de-a doua ecuaţii din sistemul (4.7) cu $N$ şi după însumare obţinem

$$\begin{aligned} B_1 [p(x) - N t(x)] &+ \frac{1}{\pi} (A_1 + N A_3) \int_L \frac{p(\xi)\, d\xi}{\xi - x} + \\ &+ \frac{1}{\pi} (A_2 + N A_1) \int_L \frac{t(\xi)\, d\xi}{\xi - x} = f_1(x) + N f_2(x) = f(x), \end{aligned} \tag{4.8}$$

unde $N$ este astfel ales încît să avem

$$\frac{A_1 + N A_3}{A_2 + N A_1} = - \frac{1}{N}, \tag{4.9}$$

ceea ce dă

$$N_{1,2} = \frac{- A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - A_2 A_3}}{A_3}. \tag{4.10}$$

Să căutăm acum valoarea discriminantului. Prin simplificare obţinem

$$- D^2 = A_1^2 - A_2 A_3 = - a_{11}^2 \beta_1 \beta_2 [(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2]. \tag{4.11}$$

Deoarece $\beta_1$, $\beta_2$ sînt numere pozitive, discriminantul este negativ, iar $N_1$, $N_2$ sînt complex conjugate. Notăm

$$N_1 = N, \qquad N_2 = \overline{N}.$$

După înlocuire în (4.8) obținem

$$B_1 \left[p(x) - Nt(x)\right] - \frac{D}{\pi i} \int_L \frac{p(\xi) - Nt(\xi)}{\xi - x}\, d\xi = f(x). \tag{4.12}$$

Deci rezolvarea problemei a fost redusă la integrarea unei ecuații integrale singulare de speța a doua, cu mod discontinuu de integrare pe $L$. Pentru a rezolva această ecuație, să luăm funcția olomorfă pe secțiuni

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{p(\xi) - Nt(\xi)}{\xi - z}\, d\xi, \tag{4.13}$$

care este olomorfă pe întreg planul, cu excepția lui $L$.

În conformitate cu formulele lui Plemelj [8] obținem

$$\begin{gathered} p(x) - Nt(x) = F^+(x) - F^-(x), \\ \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p(\xi) - Nt(\xi)}{\xi - x}\, d\xi = F^+(x) + F^-(x). \end{gathered} \tag{4.14}$$

După înlocuire în (4.12) căpătăm

$$(B_1 - D)\, F^+(x) - (B_1 + D)\, F^-(x) = f(x). \tag{4.15}$$

Astfel am ajuns la o problemă Hilbert-Riemann neomogenă. Prin rezolvarea ei obținem

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i (B_1 - D)\, X(z)} \int_L \frac{X^+(\xi) f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi + \frac{P_{p-1}(z)}{X(z)}, \tag{4.16}$$

unde

$$X(z) = \prod_{j=1}^{p} (z - a_j)^{1-m} (z - b_j)^m \tag{4.17}$$

și

$$m = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{B_1 - D}{B_1 + D}. \tag{4.18}$$

Alegem argumentul $\ln \dfrac{B_1 - D}{B_1 + D}$ cuprins între 0 și $2\pi$. De asemenea $P_{p-1}(z)$ este un polinom arbitrar de gradul $(p - 1)$.

În mod analog obținem pentru $\overline{N}$

$$B_1 \left[p(x) - \overline{N}t(x)\right] + \frac{D}{\pi i} \int_L \frac{p(\xi) - \overline{N}t(\xi)}{\xi - x}\, d\xi = \overline{f}(x). \tag{4.19}$$

Această ecuație integrală singulară este complex conjugată cu ecuația (4.12).

Să folosim acum o funcţie olomorfă pe porţiuni

$$\bar{F}(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{p(\xi) - \bar{N}t(\xi)}{\xi - z}\,d\xi, \tag{4.20}$$

unde $\bar{F}(z)$ are faţă de (4.13) coeficienţi şi exponenţi complex conjugaţi. Prin înlocuire în ecuaţia (4.19) obţinem

$$(B_1 + D)\,\bar{F}^+(x) - (B_1 - D)\,\bar{F}^-(x) = -\bar{f}(x). \tag{4.21}$$

Prin rezolvare căpătăm

$$\bar{F}(z) = -\frac{1}{2\pi i\,(B_1 + D)\,\bar{X}(z)}\int_L \frac{\bar{X}^+(\xi)\,\bar{f}(\xi)}{\xi - z}\,d\xi + \frac{\bar{P}_{p-1}(z)}{\bar{X}(z)}, \tag{4.22}$$

unde

$$\bar{X}(z) = \prod_{j=1}^{p} (z - a_j)^{1-\bar{m}}\,(z - b_j)^{\bar{m}} \tag{4.23}$$

şi

$$\bar{m} = \frac{1}{2\pi i}\ln\frac{B_1 + D}{B_1 - D}, \tag{4.24}$$

$\bar{m}$ fiind complex conjugat cu $m$. Deoarece

$$\bar{X}^+(x) = \prod_{j=1}^{p} (x - a_j)^{1-\bar{m}}\,(x - b_j)^{\bar{m}}\,e^{2\pi i\bar{m}}, \tag{4.25}$$

soluţia $\bar{F}(z)$, ţinînd seama de (4.22), are coeficienţi şi exponenţi complex conjugaţi în raport cu (4.16).

În funcţiile $F(z)$ şi $\bar{F}(z)$ putem înlocui pe $z$ prin variabilele complexe afine $z_1$ şi $z_2$. Proprietăţile la limită (4.15) şi (4.21) rămîn neschimbate.

Comparînd pe $F(z)$, $(\bar{F}z)$ cu $\Phi'(z_1)$, $\Psi'(z_2)$ obţinem

$$\begin{aligned} \Phi'(z_1) &= \frac{1}{(\mu_1 - \mu_2)(\bar{N} - N)}\,[(1 + \mu_2\bar{N})\,F(z_1) + (1 + \mu_2 N)\,\bar{F}(z_1)],\\ \Psi'(z_2) &= -\frac{1}{(\mu_1 - \mu_2)(\bar{N} - N)}\,[(1 + \mu_1\bar{N})\,F(z_2) + (1 + \mu_1 N)\,\bar{F}(z_2)]. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Funcţiile $F(z)$ şi $\bar{F}(z)$ dau astfel o soluţie nu numai de-a lungul laturilor semiplanului, ci şi în interiorul lui.

Din ecuaţiile (4.14) şi (4.15), obţinem pe $L$,

$$p(x) - Nt(x) = \frac{1}{B_1 + D}\,[f(x) + 2DF^+(x)], \tag{4.27}$$

sau separînd pe $p(x)$ şi $t(x)$,

$$\begin{aligned} p(x) &= -\frac{2}{B_1+D}\,\mathcal{Re}\left\{\frac{\overline{N}}{N-\overline{N}}\,[f(x)+2DF^{+}(x)]\right\},\\ t(x) &= -\frac{2}{B_1+D}\,\mathcal{Re}\left\{\frac{1}{N-\overline{N}}\,[f(x)+2DF^{+}(x)]\right\}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Analog obţinem pe $K$, folosind relaţiile (3.16) şi (4.26),

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -2\mathcal{Re}\left\{\frac{1}{N-\overline{N}}\,[\overline{N}(B_1-D)\,F(x)+N(B_1+D)\,\overline{F}(x)]\right\},\\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -2\mathcal{Re}\left\{\frac{1}{N-\overline{N}}\,[(D-B_1)\,F(x)-(B_1+D)\,\overline{F}(x)]\right\}, \end{aligned} \tag{4.29}$$

unde $F(x)=F^{+}(x)=F^{-}(x)$, sau după simplificare

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2A_3\,\mathcal{Im}\,[\overline{N}F(x)] = -2A_1\,\mathcal{Im}\,F(x)-2D\,\mathcal{Re}\,F(x),\\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -2A_3\,\mathcal{Im}\,F(x). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Ca şi în (4.27), pe $K$ este valabilă relaţia

$$\frac{\partial u}{\partial x}+N\frac{\partial v}{\partial x} = -2DF(x). \tag{4.31}$$

Pentru a rezolva complet problema, este necesar să determinăm constantele, care sînt coeficienţi ai polinomului $P_{\nu-1}(z)$.

Înainte de a trece la evaluarea constantelor, vom da problemei o interpretare fizică. Să considerăm că ştanţa rigidă $S_j$ acţionează asupra segmentului $L_j$ al semiplanului anizotrop. Să considerăm de asemenea că forma laturii ştanţei rigide $S_j$ este dată de funcţia $\eta_j = h_j(x)$. Prin acţionarea unui semiplan, fiecare ştanţă $S_j$ poate în general să se rotească. Apoi, în ipoteza deformaţiilor mici, deplasarea verticală a semiplanului pe $L_j$ este $v = h_j(x) + k_j x + \delta_j$ iar deplasarea orizontală este $u = g_j(x) + \gamma_j$, care nu este cunoscută în cazul formei generale a laturei ştanţei. În cazul unei laturi drepte a ştanţei $S_j$, rigid fixată de marginea semiplanului $g_j(x) = 0$, deplasarea orizontală pe $L_j$ este constantă şi egală cu $\gamma_j$.

Putem distinge două cazuri :

1) ştanţe legate rigid între ele,

2) ştanţe libere.

În primul caz (fig. 3) ştanţele se pot deplasa şi sînt supuse la o rotaţie numai în totalitatea lor. În acest caz, deplasările $u$, $v$ şi rotaţia $k$ sau componentele sarcinilor $P$, care acționează în $x = x_0$, $T$ care acționează în $\eta = h_0$ și $M$, sînt date pentru sistemul de ștanțe în totalitatea lui, $\eta$ fiind legat de sistem. Funcția $f(x)$ ia atunci forma $f(x) = g'(x) + N\,[h'(x) + k]$, unde $k$ este o rotație a sistemului de ștanțe în totalitatea lui.

Dacă încărcarea sistemului este dată, este necesar să determinăm $p$ coeficienți complecși ai polinomului $P_{p-1}(z)$ și rotația reală a sistemului $k$, adică $(2p + 1)$ constante reale.

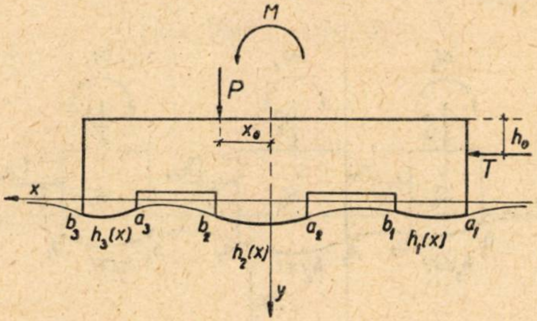


Fig. 3

Pentru aceasta dispunem de trei condiții de echilibru

$$
\begin{gathered}
\int_L p(x)dx = P,\\
\int_L t(x)\,dx = T, \qquad (4.32)\\
\int_L [xp(x) - h_j(x)\,t(x)]\,dx = M + Px_0 - Th_0
\end{gathered}
$$

și de $2\,(p - 1)$ condiții de deformație în secțiunile $K_j$

$$
\begin{gathered}
\int_{b_j}^{a_{j+1}} \frac{\partial u}{\partial x}\,dx = g\,(a_{j+1}) - g(b_j),\\
\int_{b_j}^{a_{j+1}} \frac{\partial v}{\partial x}\,dx = h(a_{j+1}) - h(b_j) + k(a_{j+1} - b_j)\,(j = 1,2,\ldots,p). \qquad (4.33)
\end{gathered}
$$

Această ecuație dă după integrare $(2p + 1)$ ecuații reale, suficiente pentru a determina cele $(2p + 1)$ constante reale necunoscute.

Pentru determinarea directă a coeficienților complecși ai polinomului $P_{p-1}(z)$, putem combina primele două condiții din (4.32) și condiția (4.33). Obținem astfel

$$
\frac{1}{B_1 + D}\int_L [f(x) + 2DF^{+}(x)]\,dx = P - NT \qquad (4.34)
$$

şi

$$-2D\int_{b_j}^{a_{j+1}} F(x)\,dx = g(a_{j+1}) - g(b_j) +$$
$$+ N\,[h(a_{j+1}) - h(b_j) + k(a_{j+1} - b_j)] \quad (j = 1, 2, \ldots, p), \tag{4.35}$$

care dau $p$ ecuaţii complexe pentru determinarea celor $p$ coeficienţi complecşi ai lui $P_{p-1}(z)$.

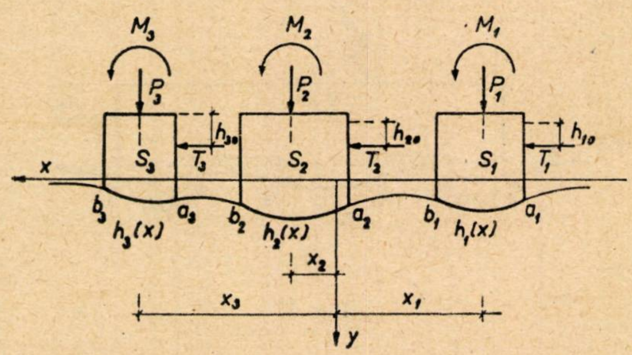


Fig. 4

În cel de-al doilea caz (fig. 4), fiecare ştanţă poate căpăta separat o deplasare şi o rotaţie. Atunci deplasările $u_j$, $v_j$ şi rotaţia $k_j$ sau componentele sarcinii $P_j$ care acţionează în $x = x_j$, $T_j$ care acţionează în $\eta_j = h_{j0}$ şi $M_j$ sînt date separat pentru fiecare ştanţă; $\eta_j$ este legat de ştanţa $S_j$. Funcţia $f(x)$ apare în forma $f(x) = g'(x) + N[h'(x) + k_j]$, unde $k_j$ poate fi diferit pentru fiecare ştanţă.

În acest caz, pentru a determina $p$ coeficienţi complecşi ai polinomului $P_{p-1}(z)$ şi $p$ rotaţii reale $k_j$ sau $p$ momente $M_j$, adică $3p$ constante reale, putem scrie separat $3p$ relaţii de echilibru pentru fiecare ştanţă

$$\int_{L_j} p(x)\,dx = P_j,$$
$$\int_{L_j} t(x)\,dx = T_j, \tag{4.36}$$
$$\int_{L_j} [xp(x) - h_j(x)\,t(x)]\,dx = M + P_j x_j - T_j h_{j0}.$$

Acestea dau, după integrare, $3p$ ecuaţii reale necesare pentru a determina $3p$ constante reale necunoscute. Primele două condiţii pot fi combinate, ca şi în primul caz, pentru determinarea directă a coeficienţilor complecşi ai lui $P_{p-1}(z)$.

Din punctul de vedere al evaluării integralelor, este avantajos să înlocuim două din condițiile (4.36) prin condițiile de echilibru ale întregului sistem

$$\begin{aligned} \int_L p(x)\,dx &= \sum_{j=1}^{p} P_j, \\ \int_L t(x)\,dx &= \sum_{j=1}^{p} T_j, \end{aligned} \tag{4.37}$$

iar cînd $h_j = \text{const.}$ pentru fiecare $j$, adică pentru fiecare ștanță, este de asemenea avantajos să înlocuim a treia din condițiile (4.36) prin condiția de moment

$$\int_L xp(x)\,dx = \sum_{j=1}^{p} [M_j + Px_j - T_j(h_{j0} - h_j)]. \tag{4.38}$$

Integralele condițiilor (4.37) și (4.38) pot fi apoi evaluate folosind metoda reziduurilor.

## 5. DOUĂ ȘTANȚE LEGATE RIGID ÎNTRE ELE

Să considerăm că două ștanțe, cu laturi rectilinii și avînd panta $k$ egală, acționează asupra unui semiplan elastic anizotrop $y > 0$. Ștanțele sînt rigid legate între ele și solicitate de componentele $P$, $T$ și $M$, așa cum se arată în figura 5.

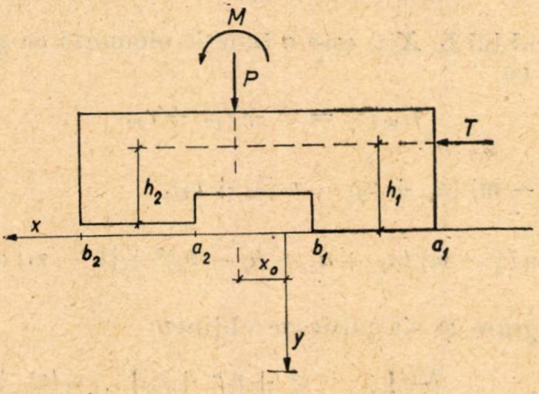


Fig. 5

De-a lungul laturii $y = 0$ avem

$$\begin{aligned} &\sigma_y = \tau_{xy} = 0, && \text{pe } K, \\ &\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = k && \text{pe } L. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Atunci

$$f(x) = Nk \tag{5.2}$$

şi

$$F(z) = \frac{Nk}{2\pi i (B_1 - D) X(z)} \int_L \frac{X^+(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{c_1 z + c_0}{X(z)}, \tag{5.3}$$

unde

$$X(z) = (z - a_1)^{1-m} (z - b_1)^m (z - a_2)^{1-m} (z - b_2)^m. \tag{5.4}$$

După transformarea integralei (5.3) în integrala lui Cauchy [9] pe curba de integrare $L^* = L_1^* + L_2^*$, unde $L_1^* = L_1^+ + L_1^-$ şi $L_2^* = L_2^+ + L_2^-$, în conformitate cu figura 6 obţinem

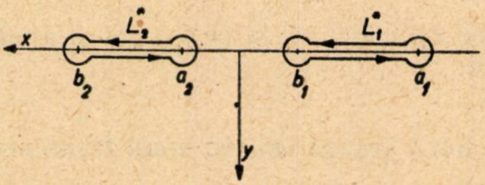


Fig. 6

$$F(z) = \frac{Nk}{2\pi i (1 - e^{-2\pi i m}) (B_1 - D) X(z)} \int_{L^*} \frac{X^+(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{c_1 z + c_0}{X(z)}. \tag{5.5}$$

În exteriorul lui $L$, $X(z)$ este o funcţie olomorfă cu partea principală la infinit egală cu

$$G_\infty(z) = z^2 + r_1 z + r_0, \tag{5.6}$$

unde

$$\begin{aligned} r_1 &= -(1 - m)(a_1 + a_2) - m(b_1 + b_2), \\ r_0 &= -\frac{1}{2} m (1 - m)(a_1 + a_2 - b_1 - b_2)^2 + (1 - m) a_1 a_2 + m b_1 b_2. \end{aligned} \tag{5.7}$$

După integrare şi simplificare obţinem

$$F(z) = -\frac{Nk}{2D} \left[ 1 - \frac{z^2 + r_1 z + r_0}{X(z)} \right] + \frac{c_1(z) + c_0}{X(z)}. \tag{5.8}$$

Constanta $c_1$ poate fi imediat determinată cu ajutorul relaţiei (4.24) din condiţiile de echilibru ale sistemului în direcţie orizontală şi verticală

$$\frac{1}{B_1 + D} \int_L \frac{Nk(x^2 + r_1 x + r_0) + 2D(c_1 x + c_0)}{X^+(x)} dx = P - NT. \tag{5.9}$$

Pentru integralele individuale, după transformare în integrale pe contur, pe curba de integrare $L$, în conformitate cu figura 4 şi folosind metoda reziduurilor, obţinem

$$\begin{aligned} &\int_L \frac{dx}{X(x)} = 0, \\ &\int_L \frac{x\,dx}{X(x)} = -\frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i m}}, \\ &\int_L \frac{x^2\,dx}{X(x)} = \frac{2\,\pi i r_1}{1 - e^{2\pi i m}}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Înlocuind aceste integrale în (5.9) şi făcînd unele transformări obţinem

$$c_1 = -\frac{P - NT}{2\pi i}. \tag{5.11}$$

Constanta $c_0$ va fi determinată cu ajutorul relaţiei (4.31) din condiţia de deformare (4.35)

$$\begin{aligned} \int_{b_1}^{a_2} \left[ Nk - \frac{Nk(x^2 + r_1 x + r_0) + 2D(c_1 x + c_0)}{X(x)} \right] dx = \\ = N\,[h_2 - h_1 + k\,(a_2 - b_1)]. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Integralele de mai sus vor fi evaluate numeric. Notăm

$$I_n = \int_{b_1}^{a_2} \frac{x^n\,dx}{X(x)} \tag{5.13}$$

şi după unele transformări obţinem

$$c_0 = \frac{P - NT}{2\pi i}\,\frac{I_1}{I_0} - \frac{N}{2\,DI_0}\,[h_2 - h_1 + k(I_2 + r_1 I_1 + r_0 I_0)]. \tag{5.14}$$

Apoi, putem scrie

$$\begin{aligned} p(x) &= -\frac{1}{B_1 + D}\,\mathcal{I}m \left\{ \frac{1}{X(x)} \left\{ \frac{kA_2}{D} \left[ x^2 + r_1 x - \frac{1}{I_0}(I_2 + r_1 I_1) \right] + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \frac{1}{\pi i}\,[P(A_1 + iD) + TA_2] \left( x - \frac{I_1}{I_0} \right) - \frac{A_2}{DI_0}\,(h_2 - h_1) \right\}\right\}, \\ t(x) &= \frac{1}{B_1 + D}\,\mathcal{I}m \left\{ \frac{1}{X(x)} \left\{ \frac{k}{D}\,(A_1 - iD) \left[ x^2 + r_1 x - \frac{1}{I_0}\,(I_2 + r_1 I_1) \right] + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \frac{1}{\pi i}\,[PA_3 + T(A_1 - iD)] \left( x - \frac{I_1}{I_0} \right) - \frac{A_1 - iD}{DI_0}\,(h_2 - h_1) \right\}\right\}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Dacă în locul lui $k$ este dat $M$, $k$ urmează a fi determinat din condiția de moment

$$\int_L xp(x)\,dx + (h_1 - h_2)\int_{L_2} t(x)\,dx - Th_1 - Px_0 = M. \tag{5.16}$$

Prin integrare pe contur se poate arăta ușor că

$$\int_L \frac{x^3}{X(x)}\,dx = -\frac{2\,\pi i s}{1 - e^{2\pi i m}}, \tag{5.17}$$

unde

$$s = (1-m)(a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2) + m(b_1^2 + b_1 b_2 + b_2^2) - \frac{1}{2}\,m(1-m)(a_1 + a_2 - b_1 - b_2)^2.$$

Folosind relațiile (5.10) și (5.17) și făcînd unele transformări obținem

$$\begin{aligned}
M = &- Th_1 - Px_0 - \frac{\pi k A_2}{D^2}\,\mathcal{Re}\left\{\frac{1}{I_0}(I_2 + r_1 I_1 + r_0 I_0)\right\} - \\
&- \frac{1}{D}\,\mathcal{Im}\left\{[P(A_1 + iD) + TA_2]\left(r_1 + \frac{I_1}{I_0}\right) + \frac{A_2}{DI_0}(h_2 - h_1)\right\} + \\
&+ \frac{k(h_1 - h_2)}{D(B_1 + D)}\,\mathcal{Im}\left\{(A_1 - iD)\left[J_2 + r_1 J_1 - \frac{J_0}{I_0}(I_2 + r_1 I_1)\right]\right\} - \\
&- \frac{h_1 - h_2}{\pi(B_1 + D)}\,\mathcal{Re}\left\{[PA_3 + T(A_1 - iD)]\left(J_1 - \frac{I_1 J_0}{I_0}\right) - \frac{A_1 - iD}{DI_0}\,J_0(h_2 - h_1)\right\},
\end{aligned} \tag{5.18}$$

unde

$$J_n = \int_{L_2} \frac{x^n}{X(x)}\,dx \qquad (n = 0,\ 1,\ 2) \tag{5.19}$$

se evaluează numeric. Rezolvînd ecuația (5.18), obținem pe $k$.

Pentru a simplifica rezultatele de mai sus, vom presupune pe bază experimentală și fără demonstrație că

$$m = \frac{1}{2} - i\vartheta, \tag{5.20}$$

unde

$$\vartheta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{D - B_1}{D + B_1} \tag{5.21}$$

este o constantă reală. Pentru simplificare, aceste rezultate vor fi aplicate numai la ștanța dublă cu lățime egală a segmentelor ($L_1 = L_2$).

*Cazul unei ștanțe duble cu secțiuni egale.* Vom examina acum o ștanță dublă cu lățime egală $L_1 = L_2$ și înălțime egală $h_1 = h_2 = 0$ a secțiunilor.

Fie $a_1 = -b$, $b_1 = -a$, $a_2 = a$, $b_2 = b$ și $x_0 = 0$ (fig. 7).

Pentru a separa partea reală de cea imaginară în (5.15) și (5.18), trebuie să facem unele transformări.

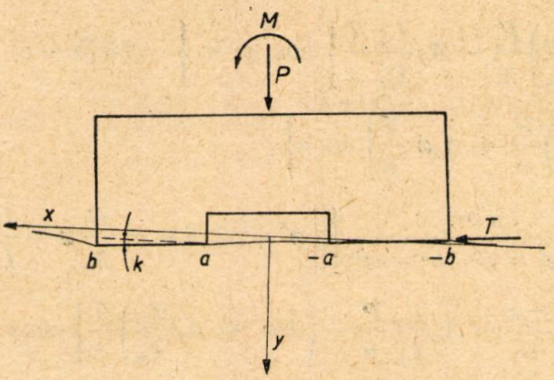


Fig. 7

În secțiunea $(-a, a)$ avem

$$\frac{1}{X(x)} = \frac{1}{\sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}} (\cos \varphi^* + i \sin \varphi^*), \tag{5.22}$$

unde

$$\varphi^* = \vartheta \ln \frac{(b - x)(a + x)}{(b + x)(a - x)}. \tag{5.23}$$

Apoi, dacă notăm

$$I_{nc} = \int_{-a}^{a} \frac{x^n \cos \varphi^*}{\sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}} dx, \quad I_{ns} = \int_{-a}^{a} \frac{x^n \sin \varphi^*}{\sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}} dx, \tag{5.24}$$

față de antisimetria integrantului, obținem

$$I_{0s} = I_{1c} = I_{2s} = 0$$

și

$$I_0 = I_{0c}, \; I_1 = iI_{1s}, \; I_2 = I_{2c}. \tag{5.25}$$

Apoi, putem scrie pe $L$

$$\frac{1}{X(x)} = \pm \frac{e^{-\pi\vartheta}}{i\sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}} (\cos \varphi + i \sin \varphi), \tag{5.26}$$

unde

$$\varphi = \vartheta \ln \frac{(b - x)(x + a)}{(b + x)(x - a)}. \tag{5.27}$$

Semnul superior (+) este valabil pe $L_2$, iar semnul inferior (—) pe $L_1$. În conformitate cu (5.15) obținem

$$p(x) = \pm \frac{\operatorname{ch} \vartheta\pi}{D\sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}} \bigg\{\bigg\{\bigg[x^2 - \frac{I_{2c}}{I_{0c}} + 2\vartheta(b-a)\frac{I_{1s}}{I_{0c}}\bigg]\frac{A_{2k}}{D} +$$

$$+\bigg(Dx - A_1\frac{I_{1s}}{I_{0c}}\bigg)\frac{P}{\pi} - A_2\frac{I_{1s}}{I_{0c}}\frac{T}{\pi}\bigg\}\cos\varphi + \bigg\{-2\vartheta(b-a)\frac{A_{2k}}{D}x +$$

$$+\bigg(A_1x + D\frac{I_{1s}}{I_{0c}}\bigg)\frac{P}{\pi} + A_2x\frac{T}{\pi}\bigg\}\sin\varphi\bigg\},$$

$$t(x) = \mp \frac{\operatorname{ch} \vartheta\pi}{D\sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}} \bigg\{\bigg\{\bigg[x^2 + 2\vartheta(b-a)\frac{D}{A_1}x - \frac{I_{2c}}{I_{0c}} + \tag{5.28}$$

$$+2\vartheta(b-a)\frac{I_{1s}}{I_{0c}}\bigg]\frac{A_1k}{D} - A_3\frac{I_{1s}}{I_{0c}}\frac{P}{\pi} - \bigg(Dx + A_1\frac{I_{1s}}{I_{0c}}\bigg)\frac{T}{\pi}\bigg\}\cos\varphi +$$

$$+\bigg\{\bigg[x^2 - 2\vartheta(b-a)\frac{A_1}{D}x - \frac{I_{2c}}{I_{0c}} + 2\vartheta(b-a)\frac{I_{1s}}{I_{0c}}\bigg]k +$$

$$+A_3\frac{P}{\pi}x + \bigg(A_1x - D\frac{I_{1s}}{I_{0c}}\bigg)\frac{T}{\pi}\bigg\}\sin\varphi\bigg\},$$

unde semnul superior înaintea membrului drept al formulelor de mai sus este valabil pe $L_2$, iar semnul inferior pe $L_1$.

Ținînd seama de (5.18), momentul care acționează asupra ștanței cu unghiul de pantă $k$, solicitată de forța verticală $P$ și forța orizontală $T$, este

$$M = -\frac{\pi k A_2}{D^2}\bigg[\frac{I_{2c}}{I_{0c}} - 2\vartheta(b-a)\frac{I_{1s}}{I_{0c}} - ab - \frac{1}{2}(1 + 4\vartheta^2)(b-a)^2\bigg] - \tag{5.29}$$

$$-\frac{1}{D}\bigg[2\vartheta(b-a) + \frac{I_{1s}}{I_{0c}}\bigg](A_1P + A_2T).$$

Dacă este dat $M$, iar panta $k$ nu este dată, va trebui să exprimăm pe $k$ funcție de momentul $M$. Rezolvînd ecuația (5.29) obținem

$$k = -\frac{D\bigg\{DM + \bigg[2\vartheta(b-a) + \frac{I_{1s}}{I_{0c}}\bigg](A_1P + A_2T)\bigg\}}{\pi A_2\bigg[\frac{I_{2c}}{I_{0c}} - 2\vartheta(b-a)\frac{I_{1s}}{I_{0c}} - ab - \frac{1}{2}(1 + 4\vartheta^2)(b-a)^2\bigg]}. \tag{5.30}$$

Așa cum apare evident din această formulă, ștanța va fi supusă unei rotații chiar în cazul în care nu există solicitări prin momente. Un sistem de două ştanţe legate între ele, cu lăţimea egală şi solicitate numai de forţa verticală $P$ care acţionează central, va fi supusă unei rotaţii

$$k = -\frac{A_1 D P\left[2\vartheta(b-a)+\frac{I_{1s}}{I_{0c}}\right]}{\pi A_2\left[\frac{I_{2c}}{I_{0c}} - 2\vartheta(b-a)\frac{I_{1s}}{I_{0c}} - ab - \frac{1}{2}(1+4\vartheta^2)(b-a)^2\right]}. \tag{5.31}$$

Deoarece pentru un plan ortotrop semi-infinit cu axa de ortotropie paralelă cu conturul semiplanului, şi fireşte şi pentru un semiplan izotrop avem $A_1 = 0$, această rotaţie apare ca un aspect calitativ deosebit al semiplanului anizotrop.

Pentru ca un sistem de ştanţe pe un semiplan anizotrop să nu se rotească, este necesar să fie acţionat de momentul

$$M = -\frac{1}{D}\left[2\vartheta(b-a)+\frac{I_{1s}}{I_{0c}}\right](A_1 P + A_2 T). \tag{5.32}$$

Calculul distribuţiei de tensiuni pentru trei sau pentru mai multe ştanţe rigid legate între ele este similar.

*Cazul unei ştanţe duble cu laturi orizontale.* Un caz interesant pentru compararea problemei de contact a unui semiplan anizotrop cu aceea a unui semiplan izotrop (ortotrop), îl constituie ştanţa dublă cu laturi orizontale egale $L_1 = L_2$ şi înălţime egală $h_1 = h_2 = 0$, solicitată numai de o forţă verticală $P$.

În acest caz tensiunile sînt date de formulele

$$p(x) = \pm\frac{P}{\pi}\frac{\operatorname{ch}\vartheta\pi}{D\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}\left[\left(Dx - A_1\frac{I_{1s}}{I_{0c}}\right)\cos\varphi + \right.$$
$$\left. + \left(A_1 x + D\frac{I_{1s}}{I_{0c}}\right)\sin\varphi\right], \tag{5.33}$$
$$t(x) = \pm\frac{P}{\pi}\frac{A_3\operatorname{ch}\vartheta\pi}{D\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}\left(\frac{I_{1s}}{I_{0c}}\cos\varphi - x\sin\varphi\right).$$

Pentru ca ştanţa dublă să fie orizontală după încărcare, ea trebuie să fie acţionată de momentul

$$M = -\frac{A_1 P}{D}\left[2\vartheta(b-a)+\frac{I_{1s}}{I_{0c}}\right], \tag{5.34}$$

sau forţa verticală $P$ trebuie să aibă excentricitatea

$$e = -\frac{A_1}{D}\left[2\vartheta(b-a)+\frac{I_{1s}}{I_{0c}}\right]. \tag{5.35}$$

Reprezentarea grafică a funcțiilor $p(x)$ și $t(x)$ pentru $P = 1$, $a = 1$, $b = 2$, este arătată în figura 8 pentru cazul în care proprietățile elastice ale semiplanului anizotrop sînt date de constantele

$$a_{11} = 3{,}932.10^{-3}, \quad a_{22} = 9{,}658.10^{-3}, \quad a_{66} = 13{,}704.10^{-3}$$

$$a_{12} = -0{,}697.10^{-3}, \quad a_{16} = -5{,}509.10^{-3}, \quad a_{26} = -4{,}397.10^{-3},$$

$$\mu_1 = -1{,}483 + 0{,}718\,i, \quad \mu_2 = 0{,}083 + 0{,}949\,i.$$

În cazul unui semiplan ortotrop cu o axă de ortotropie paralelă cu latura semiplanului avem $A_1 = 0$ și $M = 0$, $e = 0$, după cum rezultă în mod evident și din formulele (5.34) și (5.35) pentru rotirea ștanței duble.

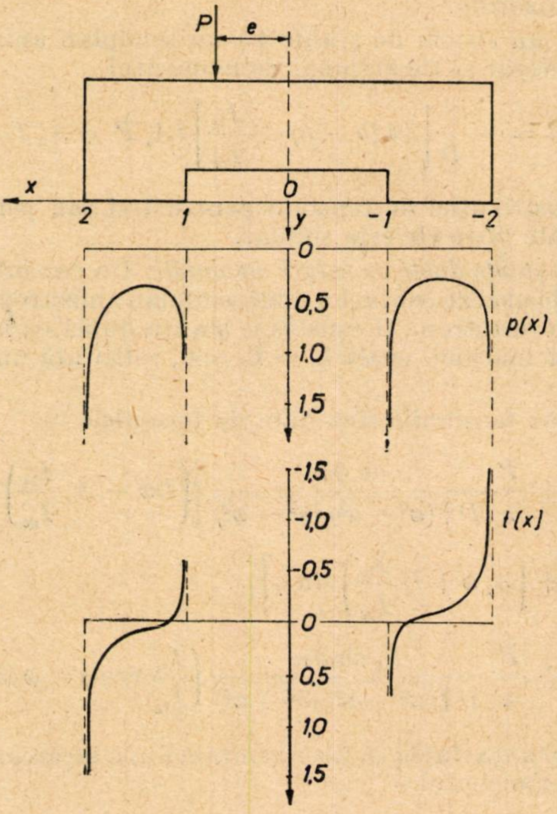


Fig. 8

Cînd sarcina verticală nu cauzează o deplasare orizontală, adică dacă $A_1 = B_1 = 0$, obținem

$$p(x) = \pm \frac{Px}{\pi\sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}}, \quad t(x) = 0. \tag{5.36}$$

A. I. Beghiaşvili [1] a arătat că aceste formule dau distribuţia de tensiuni pe semiplanul izotrop iar G. N. Savin [15] a demonstrat că ele rămîn valabile şi pentru un semiplan anizotrop, dacă efectul frecării este neglijabil.

*Cazul unei singure ştanţe.* Formulele pentru distribuţia de tensiuni sub o ştanţă care acţionează asupra unui semiplan anizotrop elastic pot fi deduse făcînd trecerea la limită $a \to 0$ în rezultatele obţinute pentru ştanţa dublă.

Deoarece avem

$$\lim_{a\to 0} \frac{I_{2c}}{I_{0c}} = 0, \quad \lim_{a\to 0} \frac{I_{1s}}{I_{0c}} = 0, \tag{5.37}$$

obţinem

$$F(z) = \frac{Nk}{2D}\left[1 - \frac{z + 2i\vartheta b}{(z+b)^{\frac{1}{2}+i\vartheta}(z-b)^{\frac{1}{2}-i\vartheta}}\right] - \frac{P - NT}{2\pi i(z+b)^{\frac{1}{2}+i\vartheta}(z-b)^{\frac{1}{2}-i\vartheta}} \tag{5.38}$$

şi

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{\operatorname{ch} \vartheta\pi}{D\sqrt{b^2 - x^2}}\left\{\left[\frac{A_2}{D} kx + \frac{DP}{\pi}\right]\cos\varphi + \right. \\ &\quad \left. + \left[-\frac{2\vartheta A_2}{D} kb + \frac{1}{\pi}(A_1 P + A_2 T)\right]\sin\varphi\right\}, \\ t(x) &= -\frac{\operatorname{ch} \vartheta\pi}{D\sqrt{b^2 - x^2}}\left\{\left[(A_1 x + 2\vartheta b D)\frac{k}{D} - \frac{DT}{\pi}\right]\cos\varphi + \right. \\ &\quad \left. + \left[(Dx - 2\vartheta b A_1)\frac{k}{D} + \frac{1}{\pi}(A_3 P + A_1 T)\right]\sin\varphi\right\}, \end{aligned} \tag{5.39}$$

unde

$$\varphi = \vartheta \ln \frac{b - x}{b + x}. \tag{5.40}$$

Atunci momentul *M* care acţionează asupra ştanţei este

$$M = \frac{\pi A_2}{2D^2}(1 + 4\vartheta^2) b^2 k - \frac{2\vartheta b}{D}(A_1 P + A_2 T). \tag{5.41}$$

Dacă momentul *M* este dat, atunci panta *k* este

$$k = \frac{2D\,[MD + 2\vartheta b\,(A_1 P + A_2 T)]}{\pi A_2 (1 + 4\vartheta^2) b^2}. \tag{5.42}$$

Ştanţa se roteşte chiar în cazul în care este solicitată numai de forţa verticală *P* care acţionează în centrul ei. Acest rezultat este calitativ similar cu acela obţinut pentru ştanţă dublă.

Prin substituire în (5.39) obținem

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \frac{\operatorname{ch} \vartheta\pi}{\pi D \sqrt{b^2 - x^2}} \left\{ \left[ \frac{2\,[MD + 2\vartheta b\,(A_1 P + A_2 T)]}{(1 + 4\vartheta^2)\, b^2}\, x + DP \right] \cos\varphi - \right. \\
&\quad \left. - \left[ \frac{4\,[MD + 2\vartheta b\,(A_1 P + A_2 T)]\, \vartheta k}{(1 + 4\vartheta^2)\, b} - A_1 P - A_2 T \right] \sin\varphi \right\}, \\
t(x) &= -\frac{\operatorname{ch} \vartheta\pi}{\pi D \sqrt{b^2 - x^2}} \left\{ \left[ (A_1 x + 2\vartheta b D)\, \frac{2\,[MD + 2\vartheta b\,(A_1 P + A_2 T)]}{(1 + 4\vartheta^2)\, A_2 b^2} - DT \right] \cos\varphi + \right. \\
&\quad \left. + \left[ (Dx - 2\vartheta b\, A_1)\, \frac{2\,[MD + 2\vartheta b\,(A_1 P + A_2 T)]}{(1 + 4\vartheta^2)\, A_2 b^2} + A_3 P + A_1 T \right] \sin\varphi \right\}.
\end{aligned}
\tag{5.43}
$$

Formulele de mai sus pentru o singură ștanță sînt în concordanță cu rezultatele deduse în prealabil [2], [3], folosindu-se însă notații diferite.

### 6. CAZUL A DOUĂ ȘTANȚE LIBERE

Să considerăm că două ștanțe libere acționează pe segmentele $L_1$, $L_2$ ale unui semiplan anizotropic elastic (fig. 9). Să presupunem că ștanțele se pot deplasa independent una de alta în direcția verticală și orizontală. Ștanța $S_j$ este solicitată de forța verticală $P_j$, de forța orizontală $T_j$ și de momentul $M_j$. În acest caz condițiile la limita pe $y=0$ sînt

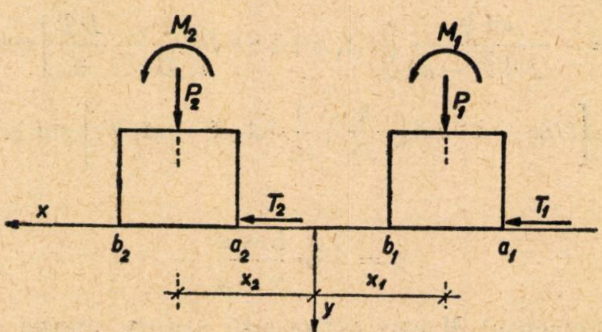


Fig. 9

$$
\begin{aligned}
&\sigma_y = 0, && \tau_{xy} = 0 && \text{pe } K, \\
&\frac{\partial u}{\partial x} = 0, && \frac{\partial v}{\partial x} = k_1 && \text{pe } L_1, \\
&\frac{\partial u}{\partial x} = 0, && \frac{\partial v}{\partial x} = k_2 && \text{pe } L_2
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

şi

$$\begin{aligned} f_1(x) &= Nk_1 \quad \text{pe } L_1, \\ f_2(x) &= Nk_2 \quad \text{pe } L_2. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Ţinînd seama de (4.16) obţinem

$$\begin{aligned} F(z) = \frac{N}{2\pi i\,(B_1 - D)\,X(z)} \left[ k_1 \int_L \frac{X^+(\xi)}{\xi - z}\, d\xi + (k_2 - k_1) \int_{L_2} \frac{X^+(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \right] + \\ + \frac{c_1 z + c_0}{X(z)}, \end{aligned} \tag{6.3}$$

unde

$$X(z) = (z - a_1)^{1-m}\,(z - b_1)^m\,(z - a_2)^{1-m}\,(z - b_2)^m. \tag{6.4}$$

A doua integrală din relaţia (6.3) urmează a fi obţinută prin integrare numerică.

Pentru claritate, ne vom limita la cazul în care pantele ştanţelor sînt egale $k_1 = k_2 = k$. Apoi integrînd (6.3) ca şi în cazul ştanţei duble, găsim

$$F(z) = -\frac{Nk}{2D}\left[1 - \frac{z^2 + r_1 z + r_0}{X(z)}\right] + \frac{c_1 z + c_0}{X(z)}, \tag{6.5}$$

unde $r_0, r_1$ sînt date de (5.7).

Constanta $c_1$ va fi determinată din condiţiile de echilibru (4.37) ale ambelor ştanţe. Ca şi în primul caz obţinem

$$c_1 = -\frac{P - NT}{2\pi i}, \tag{6.6}$$

unde

$$P = P_1 + P_2, \qquad T = T_1 + T_2. \tag{6.7}$$

Constanta $c_0$ poate fi determinată din condiţiile de echilibru în direcţiile orizontală şi verticală ale unei ştanţe oarecare $L_1$ sau $L_2$. Pe $L_2$ avem

$$\frac{1}{B_1 + D} \int_{L_2} \frac{Nk\,(x^2 + r_1 x + r_0) + 2D\,(c_1 x + c_0)}{X^+(x)}\, dx = P_2 - NT_2. \tag{6.8}$$

Făcînd unele transformări putem scrie

$$\begin{aligned} c_0 = \frac{1}{2DJ_0} \Big[ (B_1 + D)\,(P_2 - NT_2) + \frac{DJ_1}{\pi i}\,(P - NT) - \\ - Nk\,(J_2 + r_1 J_1 + r_0 J_0) \Big], \end{aligned} \tag{6.9}$$

unde notăm

$$J_n = \int_{L_2} \frac{x^n}{X(x)}\, dx. \tag{6.10}$$

Valorile tensiunilor pot fi găsite acum din (4.28). Obținem astfel

$$\begin{aligned} p(x) = &-\frac{1}{B_1 + D}\, \mathcal{J}m \left\{\frac{1}{X(x)} \left\{\frac{kA_2}{D}\left[x^2 + r_1 x - \frac{1}{J_0}(J_2 + r_1 J_1)\right] + \right.\right.\\ &\left.\left. + \frac{1}{\pi i}\,[P(A_1 + iD) + TA_2]\left(x - \frac{J_1}{J_0}\right) - \frac{B_1 + D}{DJ_0}\,[P_2(A_1 + iD) + T_2 A_2]\right\}\right\}, \\ t(x) = &\frac{1}{B_1 + D}\, \mathcal{J}m \left\{\frac{1}{X(x)} \left\{\frac{k}{D}(A_1 - iD)\left[x^2 + r_1 x - \frac{1}{J_0}(J_2 + r_1 J_1)\right] + \right.\right.\\ &\left.\left. + \frac{1}{\pi i}\,[PA_3 + T(A_1 - iD)]\left(x - \frac{J_1}{J_0}\right) - \frac{B_1 + D}{DJ_0}\,[P_2 A_3 + T_2(A_1 - iD)]\right\}\right\}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

*Cazul a două ștanțe cu segmentele orizontale de contact egale.* Vom cerceta distribuția de tensiuni sub două ștanțe cu segmente orizontale de contact egale. Fie $a_1 = -b$, $b_1 = -a$, $a_2 = a$, $b_2 = b$ și $x_1 = -\frac{1}{2}(a + b)$, $x_2 = \frac{1}{2}(a + b)$.

Pentru a separa partea reală și imaginară în relația (6.11) trebuie să facem unele transformări. Ținînd seama de (5.26) putem scrie

$$J_n = J_{ns} - i\, J_{nc}, \tag{6.12}$$

unde

$$\begin{aligned} J_{nc} &= e^{-\vartheta\pi} \int_{L_2} \frac{x^n \cos \varphi}{\sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}}\, dx, \\ J_{ns} &= e^{-\vartheta\pi} \int_{L_2} \frac{x^n \sin n\varphi}{\sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}}\, dx. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Ținînd seama de (5.10) se poate arăta ușor că

$$\begin{aligned} J_{0s} &= 0, \\ J_{1c} &= \frac{\pi(B_1 + D)}{2D}. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Obținem deci

$$c_0 = \frac{i}{4\, DJ_{0c}} \left\{(B_1 + D)\,[P_2 - P_1 - N(T_2 - T_1)] + \frac{2\, DJ_{1s}}{\pi i}(P - NT)\right\}. \tag{6.15}$$

Putem scrie acum (6.11) sub forma

$$\begin{aligned}
p(x) = \pm \frac{\operatorname{ch} \vartheta\pi}{\pi D \sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}} \Bigg\{ \Bigg\{ \left( Dx - A_1 \frac{J_{1s}}{J_{0s}} \right) P - \frac{J_{1s}}{J_{0c}} A_2 T + \\
+ \frac{\pi(B_1+D)}{2J_{0c}} (P_2 - P_1) \Bigg\} \cos\varphi + \Bigg\{ \left( A_1 x + D \frac{J_{1s}}{J_{0c}} \right) P + A_2 Tx + \\
+ \frac{\pi(B_1+D)}{2DJ_{0c}} [A_1(P_2 - P_1) + A_2(T_2 - T_1)] \Bigg\} \sin\varphi \Bigg\}, \\
t(x) = \pm \frac{\operatorname{ch} \vartheta\pi}{\pi D \sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}} \Bigg\{ \Bigg\{ \frac{J_{1s}}{J_{0c}} A_3 P + \left( Dx + A_1 \frac{J_{1s}}{J_{0s}} \right) T + \\
+ \frac{\pi(B_1+D)}{2J_{0c}} (T_2 - T_1) \Bigg\} \cos\varphi - \Bigg\{ A_3 Px + \left( A_1 x - D \frac{J_{1s}}{J_{0c}} \right) T + \\
+ \frac{\pi(B_1+D)}{2DJ_{0c}} [A_3(P_2 - P_1) + A_1(T_2 - T_1)] \Bigg\} \sin\varphi \Bigg\},
\end{aligned} \tag{6.16}$$

unde semnul superior înaintea membrului drept este valabil pe $L_2$, iar semnul inferior pe $L_1$.

Pentru ca ștanțele să nu se rotească, ele trebuie să fie acționate de momentele $M_1$ $M_2$ pe care le obținem din condițiile de echilibru de moment (4.37) și (4. 38). Avem

$$\begin{aligned}
M_1 &= \int_L xp(x)\,dx + \frac{1}{2}(P_1 - P_2)(a+b) - M_2, \\
M_2 &= \int_{L_2} xp(x)\,dx - \frac{1}{2} P_2 (a+b).
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Ținînd seama de (5.10) obținem relația

$$J_{2s} = - \frac{\pi(B_1+D)}{D} \vartheta (b-a). \tag{6.18}$$

După integrare și reducere putem scrie

$$\begin{aligned}
M_1 = -\frac{1}{D} \Bigg\{ \left[ 2\vartheta(b-a) + \frac{J_{1s}}{J_{0c}} \right] (A_1 P + A_2 T) + \\
+ \frac{1}{2} \left[ D(a+b) - \frac{\pi}{J_{0c}} (B_1 + D) \right] (P_2 - P_1) \Bigg\} - M_2, \\
M_2 = \frac{1}{D} \Bigg\{ \left[ \frac{D^2}{\pi(B_1+D)} \left( J_{2s} + \frac{J_{1s}^2}{J_{0s}} \right) - \vartheta(b-a) A_1 - \frac{D}{2}(a+b) \right] P - \\
- \vartheta(b-a) A_2 T - \frac{J_{1s}}{J_{0c}} (A_1 P_1 + A_2 T_1) + \frac{\pi(B_1+D)}{4J_{0c}} (P_2 - P_1) \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Dacă ștanțele sînt acționate numai de forțele verticale $P_1 = P_2 = \frac{P}{2}$ obținem

$$p(x) = \pm \frac{P}{\pi} \frac{\operatorname{ch} \vartheta\pi}{D\sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}} \left[ \left( Dx - A_1 \frac{J_{1s}}{J_{0c}} \right) \cos\varphi + \right.$$

$$\left. + \left( A_1 x + D \frac{J_{1s}}{J_{0c}} \right) \sin\varphi \right], \tag{6.20}$$

$$t(x) = \pm \frac{P}{\pi} \frac{A_3 \operatorname{ch} \vartheta\pi}{D\sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}} \left( \frac{J_{1s}}{J_{0c}} \cos\varphi - x \sin\varphi \right),$$

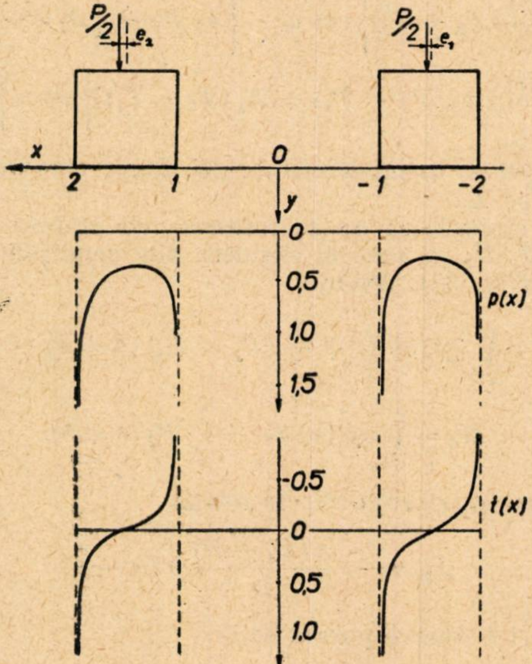


Fig. 10

iar forțele $\frac{P}{2}$ trebuie să acționeze cu excentricitățile

$$e_1 = -\frac{1}{2}\left[2\vartheta(b - a) + \frac{J_{1s}}{J_{0c}}\right]\frac{A_1}{D} - \frac{D}{\pi(B_1 + D)}\left(J_{2c} + \frac{J_{1s}^2}{J_{0c}}\right) + \frac{1}{2}(a + b),$$

$$e_2 = -\frac{1}{2}\left[2\vartheta(b - a) + \frac{J_{1s}}{J_{0c}}\right]\frac{A_1}{D} + \frac{D}{\pi(B_1 + D)}\left(J_{2c} + \frac{J_{1s}^2}{J_{0c}}\right) - \frac{1}{2}(a + b). \tag{6.21}$$

Formulele (6.20) sînt analoge cu acelea pentru ştanţele rigid legate între ele, cu excepţia fracţiilor $\frac{I_{1s}}{I_{0c}}$ şi $\frac{J_{1s}}{J_{0c}}$.

Reprezentarea grafică a funcţiilor $p(x)$ şi $t(x)$ pentru $P = 1$, $a = 1$, $b = 2$ este dată în figura 10 pentru cazul în care proprietăţile elastice ale semiplanului anizotrop sînt aceleaşi ca şi pentru ştanţa dublă.

Pentru $A_1 = B_1 = 0$ obţinem o soluţie pentru orice deplasare orizontală a semiplanului

$$p(x) = \pm \frac{Px}{\pi \sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}}, \quad t(x) = 0. \tag{6.22}$$

Presupunînd că frecarea de contact este neglijabilă, I. Ia. Ştaerman [16] a obţinut această soluţie pentru un semiplan izotrop, iar G. N. Savin [15] a dovedit valabilitatea ei şi pentru un semiplan anizotrop.

## 7. CONCLUZII

Distribuţia de tensiuni caracteristică sub ştanţele rigide ce acţionează asupra unui semiplan elastic anizotrop este aceea care are loc în ipoteza continuităţii contactelor ştanţelor rigide şi a semiplanului anizotrop. Această distribuţie de tensiuni diferă calitativ de aceea care are loc cînd se neglijează efectul frecării şi de aceea de pe un semiplan elastic izotrop sau ortotrop. Un sistem de ştanţe rigid legate între ele, simetric solicitat, este supus unei rotaţii. Pentru a împiedica rotirea sistemului, rezultanta sarcinilor trebuie să acţioneze cu o excentricitate. Rezultatele obţinute prezintă interes pentru fundaţiile aşezate pe straturi în pantă.

*Primită la redacţie la 12 mai 1961.*

# КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА УПРУГОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

## РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается контактная задача упругой анизотропной полуплоскости для $r$ — жестких штампов жестко сцепленных с полуплоскостью. После перехода к системе двух сингулярных интегральных уравнений (4.7) и к задаче Гильберт — Римана (4.15) приводится общее решение задачи в виде двух кусочно-голоморфных функций $F(z)$ и $\overline{F}(z)$. Решение для всей полуплоскости (4.26) является линейным сочетанием функций $F(z_1)$, $\overline{F}(z_1)$ $F(z_2)$, $\overline{F}(z_2)$.

В качестве примера было дано решение для двух штампов жестко между собой соединенных или свободных.

Решение качественно отличается от распределения напряжений на упругой анизотропной полуплоскости при отсутствии трения и от решения распределения напряжений для упругой изотропной и ортотропной полуплоскости.

## CONTACT PROBLEMS OF AN ELASTIC ANISOTROPIC HALF-PLANE

### ABSTRACT

The present paper is concerned with the solution of the contact problems for $n$ rigid punches adhering to an elastic anisotropic half-plane. After being reduced to a system of two singular integral equations (4.7) and then to the Hilbert-Riemann problem (4.15), the general solution for $n$ punches is given in terms of two sectionally holomorphic functions $F(z)$ and $\bar{F}(z)$. The solution in the interior of the half-plane (4.26) is found as a linear combinations of the functions $F(z_1)$, $\bar{F}(z_1)$ and $F(z_2)$, $\bar{F}(z_2)$.

As a special case the solutions are derived for two punches free from each other or rigidly interconnected.

The solutions are qualitatively different from those neglecting the effect of friction as well as from the solution of stress distribution under punches on an elastic isotropic or orthotropic half-plane.

### BIBLIOGRAFIE

1. БЕГИАШВИЛИ А. И., *Решение задачи давления системы жестских профилей на прямолинейную границу упругой полуплоскости.* ДАН СССР, **XXVII**, *9* (1940).
2. BRILLA J., *Príspevok k teórii pružnej anizotropickej polroviny. Nové príspevky k teórii stavebných konštrukcií.* Sborník z. I. československého sjazdu teoretikov stavebných konštrukcií 24—26 **IX** 1957, VSAV, Bratislava, 1959.
3 — *Anizotropické steny.* VSAV, Bratislava, 1958.
4 — *Contact problems of an elastic anisotropic half-plane.* Xth. Int. Congress of Appl. Mech at Stresa, 1960.
5. ГАЛИН Л. А., *Контактные задачи теории упругости.* Гостехиздат, Москва, 1953.
6. GREEN A.E., ZERNA W., *Theoretical elasticity.* At the Clarendon Press, Oxford, 1954.
7. ЛЕХНИЦКИЙ С. Г., *Анизотропные пластинки.* Гостехиздат, Москва, 1957.
8. МУСХЕЛИШВИЛИ Н. И., *Сингулярные интегральные уравнения.* Гостехиздат, Москва, 1946.
9. МУСХЕЛИШВИЛИ Н. И., *Некоторые основные задачи математической теории упругости.* Издательство АН СССР, Москва, 1954.
10. САВІН Г. М., *Тиск абсолютно-твердого штампа на пружне анізотропне середовище.* Доп. АН УРСР, *6* (1939).

11. САВІН Г. М., *Про додатковий тиск, який передається по підошві абсолютно твердого штампа на пружну анізотропну основу, викликаний прикладеним навантаженням поблизу абсолютно твердого штампа.* Доп. АН УРСР, *7* (1940).
12. САВІН Г. М., *Змішана задача для анізотропної півплощини.* Наукові записки Львівського Державного Університету ім. Ів. Франка, серія фіз.-мат., **V**, *2* (1947).
13. САВИН Г. Н., *Некоторые задачи теории упругости анизотропной среды.* ДАН СССР, **XXIII**, *3* (1939).
14. САВИН Г. Н., *Давление абсолютно-жесткого ленточного фундамента на упругое анизотропное основание.* Вест. Инж. и техн., *5* (1940).
15. САВИН Г. Н., *Давление системы абсолютно-жестских штампов на упругую анизотропную полуплоскость.* Сообщения Груз, фил. АН СССР, **I**, *10* (1940).
16. ШТАЕРМАН И. Я., *Контактная задача теории упругости.* Гостехиздат, Москва — Ленинград, 1949.

# UNELE PROBLEME ÎN LEGĂTURĂ CU CALCULUL LA STAREA LIMITĂ DE REZISTENȚĂ A ELEMENTELOR DE BETON PRECOMPRIMAT

DE

M. TANNENBAUM[1]

1. Principiile fundamentale ale unor metode raționale de calcul trebuie să îmbine în mod corespunzător și echilibrat precizia mijloacelor de descriere matematică a fenomenelor cu caracterul aleatoriu al parametrilor care caracterizează încărcările și comportarea materialelor.

Principiile de calcul la stările limită, astfel după cum au fost elaborate în U.R.S.S., constituie în prezent formularea care exprimă în modul cel mai cuprinzător aspectul statistic al criteriilor de proiectare.

În conformitate cu aceste principii, în proiectare se iau în considerație două grupe de stări limită ale construcțiilor :

*a*) stări limită ale capacității portante :
— starea limită de rezistență ;
— starea limită de oboseală ;
— starea limită de stabilitate.
*b*) stări limită ale exploatării normale :
— starea limită de apariție a fisurilor ;
— starea limită de deschidere a fisurilor ;
— starea limită de deformație.

Această împărțire are o deosebită importanță practică, deoarece delimitează criteriile de securitate care trebuie satisfăcute de o construcție pentru diferitele categorii de stări limită. Primul grup conține acele stări limită a căror atingere are drept urmare ieșirea din funcție a construcției și necesitatea înlocuirii sau consolidării acesteia, precum și distrugerea valorilor materiale sau umane protejate de către construcția considerată. Al doilea grup conține acele stări limită a căror atingere are drept urmare împiedicarea exploatării normale a construcției, respectiv numai pierderea producției pe care o asigură construcția, ea putînd fi refolosită fără restricții după îndepărtarea cauzei perturbatoare.

---

[1] Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor (INCERC) București.

Proiectarea unui element de construcție se reduce astfel la scrierea condițiilor ca, pentru fiecare stare limită, valoarea maximă probabilă a efectului acțiunii factorilor care solicită construcția în cursul existenței acesteia să fie mai mică decît valoarea minimă probabilă a capacității construcției de a răspunde la acțiunea considerată, ținînd seama în fixarea valorilor comparate de criteriile de securitate pentru stările limită considerate.

2. Verificarea la starea limită de rezistență constituie în general condiția principală de proiectare a elementelor de construcții.

Pentru această verificare se ia în considerație caracterul aleatoriu al parametrilor care exprimă încărcările ce solicită construcția și proprietățile mecanice ale materialelor din care aceasta este alcătuită, prin introducerea în formulele de proiectare nu a valorilor medii (normate) ale acestora $S^n$ și $R^n$, ci a unor valori limită de calcul corespunzătoare $S$ și $R$, în fixarea cărora se ține seama de răspîndirea statistică în jurul mediei după relațiile

$$S = (1 + \alpha\sigma)\ S^n = nS^{nn},$$

$$R = (1 - \alpha\sigma)\ R^n = kR^n,$$

unde

$\sigma$ — abaterea medie pătratică,

$\alpha$ — coeficient a cărui valoare numerică se fixează în funcție de probabilitatea cu care se admite realizarea în construcție a valorii limite considerate,

$n$ — coeficient de supraîncărcare,

$k$ — coeficient de omogeneitate.

În general, valoarea coeficientului $\alpha$ se fixează corespunzător unei probabilități de $1^0/_{00}$ de realizare a valorii limită de calcul.

Coeficienții de supraîncărcare au valori cuprinse între 1,1 și 1,4 în funcție de natura încărcării.

Coeficienții de omogeneitate au valoarea :

$k_b$ — 0,6 pentru betonul de marcă superioară utilizat în elementele precomprimate;

$k_p$ — 0,8 pentru armătura pretensionată sub formă de sîrmă trasă la rece.

Pentru beton rezistența normată este egală cu valoarea medie a rezultatelor experimentale obținute pe probe de control, iar pentru sîrma trasă cu limita de rebut pentru rezistența la tracțiune garantată de producător.

În consecință, expresia generală de calcul pentru starea limită de rezistență se scrie sub forma

$$S \leqslant \Phi\ (m,\ R,\ A), \tag{1}$$

unde

$S$ — efectul acțiunii încărcărilor de calcul în cea mai defavorabilă combinație asupra construcției,

$\Phi$ — capacitatea construcției de a răspunde la acțiunea considerată a încărcărilor în starea limită dată, funcție de dimensiunile geometrice ale construcției $A$, de proprietățile mecanice ale materialelor care compun construcția $R$, și de coeficientul condițiilor de lucru ale construcției $m$ (factor care ține seama de aproximațiile metodelor de calcul folosite, de condiții speciale care nu se supun unor legi statistice exprimabile analitic etc.).

3. Metodele curente de calcul la rezistență a secțiunilor solicitate la încovoiere, bazate numai pe scrierea echilibrului în secțiune, nu dau rezultate satisfăcătoare, — în special pentru secțiuni cu procente mai mari de armare.

În aceste metode se admite în general ipoteza că, în momentul cedării secțiunii, în armătura pretensionată se atinge limita de rupere a oțelului și se poate scrie de exemplu pentru o secțiune dreptunghiulară, relația

$$M_r \leqslant A_p\, R_p\, h_0 \left(1 - 0{,}5\,\frac{A_p}{bh_0}\,\frac{R_p}{R_i}\right). \tag{2}$$

În acest mod se pot adopta direct toate formulele de calcul la rupere ale secțiunilor incovoiate de beton armat.

Ca și în cazul betonului armat, această ipoteză este valabilă pentru secțiunile armate cu armătură prezentînd un palier pronunțat de curgere și la care epuizarea capacității portante începe prin atingerea limitei de curgere a oțelului, momentul de rupere, — caracterizat prin cedarea betonului zonei comprimate, — fiind practic egal cu momentul de curgere.

În cazul secțiunilor armate cu oțeluri fără palier de curgere are loc o creștere continuă a eforturilor unitare din armătură pe măsura sporirii deformației elementului. În consecință, dispare noțiunea fizică a momentului de curgere. Capacitatea portantă a secțiunii este epuizată în momentul în care unul dintre materialele componente ale secțiunii atinge deformația sa specifică limită. Cu excepția elementelor avînd procente reduse de armare și prevăzute cu armătură avînd o bună aderență cu betonul,ruperea are loc prin cedarea zonei comprimate înainte de a se atinge în armătură limita de rupere.

În figura 1 s-au reprezentat valorile eforturilor unitare din armătura pretensionată $\sigma_l$ în momentul cedării secțiunii prin strivirea betonului zonei comprimate, obținute experimental de către diferiți cercetători pe grinzi încovoiate din beton precomprimat de secțiune dreptunghiulară sau cu placă în zona comprimată. Se remarcă scăderea continuă a acestor eforturi o dată cu creșterea procentului de armare.

Se vede deci că, pentru betonul precomprimat nu sînt aplicabile formulele obișnuite de calcul de la betonul armat, a căror utilizare duce în acest caz la obținerea unor valori exagerate pentru capacitatea portantă. Nerealizarea coeficientului de siguranță prevăzut prin proiect, constatată la multe dintre încercările efectuate pînă în prezent în cadrul INCERC, se explică deci în cea mai mare parte prin neconcordanța cu realitatea a coeficientului de siguranță astfel calculat. Totuși rezultatele acestor

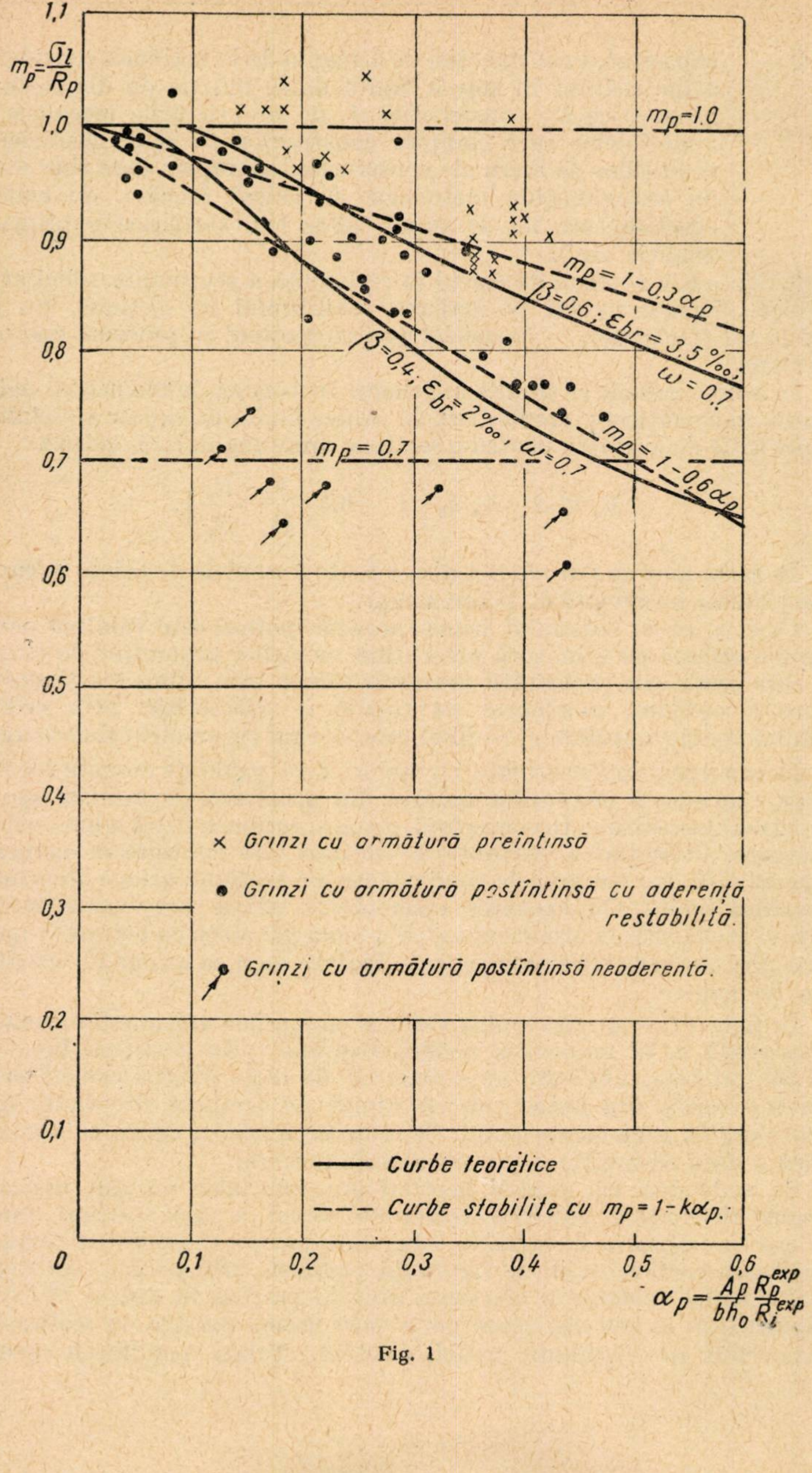

1,1
$m_p = \frac{\sigma_l}{R_p}$
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
$\alpha_p = \frac{A_p}{bh_0} \frac{R_p^{exp}}{R_i^{exp}}$
$m_p = 1.0$
$m_p = 1 - 0,3\alpha_p$
$\beta = 0,6 ; \varepsilon_{br} = 3,5$ ‰; $\omega = 0,7$
$\beta = 0,4 ; \varepsilon_{br} = 2$‰, $\omega = 0,7$
$m_p = 0,7$
$m_p = 1 - 0,6\alpha_p$
× Grinzi cu armătură preîntinsă
● Grinzi cu armătură postîntinsă cu aderență restabilită.
Grinzi cu armătură postîntinsă neaderentă.
Curbe teoretice
Curbe stabilite cu $m_p = 1 - k\alpha_p$.

Fig. 1

încercări au creat uneori, în mod nejustificat, o atmosferă de neîncredere în jurul tehnicii betonului precomprimat.

O dată cu trecerea la calculul după metoda stărilor limită, în U.R.S.S. s-a căutat a se elimina această neconcordanță prin introducerea unui coeficient constant al condițiilor de lucru pentru armătura pretensionată $m_p < 1{,}0 = \text{const.}$, respectiv

$$M \leqslant m\, A_p\, m_p\, R_p\, h_0 \left(1 - 0{,}5 \frac{A_p}{bh_0} \frac{m_p R_r}{R_i}\right). \tag{3}$$

Comparația cu datele experimentale trecute în figura 1 ne arată că acest procedeu nu exprimă în mod corect realitatea fenomenului, caracterul convențional al formulelor de calcul fiind deosebit de evident.

4. Pentru a se obține rezultate satisfăcătoare este necesar a se ține seama de condiția de compatibilitate a deformațiilor în secțiune.

Calculul se bazează pe următoarele ipoteze, stabilite în urma interpretării datelor experimentale :

*a*) Starea limită de rupere are loc prin atingerea deformației specifice limită a betonului $\varepsilon_{br}$ în fibra extremă a zonei comprimate.

*b*) În starea limită de rupere rămîne valabilă ipoteza secțiunilor plane pentru deformațiile medii ale betonului în lungul elementului.

*c*) Betonul întins nu preia eforturi.

*d*) Distribuția pe înălțime a eforturilor unitare în betonul zonei comprimate se poate lua, fără a influența prea mult rezultatul final, pe baza diagramelor efort unitar — deformație specifică obținute la încercări de compresiune centrică pe prisme confecționate din același beton și încercate cu diferite viteze de încărcare.

*e*) Între variația deformației specifice medii de întindere a fibrei de beton de la nivelul armăturii pretensionate $\varepsilon_{bt} = \frac{h_0 - x}{x} \varepsilon_{br}$ și variația corespunzătoare a deformației specifice a armăturii pretensionate în dreptul secțiunii fisurate $\Delta \varepsilon_{al} = \varepsilon_{al} - \varepsilon_0$ există un raport $\psi$ care caracterizează condițiile de conlucrare dintre armătură și betonul adiacent (fig. 2).

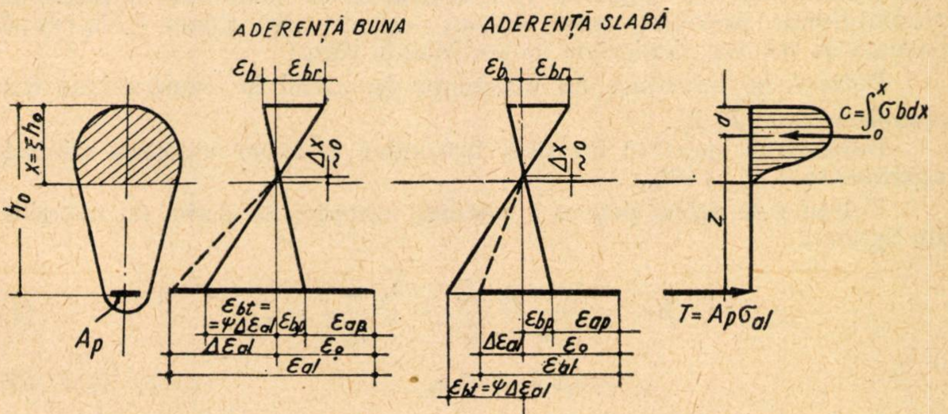


Fig. 2

Se înțelege că aceste ipoteze idealizează într-o mare măsură procesele reale care se dezvoltă în momentul ruperii, dar permit totuși o cuprindere mai corectă a fenomenului.

În scrierea relațiilor de calcul trebuie luat în considerație faptul că ele nu se referă la secțiunile reale ale elementelor de construcție, ci exprimă capacitatea portantă a unor secțiuni convenționale alcătuite din materiale convenționale, posedînd proprietățile mecanice minime corespunzătoare probabilității de realizare admise de norme.

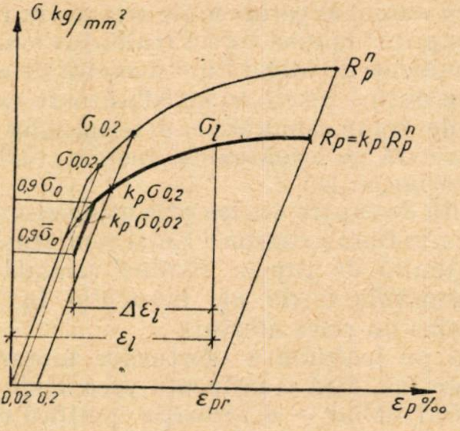


Fig. 3

În consecință, pentru armătura pretensionată se consideră în calcule o diagramă $\sigma-\varepsilon$ convențională, obținută prin reducerea în raportul $k_p$ a tuturor caracteristicilor mecanice garantate de către producător ($\sigma_{0.02}$; $\sigma_{0.2}$; $R_p^n$) (fig. 3).

Precomprimarea se ia în considerație cu valoarea inițială 0,9 $\sigma_0$, — unde coeficientul 0,9 exprimă probabilitatea de nerealizare a forței de precomprimare prevăzute prin proiect, — și valoarea finală $0{,}9\bar{\sigma}_0$ (după consumarea tuturor pierderilor de tensiune în timp).

Betonul se introduce cu rezistența de calcul la compresiune din încovoiere $R_i = k_b R_i^n$.

Deformația specifică limită a betonului se ia cu valoarea minimă experimentală $\varepsilon_{br}^n = 2^0/_{00}$.

Relațiile de calcul pentru o secțiune oarecare se scriu, cu notațiile din figura 2

$$\Delta\varepsilon_l = \frac{h_0 - x}{x}\,\frac{\varepsilon_{br}^n}{\psi} = \frac{h_0 - x}{x}\,\varepsilon_{br}^c, \tag{4}$$

$$\varepsilon_l = 0{,}9\,\bar{\varepsilon}_0 + \Delta\varepsilon_l, \tag{5}$$

$$\sigma_l = f(\varepsilon_l), \tag{6}$$

unde $\sigma_l$ rezultă din diagrama $\sigma - \varepsilon$ convențională a oțelului (fig. 3).

Poziția corectă a axei neutre se obține din condiția de echilibru în secțiune

$$A_p \sigma_l = \int_0^x \sigma_b(\xi)\, b(\xi)\, d\xi = C, \tag{7}$$

iar momentul capabil al secțiunii

$$M = C(h_0 - d). \tag{8}$$

Pentru coeficientul $\psi$ se pot alege pe baza datelor experimentale, valorile de calcul $\psi = 0{,}5$ pentru elemente cu armătură preîntinsă și $\psi = 1{,}0$ pentru elemente cu armătură postîntinsă. Pentru a nu complica formulele, este convenabil să se introducă valori de calcul diferențiate pentru deformația specifică limită a betonului,

$$\varepsilon^c_{br} = \frac{\varepsilon^n_{br}}{\psi}, \tag{9}$$

respectiv $\varepsilon^c_{br} = 4^0/_{00}$ pentru elemente cu armătură preîntinsă și $\varepsilon^c_{br} = 2^0/_{00}$ pentru elemente cu armătură postîntinsă.

În figura 1 s-au trasat 2 curbe teoretice ale variației efortului unitar din armătura pretensionată în momentul cedării secțiunii $\sigma_l$, calculate după metoda indicată pentru elemente de secțiune dreptunghiulară, în următoarele două ipoteze :

$$\beta = \frac{\bar{\sigma}_0}{R^n_p} = 0{,}4\,; \qquad \varepsilon^c_{br} = 2^0/_{00},$$

$$\beta = \frac{\bar{\sigma}_0}{R^n_p} = 0{,}6\,; \qquad \varepsilon^c_{br} = 3{,}5^0/_{00}.$$

În ambele cazuri s-a presupus pentru diagrama eforturilor unitare din betonul zonei comprimate coeficientul de umplere $\omega = 0{,}7$.

În figura 4 s-au reprezentat valorile momentelor experimentale de rupere obținute de diferiți cercetători pe grinzi încovoiate din beton precomprimat de secțiune dreptunghiulară sau cu placă în zona comprimată. Pe același grafic s-au trasat curbele teoretice calculate în conformitate cu metoda indicată în cele două ipoteze de mai sus, precum și curba corespunzătoare relației (2).

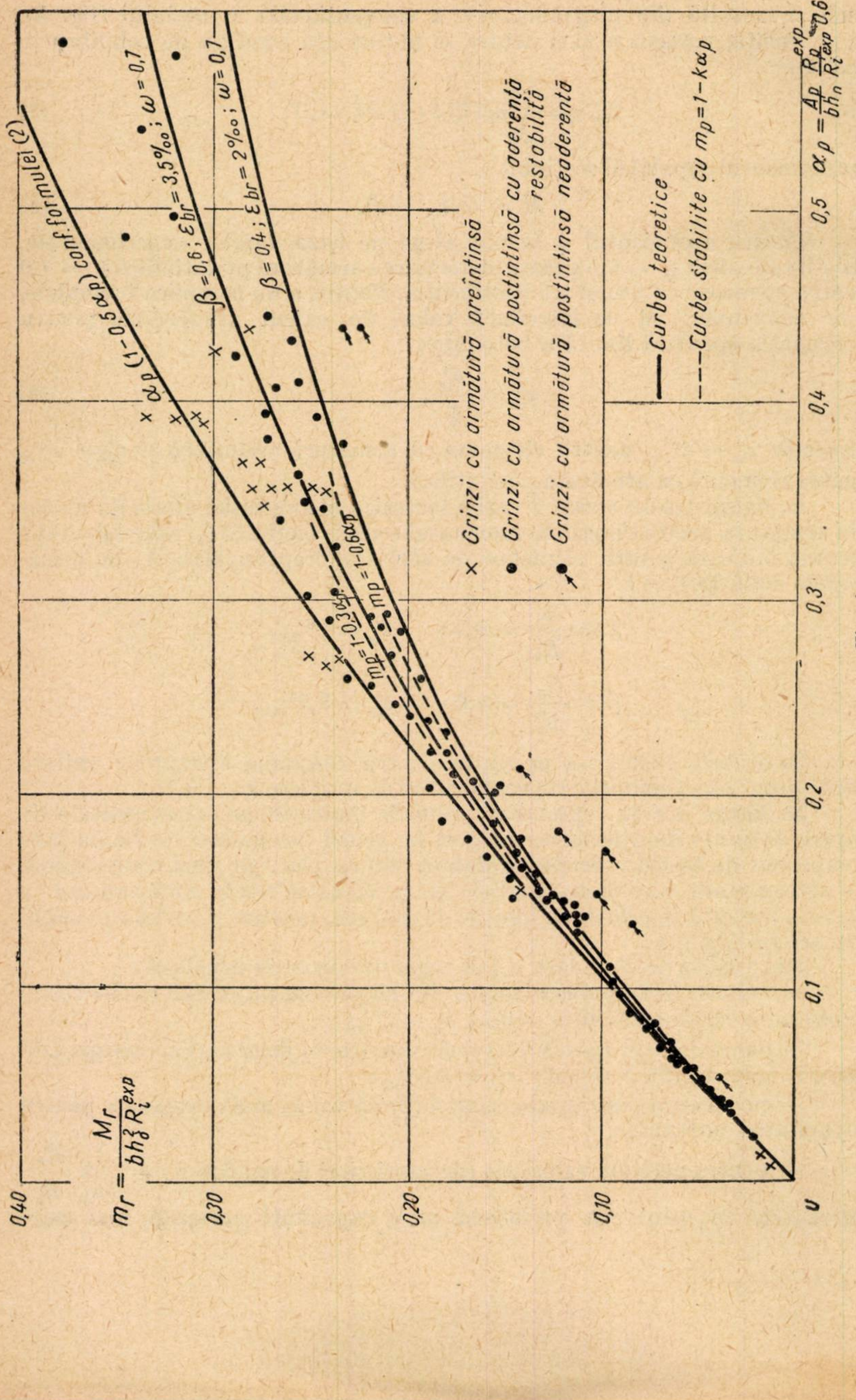
Din analiza acestor date se pot trage următoarele concluzii :

— numai cîteva puncte izolate sînt situate cu puțin sub curba corespunzătoare cazului minim $\beta = 0{,}4$ ; $\varepsilon^c_{br} = 2^0/_{00}$ ;

— punctele se grupează destul de simetric în jurul curbei corespunzătoare cazului mediu $\beta = 0{,}6$ ; $\varepsilon^c_{br} = 3{,}5^0/_{00}$ ;

— curba corespunzătoare relației (2) dă valori mult exagerate pentru capacitatea portantă ;

— pentru aceleași valori ale caracteristicei de armare $\alpha_p = \dfrac{A_p}{bh_0}\dfrac{R_p}{R_i}$, elementele cu armătura preîntinsă au o capacitate portantă mai mare



$m_r = \frac{M_r}{b h_0^2 R_i^{exp}}$
0,40
0,30
0,20
0,10
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
$\alpha \cdot p = \frac{A_p}{b h_n} \frac{R_p^{exp}}{R_i^{exp}}$
$\alpha p (1-0,5\alpha p)$ conf. formulei (2)
$\beta = 0,6;\ \varepsilon_{br} = 3,5‰;\ \omega = 0,7$
$\beta = 0,4;\ \varepsilon_{br} = 2‰;\ \omega = 0,7$
$m_p = 1-0,3\alpha p$
$m_p = 1-0,6\alpha p$
× Grinzi cu armătură preîntinsă
● Grinzi cu armătură postîntinsă cu aderență restabilită
Grinzi cu armătură postîntinsă neaderentă
Curbe teoretice
Curbe stabilite cu $m_p = 1-k\alpha p$

Fig. 4

decît elementele cu armătură postîntinsă, datorită condițiilor favorabile de aderență;

— unele elemente cu armătură preîntinsă, — în special cele armate cu sîrme sau cabluri cu aderență foarte bună și care au cedat prin ruperea armăturii, — prezintă valori foarte ridicate ale capacității portante.

5. Metoda de calcul indicată dă valori apropiate de realitate, este însă prea complicată și laborioasă pentru utilizarea în practică.

Dificultatea cea mai mare pentru proiectarea curentă constă în necesitatea de a se efectua integrarea diagramei caracteristice a betonului în zona comprimată. Ținînd seama de faptul că este vorba de un calcul cu mărimi convenționale statistice, pare logic a se admite și o schemă de calcul convențională mai simplificată, cu condiția ca rezultatul final care ne interesează — valoarea momentului capabil — să fie comparabil.

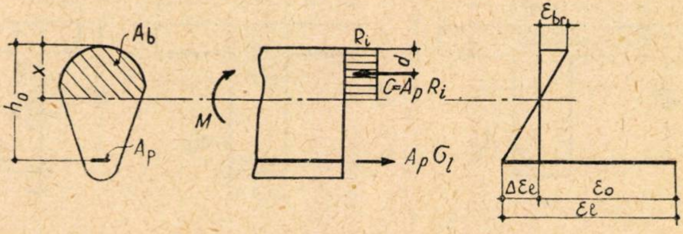


Fig. 5

Pe această linie, simplificarea practică cea mai importantă se obține înlocuind distribuția reală a eforturilor unitare din betonul zonei comprimate cu o distribuție dreptunghiulară (fig. 5). Pentru a nu influența valoarea momentului capabil, este necesar ca în această ipoteză convențională de calcul să se intre și cu valori convenționale pentru deformația specifică limită a betonului, respectiv $\varepsilon_{br} = 2‰$ pentru elemente cu armătură preîntinsă și $\varepsilon_{br} = 1‰$ pentru elemente cu armătură postîntinsă.

Abaterea dintre metoda astfel simplificată și metoda exactă variază, în funcție de procentul de armare, între $-4\%$ și $+7\%$.

Relațiile de calcul (4) (7) și (8) devin astfel (fig. 5)

$$\Delta \varepsilon_l = \frac{h_0 - x}{x} \varepsilon_{br}, \tag{10}$$

$$A_p \sigma_l = A_b R_i, \tag{11}$$

$$M = A_b R_i (h_0 - d). \tag{12}$$

6. Totuși și sub această formă proiectarea constituie o operație laborioasă, dificilă de tabulat.

De aceea, pentru secțiunile curente, de formă dreptunghiulară sau cu talpă în zona comprimată ($T$ sau $I$), avînd armătura pretensionată alcătuită din sîrmă de înaltă rezistență trasă la rece și care satisfac următoarele condiții caracteristice pentru domeniul economic de utilizare al precomprimării:

— se realizează prin mijloace adecuate aderența dintre armătura pretensionată şi betonul adiacent, astfel încît să se asigure conlucrarea pînă la rupere a celor 2 materiale;

— armătura pretensionată este repartizată pe mai puțin decît 30% din înălțimea grinzii şi poate fi în consecință considerată concentrată în centrul ei de greutate;

— efortul unitar de calcul din armătura pretensionată, după ce au avut loc toate pierderile de tensiune, depăşeşte 0,4 $R_p^n$;

— înălțimea zonei comprimate $x \leqslant 0{,}3\, h_0$;

se propune o relație directă de calcul, rezultată prin înlocuirea curbelor

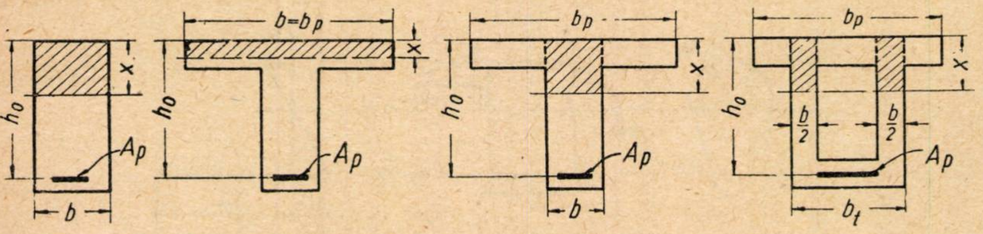


Fig. 6

teoretice de variație a efortului unitar $\sigma_l$ din armătura pretensionată în momentul cedării secțiunii cu o relație liniară (fig. 1)

$$\sigma_l = \left(1 - \frac{A_{pi}}{bh_0}\frac{R_p}{R_i}\right) R_p, \tag{13}$$

în care

$k$ = 0,30 pentru armături preîntinse,

$k$ = 0,60 pentru armături postîntinse,

$A_{pi}$ — fracțiunea din armătura pretensionată situată în zona întinsă, care echilibrează în starea limită de rezistență compresiunea preluată de betonul din porțiunea de lățime $b$ a zonei comprimate (fig. 6),

$b$ — lățimea zonei comprimate la nivelul axei neutre.

Valorile coeficientului $k$ s-au determinat din condiția ca formulele de calcul să acopere întregul domeniu practic al cazurilor posibile. Cu acest scop în figura 1 s-au trasat dreptele reprezentate de relația (13), care sînt vădit acoperitoare în raport cu punctele experimentale.

Se remarcă că se poate scrie expresia (13) sub forma

$$\sigma_l = m_p\, R_p \tag{14}$$

unde

$$m_p = 1 - k\,\frac{A_{pi}}{bh_0}\,\frac{R_p}{R_j}, \tag{15}$$

are caracterul unui coeficient al condițiilor de lucru ale armăturii pretensionate.

Acest coeficient, cu o valoare variabilă în funcție de procentul de armare, are un sens fizic precis, exprimînd gradul de utilizare al armăturii în secțiune în starea limită de rezistență.

Abaterile față de metoda exactă de calcul nu depășesc ± 5% în funcție de procentul de armare.

7. Formula finală de calcul pentru secțiuni dreptunghiulare se scrie

$$M \leqslant 0{,}8\, A_p\, \sigma_l\, h_0 \left(1 - 0{,}5\, \frac{A_p}{bh_0}\, \frac{\sigma_l}{R_i}\right), \qquad (16)$$

unde 0,8 este un coeficient de corecție care ține seama de efectul aproximațiilor introduse prin metoda de calcul și de o serie de factori statistici

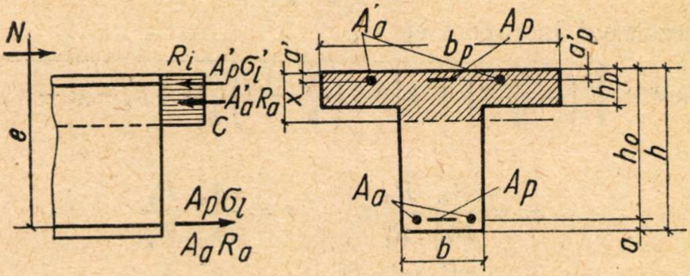


Fig. 7

neglijați în stabilirea valorilor de calcul ai parametrilor din formulă (toleranțe la dimensiunile secțiunii, toleranțe la poziția armăturilor cu secțiune etc.).

Acest coeficient trebuie introdus și în partea dreaptă a relațiilor (8) și (12) atunci cînd acestea se folosesc pentru calcule de proiectare.

Pentru cazul cel mai general, reprezentat printr-o secțiune cu placă în zona comprimată, cu armătură pretensionată și armătură nepretensionată atît în zona întinsă cît și în zona comprimată, solicitată de moment încovoietor și forță axială, formula finală de calcul se obține prin scrierea ecuației de moment față de centrul de greutate al armăturii întinse

$$\begin{aligned} Ne \leqslant 0{,}8 \Big[ bx\, R_i \left(h_0 - \frac{x}{2}\right) + 0{,}8\,(b_p - b)\, h_p \left(h_0 - \frac{b_p}{2}\right) R_i + \qquad (17) \\ + A'_p\, \sigma'_l\, (h_0 - a'_p) + A'_a\, R_a\, (h_0 - a') \Big] \end{aligned}$$

unde notațiile sînt date în figura 7.

Ținînd seama de importanța redusă a armăturilor nepretensionate din zona întinsă a secțiunilor elementelor de beton precomprimat, acestea se pot considera, spre simplificare, concentrate în centrul de greutate al armăturilor pretensionate din zona întinsă.

Poziția axei neutre rezultă din ecuația de proiecție

$$bxR_i + 0{,}8\,(b_p - b)\, h_p\, R_i \mp N = A_p\, \sigma_l + A_a\, R_a - A'_p\, \sigma'_l - A'_a\, R_a \qquad (18)$$

În toate relațiile în care apare forța axială $N$, semnul de deasupra se referă la cazul în care $N$ este compresiune.

În conformitate cu definiția lui $A_{pi}$ din relația (13) se scrie

$$bxR_i = A_{pi}\,\sigma_l = \pm N + A_p\,\sigma_l + A_a\,R_a - 0{,}8\,(b_p - b)\,h_p\,R_i - \\ - A'_p\,\sigma'_l - A'_a\,R_a \qquad (19)$$

unde

$$\sigma_l = m_p\,R_p .$$

Înlocuind în (13) valoarea rezultată din (19) pentru $A_{pi}$ se obține

$$m_p = 1 - k\,\frac{\pm N + A_p m_p R_p + A_a R_a - 0{,}8\,(b_p - b)\,h_p\,R_i - A'_p\,\sigma'_l - A'_a R_a}{m_p\,R_p}\,\frac{R_p}{bh_0\,R_i}$$

respectiv rezolvînd în raport cu $m_p$

$$m_p = \frac{1 - k\alpha_p}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 - k\alpha_p}{2}\right)^2 + k\left[0{,}8\left(\frac{b_p}{b} - 1\right)\frac{h_p}{h_0} + \alpha'_p - (\alpha - \alpha') \mp \frac{N}{bh_0\,R_i}\right]},$$

unde (20)

$$\alpha_p = \frac{A_p}{bh_0}\,\frac{R_p}{R_i}; \qquad \alpha = \frac{A_a}{bh_0}\,\frac{R_a}{R_i}$$

$$\alpha'_p = \frac{A'_p}{bh_0}\,\frac{\sigma'_l}{R_i}; \qquad \alpha' = \frac{A'_a}{bh_0}\,\frac{R_a}{R_i}$$

8. Modul de calcul propus permite ca să se reducă calculul în starea limită de rezistență al secțiunilor de beton precomprimat la cel al unor secțiuni echivalente de beton armat, utilizînd tabele asemănătoare pentru dimensionare.

Pentru calculul elementelor solicitate la încovoiere cu secțiune dreptunghiulară simplu armate se recomandă astfel utilizarea relațiilor (21), (22) și (23):

$$h_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{h_0}\left(1 - 0{,}5\,\frac{x}{h_0}\right)}}\;\sqrt{\frac{M}{mb\,R_i}} = r\,\sqrt{\frac{M}{0{,}8\,bR_i}}, \qquad (21)$$

$$M = 0{,}8\,B\,bh_0^2 R_i, \qquad (22)$$

unde $B = \frac{x}{h_0}\left(1 - 0{,}5\,\frac{x}{h_0}\right),$

$$A_p = \frac{M}{0{,}8\,\bar{\eta}\,h_0\,R_p} \qquad (23)$$

unde $\bar{\eta} = m_p\eta = 0{,}5\,m_p\left(1 + \sqrt{1 - \frac{2M}{0{,}8\,bh_0^2\,R_i}}\right).$

Valorile $r$, $B$ și $\bar{\eta}$ se tabulează funcție de $\alpha_p$, sau se pot reprezenta în grafice (fig. 8).

În cazul elementelor solicitate la încovoiere cu secţiune dreptunghiulară dublu armată sau cu placă în zona comprimată, calculul se efectuează utilizînd aceleaşi tabele sau grafice, după metodologia cunoscută pentru elemente din beton armat.

9. Pentru comparaţie cu metodele curente de calcul la rupere, în figura 9 s-a trecut valoarea coeficientului global de siguranţă (stabilit faţă

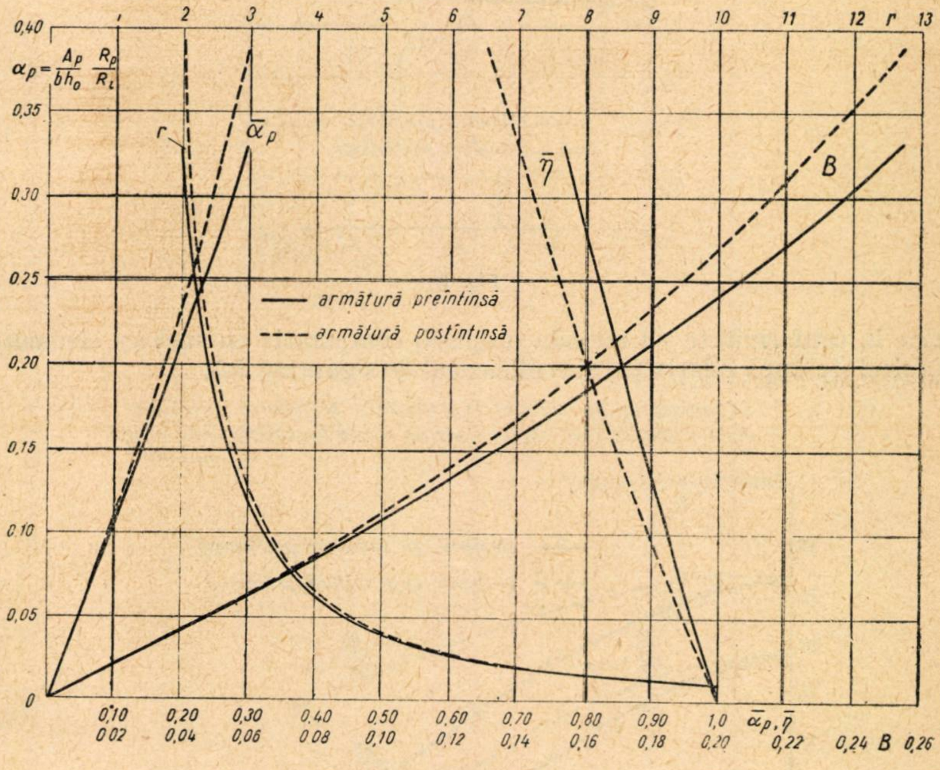


Fig. 8

de valorile normate ale încărcărilor în condiţii de exploatare şi ale materialelor conform condiţiilor prevăzute de proiect) pentru secţiuni dreptunghiulare dimensionate în conformitate cu prevederile de mai sus.

Se remarcă faptul că coeficientul de siguranţă este mai redus pentru elemente cu armătură preîntinsă, ţinîndu-se seama astfel de condiţiile îmbunătăţite de aderenţă ale acestor elemente. De asemenea, coeficientul de siguranţă creşte o dată cu procentul de armare, adică pe măsura în care betonul (material cu răspîndire mai mare a proprietăţilor mecanice) începe să devină factorul preponderent pentru capacitatea portantă a elementului.

Coeficientul de siguranţă creşte o dată cu raportul dintre sarcina utilă şi sarcina permanentă, ceea ce corespunde caracteristicilor statistice ale combinaţiilor de încărcări.

10. În figura 10 s-a reprezentat economia de oţel superior care se obţine la elemente de beton precomprimat solicitate la încovoiere, proiectate în conformitate cu metoda propusă, comparativ cu aceleaşi elemente proiectate după relaţia (2) şi coeficientul de siguranţă 2,5.

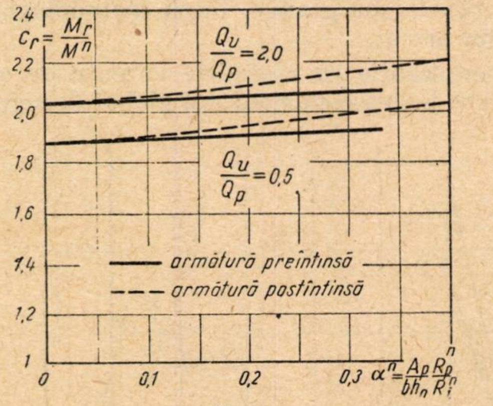


Fig. 9

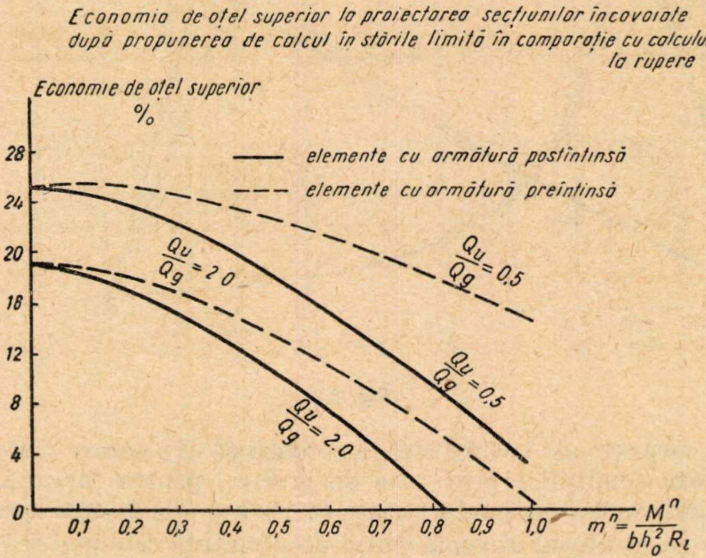


Fig. 10

Economia maximă este de 25%, respectiv 19% (funcţie de raportul dintre sarcina utilă şi sarcina permanentă) şi scade o dată cu creşterea procentului de armare. În domeniul procentelor de armare curent utilizate, economia medie de oţel superior este de 15—20%.

În figura 11 se compară rezultatele proiectării după metoda propusă şi după normele sovietice SN 10—57.

11. Metoda propusă pentru calculul la starea limită de rezistență a elementelor de beton precomprimat reușește să asigure simplificarea la maximum a operațiunilor de proiectare, fără a sacrifica în același timp rigurozitatea necesară în aprecierea stării reale de eforturi în secțiunea de calcul.

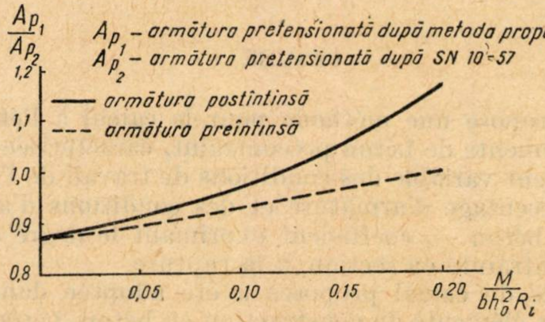


Fig. 11

Această metodă a fost introdusă în normativul pentru calculul și alcătuirea constructivă a elementelor de construcții din beton, beton armat și beton precomprimat, întocmit de către Comisia pentru introducerea calculului la stări limită.

*Primită la redacție la 23 februarie 1960; o nouă versiune la 19 iunie 1961.*

# НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ В СВЯЗИ С ПРЕДЕЛЬНЫМ СОСТОЯНИЕМ ПРОЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО БЕТОНА

## РЕЗЮМЕ

Излагается метод расчета по предельному состоянию прочности элементов из предварительно напряженного бетона, характеризующийся введением переменного коэффициента условий работы арматуры, — зависящего от процента армирования и условий сцепления между арматурой и бетоном — и выражающего степень использования предварительно напряженной арматуры в сечении.

Предложенный метод расчета был введен в нормы по расчету бетонных, железобетонных и предварительно напряженных бетонных элементов, составленный Комиссией по введению расчета по предельным состояниям.

# QUELQUES PROBLÈMES SOULEVÉS PAR LE CALCUL À L'ÉTAT-LIMITE DE LA RÉSISTANCE DES ÉLÉMENTS DE BÉTON PRÉCONTRAINT

## RÉSUMÉ

L'auteur propose une méthode pour le calcul à l'état-limite de la résistance des éléments de béton précontraint, caractérisée par l'introduction d'un coefficient variable des conditions de travail de l'armature — en fonction du pourcentage d'armature et des conditions d'adhérence entre l'armature et le béton —, coefficient exprimant le degré d'utilisation de l'armature précontrainte en section, à la rupture.

La méthode de calcul proposée a été adoptée dans le Règlement pour le calcul des éléments de construction en béton, béton armé et béton précontraint, rédigé par la Commission pour l'introduction du calcul aux états-limite.

# STUDII

## ELASTICITATE-PLASTICITATE-REZISTENȚA MATERIALELOR

# SMULGEREA BURLANELOR DIN FILET CONIC

DE

N. S. PÎRVULESCU [1]

### 1. CEDAREA FILETULUI SUB SARCINĂ

Smulgerea țevilor din filet cilindric a fost studiată anterior [1]. S-a arătat că cea mai importantă considerație în cedarea filetului sub sarcină o constituie alunecarea pe flancuri a filetului și pentru simplificare vom reține numai pe aceasta.

Prin efectul de pană al flancurilor filetului, cînd îmbinarea este supusă la tracțiune, se creează o apăsare dată de expresia

$$p_n = \frac{P_n \operatorname{ctg}(\alpha + \varphi)}{\cdot \pi D_n h}, \tag{1}$$

în care $p_n$ este presiunea medie după direcția razei pe respectivul pas al filetului,

$P_n$ — forța transmisă prin filet pe pasul respectiv,
$D_n$ — diametrul filetului la mijlocul flancului,
$h$ — pasul constant al filetului,
$\alpha$ — unghiul format de flancul filetului cu axa burlanului,
$\varphi$ — unghiul de frecare.

Relația (1) a fost dedusă în considerația simplificatoare că presiunea pe inelul unui pas nu influențează inelele adiacente; premisă pe care o menținem și în cele ce urmează.

Sub acțiunea apăsării $p_n$ se creează o dilatare relativă $U_n$ și o deplasare relativă $e$ în lungul axului, a unui filet de mufă față de cep date de relațiile :

$$e_n = U_n / \operatorname{tg}\alpha \tag{2}$$

și

$$U_n = \frac{2 R_n^3 (R_{en}^2 - R_{in}^2)\, p_n}{E (R_{en}^2 - R_n^2)(R_n^2 - R_{in}^2)} \tag{3}$$

---

[1] Întreprinderea de utilaj terasier și foraje.

în care

$R_{en}$ $D_{en}$ sînt raza și respectiv diametrul conturului exterior al mufei,

$R_{in}$ $D_{in}$ — raza și respectiv diametrul conturului interior al cepului,

$R_{n}$ — raza filetului la mijlocul flancului,

$E$ — modulul de elasticitate.

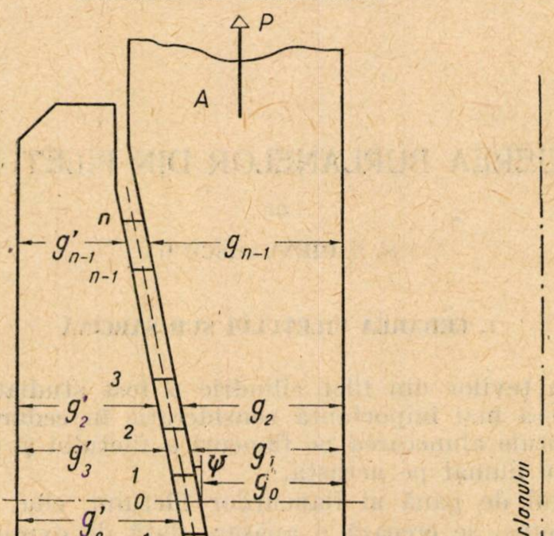

P
A
n
g'n-1
n-1
gn-1
3
g'2
2
g2
g'3
1
ψ
g1
g0
0
g'0
-1
g'-1
-2
g-1
g'-2
-3
g-2
axa burlanului
Îmbinare filetată conică
B
P

Fig. 1. — Îmbinare filetată conică.

Să luăm în considerație conicitatea filetului.

Fie o îmbinare filetată conică reprezentată schematic în figura 1, $A$ fiind cepul și $B$ mufa îmbinării.

Păstrăm notațiile din lucrarea citată [1] și anume:

$1, 2 \ldots n, -1, -2, \ldots -n$ reprezintă pozițiile reazimelor la mijlocul flancurilor filetului, iar poziția 0, pe care o considerăm drept reper, reprezintă mijlocul porțiunii deformate;

$e_1, e_2, \ldots e_n, e_{-1}, e_{-2}, \ldots e_{-n}$ reprezintă deplasările relative ale mufei față de cep după deformare și în dreptul pozițiilor al căror număr figurează ca indice;

$P_1, P_2, \ldots P_n, P_{-1}, P_{-2}, \ldots P_{-n}$ sînt forțele care se transmit de la o piesă a îmbinării la cealaltă prin reazimele menționate și care figurează ca indice.

Din considerații geometrice date de conicitatea filetului avem

$$\begin{aligned} g_n &\approx g_0 + n\delta, \quad g'_n \approx g'_0 - n\delta, \\ g_{-n'} &\approx g_0 - n'\delta, \quad g'_{-n'} \approx g'_0 + n'\delta, \end{aligned} \tag{4}$$

în care

$$\delta = h \operatorname{tg} \psi. \tag{5}$$

$2\,\psi$ este unghiul la vîrf al conului generat de linia mediană a flancurilor filetului.

Dacă se neglijează înălțimea filetului avem

$$R_{en} = \frac{D_n}{2} + g'_n, \; R_n = \frac{D_n}{2}; \; R_{in} = \frac{D_n}{2} - g_n, \tag{6}$$

indicii se referă la numerele pozițiilor respective;

$g$, $g'$ sînt grosimile pereților respectiv de la cep și de la mufă.

Făcînd înlocuirile date de (4) și (6) relația (3) devine

$$U_n = \frac{p_n (g'_0 + g_0)\,[1 + (g'_0 - g_0 - 2n\delta)/D_n]\,D_n^2}{4\,E\,(g_0 + n\delta)\,(g'_0 - n\delta)\,[1 + (g'_0 - n\delta)/D_n]\,[1 - (g_0 + n\delta)/D_n]}. \tag{7}$$

Dacă $g_0 = g'_0$ relația precedentă devine

$$U_n = \frac{p_n D_n^2 \left[1 - \dfrac{2n\delta}{D_n}\right]}{4\,E g_0 \left[1 - \left(\dfrac{n\delta}{g_0}\right)^2\right]\left[\left(1 - \dfrac{n\delta}{g_0}\right)^2 - \left(\dfrac{g_0}{D_n}\right)^2\right]}. \tag{8}$$

Dacă $\delta/g_0$ și $g_0/D_n$ sînt mici, putem neglija ultimii termeni din paranteză și relația precedentă devine

$$U_n \approx \frac{p_n\,D_n^2}{2\,g_0 E}. \tag{9}$$

Referindu-ne la poziția $n$ și înlocuind pe $U_n$ din (9), ținînd seamă și de (1), relația (2) devine

$$e_n = P_n K_n \tag{10}$$

în care

$$K_n = K_0\,(1 + 2n\delta/D_0), \tag{11}$$

$$K_0 = \frac{D_0 \operatorname{ctg}(\alpha + \varphi)}{2g_0\, E\pi \mathrm{h} \operatorname{tg} \alpha}. \tag{12}$$

Dacă menţinem premisele simplificatoare că $\delta/g_0$ şi $g_0/D_n$ sînt mici şi dacă $n$ nu este prea mare pentru ca termenul $2n\delta/D_0$ să nu fie neglijabil, putem face aproximaţia:

$$K_n \approx K_0. \tag{13}$$

Aceasta înseamnă să menţinem coeficientul $K_n$ constant de-a lungul filetului. În acest caz smulgerea ţevilor din filetul conic diferă de aceea referitoare la filetul cilindric, numai în ceea ce priveşte repartiţia eforturilor în îmbinarea filetată, ceea ce constituie partea esenţială a acestui studiu.

## 2. REPARTIŢIA EFORTURILOR ÎN FILETUL CONIC

Secţiunile normale $A_n$ şi $A'_n$ respectiv a cepului şi a mufei în poziţia $n$ sînt date de expresiile

$$A_n = \pi D_n\, g_n\left(1 - \frac{f}{D_n} - \frac{g_n}{D_n}\right) \text{ şi } A'_n = \pi\, D_n g'_n\left(1 + \frac{f}{D_n} + \frac{g'_n}{D_n}\right), \tag{14}$$

în care $f$ este înălţimea filetului.

Ţinînd seamă de (4) relaţiile precedente devin

$$\begin{aligned} A_n &= \pi\,(D_0 + 2n\delta)\,(g_0 + n\delta)\left[1 - \frac{f + g_0 + n\delta}{D_0 + 2n\delta}\right], \\ A'_n &= \pi\,(D_0 + 2n\delta)\,(g'_0 - n\delta)\left[1 + \frac{f + g'_0 - n\delta}{D_0 + 2n\delta}\right], \\ A_{-n} &= \pi\,(D_0 - 2n\delta)\,(g_0 - n\delta)\left[1 - \frac{f + g_0 - n\delta}{D_0 - 2n\delta}\right], \\ A'_{-n} &= \pi(D_0 - 2n\delta)\,(g'_0 + n\delta)\left[1 + \frac{f + g'_0 + n\delta}{D_0 - 2n\delta}\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

Dacă $f$, $g_0$, $g'_0$ şi $\delta$ sînt mici faţă de $D_0$ putem neglija anumiţi termeni şi relaţiile precedente devin

$$\begin{aligned} A_n &\approx (1 + n\varkappa)\,A_0\,, & A'_n &= (1 - n\varkappa')A'_0\,, \\ A_{-n} &\approx (1 - n\varkappa)\,A_0\,, & A'_{-n} &= (1 + n\varkappa')\,A'_0\,, \end{aligned} \tag{16}$$

în care

$$A_0 \approx \pi D_0 g_0\,, \qquad A'_0 \approx \pi D_0 g'_0\,, \tag{17}$$

iar

$$\varkappa = \left(\frac{1}{g_0} + \frac{2}{D_0}\right)\delta, \quad \varkappa' = \left(\frac{1}{g_0'} - \frac{2}{D_0}\right)\delta. \tag{18}$$

Dacă $2\ g_0/D_0$ este îndeajuns de mic față de 1 neglijăm termenul $2/D_0$ și relațiile precedente devin

$$\varkappa = \delta/g_0, \qquad \text{și } \varkappa' = \delta/g_0'. \tag{19}$$

Fie $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots \xi_n, \xi_1', \xi_2', \dots \xi_n'$ alungirile fiecărui pas (distanța dintre două reazime consecutive), respectiv la cep și mufă, prin deformarea dată de tracțiunea $P$.

Procedînd în mod analog ca și în lucrarea citată [1] avem

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= \frac{\sigma_0}{E} h = \frac{P_0 h}{A_0 E}, & \xi_0' &= \frac{P_0' h}{A_0' E},\\
\xi_1 &= \frac{(P_0 + P_1)\, h}{(1 + \varkappa)\, A_0 E}, & \xi_1' &= \frac{(P_0' - P_1)\, h}{(1 - \varkappa')\, A_0' E},\\
\xi_2 &= \frac{(P_0 + P_1 + P_2)\, h}{(1 + 2\varkappa)\, A_0 E} & \xi_2' &= \frac{(P_0' - P_1 - P_2)\, h}{(1 - 2\varkappa')\, A_0' E},\\
&\vdots & &\vdots\\
\xi_{n-1} &= \frac{(P_0 + \sum\limits_{j=1}^{n-1} P_j)\, h}{[1 + (n-1)\varkappa]\, A_0 E}, & \xi_{n-1}' &= \frac{(P_0' + \sum\limits_{j=1}^{n-1} P_j)\, h}{[1 - (n-1)\varkappa']\, A_0' E},
\end{aligned} \tag{20}$$

în care $P_0$ și $P_0'$ sînt eforturile în secțiunile celor două piese ale îmbinării în poziția 0.

Dacă $g_0 = g_0'$ se obține

$$A_0' \approx A_0 \approx \pi D_0 g_0 \qquad \varkappa = \varkappa' = \delta/g_0 \tag{21}$$

și în virtutea simetriei $P_0 = P_0' = P/2$ (22)

$$\xi_{n-1} - \xi_{n-1}' = \frac{2h}{A_0 E} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n-1} P_j - (n-1)\varkappa P_0}{1 - (n-1)^2 \varkappa^2}. \tag{23}$$

Din considerații geometrice se obține

$$e_n = e_{n-1} + \xi_{n-1} - \xi_{n-1}', \tag{24}$$

ținînd seama de (10), (13) și (23)

$$K_0 P_n = K_0 P_{n-1} + \frac{2h}{A_0 E} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n-1} P_j - (n-1)\varkappa P_0}{1 - (n-1)^2 \varkappa^2}. \tag{25}$$

Notînd

$$\beta = 2\,h/E A_0 K_0 \tag{26}$$

şi ţinînd seama de (12) şi (21)

$$\beta = \left(\frac{2h}{D_0}\right)^2 \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{ctg}\,(\alpha + \varphi)}, \tag{27}$$

relaţiile (25) devin

$$\begin{aligned} \frac{P_2}{P_1} &= 1 + \beta\,\frac{1 - \varkappa\, P_0/P_1}{1 - \varkappa^2}, \\ \frac{P_3}{P_1} &= \frac{P_2}{P_1} + \beta\,\frac{1 + \frac{P_2}{P_1} - 2\varkappa\,\frac{P_0}{P_1}}{1 - 2^2\varkappa^2}, \\ &\vdots \\ \frac{P_n}{P_1} &= \frac{P_{n-1}}{P_1} + \beta\,\frac{\frac{1}{P_1}\sum\limits_{j=1}^{n-1} P_j - (n-1)\,\varkappa\,\frac{P_0}{P_1}}{1 - (n-1)^2\varkappa^2}. \end{aligned} \tag{28}$$

Făcînd substituirile, relaţiile (28) devin

$$\frac{P_n}{P_1} = 1 + \left(1 - \varkappa\,\frac{P_0}{P_1}\right) \sum_{j=1}^{n-1} \beta^j\, M_{n-1}^j(\varkappa), \tag{29}$$

în care $M_{n-1}^k$ este dat de formula de recurenţă

$$M_{n-1}^k(\varkappa) = M_{n-2}^k(\varkappa) + \frac{\sum\limits_{i=k-1}^{n-1} M_i^{k-1}(\varkappa)}{1 - (n-1)^2\varkappa^2}, \tag{30}$$

valabilă pentru $2 \leqslant k \leqslant n-2$,

pentru $k = 1$

$$M_{n-1}^1(\varkappa) = M_{n-2}^1(\varkappa) + \frac{n-1}{1 - (n-1)^2\varkappa^2}$$

iar pentru $k = n - 1$

$$M_{n-1}^{n-1}(\varkappa) = \frac{M_{n-2}^{n-2}(\varkappa)}{1 - (n-1)^2\varkappa^2}.$$

Pentru $k = 1$ relaţia (30) devine

$$M_{n-1}^1(\varkappa) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{1 - i^2\varkappa^2}. \tag{31}$$

Condiţia de echilibru

$$\frac{P}{2} = \sum_{u=1}^{n} P_u, \tag{32}$$

ținînd seama de (22) și (29) devine

$$\frac{P}{2P_1} = n + \left(1 - \varkappa \frac{P}{P_1}\right) \sum_{u=2}^{n} \sum_{j=1}^{u-1} \beta^j M_{u-1}^j(\varkappa). \tag{33}$$

Înlocuind pe $P_1$ cu valoarea sa din (33), relația (29) devine

$$\frac{2P_n}{P} = \frac{1 + \sum\limits_{j=1}^{n-1} \beta^j M_{n-1}^j(\varkappa)}{n + \sum\limits_{u=2}^{n} \sum\limits_{j=1}^{u-1} \beta^j M^j_{-1}(\varkappa)} \left[1 + \varkappa \sum_{u=2}^{n} \sum_{j=1}^{u-1} \beta^j M_{u-1}^j(\varkappa)\right] - \varkappa \sum_{j=1}^{n-1} \beta^j M_{n-1}^j(\varkappa). \tag{34}$$

După cum s-a arătat la aplicații [1], $\beta$ este în general mult mai mic decît 1, încît putem renunța la termenii $\beta^i$ pentru $i \geqslant 2$ și relația precedentă devine

$$\frac{2P_n}{P} = \frac{1 + \beta M_{n-1}^1(\varkappa)}{n + \beta \sum\limits_{u=2}^{n} M_{u-1}^1(\varkappa)} \left[1 + \varkappa\beta \sum_{u=2}^{n} M_{u-1}^1(\varkappa)\right] - \varkappa\beta M_{n-1}^1(\varkappa). \tag{35}$$

Ținînd seama de (31) și însumînd succesiv se obține

$$\sum_{u=2}^{n} M_{u-1}^1(\varkappa) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(n-i)\,i}{1 - i^2\varkappa^2}. \tag{36}$$

Relația (35) se mai poate pune sub forma

$$P_n = \frac{P}{2n}\zeta, \tag{37}$$

în care

$$\zeta = 1 + \nu\beta, \tag{38}$$

iar

$$\nu \approx \frac{M_{n-1}^1(\varkappa) + \left[\varkappa - \frac{1}{n} + \beta\varkappa M_{n-1}^1(\varkappa)\right] \sum\limits_{u=2}^{n} M_{u-1}^1(\varkappa)}{1 + \frac{\beta}{n} \sum\limits_{u=2}^{n} M_{u-1}^1(\varkappa)} - \varkappa n M_{n-1}^1(\varkappa). \tag{39}$$

Expresiile $M_{n-1}^1(\varkappa)$ și $\sum\limits_{u=2}^{n} M_{u-1}^1(\varkappa)$ sînt date de relațiile (31) și (36). Pentru $\varkappa$ foarte mic termenul $i^2\varkappa^2$ se poate neglija și expresiile de mai sus devin

$$M_{n-1}^1(\varkappa) = \frac{n}{2}(n-1); \quad \sum_{u=2}^{n} M_{u-1}^1(\varkappa) = \frac{n(n-1)(n+1)}{6}. \tag{40}$$

Se găsesc astfel relațiile (65) și (66) în lucrarea citată [1].

Ținînd seama de (29) și (34) relația (37) devine

$$\nu = \frac{n-1}{3}\left\{ n\frac{1+\varkappa\frac{n+1}{2}\left[1+\beta n\frac{n-1}{2}\right]-\frac{1}{2n}}{1+\beta(n^2-1)/6} - \frac{3}{2}\varkappa \right\} \tag{41}$$

neglijînd pe $\varkappa\, 3/2$ față de primul termen din acoladă se obține

$$\nu = \frac{n-1}{3} n \frac{1+\varkappa\frac{n+1}{2}\left[1+\beta n\frac{n-1}{2}\right]-\frac{1}{2n}}{1+\beta(n^2-1)/6}. \tag{42}$$

## 3. COMPUNEREA EFORTURILOR

Folosind o anumită ipoteză în compunerea solicitării de tracțiune cu aceea dată de apăsarea mufei pe cep, s-a obținut [1] formula (86); care, în cazul considerat în prezenta lucrare, devine

$$P = \frac{\pi D_0 g_0 \sigma_a}{1+\xi\zeta\frac{D_0}{2l}\operatorname{ctg}(\alpha+\varphi)}, \tag{43}$$

în care

$\xi$ — coeficientul relativ la ipoteza admisă pentru ruperea materialului este $\xi = 2/3$,
$\zeta$ — este dat de relațiile (38), (42), (21), (27) și (5),
$l$ — lungimea porțiunii filetate este

$$l = 2nh,$$

$\varphi$ — unghiul de frecare, se ia $\varphi = 18°$,
$\sigma_a$ — rezistența admisibilă a materialului.

## 4. APLICAȚII ȘI CONCLUZII

Ne referim la burlane 6.5/8″ cu conicitate de

$$\frac{D_2 - D_1}{L} = 2\operatorname{tg}\psi \approx \frac{1}{32}, \tag{44}$$

de unde $\operatorname{tg}\psi = 1/64$,
în care $D_2$ și $D_1$ sînt diametrele medii ale flancurilor filetului în plane distanțate între ele cu lungimea $L$.

Pasul filetului este $h = 3{,}175$ mm.

Din relația (5) obținem $\delta = 3{,}175/64 = 0{,}0496$ mm.

S-a arătat [1] că $g_n = 7{,}929$ și prin urmare din relația (4) se obține $g_0 = 7{,}929 - 0{,}496 = 7{,}433$ mm.

Din relația (19) se obține $\varkappa = 0{,}0496/7{,}433 = 0{,}00677$.

S-a arătat că $\beta = 0{,}00684$ și $n = 10$, iar din relația (42) se obține valoarea numerică a expresiei

$$\varkappa \frac{n+1}{2}\left[1 + \beta n \frac{n-1}{2}\right] = 0{,}00677 \frac{11}{2}\left(1 + 0{,}00684 \cdot 45\right) = 0{,}04865,$$

care reprezintă termenul nou introdus, față de considerația anterioară [1] a filetului cilindric.

Păstrăm notațiile barate $\bar{\nu}$, $\bar{\zeta}$ pentru filetul cilindric și nebarate $\nu$, $\zeta$ pentru filetul conic.

Să apreciem deosebirile între cele două concepții în acest caz, astfel din relația (42) obținem

$$\frac{\dfrac{\nu - \bar{\nu}}{\bar{\nu}} = \varkappa \dfrac{n+1}{2}\left[1 + \beta n \dfrac{n-1}{2}\right]}{1 - 1/2n} = \frac{0{,}04865}{1 - 1/20} \approx 0{,}0463,$$

adică sub 5%, iar din relația (38)

$$\frac{\zeta - \bar{\zeta}}{\bar{\xi}} = \frac{\beta(\nu - \bar{\nu})}{\bar{\zeta}} = \frac{\beta n \dfrac{n-1}{3} \varkappa \dfrac{n+1}{2}\left[1 + \beta n \dfrac{n-1}{2}\right]}{\left[1 + \beta \dfrac{n^2 - 1}{6}\right] \bar{\zeta}} =$$

$$= \frac{0{,}00684 \cdot 30 \cdot 0{,}04865}{1{,}113 \cdot 1{,}175} \approx 0{,}0076$$

adică nici 1%.

Să luăm alt exemplu cu o conicitate de 1/16 adică $\operatorname{tg} \psi = 1/32$. În acest caz, făcînd aproximația că valoarea lui $\beta$ se menține, iar $\varkappa = 0{,}0143$ avem

$$\frac{\nu - \bar{\nu}}{\nu} = \frac{0{,}103}{0{,}95} \approx 0{,}1085,$$

adică sub 11%, iar

$$\frac{\zeta - \bar{\zeta}}{\bar{\zeta}} = \frac{0{,}00684 \cdot 30 \cdot 0{,}103}{1{,}113 \cdot 1{,}175} \approx 0{,}0162,$$

adică nici 2%.

În concluzie, se vede că pentru conicități mici, ceea ce constituie cazul burlanelor de sonde, influența conicității, deși defavorabilă din punctul de vedere al repartizării efortului de-a lungul filetului, este totuși neglijabilă.

Ca urmare din acest punct de vedere, reducerea conicității, de la 1/16 la 1/32 în cazul luat ca exemplu, nu prezintă un avantaj apreciabil, constatare care permite ca, fără să se slăbească rezistența, să se folosească avantajul operațiilor de înșurubare mai rapide, pe care-l dă o conicitate mai pronunțată. Folosind la sonde burlane cu conicități sporite, mai ales pentru diametre mai mari, se scurtează durata de introducere. Aceasta

are importanță nu numai pentru reducerea costului corespunzător, ci mai ales că, scurtînd durata tubajului, în care timp gaura se poate strînge sau dărîma în anumite formații, se mărește securitatea sondei din acest punct de vedere.

*Primită la redacție la 20 decembrie 1960*

## ВЫДЕРГИВАНИЕ ОБСАДНЫХ ТРУБ ИЗ КОНИЧЕСКОЙ РЕЗЬБЫ

### РЕЗЮМЕ

Продолжается исследование выдергивания труб из резьбы, которое для случая цилиндрической резьбы было изложено в предыдущей работе [1], и для слабо выраженных конусностей резьбы, как в случае обсадных труб.

Что касается деформации резьбы под нагрузкой, учитывалось только боковое скольжение резьбы, как представляющее наибольший интерес. Исходят из выражения давления $p_n$, определяющегося соотношением (1), под действием которого образуется относительное расширение $U_n$, определяющееся соотношением (3) и относительное перемещение $e$ вдоль оси, выражающееся соотношением (2).

Из геометрических соображений, обусловленных конусностью резьбы, выведены соотношения (4) — (6).

После подстановок и некоторых упрощений, справедливых для обсадных труб, получается соотношение (10), где $K_n$ можно считать постоянным.

Исследование распределения усилий в конической резьбе производится аналогично случаю цилиндрической резьбы [1], с вышеуказанными упрощениями, что ведет к тому, что влияние конусности сводится к изменению сечения.

Таким образом получается выражение для $\zeta$, данное соотношением (38), которое фигурирует в формуле (43) для силы выдергивания $P$.

Полученные соотношения были применены к обсадным трубам 6,5/8, конусностью в 1/32 и пришли к выводу, что $\zeta$ увеличивается по сравнению со случаем цилиндрической резьбы меньше чем на 1% и, следовательно, для малых конусностей влиянием последней можно пренебречь.

Также делается вывод, что уменьшением конусности от 1/16 одних и тех же размеров обсадных труб до 1/32 не достигается существенное преимущество. Этот факт позволяет без ущерба для прочности применять преимущественно операции более быстрого ввинчивания, как результат более резко выраженной конусности.

### ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Коническое резьбовое соединение.

# LA FORCE D'ARRACHEMENT DU FILET CONIQUE DES TUBES POUR LE TUBAGE DES SONDES

## RÉSUMÉ

Le cas du filet cylindrique a été présenté antérieurement [1]. On étudie ici l'influence d'une petite conicité, ce qui constitue le cas des tubes pour le tubage des sondes.

Pour la déformation sous charge du raccord on n'a considéré que le glissement sur les flancs des filets, qui en est la cause la plus importante.

En partant de la pression $p_n$, exprimée par la relation (1), on déduit la dilatation relative $U_n$ (3) et le déplacement relatif $e$ (2) le long de l'axe.

Les relations (4) — (6) ont été déduites par des considérations géométriques sur la conicité du filet.

Par des substitutions et simplifications valables dans le cas des tubes de sondes, on obtient la relation (10), où $K_n$ peut être considéré comme constant.

On fait l'étude de la répartition des efforts sur le filet conique de la même manière que pour le filet cylindrique [1], en tenant compte des simplifications mentionnées, ce qui revient à ne tenir compte que de la variation de la section du raccord, en ce qui concerne l'influence de la conicité.

On obtient ainsi l'expression (38) de $\zeta$, qui intervient dans la formule (43) de la force d'arrachement $P$.

Les applications aux tubes 6.5/8″ d'une conicité de 1/32, montrent que $\zeta$ croît au moins de 1% en comparaison du filet cylindrique et, par conséquent, l'influence des faibles valeurs de la conicité est négligeable.

On en conclut de plus qu'en réduisant la conicité de 1/16 à 1/32 pour les mêmes dimensions des tubes on n'obtient pas un avantage appréciable. Ce résultat conduit à la recommandation d'utiliser des conicités assez prononcées, qui facilitent les opérations de vissage des tubes.

## EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Raccord à filetage conique.

## BIBLIOGRAFIE

1. N. S. PÎRVULESCU, *Smulgerea țevilor din filet*. Bul. Inst. petrol și gaze, Studii, *1* (1955).

# STUDII

## ELASTICITATE-PLASTICITATE-REZISTENŢA MATERIALELOR

# UN PRINCIPIU FUNDAMENTAL ÎN PROIECTAREA STRUCTURILOR STATIC NEDETERMINATE DE BETON ARMAT ÎN DOMENIUL PLASTIC

DE

VALERIU PETCU [1]

Aplicarea calculului plastic în proiectarea structurilor static nedeterminate de beton armat este condiţionată de limitări care se referă atît la condiţiile de rupere cît şi la realizarea condiţiilor normale de exploatare.

Condiţia principală de rupere este formarea efectivă a mecanismelor de rupere. Realizarea acestei condiţii este funcţie de capacitatea de rotire a articulaţiilor plastice.

Absenţa articulaţiilor plastice, limitarea deschiderii fisurilor şi evitarea eforturilor mari în betonul comprimat constituie condiţiile principale care caracterizează exploatarea normală a unei construcţii de beton armat.

Proiectarea structurilor static nedeterminate de beton armat constă aşadar în determinarea valorilor momentelor de plastificare din secţiunile critice care să îndeplinească atît condiţiile de echilibru, de mecanism şi de plastificare, cît şi condiţiile de rupere şi de exploatare.

Această operaţie este în general posibilă, deoarece numărul ecuaţiilor de echilibru este inferior numărului momentelor de plastificare din secţiunile critice, astfel încît pentru determinarea acestora sînt necesare ecuaţii suplimentare.

Scopul acestui studiu este enunţarea principiului fundamental care stă la baza satisfacerii principalelor condiţii de rupere şi de exploatare, baza acestui principiu constituind-o două teoreme specifice calculului structurilor static nedeterminate de beton armat în domeniul plastic.

---

[1] Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor (INCERC), Bucureşti.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Studiul se referă la structuri solicitate de un sistem de sarcini permanente constante, caracterizate prin sarcina $G$ și de un sistem de sarcini utile, caracterizate prin sarcina $P$, care poate varia de la zero pînă la valoarea ei limită $P_u$, corespunzătoare ruperii structurii. Sarcinile utile au poziție fixă și pot alcătui diferite scheme de încărcare.

## DEFINIŢII ŞI NOTAŢII

*Coeficient de redistribuție* : Raportul dintre sarcina de rupere a unei structuri și sarcina de apariție a primei articulații plastice într-o anumită secțiune critică, determinat pentru schema de încărcare pentru care valoarea acestui raport este maximă.

*Observație*. La proiectarea unei structuri static nedeterminate de beton armat în domeniul plastic valorile momentelor de plastificare pot fi întotdeauna stabilite astfel încît, pentru o anumită ipoteză de încărcare, prima articulaţie plastică să apară într-o anumită secţiune critică. În consecinţă numărul coeficienţilor de redistribuţie este egal cu numărul secţiunilor critice.

*Redistribuție optimă* : Redistribuție a eforturilor la o structură static nedeterminată de beton armat care asigură cele mai favorabile condiții de rupere și de exploatare.

*Schemă de încărcare* : Ansamblul format de toate sarcinile permanente și de sarcinile utile luate în totalitate sau în parte.

*Secțiune critică* : Secțiune în care apare o articulație plastică.

*Soluție optimă* (în proiectarea unei structuri de beton armat, în domeniul plastic) : Ansamblul valorilor momentelor de plastificare din secțiunile critice, corespunzător celor mai favorabile condiții de rupere și de exploatare.

$G$ — sarcina care caracterizează sistemul de sarcini permanente;
$P$ — sarcina care caracterizează sistemul de sarcini utile;
$P_1$ — sarcina utilă corespunzătoare apariției primei articulații plastice;
$P_u$ — sarcina utilă corespunzătoare ultimei articulații plastice (sarcina utilă de rupere);
$K_u = \frac{P_u}{G}$;
$n_e$ — numărul de ecuații corespunzător mecanismelor de rupere,
$n_s$ — numărul total al secțiunilor critice;
$r = \frac{G + P_u}{G + P_1}$ — coeficientul de redistribuție pentru o anumită schemă de încărcare;
$r_i$ — coeficientul de redistribuție corespunzător acelei scheme de încărcare pentru care prima articulație plastică apare în secțiunea critică „$i$";
$r_j^*$ — coeficientul de redistribuție rezultat din egalarea tuturor coeficienților de redistribuție corespunzători secțiunilor critice ale mecanismului „$j$".

## PRINCIPIUL REDISTRIBUŢIEI OPTIME A EFORTURILOR

Pentru stabilirea principiului de determinare a valorilor momentelor de plastificare din secţiunile critice, care să asigure satisfacerea optimă a condiţiilor principale de rupere şi de exploatare, se fac în prealabil următoarele observaţii :

1. Pentru o anumită schemă de încărcare, rotirile articulaţiilor plastice la rupere sînt cu atît mai mici cu cît coeficientul de redistribuţie este mai mic.

2. Pentru o anumită schemă de încărcare, condiţiile de exploatare ale unei structuri sînt cu atît mai favorabile cu cît coeficientul de redistribuţie este mai mic.

Coeficientul de redistribuţie este, prin urmare, factorul principal de care depinde obţinerea soluţiei optime în proiectarea structurilor static nedeterminate de beton armat.

Observaţiile de mai sus permit să se enunţe următorul principiu fundamental (principiul redistribuţiei optime) :

*Soluţia optimă a unei structuri static nedeterminate de beton armat proiectată în domeniul plastic se obţine prin realizarea egalităţii unui anumit număr de coeficienţi de redistribuţie, funcţie de numărul ecuaţiilor suplimentare necesare pentru obţinerea valorilor momentelor de plastificare, astfel încît restul coeficienţilor de redistribuţie să aibă valori mai mici decît valoarea comună a primilor coeficienţi.*

Într-adevăr egalitatea majorităţii coeficienţilor de redistribuţie asigură atît limitarea valorii maxime a coeficienţilor de redistribuţie, cît şi condiţii de rupere şi de exploatare practic identice pentru toate secţiunile critice pentru care coeficienţii de redistribuţie sînt egali.

Principiul enunţat mai sus se bazează pe următoarele două teoreme ale redistribuţiei optime a eforturilor :

TEOREMA I. *La proiectarea unei structuri de beton armat în domeniul plastic realizarea egalităţii tuturor coeficienţilor de redistribuţie este posibilă numai în cazul în care numărul ecuaţiilor de echilibru este egal cu unitatea.*

Dacă $n_s$ este numărul secţiunilor critice, atunci din egalitatea tuturor coeficienţilor de redistribuţie (al căror număr este egal cu numărul secţiunilor critice) se pot forma $n_s - 1$ ecuaţii suplimentare.

Pentru determinarea valorilor momentelor de plastificare din secţiunile critice sînt necesare $(n_s - n_e)$ ecuaţii suplimentare.

În consecinţă, realizarea egalităţii tuturor coeficienţilor de redistribuţie este posibilă numai în cazul în care este îndeplinită condiţia :

$$n_s - n_e = n_s - 1.$$

De aici rezultă

$$n_e = 1,$$

rezultat care demonstrează teorema enunţată.

TEOREMA II. *La proiectarea unei structuri de beton armat în domeniul plastic, la care $n_e > 1$, există totdeauna o soluție a valorilor momentelor de plastificare pentru care $(n_s - n_e + 1)$ coeficienți de redistribuție sînt egali între ei, restul de $(n_e - 1)$ coeficienți de redistribuție fiind mai mici decît valoarea comună a primilor coeficienți.*

Pentru demonstrarea acestei teoreme se face în prealabil observația că dacă la un mecanism de rupere al unei structuri, avînd $m$ secțiuni critice, se măresc coeficienții de redistribuție a $(m - 1)$ secțiuni critice, prin micșorarea momentelor de plastificare corespunzătoare, atunci coeficientul de redistribuție din secțiunea critică rămasă se micșorează, deoarece ecuația de echilibru conduce la o mărire a momentului de plastificare din această secțiune.

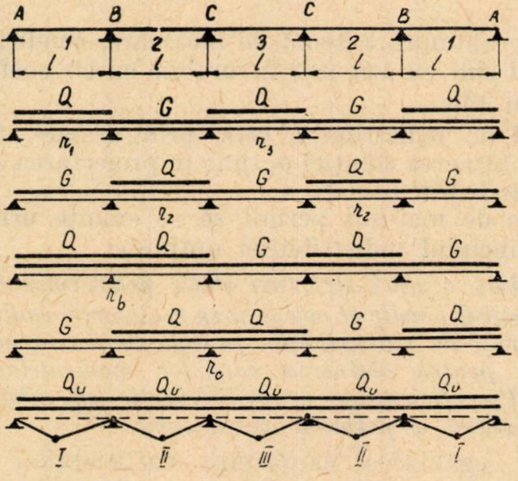


Fig. 1

Pe baza teoremei I se poate scrie, pentru fiecare mecanism de rupere, egalitatea tuturor coeficienților de redistribuție.

Fie $r^*_{\mathrm{I}}, r^*_{\mathrm{II}}, r^*_{\mathrm{III}}, \ldots r^*_L$ valorile coeficienților de redistribuție corespunzători mecanismelor I, II, III, ..., $L$, determinați pe baza acestei teoreme.

Presupunem că acești coeficienți îndeplinesc condițiile

$$r^*_{\mathrm{I}} > r^*_{\mathrm{II}} > r^*_{\mathrm{III}} > \ldots > r^*_L.$$

Aceste condiții arată că dacă se exclude cîte o secțiune critică din alcătuirea mecanismelor II, III, ..., $L$ și dacă se egalează coeficienții de redistribuție ai celorlalte secțiuni cu coeficienții de redistribuție ai tuturor secțiunilor care alcătuiesc mecanismul I (valoarea comună a acestor coeficienți fiind prin urmare $r^*_{\mathrm{I}}$), rezultă $(n_s - n_e + 1)$ coeficienți de redistribuție egali cu $r^*_{\mathrm{I}}$, și $(n_e - 1)$ coeficienți de redistribuție mai mici decît $r^*_{\mathrm{I}}$, deoarece coeficienții de redistribuție ai tuturor secțiunilor excluse se încadrează în observația făcută la începutul demonstrației.

Cei $(n_s - n_e + 1)$ coeficienți de redistribuție egali între ei formează $(n_s - n_e)$ ecuații suplimentare, care împreună cu $n_e$ ecuații de echilibru determină valorile tuturor momentelor de plastificare.

*Exemplu*

*Aplicarea principiului redistribuției optime la grinda continuă cu 5 deschideri egale, solicitată de sarcini uniform repartizate.*

În figura 1 se prezintă schemele de încărcare și mecanismele elementare de rupere.

Numărul ecuațiilor de echilibru $n_e = 3$ iar cel al secțiunilor critice $n_s = 5$. În consecință, pentru scrierea ecuațiilor suplimentare sînt necesari $n_s - n_e + 1 = 3$ coeficienți de redistribuție.

Prin aplicarea teoremei I la cele trei mecanisme elementare se obțin următorii coeficienți de redistribuție :

$$r_{\mathrm{I}}^{*} = \frac{1}{0{,}80 + \dfrac{0{,}20}{1 + k_u}},$$

$$r_{\mathrm{II}}^{*} = \frac{1}{0{,}65 + \dfrac{0{,}35}{1 + K_u}},$$

$$r_{\mathrm{III}}^{*} = \frac{1}{0{,}65 + \dfrac{0{,}35}{1 + K_u}}.$$

Rezultă :

$$r_{\mathrm{III}}^{*} = r_{\mathrm{II}}^{*} > r_{\mathrm{I}}^{*}.$$

Pe baza recomandărilor făcute la demonstrarea teoremei II ecuațiile suplimentare sînt :

$$r_3 = r_c = r_b.$$

Momentele de plastificare în secțiunile critice sînt (fig. 1)

$$M_{p1} = (0{,}078 + 0{,}089\ K_u)\ Gl$$

$$M_{p2} = (0{,}033 + 0{,}051\ K_u)\ Gl$$

$$M_{p3} = (0{,}064 + 0{,}055\ K_u)\ Gl$$

$$M_{pb} = (0{,}105 + 0{,}078\ K_u)\ Gl$$

$$M_{pc} = (0{,}079 + 0{,}070\ K_u)\ Gl.$$

Coeficienții de redistribuție au valorile

$$r_1 = \frac{1}{0{,}89 + \frac{0{,}11}{1 + K_u}}$$

$$r_2 = r_3 = r_b = r_c = \frac{1}{0{,}65 + \frac{0{,}35}{1 + K_u}} .$$

Aplicarea acestui principiu la proiectarea diferitelor tipuri de structuri de beton armat va face obiectul unor studii ulterioare.

*Primită la redacție la 18 aprilie 1961.*

## ОСНОВНОЙ ПРИНЦИП ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ КОНСТРУКЦИЙ В ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

### РЕЗЮМЕ

В работе высказывается следующий принцип проектирования железобетонных статически неопределимых конструкций в пластической области.

*Оптимальное решение железобетонной статически неопределимой конструкции, проектированной в пластической области, получается путем осуществления равенства определенного числа коэффициентов перераспределения в зависимости от числа дополнительных уравнений, необходимых для получения значений моментов пластификации так, чтобы остальные коэффициенты перераспределения имели значения меньшие, чем общее значение первых коэффициентов.*

Принцип основан на доказательстве двух теорем, присущих проектированию железобетонных конструкций в пластической области.

## A BASIC PRINCIPLE FOR THE DESIGN OF STATICALLY INDETERMINATE REINFORCED CONCRETE STRUCTURES IN THE PLASTIC RANGE

### ABSTRACT

This paper ennunciates the following principle for the design of statically indeterminate reinforced concrete structures in the plastic range :

*The optimum solution of a statically indeterminate reinforced concrete structure, designed in the plastic range, is obtained by equalizing a certain number of redistribution coefficients, function of the number of additional equations necessary for obtaining the values of plastic moments, such that the remaining redistribution coefficients have smaller values than the common value of the first coefficients.*

The principle is based on the demonstration of two theorems specific for the design of reinforced concrete structures in the plastic range.

# STUDII

## TEORIA MECANISMELOR

# STUDIUL MECANISMELOR SPAŢIALE PRIN METODA ACCELERAŢIILOR REDUSE

## I. MECANISME SPAŢIALE CU PATRU ORGANE

DE

D. MANGERON 1) şi C. DRĂGAN 2)

### INTRODUCERE

1. Rezolvarea problemei fundamentale de proiectare ştiinţifică a mecanismelor plane şi spaţiale, menită a satisface cerinţele automatizării complexe şi cît mai complete a celor mai variate procese de producţie, întîmpină serioase dificultăţi datorită faptului că relaţiile funcţionale care traduc legile de mişcare ale organelor conducător şi condus sînt complicate din punct de vedere matematic chiar şi pentru cele mai simple mecanisme.

Clasicele lucrări ale fondatorilor cinematicii teoretice şi apoi şi întregul ansamblu de probleme constituit în teoria mecanismelor şi maşinilor şi jalonat — în ultimele zece-douăsprezece decenii — de o strălucită pleiadă de matematicieni şi mecanicieni, sînt continuate astăzi deosebit de intens pe scară mondială, ca urmare a stăpînirii aparatelor de investigaţie matematică din ce în ce mai profunde, în vederea stabilirii unei punţi trainice între teorie şi practică, în vederea punerii la dispoziţia inginerului proiectant a diferitelor metode analitice, grafice-analitice sau grafice care să permită soluţionarea sigură a unei mulţimi de probleme de interes nemijlocit pentru tehnică şi industrie.

Dezvoltarea actuală rapidă şi multilaterală a teoriei mecanismelor şi maşinilor, reflectată printr-o vastă serie de conferinţe şi colocvii cu totul recente [1], [2] sau prin şiruri largi de lucrări prezentate în cadrul secţiilor congreselor naţionale sau internaţionale de mecanică teoretică şi aplicată [3] . . . [6], este uşurată graţie apariţiei, promovată îndeosebi în U.R.S.S., a valoroaselor monografii în domeniu [7] . . . [9] precum şi

---

1) 2) Institutul politehnic, Iaşi.

datorită şirurilor de lucrări de analiză a contribuţiilor relative la teoria mecanismelor şi maşinilor, realizate pe scară naţională sau internaţională şi comunicate de regulă cu ocazia congreselor sau conferinţelor menţionate [$1_1$, I. I. Artobolevski*), p. 7–23 ; 196–206], [10] ... [13].

Această lucrare, constituind o continuare firească a studiului mecanismelor plane prin metoda acceleraţiilor reduse de ordin oarecare, elaborată într-un şir de lucrări anterioare [14], [15], se bazează pe unele rezultate deja publicate relative la teoria şi practica acceleraţiilor spaţiale reduse de ordin superior de prima sau a doua specie [16], [17].

Întregită printr-un număr de teoreme noi, ea este consacrată expunerii noii metode de studiu a mecanismelor spaţiale cu ajutorul teoriei acceleraţiilor reduse de prima specie, şirul de aplicaţii fiind centrat în jurul unor mecanisme spaţiale importante cu patru organe rămase pînă acum nestudiate prin metoda elaborată.

## TEOREME FUNDAMENTALE

2. Problema de distribuţie a acceleraţiilor de ordin superior ale punctelor solidelor rigide în mişcare spaţială compusă, avînd la bază — în cadrul mişcării paralele cu un plan fix — formulele generalizate ale lui Somov [18], [19] şi prezentînd de pe acum o vastă gamă de aplicaţii aflate în continuă adîncire [20] ... [25], îşi găseşte soluţie în metoda spaţială a acceleraţiilor reduse de ordin oarecare, după cum rezultă din şirul de teoreme ce urmează.

*1.* Teorema relativă la distribuţia acceleraţiilor spaţiale de specia întîi de ordin oarecare. *Locul geometric al extremităţilor acceleraţiilor reduse de ordin n, determinat prin ecuaţia vectorială*

$$\vec{r}_{M_0} = \vec{r}_M + \vec{a}^{(n)}_{Mr}, \tag{1}$$

*în care punctul M parcurge o dreaptă (D)*

$$\vec{r}_M = \vec{r}_0 + \lambda_n \vec{u}, \qquad \vec{u}^2 = 1 \tag{2}$$

*ce aparţine unui solid rigid în mişcare spaţială generală, $\lambda_n$ este un parametru, $\vec{u}$ — versorul dreptei (D), $\vec{r}_0$ — rază vectoare a punctului $0' \in (D)$*

$$\vec{a}^{(n)}_{Mr} = \frac{\vec{a}^{(n)}_M}{A_n - A_n(\vec{u})}, \qquad \vec{a}^{(1)}_{Mr} = \frac{\vec{a}^{(1)}_M}{A_1 - A_1(\vec{u})} \equiv \frac{\vec{a}_M}{A_1 - A_1(\vec{u})}, \tag{3}$$

$$A_{n+1} = \frac{dA_n}{dt} + \vec{\omega} \cdot \vec{B}_n, \qquad \vec{B}_{n+1} = \frac{d\vec{B}_n}{dt} - \vec{\omega} A_n, \tag{4}$$

$$A_1 = \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}^{**)}, \qquad \vec{B}_1 = \vec{\omega}^{(2)} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

---

*) Sovremennoe razvitie teorii mehanizmov i maşin.

**) $\vec{\omega}$ are semnificaţia clasică.

*iar* $A_n(\vec{u})$ *se deduce univoc din* $A_n$ *printr-o ,,operaţie de polarizare în raport cu* $\vec{u}$*'', definită prin*

$$\begin{cases} A_1(\vec{u}) = (\vec{\omega}\,.\,\vec{u})(\vec{\omega}\,.\,\vec{u}) & \text{pentru } A_1 = (\vec{\omega}\,.\,\vec{\omega}), \\ A_2(\vec{u}) = 3\,(\vec{\omega}^{(2)}.\,\vec{u})(\vec{\omega}.\,\vec{u}) & \text{pentru } A_2 = 3\,(\vec{\omega}^{(2)}.\,\vec{\omega}), \\ A_3(\vec{u}) = 4(\vec{\omega}^{(3)}.\,\vec{u})(\vec{\omega}\,.\,\vec{u}) + & \text{pentru } A_3 = 4\,(\vec{\omega}^{(3)}.\,\vec{\omega}) + \\ +\,3\,(\vec{\omega}^{(2)}.\,\vec{u})(\vec{\omega}^{(2)}.\,\vec{u}) - (\vec{\omega}.\vec{\omega})(\vec{\omega}.\vec{u})(\vec{\omega}.\vec{u}) & +\,3\,(\vec{\omega}^{(2)}.\,\vec{\omega}^{(2)}) - (\vec{\omega}.\vec{\omega})(\vec{\omega}.\vec{\omega})\ \text{etc.,} \end{cases} \tag{6}$$

*este o dreaptă* (*D*), *perpendiculară pe prima.*

*2.* Teorema relativă la cruci generalizate în sensul lui A. P. Kotelnikov. *Acceleraţiile reduse de ordin n ale punctelor M situate pe o dreaptă ce aparţine unui solid rigid în mişcare spaţială generală aparţin unei cruci a lui Kotelnikov*[1]).

*3.* Teorema de izogonalitate. *Complexul pătratic* $\mathcal{C}_n^{*2}$ *de drepte* $(D_{M_n})$, *ce aparţin unui solid rigid în mişcare generală spaţială, definit prin ecuaţie*

$$A_n(\vec{u}) = 0, \tag{7}$$

*în care* $\vec{u}$ *este versorul dreptei* $(D_{M_n})$, *iar* $A_n(\vec{u})$ *se definesc prin* (*6*), *se bucură de proprietatea că locul geometric al extremităţilor acceleraţiilor reduse de specia întîia ale punctelor* $M_n$ *este un complex pătratic* $\mathcal{C}_n^{2*}$ *de drepte* $(D_{M_n^*})$ *asociate dreptelor* $(D_{M_n})$ *avînd loc proprietatea de izogonalitate în sensul că* $(D_{M_n^*})$ *şi* $(D_{M_n})$ *formează între ele un unghi* $\gamma_n$ *independent de* $\vec{u}$.

*4.* Teorema de extremum relativă la acceleraţii spaţiale reduse. *Acceleraţii spaţiale reduse de ordin oarecare introduse în cadrul teoremei 1 se bucură de o proprietate extremală.*

Această concluzie decurge, de ex., din următoarea teoremă, în a cărei expunere s-a folosit metoda calculului virial, jalonată pentru prima oară de Kotelnikov [27] şi dezvoltată apoi de E. Study şi de o strălucită pleiadă de matematicieni şi mecanicieni sovietici în anii din urmă [28], [29], [1, M. F. Dimentberg, S. G. Kisliţin, p. 55—66, 206—207].

*5.* Teorema de distribuţie a acceleraţiilor de ordin oarecare. *Locul geometric al punctelor* $M_n^*$ *determinat prin ecuaţia vectorială*

$$r_{M_n^*} = \vec{r}_M + \lambda_n^* \vec{a}_M^{(n)}, \quad \vec{a}_M^{(n)} = \frac{d^{n-1}\vec{a}_M}{dt^{n-1}}, \tag{8}$$

---

[1]) Noţiunea de cruce de vectori a fost introdusă de cunoscutul matematician şi mecanician rus şi sovietic A. P. Kotelnikov în [26].

*în care dreapta* $(\mathcal{D}^\star)$

$$\vec{r}_M = \vec{r}_0 + \mu^\star \vec{u}, \quad \vec{u}^2 = 1 \tag{9}$$

*aparține unui solid rigid în mișcare spațială generală,* $\lambda_n^*$, $\mu^\star$ *sînt parametri, este o dreaptă* $\mathcal{D}_n^*$. *Unghiul complex (ce se transcrie în formă numită uneori duală) între* $(\mathcal{D}^\star)$ *și* $(\mathcal{D}_n^\star)$ *este* $\alpha_n = \theta_n + wd_n$, $w^2 = 0$, $\theta_n$ *fiind unghiul obișnuit între vectorii unitari ai axelor dreptelor de mai sus, iar* $\alpha_n$ *este cea mai scurtă distanță între atare drepte, ce se exprimă prin funcție trigonometrică de unghiul complex după cum urmează*

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \operatorname{tg} \theta_n + wd_n (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_n), \tag{10}$$

$$\operatorname{tg} \theta_n = \left\{[\vec{u} + \lambda_n^* (\vec{w} \cdot \vec{u})^{(n)}]^2 - [1 - \lambda_n^* (A_n - A_n (\vec{u})]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} [1 - \lambda_n^* (A_n - A_n(u))]^{-1}, \tag{11}$$

$$d_n = \frac{\lambda_n^* (\vec{a}_0^{(n)} \cdot \vec{\mathcal{E}}^{(n)})}{\sqrt{\vec{\mathcal{E}}^{(n)} \cdot \vec{\mathcal{E}}^{(n)}}}, \quad \vec{\mathcal{E}}^{(1)} = \vec{\omega} - \vec{u} (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}),$$

$$\vec{a}_0^{(n)} = \frac{d \overset{n-1}{\vec{a}_0}}{dt^{n-1}}, \quad \vec{\mathcal{E}}^{(n)} = \frac{d\vec{\mathcal{E}}^{(n-1)}}{dt}. \tag{12}$$

Renunțînd aici la expunerea altor teoreme ce adîncesc — din punct de vedere al distribuției accelerațiilor spațiale reduse de ordin oarecare de prima specie — studiul diferitelor configurații de drepte ce aparțin unui solid rigid în mișcare spațială generală, cum sînt, de ex., unele teoreme de asemănare ș.a. [30], se expun cîteva demonstrații geometrice relative la construcții de accelerații reduse de primul ordin [15, 258—260]. Metoda accelerațiilor reduse de prima specie ce decurge din expunerea de mai jos constituie preliminarul necesar urmăririi aplicării metodei elaborate la studiul distribuției accelerațiilor punctelor organelor mecanismelor spațiale cu patru organe.

## METODĂ GRAFICĂ-ANALITICĂ A ACCELERAȚIILOR SPAȚIALE REDUSE DE PRIMA SPECIE

**3.** Fie $AB$ o dreaptă în mișcare spațială generală și $A$ un punct al ei. Fie $\vec{a}_{A_r}$ accelerația redusă a punctului $A$. Mișcarea organului purtător al dreptei $AB$ poate fi considerată ca fiind compusă dintr-o mișcare de transport, care este o mișcare de translație, o dată cu punctul $A$, și o mișcare relativă de rotație în jurul unei axe ce trece prin $A$. Axa de rotație și dreapta $AB$ definesc un plan $Q$. Mișcarea relativă de rotație cu viteza unghiulară $\vec{\omega}$ se poate la rîndul ei considera ca fiind compusă dintr-o mișcare de rotație în jurul unei axe conținută în planul $Q$, perpendiculară pe $AB$, de viteză unghiulară $\omega_1 = \omega \sin \mu$ și dintr-o mișcare de rotație în jurul dreptei $AB$, de viteză unghiulară $\omega_2 = \omega \cos \mu$. Componenta tangențială a accelerației punctului în mișcarea de rotație de viteză unghiulară $\vec{\omega}_1$ este nulă, iar componenta normală a acestei accelerații este $\vec{a}_{BA}^{\,n} = \vec{kl}_{AB}\,\omega_1^2$. Prin urmare *accelerația redusă normală* în raport cu $\omega_1^2$ a punctului $B$, este

$$\vec{a}_{BAr}^{\,n} = \vec{kl}_{AB} = \vec{a}_{BA}^{\,n}/\omega_1^2. \tag{13}$$

Vectorul de accelerație unghiulară instantanee $\vec{\varepsilon}$, ce nu are în general vorbind același suport cu $\vec{\omega}$, se poate descompune în trei vectori astfel: vectorul $\vec{\varepsilon}$ să aibă ca suport dreapta $AB$, vectorul $\vec{\varepsilon}_1$ să fie coliniar cu $\vec{\omega}_1$ și vectorul $\vec{\varepsilon}_2$ să aibă ca suport o dreaptă perpendiculară pe $AB$ și pe $\vec{\omega}_1$ $(\vec{\varepsilon}_1)$. Alegînd trei versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ legați de dreapta $AB$, se poate scrie că $\vec{a}_{BA}^{\,t'} = l_{AB}\,\varepsilon_1\,\vec{j}$, $\vec{a}_{BA}^{\,t''} = l_{AB}\,\varepsilon_2\,\vec{i}$. Sumînd geometric acești vectori, se obține (fig. 1) $\vec{a}_{BA}^{\,t} = l_{AB}\,(\varepsilon_1\vec{j} + \varepsilon_2\vec{i})$, în care $\varepsilon_1\vec{j} + \varepsilon_2\vec{i}$ este tocmai vectorul $\vec{\varepsilon}\,' = \vec{\varepsilon}_2 + \vec{\varepsilon}_1$, rotit cu 90° în jurul dreptei $AB$. Prin urmare *accelerația redusă tangențială* a punctului $B$ este

$$\vec{a}_{BAr}^{\,t} = l_{AB}\,\omega_1^{-2}\,(\varepsilon_1\vec{j} + \varepsilon_2\vec{i}), \tag{14}$$

suportul vectorului $\vec{a}_{BAr}^{\,t}$ fiind dreapta $\alpha\alpha$ ce trece prin extremitatea vectorului $\vec{a}_{Ar}$ și este perpendiculară pe dreapta $AB$. Dreapta $\alpha\alpha$ este deci locul geometric al extremității vectorilor $\vec{a}_{Br}$ atunci cînd punctul $B$ descrie dreapta $AB$. Se observă că orientarea dreptei $\alpha\alpha$ depinde numai de orientarea, în planul $P$ dus prin extremitatea vectorului $\vec{a}_{Ar}$ perpendicular pe dreapta $AB$, a unei drepte paralele cu $\vec{\varepsilon}\,'$ ce reprezintă componenta accelerației unghiulare $\vec{\varepsilon}$ conținută într-un plan paralel cu $P$. În figura 1 s-a notat prin $I$ punctul de intersecție al planului $P$ cu dreapta $AB$ și prin $IN$ perpendiculara comună între dreapta $\alpha\alpha$ și dreapta $AB$, care este paralelă cu suportul vectorului $\vec{\varepsilon}\,'$. Segmentul $AI$ reprezintă proiecția vectorului $\vec{a}_{Ar}$ pe dreapta $AB$. Figura a fost executată considerînd scara accelerațiilor reduse egală cu acea a lungimilor.

Teorema expusă, punînd în evidenţă din punct de vedere geometric rolul factorului $[A_1 - A_1 (\vec{u})]^{-1}$ ce intră în definiţia acceleraţiilor spaţiale reduse de prima specie şi de ordinul întîi, aşa cum rezultă din formularea analitică generală a teoremei 1, conduce la următoarea construcţie a acceleraţiei reduse a unui punct oarecare al unui organ aparţinînd unui mecanism spaţial dacă se cunosc acceleraţiile reduse a trei puncte ale aceluiaşi organ. Construcţia de mai jos foloseşte, spre deosebire de şiruri de construcţii în curs de elaborare ce utilizează în rezolvarea aceleiaşi probleme, unele metode speciale recente de reprezentare grafică a vectorilor legaţi din spaţiu (euclidian cu 3 dimensiuni), procedeele geometriei descriptive. Vectorii $\vec{a}_A$, $\vec{a}_B$ şi $\vec{a}_C$ sînt acceleraţiile cunoscute ale punctelor $A$, $B$ şi $C$ (fig. 2). Se reprezintă aceste puncte prin proiecţiile lor pe planul orizontal şi cel vertical, notîndu-se cu $yy$ linia de pămînt. Se mai reprezintă şi punctul $D$ a cărui acceleraţie redusă trebuie determinată. Se uneşte punctul $D$ cu punctele $A$ şi $B$, obţinîndu-se dreptele $AD$ şi $BD$ care se reprezintă în cele două plane de proiecţie prin dreptele $A_hD_h$, $A_vD_v$, $B_hD_h$, $B_vD_v$. Se presupune efectuat în prealabil studiul vitezelor, deci se cunoaşte vectorul $\vec{\omega}$ ce reprezintă viteza unghiulară instantanee a organului considerat. Notîndu-se cu $\vec{\omega}_1$ componenta lui $\vec{\omega}$ conţinută într-un plan perpendicular pe dreapta $\vec{AB}$, se calculează mărimea vectorului $\vec{a}_{Ar} = \vec{a}_A/\omega_1^2$. Această

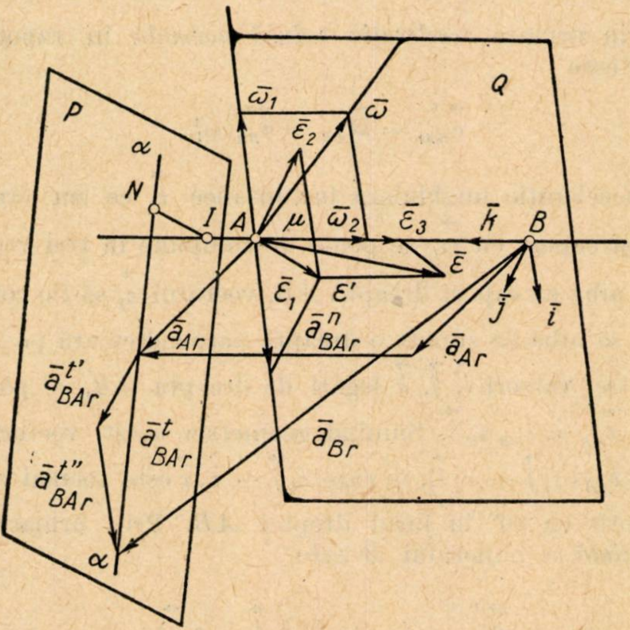
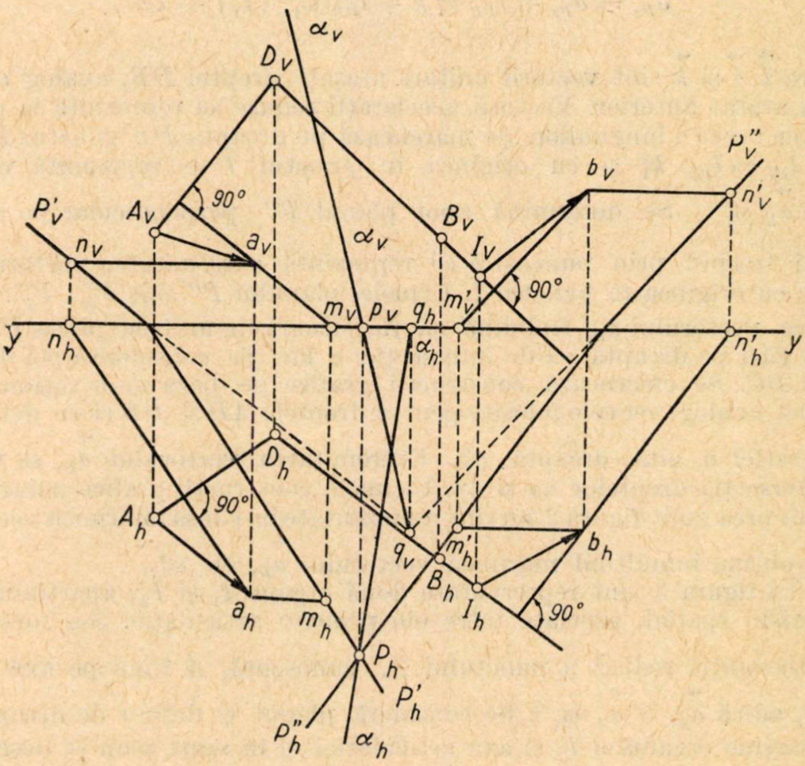

P
Q
$\bar{\omega}_1$
$\bar{\omega}$
$\bar{\varepsilon}_2$
$\alpha$
N
I
A
$\mu$
$\bar{\omega}_2$
$\bar{\varepsilon}_3$
$\bar{k}$
B
$\bar{\varepsilon}$
$\bar{\varepsilon}_1$
$\bar{\varepsilon}'$
$\bar{a}^n_{BAr}$
$\bar{a}_{Ar}$
$\bar{j}$
$\bar{i}$
$\bar{a}_{Ar}$
$\bar{a}^{t'}_{BAr}$
$\bar{a}^t_{BAr}$
$\bar{a}_{Br}$
$\bar{a}^{t''}_{BAr}$
$\alpha$

Fig. 1

mărime se reprezintă apoi prin proiecțiile $\overrightarrow{A_h a_h}$, $A_v\, a_v$ pe cele două plane. Se determină planul $P'$ perpendicular pe dreapta $AD$ și care trece prin extremitatea $a$ a vectorului $\vec{a}_{Ar}$. Construcția este arătată în figură, urmele planului $P'$ fiind $P'_h$, $P'_v$. Extremitatea vectorului $\vec{a}_{Dr} = \vec{a}_D \omega_1^{-2}$ este situată



$\alpha_v$
$D_v$
$p''_v$
$b_v$
$n'_v$
$P'_v$
$A_v$
90°
$B_v$
$n_v$
$a_v$
$\alpha_v$
$I_v$
90°
$m'_v$
$m_v$
$p_v$
$q_h$
$\alpha_h$
y
$n_h$
$n'_h$
y
$D_h$
$A_h$
90°
$q_v$
$m'_h$
$b_h$
$B_h$
$I_h$
90°
$a_h$
$m_h$
$p_h$
$P'_h$
$p''_h$
$\alpha_h$

Fig. 2

undeva în planul $P'$. Dacă se notează cu $\vec{\omega}_1'$ componenta vectorului $\vec{\omega}$ conținută într-un plan perpendicular pe dreapta $DB$, se calculează mărimile vectorilor $\vec{a}'_{Br} = \vec{a}_B\, \omega_1'^{-2}$ și $\vec{a}_{Br} = \vec{a}_B\, \omega_1^{-2}$. Se poate scrie apoi relația

$$\vec{a}'_{Dr} = \vec{a}_D\, \omega_1'^{-2} = \vec{a}_B\, \omega_1'^{-2} + \vec{a}^{\,n}_{DB}\, \omega_1'^{-2} + \vec{a}^{\,t'}_{DB}\, \omega_1'^{-2} + \vec{a}^{\,t''}_{DB}\, \omega_1'^{-2}, \qquad (15)$$

sau succesiv

$$\vec{a}'_{Dr} = \vec{a}'_{Br} + l_{DB}\, \vec{k} + l_{DB}\, \varepsilon_1\, \omega_1'^{-2}\, \vec{j} + l_{DB}\, \varepsilon_2\, \omega_1'^{-2}\, \vec{i}, \qquad (16)$$

$$\vec{a}'_{Dr} = \vec{a}'_{Br} + l_{DB}\, \vec{k} + l_{DB}\, \omega_1'^{-2}\, (\varepsilon_1 \vec{j} + \varepsilon_2 \vec{i}). \qquad (17)$$

Înmulțind relația (15) prin raportul cunoscut $k_1^2 = \omega_1'^2/\omega_1^2$, se obține

$$\vec{a}_{D_r} = \vec{a}_D\, \omega_1^{-2} = \vec{a}_B\, \omega_1^{-2} + l_{DB}\, k_1^2 \vec{k} + l_{DB}\, \omega_1^{-2} (\varepsilon_1 \vec{j} + \varepsilon_2 \vec{i}), \tag{18}$$

sau

$$\vec{a}_{D_r} = \vec{a}_{B_r} + l_{DB}\, k_1^2\, \vec{k} + l_{DB}\, \omega_1^{-2} (\varepsilon_1 \vec{j} + \varepsilon_2 \vec{i}), \tag{19}$$

în care $\vec{i}$, $\vec{j}$ și $\vec{k}$ sînt vectorii unitari atașați dreptei $DB$, analog cu ceea ce s-a arătat anterior. Vectorii accelerații reduse se reprezintă la o scară egală cu aceea a lungimilor. Se marchează pe dreapta $DB$ punctul $I$ astfel încît $l_{DI} = l_{DB}\ k_1^2$ și cu originea în punctul $I$ se reprezintă vectorul $\vec{a}_{B_r} = \vec{a}_B\ \omega_1^{-2}$. Se determină apoi planul $P''$ perpendicular pe dreapta $DB$ și trecînd prin punctul $b$ ce reprezintă extremitatea vectorului $\vec{a}_{B_r}$ situat cu originea în punctul $I$. Urmele planului $P''$ sînt $P''_H$, $P''_V$. Extremitatea vectorului $a_{D_r}$ trebuind să fie situată în ambele plane $P'$ și $P''$, se va găsi pe dreapta $\alpha\alpha$ de intersecție a lor. Se consideră apoi dreptele $AD$ și $DC$. Se efectuează construcții grafice pe baza unor raționamente complet analoge cu cele folosite pentru dreptele $AD$ și $DB$ și se determină apoi astfel o altă dreaptă $\beta\beta$. Extremitatea vectorului $\vec{a}_{D_r}$ se va găsi la intersecția dreptelor $\alpha\alpha$ și $\beta\beta$. Ultimele construcții grafice pentru a nu încărca prea mult figura 2 nu sînt reprezentate într-însa. Mărimea vectorului $\vec{a}_D$ se obține înmulțind mărimea vectorului $\vec{a}_{D_r}$ cu $\omega_1^2$.

În figura 3 sînt reprezentate două organe $I_1$ și $I_2$, aparținînd unui mecanism spațial, asociate între ele printr-o articulație. S-a notat prin $\vec{a}_{A_r}$ accelerația redusă a punctului $A$, cunoscută, $A$ fiind pe axa articulației, adică $\vec{a}_{A_r} = \vec{a}_A\ \omega_1^{-2}$. Se consideră planul $Q$ definit de dreapta $AB$ ce aparține organului $I_2$ și axa articulației și în acest plan se descompun vectorii $\vec{\omega}$ și $\vec{\varepsilon}$ după dreapta $AB$ și după o perpendiculară pe ea situată în planul $Q$. Acest lucru înseamnează descompunerea mișcării de rotație relativă în jurul axei articulației în două mișcări de rotație și anume, în jurul dreptei $AB$ și în jurul perpendicularei pe $AB$, situată în planul $Q$. Planul $P$ este dus prin extremitatea vectorului $\vec{a}_{A_r}$ perpendicular pe dreapta $AB$. În acest plan este situată dreapta $\alpha\alpha$ care reprezintă locul geometric al extremităților accelerațiilor reduse a punctelor dreptei $AB$. Perpendiculara comună $NI$ între dreptele $\alpha\alpha$ și $\beta\beta$ este paralelă cu suportul vectorului $\vec{\varepsilon}_1\ (\vec{\omega}_1)$.

În cazul cînd cele două organe aparțin unui mecanism plan (fig. 4) dreapta $AB$ este perpendiculară pe axa articulației și vectorul $\vec{a}_{A_r}$ este conținut în planul $H$ al mecanismului, perpendicular pe axa articulației și

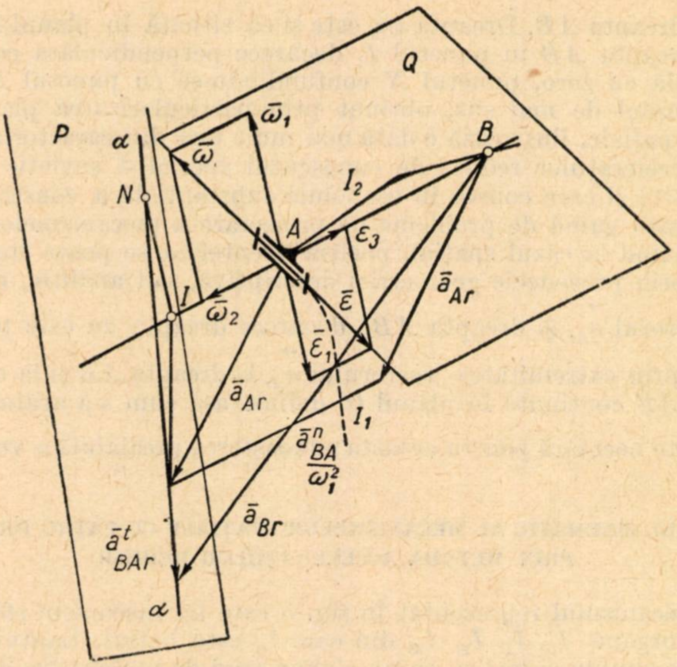

Q
P
$\alpha$
$\bar{\omega}_1$
$\bar{\omega}$
B
N
$I_2$
A
$\varepsilon_3$
$\bar{a}_{Ar}$
I
$\bar{\omega}_2$
$\bar{\varepsilon}$
$\bar{\varepsilon}_1$
$\bar{a}_{Ar}$
$I_1$
$\bar{a}^n_{BA}$
$\bar{\omega}_1^2$
$\bar{a}_{Br}$
$\bar{a}^t_{BAr}$
$\alpha$

Fig. 3

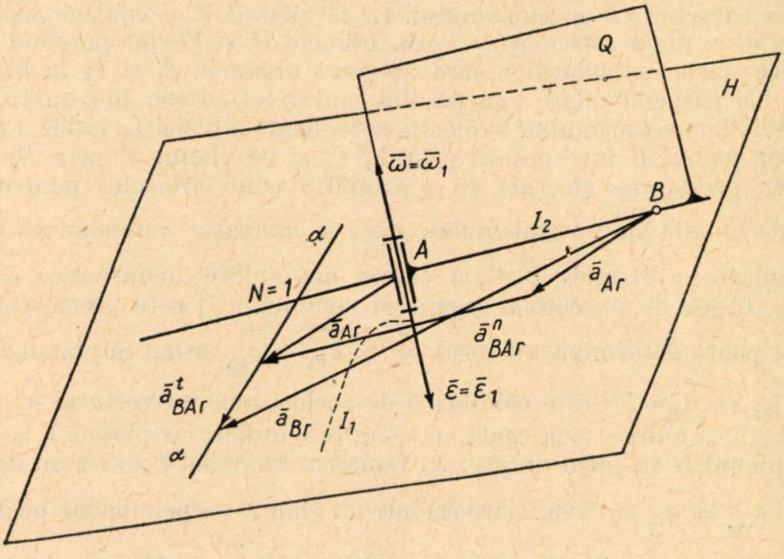

Q
H
$\bar{\omega}=\bar{\omega}_1$
B
$I_2$
$\alpha$
A
$\bar{a}_{Ar}$
N=1
$\bar{a}_{Ar}$
$\bar{a}^n_{BAr}$
$\bar{a}^t_{BAr}$
$\bar{\varepsilon}=\bar{\varepsilon}_1$
$\bar{a}_{Br}$
$I_1$
$\alpha$

Fig. 4

conținînd dreapta $AB$. Dreapta $\alpha\alpha$ este și ea situată în planul $H$ și intersectează dreapta $AB$ în punctul $I$, deoarece perpendiculara comună $NI$ devine egală cu zero, punctul $N$ confundîndu-se cu punctul $I$.

Exemplul de mai sus, obținut prin particularizarea plană a unei probleme spațiale, ilustrează o dată mai mult una din caracterizările dată metodei accelerațiilor reduse de cunoscutul specialist sovietic N. I. Levitski în [31] și care constă în economie substanțială a construcțiilor interesînd vasta gamă de probleme de proiectare a mecanismelor.

Revenind la cazul spațial, poziția dreptei $\alpha\alpha$ se poate stabili grafic, de pildă, prin procedeele geometriei descriptive, sau analitic, dacă se cunoaște vectorul $\vec{a}_{A_r}$ și dreapta $AB$, deoarece dreapta $\alpha\alpha$ este perpendiculara dusă prin extremitatea vectorului $\vec{a}_{A_r}$ la dreapta $AB$ și la o perpendiculară pe $AB$ conținută în planul $Q$, definit așa cum s-a arătat anterior. Deci nu este necesară pentru aceasta cunoașterea prealabilă a vectorului $\vec{\varepsilon}$.

## STUDIUL CINEMATIC AL MECANISMELOR SPAȚIALE CU PATRU ORGANE PRIN METODA ACCELERAȚIILOR REDUSE

4. Mecanismul reprezentat în fig. 5 este un mecanism sferic format din patru organe $I_0$, $I_1$, $I_2$, $I_3$, din care $I_0$ este batiul. Lanțul cinematic spațial este simplu și închis, cu un singur grad de mobilitate, deoarece nu se ia în considerație posibilitatea de rotire a bielei $I_2$ în jurul dreptei $B_hC_v$. Cuplele cinematice care asociază organele între ele sînt două articulații și două articulații sferice. Planul $H$, care conține traiectoria centrului comun $B_h$ al sferelor plină și goală ce constituie articulație sferică din $B_h$, este un plan fix caracteristic mecanismului. La fel planul $V$ ce conține centrul $C_v$ al celei de a doua articulații sferice. Planele $H$ și $V$ sînt perpendiculare, deoarece axele articulațiilor care asociază organele $I_1$ și $I_3$ la batiul $I_0$ sînt și ele perpendiculare una pe alta, intersectîndu-se în punctul fix $O$ caracteristic mecanismului. Proiecția ortogonală a bielei $I_2$, adică a dreptei $B_h\,C_v$ pe planul $H$ este notată prin $B_h\,C_h$ și pe planul $V$ prin $B_v\,C_v$.

Se presupune efectuat în prealabil studiul vitezelor pentru toate organele mobile ale mecanismului, deci se cunoaște componenta $\vec{\omega}_2'$ perpendiculară pe dreapta $B_h\,C_v$ a vitezei unghiulare instantanee $\vec{\omega}_2$ a bielei $I_2$. Legea de mișcare a organului conductor $I_1$ este presupusă dată, deci se poate determina vectorul $\vec{a}_{B_h} = \vec{a}^{\,n}_{B_h} + \vec{a}^{\,t}_{B_h}$ situat în planul $H$. Vectorul $\vec{a}_{B_{hr}} = \vec{a}_{B_1}\,\omega_2'^{-2}$ este coliniar și de același sens cu vectorul $\vec{a}_{B_h}$. Scara accelerațiilor reduse se ia egală cu scara lungimilor, iar planul $V$ se rabate peste planul $H$ în jurul dreptei $zz$. Conform teoremei 1 extremitatea vectorului $\vec{a}''_{C_{vr}} = \vec{a}_{C_v}\,\omega_2'^{-2}$ va fi situată într-un plan $P$ perpendicular pe dreapta $B_h\,C_v$ și trecînd prin extremitatea vectorului $\vec{a}_{B_{hr}}$. Urma planului $P$,

$\alpha_h$, pe planul $H$ este perpendiculară pe dreapta $B_h C_h$, iar urma planului $P$, $\alpha_v$ pe planul $V$ este perpendiculară pe $B_v C_v$. Se notează prin $\vec{a}_{vr} = \vec{a}_{C_v} \omega_3^{-2}$. Vectorii $\vec{a}'_{C_v r}$ și $\vec{a}''_{C_v r}$ sînt coliniari, de același sens și se găsesc în planul $V$ care conține traiectoria punctului $C_v$.

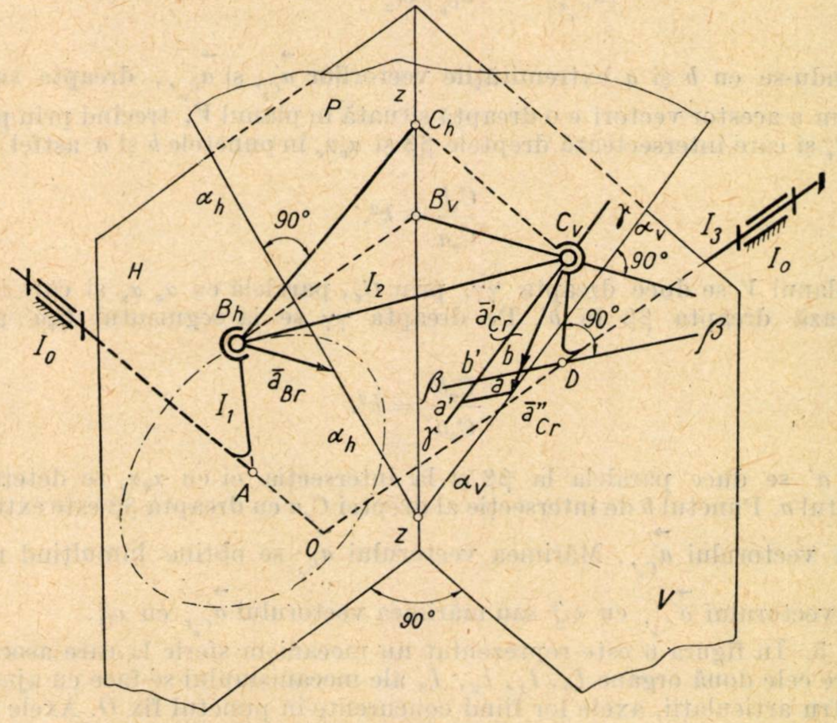


Fig. 5

Pentru organul $I_3$ se poate scrie ecuația vectorială

$$\vec{a}_{C_v} = \vec{a}_D + \vec{a}^{\,n}_{C_v D} + \vec{a}^{\,t}_{C_v D}, \quad \vec{a}_D = 0. \tag{20}$$

Împărțind ambii membri ai ecuației (20) cu scalarul $\omega_3^2$, se obține

$$\vec{a}'_{C_v r} = \frac{l_{C_v D}\, \omega_3^2}{\omega_3^2} \vec{i} + \frac{l_{C_v D}\, \varepsilon_3}{\omega_3^2} \vec{j}. \tag{21}$$

$\vec{i}$ și $\vec{j}$ fiind versorii, respectiv coliniar și perpendicular pe dreapta $C_v D$. Ecuația (21) arată că, dacă se reprezintă vectorii accelerații reduse la o scară egală cu scara lungimilor, extremitatea vectorului $\vec{a}'_{C_v r}$ se găsește pe dreapta $\beta\beta$ perpendiculară pe dreapta $C_v D$, conținută în planul $V$ și trecînd prin punctul $D$.

Raportul mărimilor vectorilor $\vec{a}'_{C_v r}$ și $\vec{a}''_{C_v r}$ este cunoscut, adică

$$\frac{|\vec{a}'_{C_v r}|}{|\vec{a}''_{C_v r}|} = \frac{|\vec{a}_{C_v}|\,\omega_3^{-2}}{|\vec{a}_{C_v}|\,\omega_2'^{-2}} = \frac{\omega_2'^2}{\omega_3^2} = k^2.$$

Notîndu-se cu $b$ și $a$ extremitățile vectorilor $\vec{a}'_{C_v r}$ și $\vec{a}''_{C_v r}$, dreapta suport comun a acestor vectori e o dreaptă situată în planul $V$, trecînd prin punctul $C_v$ și care intersectează dreptele $\beta\beta$ și $\alpha_v\alpha_v$ în punctele $b$ și $a$ astfel încît

$$\frac{C_v b}{C_v a} = k^2.$$

În planul $V$ se duce dreapta $\gamma\gamma$, prin $C_v$, paralelă cu $\alpha_v\ \alpha_v$ și care intersectează dreapta $\beta\beta$ în $b'$. Pe dreapta $\gamma\gamma$ se ia segmentul $C_v a'$ astfel încît

$$\frac{C_v b'}{C_v a'} = k^2.$$

Prin $a'$ se duce paralela la $\beta\beta$ și la intersecția ei cu $\alpha_v\alpha_v$ se determină punctul $a$. Punctul $b$ de intersecție al dreptei $C_v a$ cu dreapta $\beta\beta$ este extremitatea vectorului $\vec{a}'_{C_v r}$. Mărimea vectorului $\vec{a}_{C_v}$ se obține înmulțind mărimea vectorului $\vec{a}''_{C_v r}$ cu $\omega_2'^2$ sau mărimea vectorului $\vec{a}'_{C_v r}$ cu $\omega_3^2$.

5. În figura 6 este reprezentat un mecanism sferic la care asocierea dintre cele două organe $I_0$, $I_1$, $I_2$, $I_3$ ale mecanismului se face cu ajutorul a patru articulații, axele lor fiind concurente în punctul fix $O$. Axele celor două articulații care leagă organul $I_2$ de organul $I_1$ și respectiv $I_3$ fac un unghi de 90°.

Se consideră o sferă cu centrul în $O$ și de rază oarecare finită. Se notează cu $B_h$ punctul de intersecție al sferei cu axa articulației ce leagă organele $I_1$ și $I_2$ și cu $C_v$ punctul de intersecție al sferei cu axa articulației ce leagă organele $I_2$ și $I_3$. Punctul $B_h$ are ca traiectorie un cerc mic pe sferă. Planul $H$ ce conține această traiectorie fiind un plan fix în spațiu este caracteristic mecanismului. Traiectoria punctului $C_v$ este de asemenea un cerc mic pe sferă și planul $V$, fix, care conține această traiectorie este și el un plan caracteristic al mecanismului. Unghiul dintre $H$ și $V$ este de 90°.

Organul conducător al mecanismului fiind organul $I_1$, se poate determina, în fiece moment, vectorul $\vec{a}_{B_h r} = \vec{a}_{B_h}\,\omega_2'^{-2}$, în care $\vec{\omega}_2'$ este componenta perpendiculară pe dreapta $B_h C_v$ a vitezei unghiulare instantanee $\vec{\omega}_2$ cunoscută din studiul prealabil al vitezelor, a organului $I_2$.

Planul $P$, care trece prin extremitatea vectorului $\vec{a}_{B_h r}$ și este perpendicular pe dreapta $B_h C_v$, conține extremitatea vectorului $\vec{a}''_{C_v r} = \vec{a}_{C_v} \omega_2'^{-2}$, așa după cum rezultă particularizînd pentru $n = 1$ teorema 1. Dreapta $B_h C_v$ unește două puncte ale aceluiași organ $I_2$.

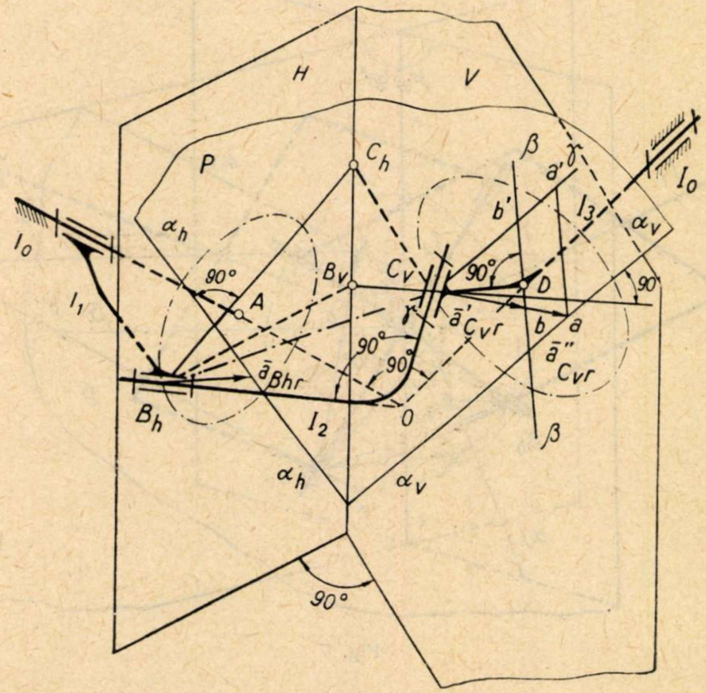

H
V
P
$C_h$
$\beta$
$\gamma$
$a'$
$I_0$
$b'$
$I_3$
$\alpha_v$
$\alpha_h$
$I_0$
90°
$B_v$
$C_v$
90°
D
90
$I_1$
A
$\bar{a}'_{C_v r}$
b
a
90°
$\bar{a}''_{C_v r}$
90
$\bar{a}_{B_h r}$
$B_h$
$I_2$
0
$\beta$
$\alpha_h$
$\alpha_v$
90°

Fig. 6

Dreapta $\alpha_h \alpha_h$ de intersecție a planului $P$ cu planul $H$ este perpendiculară pe proiecția ortogonală $B_h C_h$ a dreptei $B_h C_v$ pe planul $H$. La fel $\alpha_v \alpha_v$ este perpendiculară pe proiecția ortogonală $B_v C_v$ a dreptei $B_h C_v$ pe planul $V$. Punctul $C_v$ aparține și organului $I_3$, iar vectorul $\vec{a}'_{C_v r} = \vec{a}_{C_v} \omega_3^{-2}$ coliniar și de același sens cu $\vec{a}''_{C_v r}$, este conținut în planul $V$. Cunoscîndu-se raportul $k^2 = \omega_2'^2 \omega_3^{-2}$, printr-o construcție grafică simplă analogă cu aceea folosită pentru mecanismul studiat anterior, se determină ușor vectorii $\vec{a}'_{C_v r}$ și $\vec{a}''_{C_v r}$.

**6.** În figura 7 este reprezentat mecanismul articulației universale. Punctul $B_h$ este situat pe axa articulației care asociază organul conducător $I_1$ şi organul $I_2$, la o distanţă oarecare de punctul fix $O$. Planul $H$ conţine traiectoria punctului $B_h$. Punctul $C_v$ este situat pe axa articulaţiei care asociază organele $I_2$ şi $I_3$. Planul $V$ conţine traiectoria punctului $C_v$. Unghiul dintre planele $H$ şi $V$ este, în general, diferit de 90°.

Dreapta $B_h C_v$ uneşte două puncte ale aceluiaşi organ $I_2$. Dreapta $B_h C_h$ este proiecţia ortogonală, pe planul $H$, a dreptei $B_h C_v$, deci dreapta $C_v C_h$ nu este conţinută în planul $V$. Dreapta $B_v C_v$ este proiecţia ortogonală, pe planul $V$, a dreptei $B_h C_v$, deci dreapta $B_h B_v$ nu este conţinută în planul $H$. Planul $P$ trece prin extremitatea vectorului $\vec{a}_{B_h r} = \vec{a}_{B_h} \omega_2'^{-2}$, este perpendicular pe dreapta $B_h C_v$ şi conţine extremitatea vectorului $\vec{a}''_{C_v r} = \vec{a}_{C_v} \omega_2'^{-2}$. Vectorul $\vec{a}'_{C_v r} = \vec{a}_{C_v} \omega_3^{-2}$ este conţinut în planul $V$. Construcţiile grafice din figura 7 sînt analoge cu acelea folosite pentru mecanismele studiate anterior.

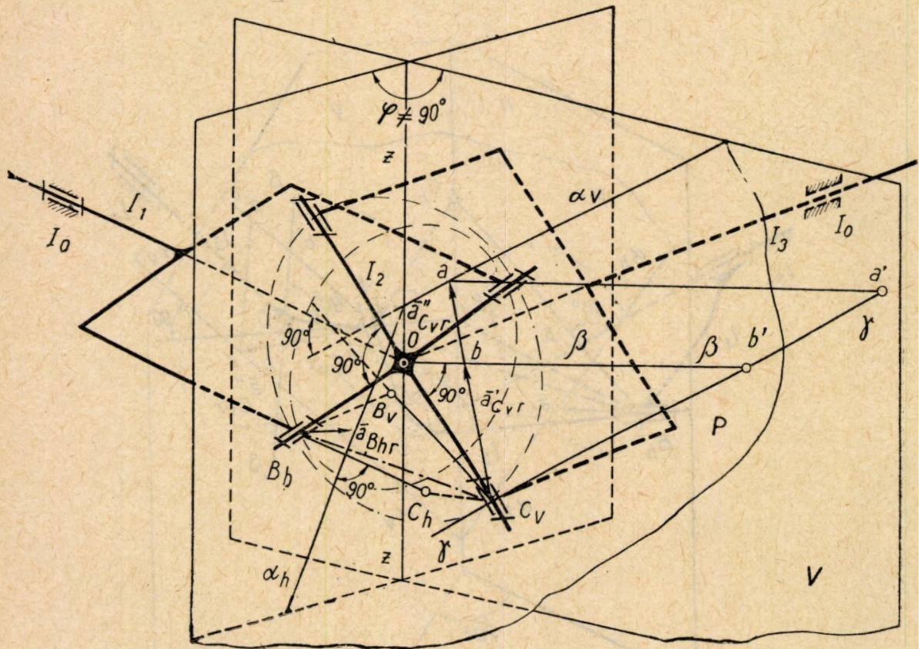


Fig. 7

7. Mecanismul bielă-manivelă spaţial, reprezentat în figura 8, este format de asemenea din patru organe $I_0$, $I_1$, $I_2$, $I_3$, organul $I_0$ fiind fix. Asocierea dintre manivela $I_1$ şi biela $I_2$ se face cu ajutorul unei articulaţii sferice, punctul $B_h$ fiind centrul comun al sferei pline şi goale. Planul $H$ fix, caracteristic mecanismului, este perpendicular pe axa articulaţiei care asociază organul $I_1$ la batiul $I_0$ şi conţine traiectoria punctului $B_h$. Asocierea dintre biela $I_2$ şi capul de cruce $I_3$ se face cu ajutorul unei articulaţii sfe-

rice cu deget, sfera plină și degetul aparținînd organului $I_3$. Axa degetului este perpendiculară pe direcția de glisare $xx$ a cuplei de translație care asociază organul $I_3$ la batiul $I_0$. Planul $V$ care conține dreapta $xx$ și axa degetului este fix și caracteristic mecanismului. Punctul $C_v$, centrul comun al sferelor plină și goală, aparține atît organului $I_2$ cît și organului $I_3$. Unghiul dintre planele $H$ și $V$ este, în general, diferit de 90°. Dreapta

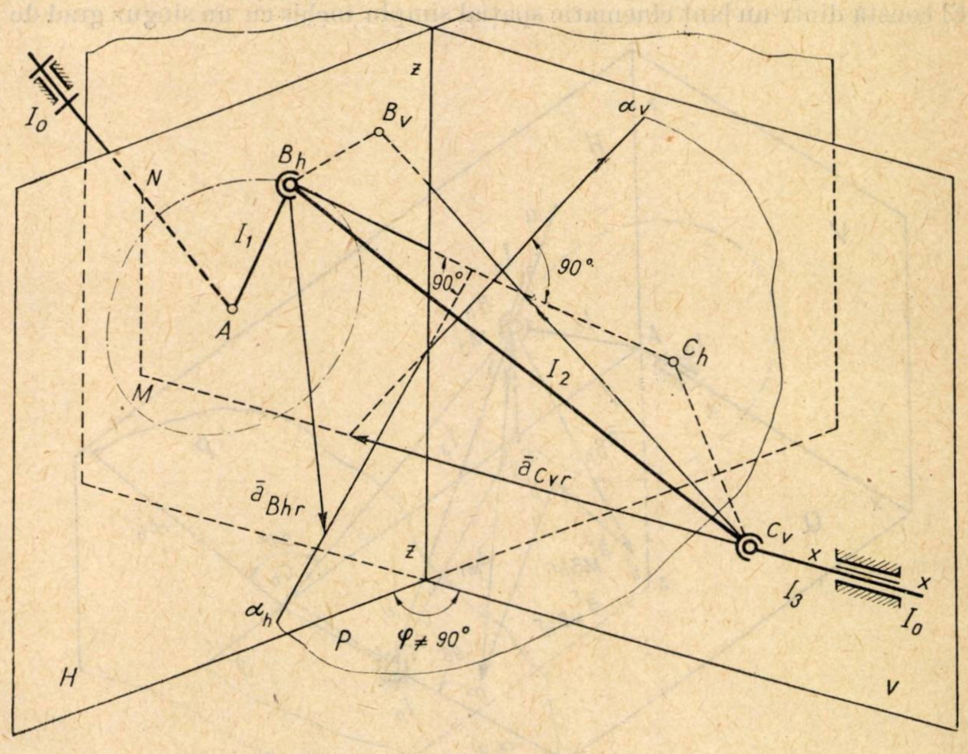


Fig. 8

$B_hC_h$ este proiecția ortogonală a dreptei $B_hC_v$ pe planul $H$, căci dreapta $C_vC_h$ e perpendiculară pe planul $H$. Dreapta $B_vC_v$ este proiecția ortogonală a dreptei $B_hC_v$ pe planul $V$, deoarece dreapta $B_hB_v$ este perpendiculară pe planul $V$. Planul $P$ conține extremitatea vectorului $\vec{a}_{B_{h}r} = \vec{a}_B\, \omega_2'^{-2}$ și este perpendicular pe dreapta $B_h\, C_v$. Vectorul $\vec{a}_2'$ este componenta vitezei unghiulare instantanee $\vec{\omega}_2$ a organului $I_2$ perpendiculară pe dreapta $B_h\, C_v$. Dreapta $\alpha_h\, \alpha_h$ de intersecție a planului $P$ cu planul $H$ este perpendiculară pe dreapta $B_hC_h$, iar dreapta $\alpha_v\alpha_v$ de intersecție a planului $P$ cu planul $V$ este perpendiculară pe dreapta $B_vC_v$. Conform teoremei 1, planul $P$ conține și extremitatea vectorului $\vec{a}_{C_{v}r} = \vec{a}_{C_v}\, \omega_2'^{-2}$, căci și punctul $C_v$ aparține organului $I_2$. Pe de altă parte vectorul $\vec{a}_{C_v r}$ este coliniar și de același sens cu vectorul $\vec{a}_{C_v}$, deci suportul vectorului $\vec{a}_{C_v r}$ este dreapta $xx$; extremitatea vectorului $\vec{a}_{C_v r}$ este deci punctul de intersecție al dreptei $\alpha_v\,\alpha_v$ cu dreapta $xx$.

**8.** În figura 9 este reprezentat un mecanism spațial cu culisă dreaptă. El constă dintr-un lanț cinematic spațial simplu închis cu un singur grad de libertate, organul fix fiind notat cu $I_0$. Manivela motoare $I_1$ este asociată la batiul $I_0$ printr-o articulație. Organul $I_2$ este o piatră de culisă care alunecă de-alungul culisei drepte $I_3$. Mișcarea relativă a pietrei de culisă față de culisă este o mișcare de translație rectilinie. Asocierea dintre manivela motoare $I_1$ și piatra de culisă $I_2$ se face cu ajutorul unei articulații sferice. În $B_h$ este suprapusă deci o articulație sferică și o cuplă de translație, deoarece punctul $B_h$, centrul comun al celor două sfere plină și goală ce alcătuiesc articulația sferică, se găsește pe direcția de alunecare $uu$ a cuplei de translație. Se consideră un punct $M_3$ de pe direcția de alunecare $uu$, adică aparținînd culisei $I_3$ și care coincide în momentul considerat cu punctul $B_h$ care aparține organelor $I_1$ și $I_2$. Accelerația relativă redusă $\vec{a}_{MBr}$ are ca suport dreapta $uu$.

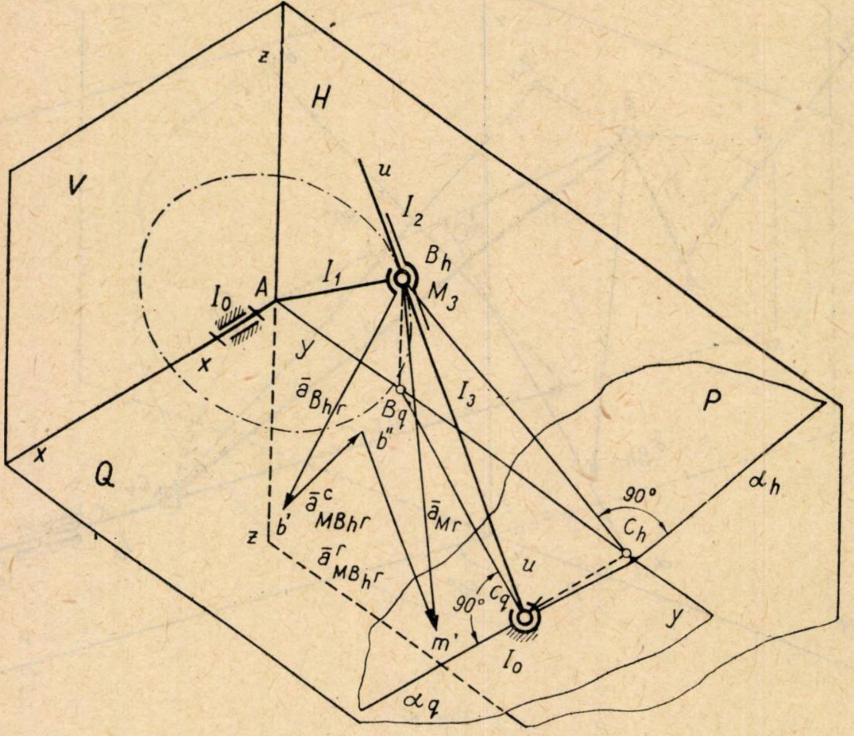


Fig. 9

Asocierea dintre culisa $I_3$ şi batiul $I_0$ se face cu ajutorul unei articulaţii sferice cu deget. Sfera plină şi degetul aparţin organului $I_3$, axa degetului fiind perpendiculară pe dreapta *uu* (culisă). Mişcarea organului $I_3$ faţă de organul $I_0$ este o mişcare de rotaţie de viteză unghiulară $\vec{\omega}_{30}$ care poate fi considerată ca fiind compusă dintr-o viteză unghiulară $\vec{\omega}'_{30}$ coliniară cu axa degetului şi o alta $\vec{\omega}''_{30}$ perpendiculară pe tăietura circulară din sfera goală care aparţine organului $I_0$. Vectorul $\vec{\omega}_{30}$ este deci conţinut în planul $P$ ce trece prin centrul comun $C_q$ al celor două sfere ce alcătuiesc articulaţia sferică cu deget şi e perpendicular pe culisa $I_3$, adică pe dreapta *uu*. Planul $Q$ definit de axa $xx$ a articulaţiei ce asociază manivela $I_1$ la batiul $I_0$ şi de punctul $C_q$ este un plan fix, caracteristic, al mecanismului. La fel planul $H$ ce conţine traiectoria punctului $B_h$. Planul $H$ este perpendicular pe planul $Q$. Se mai poate considera şi planul $V$ perpendicular pe $Q$ şi $H$ şi conţinînd dreapta $xx$. Dreptele $B_qC_q$ şi $B_hC_h$ sînt proiecţiile ortogonale ale dreptei $B_hC_q$ pe planele $Q$ şi $H$. Planul $P$ se defineşte prin urmele sale pe planele $Q$ şi $H$, $\alpha_q$, $\alpha_h$ care sînt respectiv perpendiculare pe $B_qC_q$ şi $B_hC_h$. Pentru acceleraţia punctului $M_3$ se pot scrie ecuaţiile vectoriale

$$\vec{a}_M = \vec{a}_{B_h} + \vec{a}^C_{MB_h} + \vec{a}^r_{MB_h} \tag{22}$$

$$\text{şi } \vec{a}_M = \vec{a}_{C_q} + \vec{a}^n_{MC_q} + \vec{a}^t_{MC_q}, \tag{23}$$

în care $\vec{a}_{C_q} = 0$. Deoarece

$$\vec{a}^C_{MB_h} = 2\ \vec{\omega}_{30} \times \vec{v}_{MB_h}, \tag{24}$$

vectorul $\vec{a}^C_{MB_h}$ este conţinut într-un plan perpendicular pe direcţia de alunecare *uu*, adică paralel cu planul $P$, căci $\vec{v}_{MB_h}$ este coliniar cu dreapta *uu*.

Din studiul prealabil al vitezelor se cunosc vectorii $\vec{v}_{30}$ şi $\vec{v}_{MB_h}$, deci se poate calcula vectorul acceleraţie al lui Coriolis. Împărţind ecuaţiile (22) şi (23) prin $\omega_{30}^2$ se obţin ecuaţiile

$$\vec{a}_{M_r} = \vec{a}_{B_h r} + \vec{a}^C_{MB_h r} + \vec{a}^r_{MB_h r}, \tag{25}$$

$$\vec{a}_{M_r} = \vec{a}^n_{MC_q r} + \vec{a}^t_{MC_q r}, \tag{26}$$

în care

$$\vec{a}_{M_r} = \frac{\vec{a}_M}{\omega_{30}^2},\quad \vec{a}_{B_h r} = \frac{\vec{a}_{B_h}}{\omega_{30}^2},\quad \vec{a}^C_{MB_h r} = \frac{2\,\vec{\omega}_{30} \times \vec{v}_{MB_h}}{\omega_{30}^2}, \tag{27}$$

$$\vec{a}_{MB_h r} = \frac{\vec{a}_{MB_h}}{\omega_{30}^2},\quad \vec{a}^n_{MC_q r} = \frac{\vec{a}_{MC_q}}{\omega_{30}^2},\quad \vec{a}^t_{MC_q r} = \frac{\vec{a}_{MC_q}}{\omega_{30}^2}. \tag{28}$$

Se consideră mai întîi că punctul $B_h$ aparține organului $I_1$ a cărui lege de mișcare se cunoaște și se trasează la o scară a accelerațiilor reduse egală cu aceea a lungimilor, în planul $H$, vectorul $\vec{a}_{B_h r}$. Se reprezintă, prin proiecțiile sale pe planele $Q$, $H$ și $V$, cu originea în extremitatea $b'$ a vectorului $\vec{a}_{B_h r}$, vectorul $\vec{a}^{C}_{MB_h r}$ care e conținut, ca și vectorul $\vec{a}^{C}_{MB_h}$, într-un plan perpendicular pe direcția de alunecare $uu$. Din punctul $b''$ ce reprezintă extremitatea vectorului $\vec{a}^{C}_{MB_h r}$ se duce o dreaptă paralelă cu dreapta $uu$ și care reprezintă direcția accelerației relative reduse $\vec{a}_{MB_h r}$. Dar conform teoremei 1 și prin urmare și ecuației (14), extremitatea vectorului $\vec{a}_{Mr}$ trebuie să fie situată în planul $P$, deci în punctul $m'$ de intersecție a direcției paralelă cu dreapta $uu$ dusă prin punctul $b''$ cu planul $P$.

Renunțînd la a expune aici aplicarea metodei accelerațiilor spațiale reduse de prima specie la studiul cîmpurilor de accelerații pentru punctele organelor unui mecanism patrulater articulat spațial, făcută de autori în [15, p. 262—263] și subliniind, paralel cu interesul extinderilor și la alte categorii de mecanisme spațiale ce se arată a fi din ce în ce mai importante pentru tehnica nouă a metodelor grafice-analitice relative la studiul cîmpurilor de accelerații spațiale de ordin oarecare, și existența unor greutăți atît în elaborarea interpretărilor geometrice pentru $n$ oarecare a factorilor $[A_n - A_n(\vec{u})]^{-1}$ ce intevin în definiția (3) a accelerațiilor reduse cît și în elaborarea unei categorisiri cît mai complete și mai unitare a mecanismelor spațiale 1), din cele expuse se pot conchide cele ce urmează.

## CONCLUZII

**9.** Metoda elaborată se extinde cu modificările și complicațiile inerente aspectului spațial al factorului $[A_n - A_n(\vec{u})]^{-1}$ (3) asupra construcțiilor cîmpurilor de accelerații spațiale reduse de specia întîia și de ordin oarecare, în primul rînd, asupra mecanismelor spațiale cu patru organe, corespunzînd prin aceasta, — cel puțin în ceea ce privește variațiile accelerațiilor (sau accelerații de ordinul al doilea [35], [36]) la necesitățile imediate ale tehnicii moderne relative la variate mașini rapide și linii automate.

Metoda accelerațiilor reduse relativă la analiza mecanismelor plan a și fost introdusă în procesul de învățămînt și în practică [25, p. 252 — 254] elaborîndu-se totodată, în colaborare cu omul de știință sovietic Ia. S. Zilberman, o monografie în acest sens.

---

1) Contribuții de seamă cu totul recente în domeniul clasificării mecanismelor spațiale [$I_1$, p. 8], în șirul cărora se situează și o serie de lucrări datorite autorilor romîni [32], [33], [34] constituie un imbold la continuarea cercetărilor întreprinse de autori în domeniul teoriei accelerațiilor reduse.

Confruntarea volumului de construcții grafice folosite pînă acum în cadrul rezolvării problemei determinării cîmpurilor de accelerații, atît de importantă în aplicații practice, cu volumul de construcții necesitate de metoda accelerațiilor reduse, arată, e drept ceva mai puțin pregnant în cazul mecanismelor spațiale decît în acel al mecanismelor plane, fecunditatea procedeelor bazate pe teoria accelerațiilor reduse.

Avantajele metodei accelerațiilor reduse ies la iveală și cu ocazia elaborărilor unor variante în rezolvarea importantei probleme de sinteză a mecanismelor plane cu cuple cinematice inferioare, problemă ce și-a găsit recent cristalizare strălucită în trei mari opere monografice [7]...[9]. Ele apar și în elaborări de variante în unele probleme de sinteză a mecanismelor spațiale, rezolvate recent de autori prin metodă matricială — tensorială [37], [38]. Și aici rămîne deschisă o serie de probleme ce merită adîncire, întrucît importanța problemelor de sinteză a mecanismelor spațiale a fost subliniată ca făcînd parte din cadrul programului de lucru de viitor pe scară mondială, în concluziile plenarei de închidere a celei de a doua conferințe unionale de teoria mecanismelor și mașinilor deja menționată [39, p. 49—52], [40].

Adîncirea teoriei crucilor de accelerații de diferite ordine în sensul crucilor de vectori, introduse după cum s-a menționat într-o problemă plană de A. P. Kotelnikov în [26], a condus pe unul dintre autori [16], singur sau în colaborare cu D. S. Tavhelidze [41], [42] ș. a., la introducerea crucilor spațiale de accelerații de specia a doua și în consecință la teoria accelerațiilor spațiale reduse de ordin oarecare de ambele specii, cu variate aplicații expuse apoi în [17]. Problema algebrei crucilor de accelerații legată de teoria structurală a mecanismelor și mașinilor și de teoria cîmpurilor de accelerații de ordin oarecare interesînd la rîndul său teoria generală a mecanismelor va constitui, sperăm, continuarea naturală a acestei lucrări.

*Primită la redacție la 6 iunie 1961.*

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ МЕТОДОМ ПРИВЕДЕННЫХ УСКОРЕНИЙ.

### I. ЧЕТЫРЕХЗВЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ МЕХАНИЗМЫ

### РЕЗЮМЕ

За введением, в котором подчеркивается место, отводящееся методу приведенных ускорений в непрестанно распространяющейся области применения теории машин и механизмов после проведенного доклада автора на Втором всесоюзном совещании по основным проблемам теории машин и механизмов (Москва, 24—28 марта 1958 г.), излагается ряд теорем (I—V), относящихся к пространственным приведенным ускорениям любого порядка первого рода, определяемых

(3) . . .(6), а также и соответствующие геометрические построения при $n = 1$, приводящие к методу приведенных ускорений.

Статья заканчивается перечислением тематики решенных и нерешенных задач, относящихся к методу приведенных ускорений любого порядка первого и второго рода, а также и исследованием, применяя метод приведенных ускорений, полей ускорения точек пространственных механизмов, интересующих промышленность и технику, как например, некоторые сферические механизмы, кардановы сцепления пространственного кривошипно-шатунного механизма и др.

## ÉTUDE DES MÉCANISMES DANS L'ESPACE PAR LA MÉTHODE DES ACCÉLÉRATIONS RÉDUITES

### I. MÉCANISMES DANS L'ESPACE À QUATRE ORGANES

### RÉSUMÉ

Après avoir décrit dans l'introduction la place qu'on a commencé à accorder à la méthode des accélérations réduites ([$1_1$], I. I. Artobolevski, p. 8 ; [25], pp. 352—354 ; [31], N. I. Lévitski, pp. 24—25), élaborée antérieurement pour l'ensemble des mécanismes plans [14], [15], [18], et après avoir énoncé plusieurs théorèmes concernant les accélérations réduites, définies pour l'espace euclidien à trois dimensions par (3)—(6), on expose la méthode des accélérations réduites dans l'espace, d'ordre quelconque et de première espèce.

L'article conclut par une mise au point concernant la thématique des problèmes résolus et non résolus par la méthode des accélérations réduites dans l'espace, d'ordre quelconque, de première [16] et de seconde espèce [41] ainsi que par l'étude, par cette même méthode, des champs d'accélérations des points des mécanismes dans l'espace à quatre organes, qui sont des plus importants pour la technique de l'ingénieur et pour l'industrie mécanique, à savoir : mécanismes sphériques, joint universel ou à la Cardan, mécanismes à bielle-manivelle, etc.

### BIBLIOGRAFIE

1. * * * _Труды Второго Всесоюзного Совещания по основным проблемам теории машин и механизмов. Анализ и синтез механизмов_, 212; _Динамика машин_, 240; _Теория машин автоматического действия и теория точности в машиностроении и приборостроении_, 220; _Теория передач в машинах_, 174, Машгиз (1960).
2. * * * _Transactions of The Sixth Conference on Mechanisms._ Purdue University, 1960, 151.
3. * * * _Всесоюзный Съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотация докладов._ Академия Наук СССР, 1960, 244.
4. * * * _Sesiunea ştiinţifică jubiliară. Programul lucrărilor._ Academia Republicii Populare Romîne. Institutul de mecanică aplicată ,,Traian Vuia'', Bucureşti, 1960, 32.

5. * * * *Colocviul de mecanică. Programul lucrărilor.* Societatea de ştiinţe matematice şi fizice din R.P.R. Bucureşti, 1959, 16.
6. * * * *Congresso Internazionale di Meccanica teoretica ed applicata. Programma di lavori.* Stresa, 1960.
7. И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ, Н. И. ЛЕВИЦКИЙ, С. А. СЕРКУДИНОВ, *Синтез плоских механизмов.* Физматгис, 1960, 1084.
8. Р. ВЕЙЕР, *Кинематический синтез механизмов.* Пер. с нем., Я. Л. Геронимуза. Машгиз, Киев-Москва, 1959, 318.
9. И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ, *Теория механизмов для воспроизведения плоских кривых.* Академия Наук СССР, М., 1959, 255.
10. K. HAIN, *Mechanism Design in Germany, Transactions of The Fourth Conference on Mechanisms.* Purdue University, 1957, 104.
11. I. I. ARTOBOLEVSKII, *Grundlegende Probleme einer modernen Dynamik der Maschinen.* Maschinenbautechnik, **9**, *11*, 575–589 (1960).
12. F. FREUDENSTEIN, *Trends in the Kinematics of Mechanisms.* Applied Mechanics Reviews, **12**, *9*, 1–4 (1959).
13. D. MANGERON, R. BOGDAN, *Studii, cercetări şi perspective în domeniul teoriei maşinilor şi mecanismelor în Republica Populară Romînă.* Extras din Raportul prezentat la a II-a Consfătuire Unională în domeniul problemelor de bază ale teoriei maşinilor şi mecanismelor, Moscova, 24–28 martie 1958. Institutul de mecanică aplicată ,,Traian Vuia". Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *4*, 1093–1098 (1958).
14. D. MANGERON, C. DRĂGAN, VL. SVIJEVSCHI, *Eine neue Methode zum Studium der Theorie der Mechanismen und Maschinen.* Revue de Mécanique appliquée, **II**, *1*, 145–156 (1957).
15. D. MANGERON, C. DRĂGAN, *Aplicarea teoriei acceleraţiilor reduse la studiul mecanismelor spaţiale.* Buletinul Institutului politehnic din Iaşi, Serie nouă, **V** (IX), *3–4*, 255–264 (1959).
16. Д. МАНГЕРОН, *Пространственное обобщение крестов Котельникова.* Известия Академии Наук СССР, ОНТ, Механика и машиностроение, 1, 168—169 (1960).
17. C. DRĂGAN, *Asupra unor noi metode de studiu a mecanismelor şi maşinilor.* Disertaţie. Universitatea ,,Al. I. Cuza", facultatea de matematică-fizică, Iaşi, 1961.
18. Д. МАНЖЕРОН, *К графо-аналитическим методам кинематики материальных систем.* Доклады Академии Наук СССР, 102, 5, 897—898 (1955).
19. D. MANGERON, GH. CIOBANU, A. BRAIER, *Asupra extinderii formulelor lui Somov relative la acceleraţii de diferite ordine.* Revista Universităţii ,,Al. I. Cuza" şi a Institutului politehnic din Iaşi, **II**, *1–2*, 95–100 (1955).
20. А. И. ЯСЖУЛИОНИС, *Применение ,,δ" кругов к ускорениям высшего порядка.* Lietuvos Zemes Ukio Akademijos Moksliniai Darbai, V, 253–259 (1958).
21. И. С. ЗИЛЬБЕРМАН, *Применение метода приведенных ускорений к построению поворотного круга перемены.* Academia R.P.R., filiala Iaşi, Studii şi cercetări ştiinţifice, fizică şi ştiinţe tehnice **IX,** 1, 39–56 (1958).
22. N. I. MANOLESCU, *Asupra metodei asemănării din cinematica mecanismelor plane.* Comunicările ştiinţifice ale Institutului de căi ferate ,,Gh. Gheorghiu-Dej", 3–10 (1958).
23. V. MANAFU, *Generalizarea metodei figurilor auxiliare. Studiul cinematic al grupelor de clasa III ordinul 3.* Buletinul Institutului politehnic din Iaşi, Serie nouă, **II** (VI), *1–2*, 311–320 (1956).
24. N. IRIMICIUC, *Asupra unor aspecte grafice ale distribuţiei vitezelor şi acceleraţiilor punctelor unui solid rigid în mişcare generală.* Buletinul Institutului politehnic din Iaşi, Serie nouă, **IV** (VIII), *3–4*, 303–304 (1958).
25. * * * *Teoria mecanismelor şi maşinilor. Structura şi cinematica mecanismelor.* Ed. tehnică, Bucureşti, Cap. II. *Studiul cinematic al grupelor lui Assur.* 22 ; Metoda acceleraţiilor reduse, 352–354 ; (1959).
26. А. П. КОТЕЛЬНИКОВ, *Заметка по графической динамике.* Труды Московского Института Инженеров им. Баумана, 29—30, 3—27 (1937).
27. — *Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике.* Казань, 1895.
28. E. STUDY, *Geometrie der Dynamen*, Teubner, Leipzig, 1903.

29. Е. М. ДИМЕНТБЕРГ, *Определение положений пространственных механизмов, Применение метода ,,винтов" к исследованию перемещений пространственных механизмов*, Академия Наук СССР, 1950, 142.

30. D. MANGERON, *Asupra unor proprietăţi ale crucilor generalizate a lui Kotelnikov.* Programul sesiunii ştiinţifice jubiliare a Universităţii ,,Al. I. Cuza" din Iaşi, 28–30 octombrie 1960 (sub tipar)

31. Н. И. ЛЕВИЦКИЙ, *Итоги работы секции анализа и синтеза механизмов; Итоги Второго Всесоюзного совещания по основным проблемам теории машин и механизмов.* Академия Наук СССР. Институт Машиноведения, 1958, 24—29 şi 24—25.

32. BUGAIEVSKI E., BOGDAN R., PELECUDI C., *Contribuţii la clasificarea mecanismelor spaţiale.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *2* (1957).

33. R. P. VOINEA, M. C. ATANASIU, *Contribuţii la problema clasificării grupelor cinematice.*, Programul sesiunii ştiinţifice jubiliare a Universităţii ,,Al. I. Cuza" din Iaşi, 28–30 octombrie 1960, 22 (sub tipar).

34. — *Contribution à l'étude de la structure des chaînes cinématiques.* Buletinul Institutului Politehnic din Bucureşti, **XXII**, *1*, 3–51 (1960).

35. W. MEYER ZUR CAPELLEN, *Die Beschleunigungsänderung.* Ing.-Arch. *27*, 53–65 ; 73–87 (1959).

36. И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ, *Конференция по теории механизмов в Ахене.* Труды Института машиноведения, **XXI**, *81–82*, 46–54 (1960).

37. D. MANGERON, C. DRĂGAN, *Sinteza unei clase de came spaţiale cu două grade de mobilitate.* Buletinul Institutului Politehnic din Iaşi, Serie nouă, **V** (IX), *1–2*, 331–338 (1959).

38. — *Studiul problemelor de sinteză a mecanismelor cu came plane prin metoda tensorială.* Buletinul Institutului politehnic din Iaşi, Serie nouă. **IV** (VIII), 275–286, *3–4* (1958).

39. — *Итоги Второго Всесоюзного Совещания по основным проблемам теории машин и механизмов.* Академия Наук СССР, Институт Машиноведения, 49—52 (1958).

40. D. MANGERON, R. BOGDAN, *A doua Conferinţă Unională asupra problemelor fundamentale ale teoriei mecanismelor şi maşinilor. Moscova, 24–28 martie 1958.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **X**, *2*, 615–624 (1959) ; şi Buletinul Institutului politehnic din Iaşi, Serie nouă, **IV** (VIII), *1–2*, 471–478 (1958).

41. Д. С. ТАВХЕЛИДЗЕ, Д. МАНГЕРОН, *Новый класс пространственных приведенных ускорений любого порядка, применяемых в теории машин и механизмов.* Buletinul Institutului politehnice din Iaşi, Serie nouă **V** (IX), 1—2, 303—306 (1959).

42. Д. С. ТАВХЕЛИДЗЕ, *К вопросу синтеза и кинематики пространственных четырехзвенных механизмов.* Изд. Тзодна, Тбилиси, 1960, 123.

## STUDII

### TEORIA MECANISMELOR

# ASUPRA SOLICITĂRILOR ŞI DEFORMAŢIILOR LA ÎNCOVOIERE ALE CAPACELOR LA MECANISMELE BIELĂ-MANIVELĂ

DE

CHR. PELECUDI, R. C. BOGDAN şi L. CALMACIUC

1. În literatura de specialitate [1]—[7] asupra calculului capacelor de bielă se prevăd aproximaţii şi se fac unele recomandări, fără a se specifica efectul lor cantitativ. De asemenea, deformaţiile capacelor sînt neglijate fără a se cerceta influenţele lor asupra asamblării capac-corpul bielei. Într-adevăr, cînd forţa $P$ care lucrează din partea butonului de manivelă, de mărime şi direcţie variabilă, începe să lucreze asupra capacului, produce un şoc transversal urmat de o încovoiere cu deplasări radiale. Aceste deplasări radiale sînt împiedicate prin forţa de frecare, prin reacţiunea de încovoiere a şuruburilor sau, mai bine, prin praguri practicate corespunzător, prin bucşe centrate sau prin ajutarea şuruburilor în găuri de preferinţă pe o anumită lungime a lor în zona de separaţie a capacului, adică prin reacţiunea lor de forfecare. Desigur că în realitate efectele sînt mai reduse forţa $P$ nefiind concentrată într-un punct. Dar în orice caz, atît capacul cît şi şuruburile sînt supuse la solicitări variabile peste solicitările de prestrîngere iniţială micşorînd coeficientul lor de siguranţă.

2. Stabilirea eforturilor care solicită capacul la mecanismul bielă-manivelă simplu. Se prevăd următoarele ipoteze :

— Linia de asamblare a capacului la bielă este normală la axa bielei.

— Se consideră simplificator masa bielei descompusă în două mase concentrate la capul şi piciorul bielei.

— $V$ şi $H$ sînt forţele datorite butonului de manivelă, după axa şi normala la bielă. Acestea dau rezultanta $P$ care lucrează asupra capacului.

— $F$ (θ) este forţa datorită presiunii gazelor pe suprafaţa pistonului.

— $N$ şi $\mu N$ sînt reacţiunile normală şi tangenţială dintre cilindru şi piston.

— $F_A$ şi $F_B$ sînt forţele de inerţie ale sistemului bielă-piston, considerînd ipoteza simplificatoare a reparaţiei masei bielei în cele două puncte $A$ şi $B$.

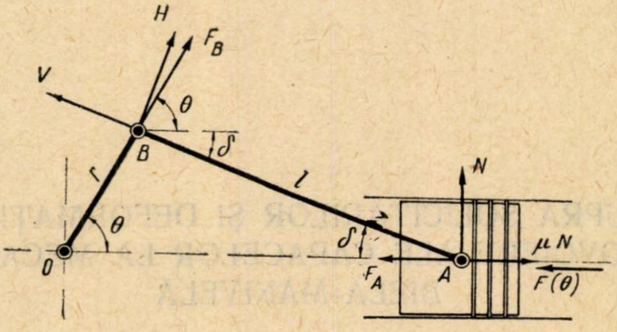


Fig. 1

Din echilibrul forţelor (fig. 1) rezultă

$$H = -F_B \sin(\theta + \delta), \tag{1}$$

$$V = F_B \cos(\theta + \delta) - \frac{(F + F_A)\cos\varphi}{\cos(\delta - \varphi)}, \tag{2}$$

unde $\varphi = \operatorname{arctg} \mu$ este unghiul de frecare, pozitiv pentru θ cuprins între 0 şi 180° şi negativ pentru θ cuprins între 180 şi 360°.

Întrucît pentru valori uzuale ale raportului $\lambda = \frac{r}{l} = \frac{1}{3} \div \frac{1}{5}$, unghiul δ variază între (−15° +15°) [3] iar unghiul de frecare poate fi luat 4°—5° ; coeficientul $\cos\varphi/\cos(\delta - \varphi)$ variază între 1 şi 1,05 şi se poate aproxima cu unitatea, mai ales că aceasta este situaţia cînd interesează maximul componentei $V$, adică la $\theta = \delta = 0$.

Deci rămîne :

$$H = -F_B \sin(\theta + \delta), \tag{3}$$

$$V = F_B \cos(\theta + \delta) - (F + F_A). \tag{4}$$

Forţele de inerţie sînt

$$F_B = m_B r \omega^2, \tag{5}$$

$$F_A = m_A \ddot{x}_A = - m_A r \omega^2 \left[\frac{\cos(\theta + \delta)}{\cos\delta} + \lambda \frac{\cos^2\theta}{\cos^3\delta}\right]. \tag{6}$$

Contribuția termenului $F(\theta)$ se poate neglija deoarece pentru a avea forța $V$ maximă pozitivă, $F(\theta)$ trebuie să fie minim ceea ce corespunde curbelor de evacuare și aspirație cînd presiunea gazelor variază între $\pm 15\%$. Rezultă :

$$H = -m_B r\omega^2 \sin(\theta + \delta), \tag{7}$$

$$V = m_B r\omega^2 \cos(\theta + \delta) + m_A r\omega^2 \left[\frac{\cos(\theta + \delta)}{\cos\delta} + \lambda \frac{\cos^2\theta}{\cos^3\delta}\right]. \tag{8}$$

Valorile unghiului $\delta$ sînt date în tabele [3], dar alura aproximativă a variației forțelor $H$ și $V$ poate fi urmărită ușor luînd în conformitate cu cazul limită $\lambda = 0$ și $\delta = 0$ adică

$$H = -m_B r\omega^2 \sin\theta, \tag{9}$$

$$V = (m_A + m_B) r\omega^2 \cos\theta\,; \tag{10}$$

$H$ urmărește aproximativ o sinusoidă iar $V$ o cosinusoidă în funcție de timp ($\theta = \omega t$). Cum pentru solicitarea capacului interesează numai valorile pozitive ale lui $V$ și pozitive și negative ale lui $H$, rezultă o variație aproximativă a lui $\theta$ cuprinsă între $-\pi/2$ și $+\pi/2$ (fig. 2).

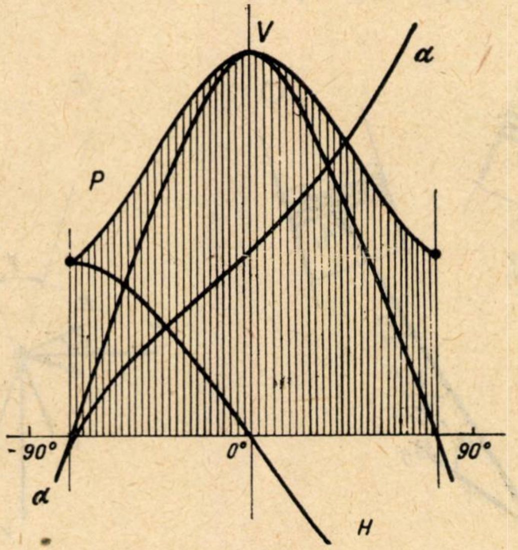


Fig. 2

Unghiul $\alpha$ sub care forța $P$ ($H$ și $V$) solicită capacul urmează îndeaproape variațiile unghiului $\theta$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{V}{H} \simeq -\left(1 + \frac{m_B}{m_A}\right)\mathrm{ctg}\theta, \quad \alpha \simeq \pi/2 + \theta, \tag{11}$$

adică $\alpha$ variază aproximativ liniar în timp (fig. 2).

Dacă linia de asamblare a capacului face unghiul $\varepsilon$ cu normala la axa bielei, interesează solicitarea pentru $\alpha$ cuprins între $\varepsilon$ și $180 + \varepsilon$.

3. Stabilirea eforturilor care solicită capacul la ambielajul cu bielă și bieletă pentru motoarele în $V$. Considerînd aceleași ipoteze simplificatoare ca mai înainte, dar luînd forțele $V$ și $H$ în lungul și după normala la axa cilindrului, pentru o bielă simplă avem

$$H = -F_B \sin\theta - (F + F_A)\frac{\sin\delta\cos\varphi}{\cos(\delta-\varphi)}, \tag{12}$$

$$V = F_B \cos\theta - (F + F_A)\frac{\cos\delta\cos\varphi}{\cos(\delta-\varphi)}, \tag{13}$$

sau cu aceeași aproximație $\cos\varphi/\cos(\delta-\varphi) \approx 1$,

$$H = -F_B \sin\theta - (F + F_A)\sin\delta, \tag{14}$$

$$V = F_B \cos\theta - (F + F_A)\cos\delta. \tag{15}$$

În cazul considerării ambelor biele legate în același punct $B$ la butonul de manivelă se compun forțele îndreptate după direcțiile (*1*) și (*2*) ale axelor cilindrilor și proiectînd pe axele $OHV$ care fac unghiul $\varepsilon$ cu normala la axa bielei principale (*1*), corespunzător liniei de asamblare a capacului la corpul bielei, se obține (fig. 3 și 4)

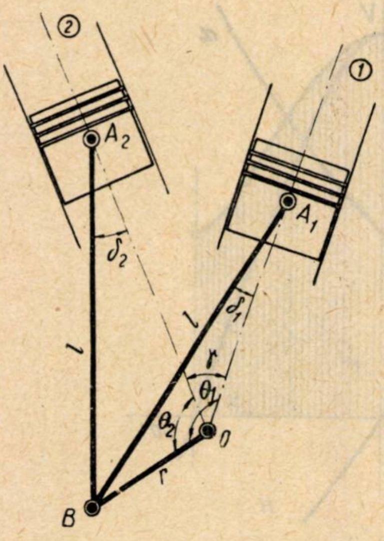


Fig. 3

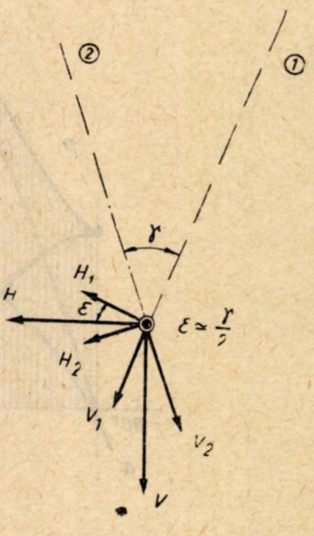


Fig. 4

$$H = H_1\cos\varepsilon + H_2\cos(\gamma-\varepsilon) + V_1\sin\varepsilon - V_2\sin(\gamma-\varepsilon) \tag{16}$$

$$V = V_1\cos\varepsilon + V_2\cos(\gamma-\varepsilon) + H_2\sin(\gamma-\varepsilon) - H_1\sin\varepsilon, \tag{17}$$

care pentru $\varepsilon = \gamma/2$, $\gamma$ fiind unghiul dintre axele cilindrilor, devin

$$H = (H_1 + H_2)\cos\gamma/2 + (V_1 - V_2)\sin\gamma/2, \tag{18}$$

$$V = (V_1 + V_2)\cos\gamma/2 + (H_2 - H_1)\sin\gamma/2, \tag{19}$$

unde

$$H_i = -m_B r\omega^2 \sin\theta_i - \left[F_i(\theta_i) - m_A r\omega^2 \left(\frac{\cos(\theta_i + \delta_i)}{\cos\delta_i} + \lambda \frac{\cos^2\theta_i}{\cos^3\delta_i}\right)\right] \sin\delta_i \quad (20)$$

$$V_i = m_B r\omega^2 \cos\theta_i - \left[F_i(\theta_i) - m_A r\omega^2 \left(\frac{\cos(\theta_i + \delta_i)}{\cos\delta_i} + \lambda \frac{\cos^2\theta_i}{\cos^3\delta_i}\right)\right] \cos\delta_i , \quad (21)$$

sau aproximativ

$$H_i = - m_B r\omega^2 \sin\theta_i \quad (22)$$

$$V_i = (m_A + m_B) r\omega^2 \cos\theta_i + m_A r\omega^2 \lambda \cos^2\theta_i - F_i(\theta_i). \quad (23)$$

Dacă se face schimbarea

$$\theta_1 = \theta + \gamma/2 \text{ și } \theta_2 = \theta - \gamma/2 \quad (24)$$

rezultă

$$H = - M_H r\omega^2 \sin\theta - m_A r\omega^2 \lambda \sin 2\theta \sin\gamma \sin\frac{\gamma}{2} +$$

$$+ [F_2(\theta_2) - F_1(\theta_1)] \sin\frac{\gamma}{2}, \quad (25)$$

$$\text{cu } M_H = 2\left(m_B + m_A \sin^2\frac{\gamma}{2}\right),$$

$$V = M_V r\omega^2 \cos\theta + 2 m_A r\omega^2 \lambda \left[\cos^2\theta \cos^2\frac{\gamma}{2} + \sin^2\theta \sin^2\frac{\gamma}{2}\right] \cos\frac{\gamma}{2} -$$

$$- [F_1(\theta_1) + F_2(\theta_2)] \cos\frac{\gamma}{2},$$

$$\text{cu } M_V = 2\left(m_B + m_A \cos^2\frac{\gamma}{2}\right). \quad (26)$$

Situîndu-ne pentru biela principală în perioadele de evacuare-aspirație $F_1(\theta_1) \simeq 0$ în timp ce bieleta secundară este supusă perioadelor corespunzătoare de compresie-detentă, avem $F_2(\theta_2) = p . A$ unde $p = p_a(V_a/V)^n$ este presiunea gazelor iar $A$ suprafața pistonului.

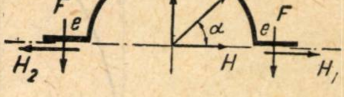


Fig. 5

4. Deformațiile capacului bielei. Dacă pe lîngă rezultanta $P$ a forțelor $H$ și $V$ produse de butonul de manivelă, luăm $F$ forțele de reacțiune prin șuruburi, iar $H_1$ și $H_2$ forțele de sprijin între bielă și capac prin intermediul pragurilor, șuruburilor sau frecărilor (fig. 5) avem

$$H_2 - H_1 = H = P\cos\alpha, \quad (27)$$

$$2F = V = P\sin\alpha, \quad (28)$$

deoarece deși atît mărimea forței $P$ cît și direcția sa $\alpha$ variază în timp, așa cum s-a văzut mai sus, dar variația fiind lentă se pot considera deformațiile statice.

Momentele încovoietoare pe porţiunile $(1-P)$ şi $(P-2)$ sînt

$$M_1 = (H_1 \sin\psi + F\cos\psi)\, r - F\,(e + r), \tag{29}$$

$$M_2 = (H_2 \sin\psi - F\cos\psi)\, r - F\,(e + r) \tag{30}$$

şi aplicînd teorema Castigliano, deplasarea neîmpiedicată a reazemului (*1*) va fi

$$u_1 = \frac{\partial L}{\partial H_1} = \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial H_1} \cdot r d\psi, \tag{31}$$

unde integrînd pe porţiuni $0$ — $\alpha$ şi $\alpha$ — $\pi$, în cazul rigidităţii de încovoiere constante, obţinem

$$u_1 = \frac{r^3}{2EI}\left[\pi H_2 - H\left(\alpha + \mathrm{tg}\alpha\left(1 + \frac{2e}{r}\right)\right)\right] \text{ şi } u_2 = 0. \tag{32}$$

Se capătă o formulă analogă pentru deplasarea reazemului (*2*) cînd primul este fix.

5. Diagramele deformaţiilor şi eforturilor din regiunea planului de separaţie. După modul de lucru al forţelor şi deformaţiilor se pot deosebi mai multe cazuri :

*a*) Deplasarea laterală împiedicată prin praguri într-un singur sens.

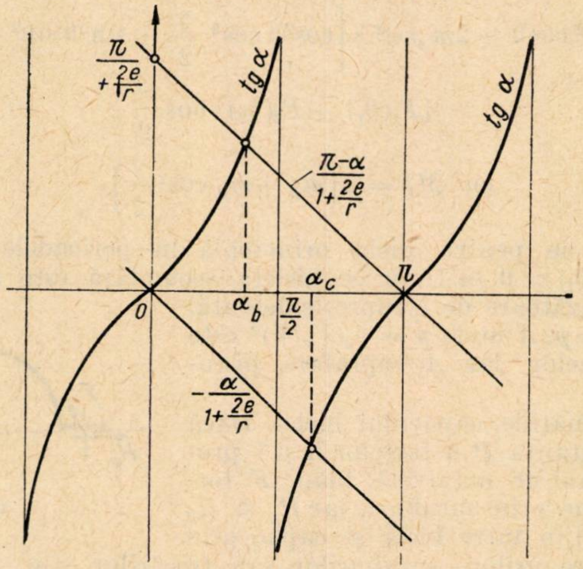


Fig. 6

Acest caz cuprinde mai multe perioade (fig. 6 şi 7).

$u_2 = 0$ împiedicarea deplasării în reazemul (*2*),

$H_1 = 0$ deplasarea liberă în reazemul (*1*).

Deci

$$H_2 = H \tag{33}$$

şi

$$u_1 = \frac{r^3}{2EI}\left[\pi - \alpha - \operatorname{tg}\alpha\left(1 + \frac{2e}{r}\right)\right] H(\alpha). \tag{34}$$

În momentul

$$\alpha = 0 ; \quad u_{1\,\max} = \frac{\pi r^3}{2EI} H(0) ; \tag{35}$$

iar pentru

$$\operatorname{tg}\alpha_b = \frac{\pi - \alpha_b}{1 + \frac{2e}{r}} \text{ cu } \alpha_b < \pi/2 \text{ avem } u_1 = 0. \tag{36}$$

— În continuare ambele deplasări sînt nule. Deci

$$u_1 = u_2 = 0 \text{ şi}$$

$$H_2 = \frac{H}{\pi}\left[\alpha + \operatorname{tg}\alpha\left(1 + \frac{2e}{r}\right)\right], \tag{37}$$

$$H_1 = \frac{H}{\pi}\left[\alpha + \operatorname{tg}\alpha\left(1 + \frac{2e}{r}\right) - \pi\right]. \tag{38}$$

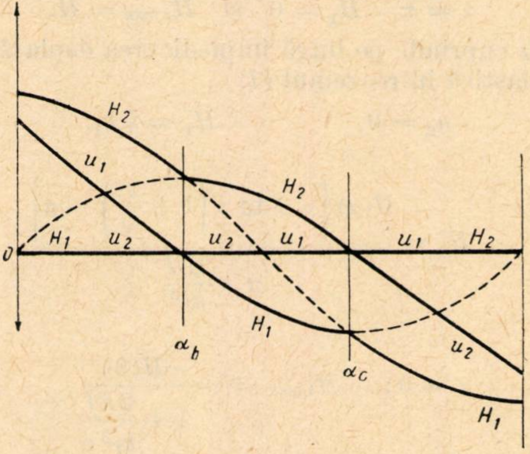


Fig. 7

Relaţiile acestea se păstrează pînă se anulează $H_2 = 0$ adică la :

$$\operatorname{tg}\alpha_c = -\frac{\alpha_c}{1 + \frac{2e}{r}} \text{ cu } \alpha_c > \pi/2. \tag{39}$$

— De aici mai departe situaţia se repetă în sens invers $u_1 = 0$ şi $H_2 = 0$.

Deci

$$H_1 = -H, \tag{40}$$

$$u_2 = -\frac{r^3}{2EI}\left[\alpha + \operatorname{tg}\alpha\left(1+\frac{2e}{r}\right)\right]H(\alpha), \tag{41}$$

care pentru $\alpha = \pi$ devine $u_{2\,\max} = -\dfrac{\pi r^3}{2EI}\cdot H(\pi)$. (42)

*b*) În cazul al doilea se presupun împiedicate deplasările în orice moment, într-un fel oarecare, în ambele reazeme

$$u_1 = u_2 = 0.$$

Deci

$$H_2 = \frac{H(\alpha)}{\pi}\left[\alpha + \operatorname{tg}\alpha\left(1+\frac{2e}{r}\right)\right], \tag{43}$$

$$H_1 = \frac{H(\alpha)}{\pi}\left[\alpha + \operatorname{tg}\alpha\left(1+\frac{2e}{r}\right) - \pi\right], \tag{44}$$

rezultă pentru

$$\alpha = 0, \quad H_{1\,\max} = -H \quad \text{și} \quad H_2 = 0,$$

iar pentru

$$\alpha = \pi, \quad H_1 = 0 \quad \text{și} \quad H_{2\,\max} = H.$$

*c*) Acest caz cuprinde pe lîngă împiedicarea deplasării din reazemul (*2*) o reacțiune elastică în reazemul (*1*)

$$u_2 = 0, \qquad -H_1 = k\,u_1.$$

Deci

$$H_1 = \frac{H(\alpha)\left[\alpha + \operatorname{tg}\alpha\left(1+\frac{2e}{r}\right) - \pi\right]}{\pi + \frac{2EI}{kr^3}} \tag{45}$$

și la

$$\alpha = 0\,; \qquad H_{1\,\max} = -\frac{H(\theta)}{1 + \frac{2EI}{kr^3\pi}}. \tag{46}$$

*d*) În ultimul caz se consideră reacțiunea elastică din reazemul (*1*) însoțită de o forță constantă datorită eventual frecării

$$u_2 = 0, \quad -H_1 = H_0 + ku_1. \tag{47}$$

Deci

$$H_1 = \frac{H(\alpha)\left[\alpha + \operatorname{tg}\alpha\left(1+\frac{2e}{r}\right) - \pi\right]}{\pi + \frac{2EI}{kr^2}} - \frac{H_0}{1 + \frac{kr^3\pi}{2EI}} \tag{48}$$

şi

$$u_1 = -\frac{H(\alpha)\left[\alpha + \operatorname{tg}\alpha\left(1 + \frac{2e}{r}\right) - \pi\right] + \pi H_0}{\pi k + \frac{2EI}{r^3}}. \tag{49}$$

În conformitate cu situaţiile tratate mai sus se produc în şuruburile de asamblare dintre capac şi corpul bielei diverse eforturi, după cum şuruburile răspund solicitărilor date de capac prin reacţiunea elastică de încovoiere, prin reacţiunea de forfecare, prin frecarea produsă de prestrîngere etc. Solicitările suplimentare ale şuruburilor peste prestrîngerea iniţială pot fi evitate sau micşorate considerabil prin întrebuinţarea pragurilor corespunzătoare, a bucşelor sau a şuruburilor ajustate cu toleranţe strînse.

*Primită la redacţie la 28 iunie 1961.*

## О НАГРУЗКАХ И ДЕФОРМАЦИЯХ ИЗГИБА ГОЛОВОК КРИВОШИПНО-ШАТУННЫХ МЕХАНИЗМОВ

### РЕЗЮМЕ

В работе рассматриваются нагрузки и деформации шатунных головок, для которых в специальной литературе предусматриваются приближения или некоторые рекомендации, без указания их количественного эффекта.

После вычисления усилия, вызванного ступицей кривошипа в случае простого шатуна и сочленения шатуна с боковым шатуном, рассматриваются свободные деформации головки и устанавливаются окончательно усилия, действующие на соединительные болты по их ответу (упругой реакцией изгиба, реакцией сдвига и пр.). Эти усилия значительно уменьшаются применением порогов, втулок или болтов обработанных с малыми допусками.

## ÜBER DIE BIEGEBELASTUNGEN UND-VERFORMUNGEN DER DECKEL BEI KURBELGETRIEBEN

### ZUSAMMENFASSUNG

Es werden die Belastungen und Verformungen der Koppeldeckel behandelt, für welche die Fachliteratur Näherungen vorschlägt oder Lösungen empfiehlt, ohne deren quantitative Wirkungen anzugeben.

Nach Berechnung der Belastung durch den Kurbelknopf im Falle der einfachen Koppel und des Getriebes mit zwei Koppeln werden die

freien Verformungen des Deckels untersucht und schließlich die Belastungen in den Verbindungsschrauben festgelegt, je nachdem diese durch elastische Biegung, Scherung usw. reagieren. Diese Belastungen werden in erheblichem Maße durch Verwendung von Schwellen, oder Schrauben mit engen Toleranzen herabgesetzt.

## BIBLIOGRAFIE

1. G. MANEA *Organe de maşini*, **I** şi **II**. Ed. tehnică, Bucureşti, 1958.
2. M. BĂNĂRESCU, *Motoare cu ardere internă*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1956.
3. I. BĂRĂNESCU, *Motoare cu ardere internă*, **I** şi **II**, Bucureşti, 1957 (litografiat).
4. F. KIMELMAN, *Calculul organelor de maşini supuse la solicitări variabile*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1951.
5. Ф. КИМЕЛМАН, *Детали машин*, I, Машгиз, Москва, 1953.
6. — *Машиностроение*, I, Машгиз, Москва, 1947.
7. FILONENKO-BORODICI, *Rezistenţa materialelor*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1952.

## TEORIA MECANISMELOR

# STUDIU ASUPRA BLOCULUI CONIC DINȚAT COMPUS DIN ROȚI DINȚATE CONICO-EVOLVENTICE

DE

SZEKELY IMRE[1]

Blocul conic dințat (fig. 1) este elementul cel mai important al variatorului de viteză cu roți dințate care permite trecerea de la o treaptă la alta în timpul mersului și sub sarcină [1]. El este alcătuit din roți dințate conico-evolventice (la care o parte din dinți este eliminată prin frezare) rigid legate între ele.

Roțile dințate conico-evolventice în aparență seamănă cu roțile dințate conice obișnuite, dar în esență diferă de ele prin faptul că în fiecare secțiune perpendiculară pe axă ele au aceeași înălțime a dinților și același modul, iar flancurile dintelui au forma unor suprafețe elicoidalo-evolventice, una ,,dreaptă'', iar alta ,,stîngă''.

Deducerea ecuațiilor suprafeței flancului dintelui se va face pornind de la principiul de generare cinematică al flancului dintelui în evolventă, care are loc în timpul angrenării de prelucrare. În acest caz mișcarea principală va fi sub un unghi $\delta$ față de axa roții de prelucrat, iar mișcarea de rostogolire va fi aceeași ca în cazul tăierii roților cilindrice, obișnuite, adică planul de rulare $E_r$ (fig. 2) al cremalierei se rostogolește fără alunecare pe cilindrul de divizare al semifabricatului (raza $R_d$).

Dacă roata dințată se taie cu cuțit pieptene astfel ca mișcarea principală (de dute-vino) să aibă loc sub un unghi $\delta$ față de axa semifabricatului atunci cremalierea de referință în timpul unei curse se va apropia, iar în timpul celeilalte se va îndepărta de această axă. Cu alte cuvinte, distanța dintre dreapta medie a cremalierei și cercul de divizare a roții în fiecare secțiune perpendiculară pe axă va fi o mărime variabilă, adică în acest caz roata se taie astfel ca în fiecare secțiune frontală deplasarea de profil va fi diferită. Pe figura 2 este arătată cremaliera de referință în cîteva secțiuni frontale. În secțiunea I deplasarea de profil are valoarea minimă, în secțiunea II deplasarea de profil este egală cu zero, în secțiunea III ea are o valoare intermediară, iar în IV are valoarea maximă.

---

[1] Institutul politehnic, Cluj.

Pentru găsirea ecuațiilor suprafeței elicoidalo-evolventice alegem următoarele sisteme de referințe carteziene ortogonale :

— Sistemul fix de axe (rigid legat de semifabricat) $O_2xyw$ este astfel încît planul $O_2xy$ coincide cu secțiunea frontală în care deplasarea de profil are valoarea minimă, $O_2$ fiind pe axa cilindrului de divizare, iar axa $O_2x$ trece prin punctul $A_0$ (unde $P_1A_0$ este jumătatea grosimii dintelui măsurat pe cilindrul de divizare), iar $O_2w$ coincide cu axa roții.

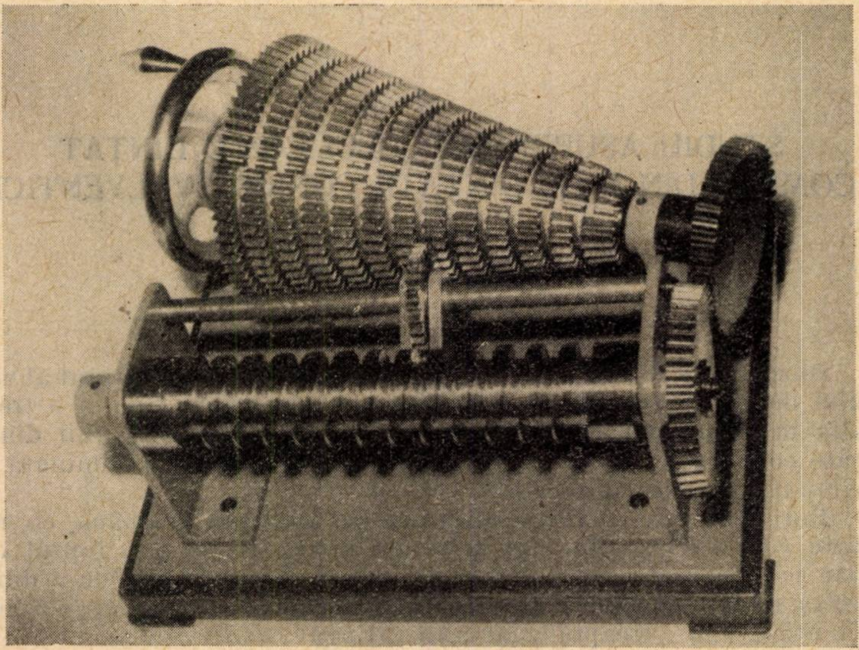


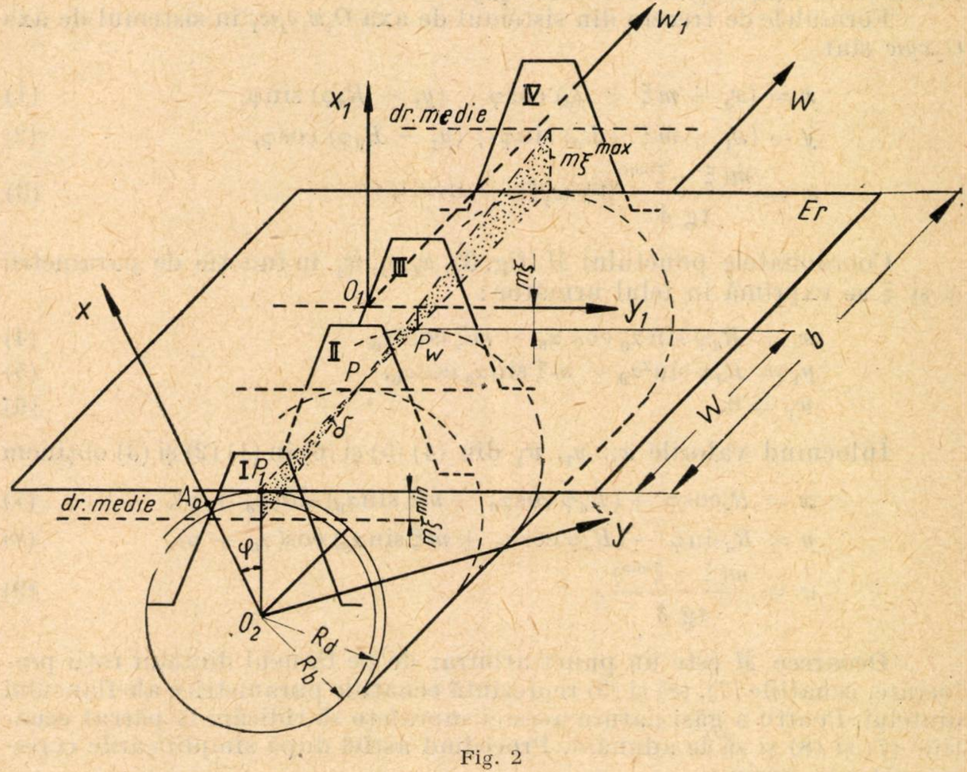
Fig. 1

— Sistemul mobil de axe $O_1x_1y_1w_1$ (rigid legat de sculă) cu origine la intersecția dreptei medii cu muchia cremalierei de referință. Axa $O_1x$ este perpendiculară pe planul $E_r$, iar $O_1w_1$ este paralelă cu axa semifabricatului.

Alegem ca parametri unghiul de rulare a sculei $\varphi$ sau unghiul de rotație a roții în timpul prelucrării (aceste două sînt egale) și coeficientul de deplasare $\xi$.

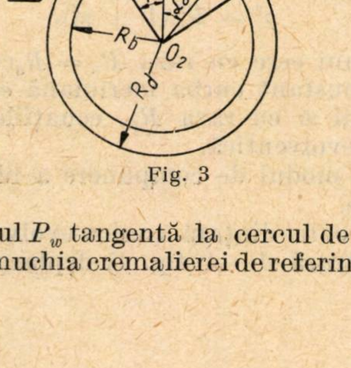
Să studiem o secțiune arbitrară a angrenajului de prelucrare (fig. 2) de exemplu aceea, care se află la distanța $w$ de origina $O_2$ și în care deplasarea de profil e egală cu $m\xi$. În această secțiune (fig. 3) poziția sculei corespunde unei rostogoliri a dreptei medii pe cercul de divizare cu un arc $A_0P_1$.

Pentru determinarea punctului $M$ de pe muchia cremalierei de referință, care la momentul dat intră în contact cu profilul dintelui roții, se



W1
X1
dr. medie
IV
W
mξ max
Er
III
O1
x
y1
ξm
II
Pw
P
b
δ
W
I
P1
A0
dr. medie
mξ min
y
φ
O2
Rd
Rb

Fig. 2



x1
x
α0
ξm
O1
y1
A
Pw
y
A0
N
φ
α0
Rb
O2
Rd

Fig. 3

duce o dreaptă prin polul $P_w$ tangentă la cercul de bază cu raza $R_b$. Intersecția acestei drepte cu muchia cremalierei de referință va determina punctul căutat. Poziția acestui punct de contact situat pe profilul dintelui roții se determină prin transcrierea coordonatelor punctului $M$ din sistemul de referință $O_1x_1y_1w_1$, în sistemul $O_2xyw$.

Formulele de trecere din sistemul de axa $O_1x_1y_1w_1$ în sistemul de axe $O_2xyw$ sînt

$$x = (x_1 + m\xi + R_d)\cos\varphi - (y_1 - R_d\varphi)\sin\varphi, \tag{1}$$

$$y = (x_1 + m\xi + R_d)\sin\varphi + (y_1 - R_d\varphi)\cos\varphi, \tag{2}$$

$$w = \frac{m(\xi - \xi^{\min})}{\operatorname{tg}\delta} + w_1. \tag{3}$$

Coordonatele punctului $M$ (fig. 3), $x_1, y_1, w_1$, în funcție de parametrii $\varphi$ și $\xi$ se exprimă în felul următor :

$$x_1 = R_d\varphi \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 - m\xi\cos^2\alpha_0, \tag{4}$$

$$y_1 = R_d\varphi\sin^2\alpha_0 - m\xi\sin\alpha_0\cos\alpha_0, \tag{5}$$

$$w_1 = 0. \tag{6}$$

Înlocuind valorile $x_1$, $y_1$, $w_1$ din (4) (5) și (6) în (1) (2) și (3) obținem

$$x = R_d\cos\varphi + (R_d\varphi\cos\alpha_0 + m\xi\sin\alpha_0)\sin(\alpha_0 + \varphi), \tag{7}$$

$$y = R_d\sin\varphi - (R_d\varphi\cos\alpha_0 + m\xi\sin\alpha_0)\cos(\alpha_0 + \varphi), \tag{8}$$

$$w = \frac{m(\xi - \xi^{\min})}{\operatorname{tg}\delta}. \tag{9}$$

Deoarece $M$ este un punct arbitrar de pe flancul dintelui roții prelucrate, ecuațiile (7), (8) și (9) reprezintă ecuațiile parametrice ale flancului dintelui. Pentru a găsi natura acestei suprafețe să ridicăm la pătrat ecuațiile (7) și (8) și să le adunăm. Procedînd astfel după simplificările corespunzătoare avem :

$$x^2 + y^2 = R_d^2\cos^2\alpha_0 + R_d^2\cos^2\alpha_0\left(\operatorname{tg}\alpha_0 + \varphi + \frac{1}{R_d}\, m\xi\operatorname{tg}\alpha_0\right)^2.$$

Notînd

$$R_d\cos\alpha_0 = R_b\,;\quad \varphi_1 = \varphi + \operatorname{tg}\alpha_0 + \frac{1}{R_d}\, m\xi\operatorname{tg}\alpha_0\,;\quad x^2 + y^2 = \rho^2,$$

obținem ecuația

$$\rho^2 = R_b^2(1 + \varphi_1^2),$$

care este evolventa unui cerc cu raza $R_b = R_d\cos\alpha_0$.

Cum pentru $w$ constant curba meridiană este evolventa unui cerc cu centrul pe axa roții și cu raza $R_b$, ecuațiile (7) (8) și (9) reprezintă o suprafață elicoidalo-evolventică.

Să arătăm acum modul de compunere a blocului conic dințat din roți conico-evolventice.

Presupunem că roata dințată conico-evolventică este tăiată astfel că într-o secțiune arbitrară $A-A$ (fig. 4) deplasarea de profil este egală cu zero și că ea se schimbă proporțional pe lățimea roții, adică după dreapta $K-K$ înclinată cu un unghi $\delta$ față de generatoarea cilindrului de divizare. În acest caz dreapta $K-K$ va fi tangentă la toate cercurile ale căror raze sînt egale cu distanța de la axa roții pînă la dreapta medie a cremalierei de referință. Fie $\rho$ razele acestor cercuri. Numim aceste cercuri cercuri de deplasare, iar locul lor geometric con de deplasare. Unghiul lui la vîrf este $2\delta$.

Să luăm două sisteme de referință $Ow\rho$ și $O'w_0\xi$. Axele $O\rho$ și $O'\xi$ sînt situate în acea secțiune perpendiculară pe axă unde deplasarea de profil are valoarea minimă (nu neapărat negativă cum este arătată pe fig. 4). Axa $w$ coincide cu axa roții, iar $w_0$ este paralelă cu ea și situată într-un plan tangent la cilindrul de divizare.

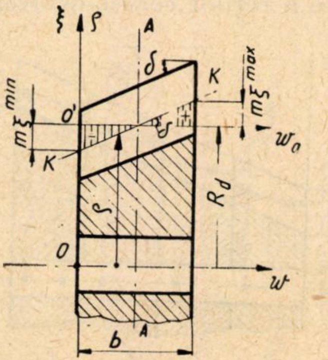


Fig. 4

— La o astfel de alegere a axelor de coordonate valoarea deplasării de profil într-o secțiune arbitrară este

$$m\xi = m\xi^{\min} + w_0 \operatorname{tg}\delta, \tag{10}$$

unde

$\xi$ — valoarea curentă a coeficientului de deplasare de profil,

$\xi^{\min}$ — valoarea minimă a coeficientului de deplasare de profil, coeficientul $\xi^{\min}$ la fel ca și deplasarea curentă, poate fi pozitiv, negativ sau egal cu zero. Din această cauză în toate expresiile este necesar să se ia în considerare semnul dinaintea lui $\xi^{\min}$.

$\delta$ — unghiul de înclinare a dreptei $K-K$.

Ecuația dreptei $K-K$ în sistemul de axe $\rho ow$ va fi :

$$\rho = m\xi^{\min} + R_d + w \operatorname{tg}\delta.$$

Exprimînd raza cercului de divizare $R_d$ în funcție de modulul $m$ și numărul de dinți $z$ avem

$$\rho = m\left(\xi^{\min} + \frac{z}{2}\right) + w \operatorname{tg}\delta. \tag{11}$$

Blocul conic dințat se formează din $n$ roți conico-evolventice cu numere diferite de dinți ($z_1, z_2, \ldots z_k \ldots z_n$) (fig. 5).

Pentru ca blocul conic dințat să aibă o construcție corectă este necesar ca roțile conico-evolventice, din care se compune acest bloc, să îndeplinească următoarele condiții :

— Unghiurile la vîrf ale conurilor de deplasare a tuturor roților cu numerele de dinți $(z_1, z_2 \ldots z_n)$ trebuie să fie egale între ele $(2\delta_1 = 2\delta_2 = = \ldots 2\delta_n)$. Cu alte cuvinte razele cercurilor de deplasare a fiecărei roți, din care se compune blocul conic dințat, trebuie să varieze după aceeași dreaptă $K-K$. Dacă se ține seamă de această condiție, atunci și razele interioare ale roților se vor schimba tot după dreapta $K-K$. Aceasta este o urmare a modului de prelucrare a roților conico-evolventice.

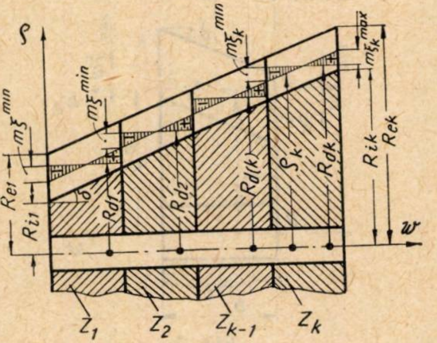


Fig. 5

— În planul de unire a două roți vecine razele cercurilor de deplasare trebuie să fie egale între ele.

Legea de variație a razelor cercurilor exterioare a roților conico-evolventice nu este determinată de modul de prelucrare, ea poate fi aleasă în mod arbitrar sau în funcție de condițiile concrete impuse. În lucrarea de față se consideră că razele cercurilor exterioare se schimbă după aceeași dreaptă ca și razele cercurilor de deplasare și a cercurilor interioare.

Mărimea razei cercului de deplasare $\rho_K$ (fig. 5) dintr-o secțiune arbitrară (care se găsește în limitele roții cu numărul $Z_K$ de dinți) se determină din relația :

$$\rho_K = m\left(\xi^{\min} + \frac{z_K}{2}\right) + [w - (K-1)b]\,\mathrm{tg}\,\delta, \tag{12}$$

unde

$K$ — numărul de ordine al roților,
$b$ — lățimea roților conico-evolventice.

Dacă în ecuația (12) se presupune că $\rho_K = \frac{mz_K}{2}$, atunci se determină poziția $w_K^0$ acelei secțiuni în limitele roții cu numărul $z_K$ de dinți, în care deplasarea de profil este egală cu zero, adică acea unică secțiune a roții respective în care ea nu este corijată

$$w_K^0 = (K-1)b - \frac{m\,\xi_K^{\min}}{\mathrm{tg}\,\delta}\,. \tag{13}$$

Pe baza schemei din figura 5 se determină valoarea deplasării maxime de profil a roții $K$ în funcție de poziția secțiunii necorijate $\omega_K^0$ în felul următor

$$m\xi_K^{\max} = (Kb - \omega_k^0)\,\mathrm{tg}\,\delta. \tag{14}$$

Înlocuind (13) în (14) obținem:

$$m\,(\xi_K^{\max} - \xi_K^{\min}) = b\,\mathrm{tg}\,\delta. \tag{15}$$

Raza cercului de deplasare $\rho_K$ a roții posterioare cu numărul $z_K$ de dinți în secțiunea de unire a acesteia cu roata vecină anterioară cu numărul $z_{K-1}$ de dinți se determină din ecuația (12) ținînd seama că $w = (K-1)b$

$$\rho = m\left(\xi_K^{\min} + \frac{z_K}{2}\right). \tag{16}$$

Raza cercului de deplasare $\rho_{K-1}$ a roții anterioare cu numărul de dinți $Z_{K-1}$ în secțiunea de unire a acesteia cu roata vecină posterioară cu numărul de dinți $z_K$ se determină tot din ecuația (12) ținînd seama că $w = Kb$

$$\rho_{K-1} = m\left(\xi_{K-1}^{\min} + \frac{z_{K-1}}{2}\right) + b\,\mathrm{tg}\,\delta. \tag{17}$$

În baza condiției de compunere corectă a blocului conic enunțată mai sus, trebuie ca $\rho_K = \rho_{K-1}$ deci egalînd relațiile (16) și (17) obținem

$$z_K - z_{K-1} = 2\,(\xi_{K-1}^{\min} - \xi_K^{\min}) + \frac{2b}{m}\,\mathrm{tg}\,\delta. \tag{18}$$

Din expresia (18) rezultă că diferența dintre numărul de dinți a două roți vecine depinde de diferența dintre deplasările minime de profil ale acestor roți.

Dacă se pune condiția $\xi_{K-1}^{\min} = \xi_K^{\min}$ atunci relația (18) devine

$$z_K - z_{K-1} = \frac{2b}{m}\,\mathrm{tg}\,\delta. \tag{19}$$

Din această relație reiese că dacă deplasările minime de profil ale roților vecine sînt egale, atunci diferența dintre numărul de dinți al acestor roți este o mărime constantă.

Menținînd condiția (19) se pot distinge două cazuri particulare

a) $$\xi_{K-1}^{\min} = \xi_K^{\min} = 0. \tag{20}$$

Înlocuind (20) în (15) avem

$$\xi_K^{\max} = \frac{b\,\mathrm{tg}\,\delta}{m}. \tag{21}$$

În acest caz toate roțile conico-evolventice, din care se formează blocul conic dințat, sînt tăiate numai cu deplasări pozitive de profil a căror valoare se determină din relația (21).

b) $$\xi_{K-1}^{\min} = \xi_K^{\min} = -\frac{b\,\mathrm{tg}\,\delta}{m}. \tag{22}$$

Înlocuind (22) în (15) avem

$$\xi_K^{\max} = 0. \tag{23}$$

În acest caz toate roțile conico-evolventice, din care se formează blocul conic dințat, sînt tăiate numai cu deplasări negative de profil a căror valoare se determină din relația (22).

Presupunem în continuare că $\xi_{K-1}^{\min} \neq \xi_K^{\min}$ și că blocul conic dințat este format din patru roți. Valorile minime ale coeficientului de deplasare de profil la aceste roți se aleg așa cum urmează

$$\left.\begin{aligned} \xi_1^{\min} &= -\frac{b\,\mathrm{tg}\,\delta}{m} \\ \xi_2^{\min} &= 0 \\ \xi_3^{\min} &= -\frac{b\,\mathrm{tg}\,\delta}{m} \\ \xi_4^{\min} &= -\frac{b\,\mathrm{tg}\,\delta}{2m}. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Dacă toate roțile au aceeași lățime, atunci înlocuind egalitățile din (24) succesiv în (18) găsim următoarele valori pentru diferența dintre numărul de dinți a două roți vecine :

$$\left.\begin{aligned} z_2 - z_1 &= 0 \\ z_3 - z_2 &= \frac{4b}{m}\,\mathrm{tg}\,\delta \\ z_4 - z_3 &= \frac{b}{m}\,\mathrm{tg}\,\delta. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

În figura 6 se arată un asemenea bloc conic dințat format din roți conico-evolventice tăiate cu deplasări pozitive și negative de profil.

Pentru calculul blocului conic dințat sînt utile următoarele considerații :
din (19) și (15) avem

$$\frac{z_K - z_{K-1}}{2} = \xi_K^{\max} - \xi_K^{\min} \tag{26}$$

ceea ce ne arată că diferența dintre numerele de dinți a două roți vecine este determinată de valoarea maximă și minimă a coeficientului de deplasare de profil. Cu alte cuvinte valoarea maximă şi minimă a diferenţei dintre numerele de dinţi este limitată de condiţiile de subtăiere şi ascuţire a dinţilor. Luînd în considerare aceste condiţii se recomandă alegerea valorilor maxime şi minime ale coeficientului de deplasare de profil în următoarele limite

$$0 \leqslant \xi_K^{\max} \leqslant 1, \tag{27}$$

$$-1 \leqslant \xi_K^{\min} \leqslant 0. \tag{28}$$

Cu aceste condiţii diferenţa dintre numerele de dinţi pe baza expresiei (26) se va determina din

$$0 \leqslant z_K - z_{K-1} \leqslant 4. \tag{29}$$

Avînd în vedere că fiecare roată conico-evolventică poate să aibă numai numere întregi de dinţi, reiese că diferenţa dintre numerele de dinţi a două roţi vecine poate să aibă următoarele valori : 1, 2, 3, 4.

În tabela 1 se dau (pe baza formulei (19)) valorile $\frac{b}{m}$ corespunzătoare diferitelor unghiuri $\delta$ şi diferenţelor dintre numerele de dinţi de la 1 pînă la 4. Pe baza acestui tabel s-a construit graficul din figura 7 pentru diferitele unghiuri $\delta$. Din aceste grafice reiese că raportul $\frac{b}{m}$ este proporţional cu diferenţa dintre numerele de dinţi şi invers proporţională cu tangenta unghiului $\delta$.

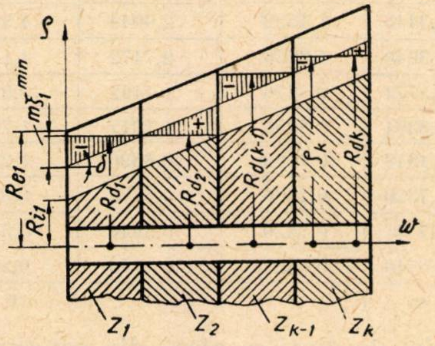


Fig. 6

Raportul $\frac{b}{m}$ se determină în aşa fel ca blocul conic dinţat să aibă lungime minimă, durabilitate optimă şi ca trecerea de la o treaptă la alta să fie posibilă în timpul mersului şi sub sarcină. Luînd în considerare toate aceste condiţii se recomandă următoarele limite :

$$6 \leqslant \frac{b}{m} \leqslant 10. \tag{30}$$

*Tabela 1*

| Nr. | $\delta$ grad | tg $\delta$ | $z_K - z_{K-1} = 1$ | $z_K - z_{K-1} = 2$ | $z_K - z_{K-1} = 3$ | $z_K - z_{K-1} = 4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $\frac{b}{m}$ | | | |
| 1 | 5 | 0,0875 | 5,7142 | 11,4280 | 17,1420 | 22,8570 |
| 2 | 6 | 0,1051 | 4,7573 | 9,5147 | 14,2720 | 19,0290 |
| 3 | 7 | 0,1228 | 4,0716 | 8,1433 | 12,2149 | 16,2866 |
| 4 | 8 | 0,1405 | 3,5587 | 7,1174 | 10,6760 | 14,2348 |
| 5 | 9 | 0,1584 | 3,1565 | 6,3131 | 9,4696 | 12,6262 |
| 6 | 10 | 0,1763 | 2,8360 | 5,6721 | 8,5082 | 11,3440 |
| 7 | 12 | 0,2126 | 2,3518 | 4,7036 | 7,0555 | 9,4073 |
| 8 | 14 | 0,2493 | 2,0056 | 4,0112 | 6,0168 | 8,0224 |
| 9 | 15 | 0,2679 | 1,8663 | 3,7327 | 5,5991 | 7,4654 |
| 10 | 16 | 0,2867 | 1,7439 | 3,4879 | 5,2319 | 6,9759 |
| 11 | 17 | 0,3057 | 1,6355 | 3,2711 | 4,9067 | 6,5423 |
| 12 | 18 | 0,3249 | 1,5389 | 3,0778 | 4,6168 | 6,1557 |
| 13 | 19 | 0,3443 | 1,4522 | 2,9044 | 4,3566 | 5,8088 |
| 14 | 20 | 0,3640 | 1,3736 | 2,7472 | 4,1483 | 5,4945 |
| 15 | 30 | 0,5774 | 0,8676 | 1,7492 | 2,5976 | 3,4811 |
| 16 | 40 | 0,8391 | 0,5958 | 1,1917 | 1,7876 | 2,3835 |
| 17 | 50 | 1,1918 | 0,4193 | 0,8390 | 1,2586 | 1,6781 |
| 18 | 60 | 1,7320 | 0,2886 | 0,5773 | 0,8660 | 1,1547 |
| 19 | 70 | 2,747 | 0,1820 | 0,3640 | 0,5460 | 0,7280 |
| 20 | 80 | 5,6710 | 0,08816 | 0,1763 | 0,2645 | 0,3526 |
| 21 | 90 | ∞ | 0 | 0 | 0 | 0 |

Numărul minim de dinți se alege din condiția de subtăiere și se recomandă $Z_{\min} = 20$.

*Determinarea numărului de trepte și a domeniului de reglare.* Lungimea blocului conic dințat $L$ se determină din figura 8 și avem

$$L = \frac{R_{e\,\max} - R_{e\,\min}}{\operatorname{tg} \delta}, \tag{31}$$

unde

$R_{e\,\max}$, $R_{e\,\min}$ — sînt razele cercurilor exterioare maxim și minim ale blocului conic dințat.

Întrebuințînd formulele cunoscute din teoria roților dințate [2] avem

$$R_{e\,\max} = m\left(\frac{z_{\max}}{2} + y + \xi_n^{\max} - \psi\right), \tag{32}$$

$$R_{e\,\min} = m\left(\frac{z_{\min}}{2} + y + \xi_n^{\min} - \psi\right), \tag{33}$$

unde

$z_{\max}$, $z_{\min}$ — sînt numărul de dinți ai roții celei mai mari și respectiv celei mai mici a blocului conic dințat.

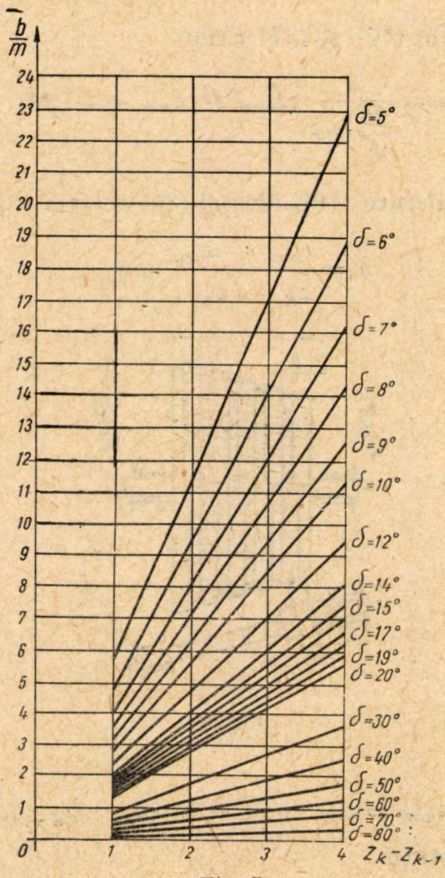


Fig. 7

Înlocuind (32) și (33) în (31) avem

$$L = \frac{m}{2\,\mathrm{tg}\,\delta}\left[z_{\max} - z_{\min} + 2(\xi_n^{\max} - \xi_n^{\min})\right]. \tag{34}$$

Considerînd că diferența dintre numerele de dinți a două roți vecine este o mărime constantă urmează că

$$\xi_n^{\max} = -\xi_n^{\min} = \xi_K^{\max} = -\xi_K^{\min} \tag{35}$$

și ecuația (34) va fi

$$L = \frac{m}{2\mathrm{tg}\ \delta}\left(z_{\max} - z_{\min} + 4\ \xi_K^{\max}\right). \tag{36}$$

Lungimea blocului conic dințat exprimat prin numărul de trepte $n$ și lățimea roții $b$ va fi

$$L = n \cdot b. \tag{37}$$

Egalînd relațiile (36) și (37) avem

$$n = \frac{1}{\frac{2b}{m}\operatorname{tg}\delta}\left(z_{\max} - z_{\min} + 4\,\xi_K^{\max}\right). \tag{38}$$

Luînd în considerare (19), (26) și (35) relația (38) devine

$$n = \frac{z_{\max} - z_{\min}}{z_K - z_{K-1}} + 1, \tag{39}$$

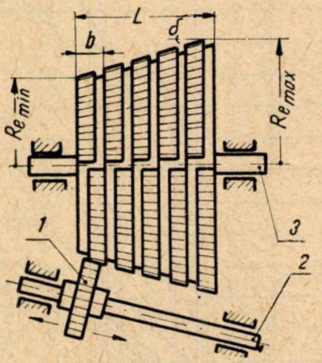


Fig. 8

de unde

$$z_{\max} = z_{\min} + (n - 1)\,(z_K - z_{K-1}). \tag{40}$$

Introducînd notația

$$q_z = z_K - z_{K-1} \tag{41}$$

unde

$q_z$ — este rația progresiei aritmetice

ecuația (40) devine

$$z_{\max} = z_{\min} + (n - 1)\,q_z. \tag{42}$$

Din relația (42) reiese că în cazul cînd se pune condiția (35) atunci numărul de dinți al roților din care se compune blocul conic dințat va varia după o progresie aritmetică.

Transcriem relația (42) pentru determinarea numărului de dinți al unei roți intermediare $z_K$ a blocului conic dințat în felul următor:

$$z_K = z_{\min} + (K - 1)\,q_z. \tag{43}$$

Împărțind ecuația (43) cu $z_B$ numărul de dinți al pinionului balador avem (fig. 8)

$$\frac{z_K}{z_B} = \frac{z_{\min}}{z_B} + (K-1)\frac{q_Z}{z_B}. \tag{44}$$

Scriind în loc de raportul numerelor de dinți rapoartele de transmisii corespunzătoare și introducînd notația

$$q_i = \frac{q_Z}{z_B} \tag{45}$$

expresia (44) devine

$$i_{z_B z_K} = i_{z_B z_{\min}} + (K-1)\,q_i, \tag{46}$$

unde

$i_{z_B z_K}$ — raportul de transmisie a treptei intermediare $K$,
$i_{z_B z_{\min}}$ — raportul de transmisie a primei trepte,
$q_i$ — diferența dintre rapoartele de transmisii a treptelor vecine.

Din relația (46) urmează că în cazul cînd numărul de dinți al blocului conic dințat variază după o progresie aritmetică cu rația $q_z$ atunci și raportul de transmitere va varia după o progresie aritmetică (element conducător fiind pinionul balador) însă cu rația $q_i$. Relația (45) arată că mărind numărul de dinți al pinionului balador rația $q_i$ se micșorează, prin urmare treptele vor fi mai aproape unele de altele.

Luînd în considerare (19) expresiile (41) și (45) vor fi

$$q_Z = \frac{2b}{m}\operatorname{tg}\delta; \tag{47}$$

$$q_i = \frac{2b}{m\,z_B}\operatorname{tg}\delta. \tag{48}$$

Înlocuind (47) și (48) în (43) și (46) avem

$$z_K = z_{\min} + (K-1)\frac{2b}{m}\operatorname{tg}\delta, \tag{49}$$

$$i_{z_B z_K} = i_{z_B z_{\min}} + (K-1)\frac{2b}{m\,z_B}\operatorname{tg}\delta. \tag{50}$$

Exprimînd raportul de transmitere prin numărul de ture avem

$$\frac{n_{z_B}}{n_{z_K}} = \frac{n_{z_B}}{n_{z_{\min}}} + (K-1)\frac{2b}{m_{z_B}}\operatorname{tg}\delta, \tag{51}$$

unde

$n_{z_B}$ — numărul de turații ale pinionului balador,
$n_{z_K}$ — numărul de turații ale blocului conic dințat în perioada cît roata $z_K$ se angrenează cu pinionul balador $z_B$.

Avînd în vedere că

$$\frac{1}{n_{z_{\min}}} = \frac{z_{\min}}{z_B n_{z_B}}$$

şi ţinînd seama de (47) formula (51) ne dă

$$n_{z_K} = \frac{n_{z_B} z_B}{z_{\min} + (K-1)\, q_z}. \tag{52}$$

Expresia (52) reprezintă legea de variaţie a numărului de turaţii ale blocului conic dinţat în funcţie de roata blocului, care intră în angrenare cu pinionul balador.

Presupunem că blocul conic dinţat nu se află pe axul condus ci este legat de acesta prin intermediul unei perechi de roţi dinţate suplimentare (fig. 9). În acest caz raportul de transmitere total $i_{kt}$ a întregului mecanism se determină prin formula

$$i_{kt} = \frac{n_{z_B}}{n_c} = i_{z_B z_K} i_S, \tag{53}$$

unde

$i_S$ — raportul de transmisie a perechii de roţi suplimentare,
$n_c$ — numărul de turaţii ale axului condus.

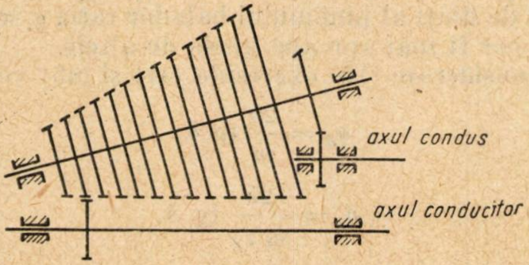


Fig. 9

Înlocuind valoarea $i_{z_B z_K}$ din (46) în (53), avem

$$i_{kt} = i_{z_B z_{\min}} i_S + (K-1)\, q_i\, i_S. \tag{54}$$

Introducînd notaţiile

$$i_{\min.t} = i_{z_B z_{\min}} i_S \tag{55}$$

$$q_{it} = q_i\, i_S \tag{56}$$

expresia (54) se va scrie

$$i_{kt} = i_{\min \cdot t} + (K-1)\, q_{it}, \tag{57}$$

unde

$i_{\min \cdot t}$ — numărul de transmitere a întregului sistem în perioada cît pinionul balador se angrenează cu roata cea mai mică a blocului conic dinţat,
$q_{it}$ — raţia progresiei aritmetice.

Din egalitatea (56) rezultă că dacă $i_S < 1$ atunci $q_{it} < q_i$ deci rația $q_{it}$ se poate micșora nu numai prin mărirea numărului de dinți ai pinionului balador, dar și prin introducerea unei perechi de roți dințate cu $i_S < 1$.

Avînd în vedere egalitatea (53) și cum

$$i_{z_B z_K} = \frac{n_{z_B}}{n_{z_K}}$$

se poate scrie următoarea expresie pentru numărul de turații $n_C$ al elementului condus

$$n_C = \frac{n_{z_K}}{i_S}. \tag{58}$$

Înlocuind (58) în (52) avem

$$n_C = \frac{n_B\, z_B}{i_S\,[z_{\min} + (K - 1)\, q_z]}. \tag{59}$$

Relația (59) reprezintă legea de variație a axului condus în cazul cînd blocul conic dințat nu se află nemijlocit pe axul conducător ci e legat cu acesta prin intermediul unei perechi de roți dințate suplimentare.

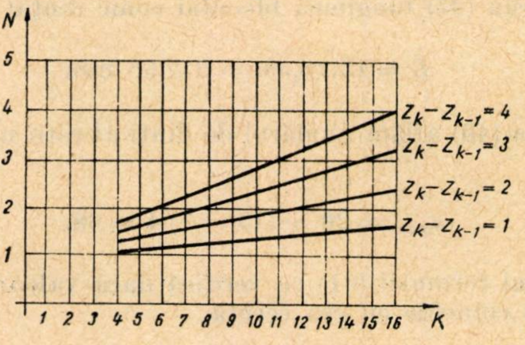


Fig. 10

*Determinarea domeniului de reglare.*

Domeniul de reglare se determină din relația cunoscută

$$N = \frac{n_{\max}}{n_{\min}} = \frac{z_{\max}}{z_{\min}}. \tag{60}$$

Înlocuind (40) în (60) avem

$$N = \frac{(n - 1)\,(z_K - z_{K-1})}{z_{\min}} + 1. \tag{61}$$

În figura 10 se arată variația domeniului de reglare în funcție de numărul de trepte pentru patru valori ale diferenței dintre numerele de dinți a două roți vecine.

Pentru o mai bună lămurire a celor de mai sus să considerăm următorul exemplu :

Să se proiecteze un bloc conic dințat cu gabarite minime și cu un domeniu de reglare $N \approx 3{,}5$. Să se determine numerele de dinți și lățimea tuturor roților, numărul de trepte și lungimea blocului conic dințat, avînd în vedere că numărul de dinți ai celei mai mici roți este $z_{\min} = 20$, iar modulul are valoarea $m = 2{,}5$ mm.

Din figura 10 construită pe baza formulei (61) reiese că pentru asigurarea unui număr minim de trepte, adică a unui gabarit minim la un domeniu de reglare $N = 3{,}5$ este necesar să se adopte diferența dintre numerele de dinți a două roți vecine $z_K - z_{K-1} = 4$. În acest caz numărul de trepte este $K = 13$. Din graficul din figura 11, luînd în considerare recomandarea (30) determinăm unghiul $\delta = 15°$ corespunzător unei diferențe dintre numărul de dinți $z_K - z_{K-1} = 4$.

Din relația (19) rezultă lățimea roților dințate :

$$b = \frac{m\,(z_K - z_{K-1})}{2\,\mathrm{tg}\delta} = \frac{2{,}5.4}{2.0{,}2679} = 18{,}66 \text{ mm.}$$

Din expresia (37) lungimea blocului conic dințat este

$$L = 13.18{,}66 = 242{,}58 \text{ mm}$$

Din relația (40) aflăm numărul de dinți ai roții maxime a blocului conic dințat

$$z_{\max} = 20 + (13 - 1)\,4 = 68.$$

Cu ajutorul formulei (61) se verifică dacă valoarea domeniului de reglare calculat coincide cu cea cerută.

$$N = \frac{(13 - 1)\,4}{20} + 1 \approx 3{,}4.$$

Se consideră că blocul conic dințat proiectat asigură domeniul de reglare cerut cu o precizie care satisface cerințele practicii.

Presupunem că numărul de dinți ai pinionului balador (*1*) (fig. 8) este egal cu 20, iar numărul de turații ale axului conducător (*2*) este egal cu 1000 rot/min. În acest caz numărul de turații ale axei conduse (*3*) va varia corespunzător formulei (52). În tabela 2 se exprimă numărul de turații ale axei conduse (3) în funcție de poziția pinionului balador față de blocul conic dințat, adică în funcție de aceea cu care dintre roțile acestuia intră în angrenare acest pinion. În același tabel este dat raportul dintre două turații vecine și procentul de micșorare a vitezei la trecerea de la o treaptă la alta.

*Tabela nr. 2*

| $K$ | $z_K$ | $N_{z_K}$ | $\frac{N_{z_K}}{N_{z_{K-1}}}$ | $\frac{(N_{z_{K-1}}-N_{z_K})\cdot 100}{N_{z_{K-1}}}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 20 | 1000 | | |
| 2 | 24 | 833 | 0,833 | 16,67 |
| 3 | 28 | 714 | 0,857 | 14,29 |
| 4 | 32 | 625 | 0,875 | 12,46 |
| 5 | 36 | 555 | 0,888 | 11,20 |
| 6 | 40 | 500 | 0,901 | 10,00 |
| 7 | 44 | 454 | 0,908 | 9,20 |
| 8 | 48 | 417 | 0,918 | 8,15 |
| 9 | 52 | 384 | 0,921 | 7,91 |
| 10 | 56 | 357 | 0,929 | 7,03 |
| 11 | 60 | 333 | 0,932 | 6,72 |
| 12 | 64 | 312 | 0,936 | 6,30 |
| 13 | 68 | 294 | 0,942 | 5,76 |

Din tabela 2 reiese că în domeniul vitezelor mici procentul de micșorare a vitezei este mai mic, adică cu mărirea raportului de transmitere treptele vor fi tot mai aproape unele de altele. Această însușire a conului în cazul de față este chiar utilă, deoarece în practică se întrebuințează rar acele domenii ale variatorului unde raportul de transmitere este egal sau apropiat de unitate.

*Primită la redacție la 28 iunie 1960; o nouă versiune la 11 mai 1961.*

# ИССЛЕДОВАНИЕ ЗУБЧАТОГО КОНИЧЕСКОГО БЛОКА, СОСТАВЛЕННОГО ИЗ КОНУСНО-ЭВОЛЬВЕНТНЫХ ШЕСТЕРЕН

## РЕЗЮМЕ

Зубчатый конический блок является наиболее важным элементом для осуществления вариатора, позволяющего переход от одной ступени к другой во время хода и под нагрузкой.

В настоящей работе рассматриваются вкратце методы обработки шестерен конической формы, которые в каждом перпендикулярном к оси сечении имеют одинаковую высоту зубов и одинаковый модуль.

Выводятся уравнения боковой поверхности зуба конусно-эвольвентной шестерни из условия обработки червячной фрезой. Кроме того приводятся графики и расчетные формулы, обеспечивающие правильное составление зубчатого конического блока из конусно-эвольвентных шестерен.

# UNTERSUCHUNG DES AUS KEGEL-EVOLVENTEN-ZAHNRÄDERN GEBILDETEN BLOCKES

## ZUSAMMENFASSUNG

Der gezahnte Kegelblock ist das wichtigste Element des Geschwindigkeitsvariators, der den Übergang von einer Stufe zur anderen bei Betrieb und Belastung ermöglicht.

Es werden kurz die Bearbeitungsmethoden der konischen Zahnräder, die in jedem Querschnitt senkrecht zur Achse die gleiche Zahnhöhe und den gleichen Modul haben, behandelt.

Die Gleichungen der Zahnseitenflächen des konischen Evolventenrades werden aus den Bearbeitungsbedingungen mit dem Schneckenfräser abgeleitet. Ferner werden graphische Darstellungen und Rechenformeln gezeigt, die eine korrekte Zusammenstellung des konischen Blockes sicherstellen.

## BIBLIOGRAFIE

1. IMRE SZEKELY, *Variator de viteză cu roți dințate cu raport de transmitere reglabil sub sarcină.* Metalurgia şi construcția de maşini, *2* (1961).
2. D. MAROŞ, *Cinematica roților dințate*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1958.

# ARIPI INELARE CU JET DE BORD DE FUGĂ

DE

N. N. PATRAULEA

## 1. INTRODUCERE

În lucrarea noastră [1], am atras atenția asupra mișcărilor axial simetrice în jurul aripilor inelare cu pînză tubulară de jet. S-a dat acolo o metodă de calcul bazată pe o teorie liniară a schemei analoge plane.

În lucrarea noastră de față ne vom referi la cazul general axial simetric, indicînd condițiile la limită pe pînză de jet și cîteva relații de bază pentru determinarea secțiunii asimptotice aval a dîrelor.

Pînza tubulară de jet este caracterizată prin debitul impulsului $I$, pe unitate de anvergură și prin bracajul său inițial $\theta$. Dacă pînza de jet este lansată către exterior (divergent), circulațiile cresc în sensul arătat în fig. 1 adică efectul este de a mări debitul de fluid care traversează aripa inelară. Dacă pînza de jet este lansată către interior (convergent) efectul constă în micșorarea debitului de fluid care traversează aripa (fig. 2) cel puțin dacă viscozitatea fluidului este neglijată. Pentru bracaje și intensități mai mari ale pînzei de jet convergente este posibil chiar să se astupe intrarea aerului de la infinit amonte în aripa inelară (fig. 3). Vom conveni să atribuim unghiului $\theta$ al pînzelor divergente, semnul $+$ și invers.

O primă deosebire a jeturilor axial simetrice față de jeturile plane constă în faptul că debitul impulsului $I(r)$ pe unitate de lungime a cercului transversal avînd raza $r$ egală cu distanța particulelor la axa de simetrie, nu poate fi considerată constant chiar dacă jetul este foarte rapid în raport cu fluidul adiacent.

Într-adevăr presupunînd că modulul vitezei în jet este constant, se obține cu ușurință următoarea expresie a debitului impulsului pe unitate de lungime transversală :

$$I(r) = \rho_j v_j Q_j / 2\pi r \tag{1}$$

unde $Q_j$ este debitul total de jet emis, $\rho_j v_j Q_j$ debitul total al modulului impulsului emis. Aplicînd apoi, în ipoteza incompresibilității fluidului,

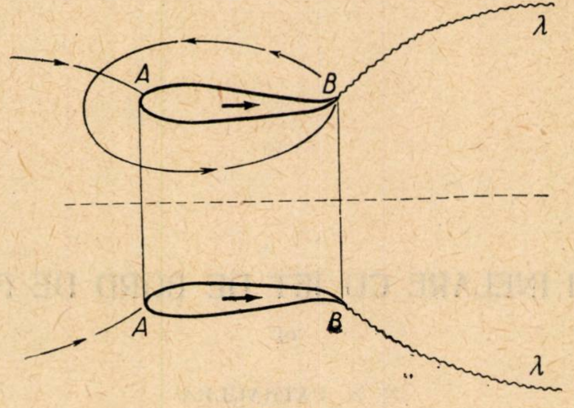


Fig. 1

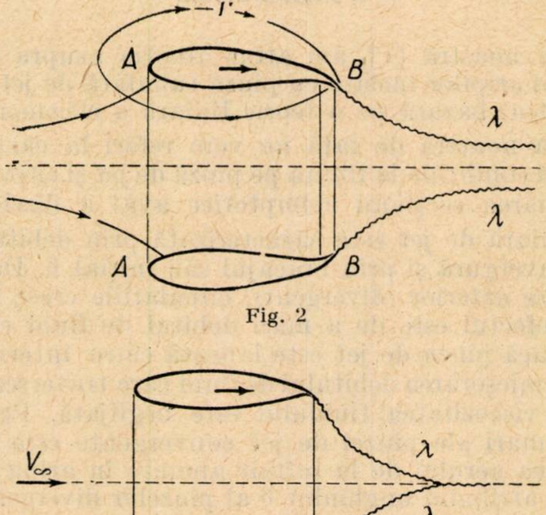


Fig. 2

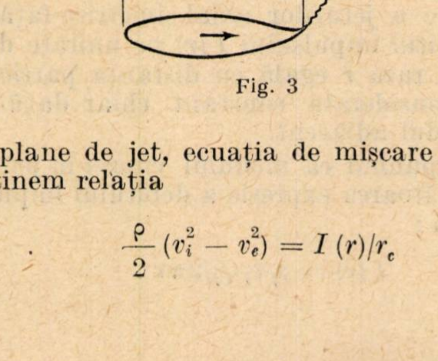


Fig. 3

ca şi la pînzele plane de jet, ecuația de mişcare pe direcția normală la pînza de jet, obținem relația

$$\frac{\rho}{2}(v_i^2 - v_e^2) = I(r)/r_c \tag{2}$$

unde prin $r_c$ s-a notat raza de curbură într-un punct curent al pînzei iar prin $v_i$ şi $v_e$ vitezele pe cele două feţe ale pînzei de jet ale particulelor exterioare jetului în absenţa frecării.

Rezultă pe de altă parte din teorema impulsului [2] că forţa de tracţiune totală suferită de aripă este egală cu debitul iniţial al modului impulsului,

$$T = \rho_j Q_j v_j \tag{3}$$

şi deci forţa propulsivă a presiunilor de pe exteriorul aripii va fi

$$T_A = \rho_j Q_j v_j (1 - \cos \theta). \tag{4}$$

*Asupra determinării secţiunii asimptotice a dîrei.* Vom considera cazul mai general al aripii inelare cu jet de bord de fugă şi în prezenţa unei suprafeţe permeabile acţionînd în interiorul său (de exemplu acţiunea simplificată a discului unei elice în interiorul aripii).

În scopul obţinerii unor relaţii importante, vom exprima mai întîi tracţiunea totală $T$, suferită de aripa inelară în prezenţa unui curent paralel de la infinit amonte avînd viteza $V_\infty$, a suprafeţei permeabile din interior care aplică fluidului unui salt de presiune $\delta p$ şi a pînzei de jet avînd bracajul $\theta$ la bordul de fugă al aripii şi debitul de impuls $I$.

Teorema impulsului aplicată la o suprafaţă de control care cuprinde aripa şi dîra ei dă imediat

$$T = I_j + \rho S_0 v_0^2, \tag{5}$$

unde $S_0$ este secţiunea asimptotică a dîrei şi $v_0$ viteza în interiorul dîrei la infinit aval. Pe de altă parte tracţiunea $T$ poate fi exprimată în mod direct ca suma dintre tracţiunea $T_A$ exercitată de presiunile pe exteriorul aripii, forţa $T_E$ acţionînd pe elementele elicei şi forţa reactivă a jetului :

$$T = T_A + T_E + I_j \cos \theta \tag{6}$$

Din relaţiile (5) şi (6) se deduce,

$$\rho S_0 v_0^2 = T_A + T_E - I_j (1 - \cos \theta). \tag{7}$$

Dacă considerăm cunoscută $\delta p$ atunci evident este cunoscută

$$T_E = S \delta p \tag{8}$$

iar $v_0$ de asemenea, printr-o aplicaţie simplă a teoremei lui Bernoulli, aşa încît în (7) rămîn necunoscute secţiunea asimptotică $S_0$ şi $T_A$.

*Metodă simplificată de calcul.* Rezolvarea mai departe a problemei nu se poate face în mod riguros fără soluţionarea unei probleme complicate la limite dintre care unele necunoscute a priori. De aceea, cel puţin pentru determinarea unor parametri importanţi ai scurgerii vom indica o metodă de calcul care nu face apel decît la soluţionări de probleme la limită cu frontiere *cunoscute.*

În acest scop, vom face ipoteza că $T_A$ este de forma

$$T_A = \frac{\rho}{2} V_\infty^2 S f(\vartheta) \tag{9}$$

unde numărul fără dimensiuni $\vartheta$ este definit de

$$\vartheta = S_0 v_0 / S V_\infty , \tag{10}$$

$S$ fiind o suprafață oarecare caracteristică a aripii, pe care o vom lua pentru simplificare egală cu aria discului elicei. Cu alte cuvinte admitem că indiferent de forma exactă a dîrei, necunoscută a priori $T_A$ nu depinde pentru același $V_\infty$ decît de debitul $S_0 v_0$ care traversează aripa inelară.

Funcția $f(\vartheta)$ se va construi deci prin determinarea unor scurgeri particulare corespunzătoare la diferiți $\vartheta$ și la o dîră arbitrară, aleasă, însă în mod convenabil, avînd unghiul de bracaj inițial, $\theta$. Aceste determinări se pot face de exemplu în cuva reoelectrică cu fund înclinat.

Presupunînd că s-a determinat funcția $f(\vartheta)$, relația (7) se va scrie

$$\rho S V_\infty v_0 \vartheta = \frac{\rho}{2} V_\infty^2 S f(\vartheta) + \frac{\rho}{2} S (V_0^2 - V_\infty^2) - I_j (1 - \cos\theta) \tag{11}$$

de unde se scoate valoarea coeficientului $\vartheta$ care satisface în mod mulțumitor condițiilor problemei noastre. Rezultă apoi imediat $T$, $T_A$, $S_0/S$ etc.

*Aplicație la aripa cilindrică alungită.* Funcția $f(\vartheta)$ se determină foarte simplu în cazul particular al aripii inelare cilindrice suficient de alungită. Acest caz este analog mișcării plane în jurul unui profil biconvex simetric cu volet de bord de fugă în afară de faptul că aici problema este mai complicată datorită considerării suprafeței permeabile. În cazul de față $T_A$ este forța de sucțiune de la bordul de atac care are o expresie simplă ce se deduce dintr-o aplicare convenabilă a teoremei impulsului :

$$T_A = \frac{\rho}{2} (v - V_\infty)^2 , \tag{12}$$

unde $v$ este viteza în interiorul aripii cilindrice la distanțe mari de capete. Avem de asemenea evident,

$$T_A = \frac{\rho}{2} V_\infty^2 \left( \frac{v}{V_\infty} - 1 \right)^2 = \frac{\rho}{2} . V_\infty^2 \left( \frac{S_0 v_0}{S V_\infty} - 1 \right)^2 \tag{13}$$

adică funcția $f(\vartheta)$ are expresia

$$f(\vartheta) = (\vartheta - 1)^2 . \tag{14}$$

Înlocuind în (11), se obține

$$\rho S V_\infty v_0 \vartheta = \frac{\rho}{2} V_\infty^2 S (\vartheta - 1)^2 + \frac{\rho S}{2} (v_0^2 - V_\infty^2) - I_j (1 - \cos\theta) . \tag{15}$$

Prin calcule elementare se deduce de aici expresia coeficientului de dilație ($\nu = S_0/S = v/v_0$) :

$$\nu = 1 + \frac{V_\infty}{v_0} \sqrt{2 K_j^*} . \sin \theta/2 ; \; K_j^* = \frac{\rho_j v_j Q_j}{\rho S V_\infty^2} . \tag{16}$$

Din această formulă se vede că dacă $V_\infty = v_0$ adică nu există suprafață permeabilă coeficientul de dilatare respectiv, $\nu_0$ capătă expresia:

$$\nu_0 = 1 + \sqrt{2 K_j} \sin \theta/2. \tag{17}$$

Să presupunem că $\theta > 0$ (jet divergent). Dacă se acționează cu un $\delta p$ pozitiv (disc de elice propulsivă) $v_0 > V_\infty$ şi deci

$$\nu < \nu_0 \tag{18}$$

adică *tubul de jet se îngustează în urma acțiunii unei suprafețe* permeabile active.

Dacă din contra $\delta p < 0$ (disc de moară de vînt)

$$\nu' > \nu_0$$

adică *tubul de jet se dilată în urma acțiunii unei suprafețe permeabile pasive.*

Pentru studiul variației circulației în jurul aripii inelare cu parametrii considerați în problemă, este mai interesant de urmărit raportul $\bar{v} = v/V_\infty$, a cărei expresie se obține imediat din (16)

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \sqrt{2 K_j} . \sin \theta/2 \tag{19}$$

unde $\bar{v}_0$ rezultă din valoarea saltului presiunii la traversarea suprafeței permeabile:

$$\bar{v}_0 = \sqrt{1 + \overline{\delta p}} \tag{20}$$

unde am pus:

$$\overline{\delta p} = \delta p / \frac{\rho}{2} V_\infty^2 . \tag{21}$$

Dacă însă $V_\infty = 0$ (punct fix), formulele (19) sau (16) nu mai sînt utilizabile însă se ajunge imediat la formula

$$\nu = v/v_0 = 1 + \sqrt{2 K_j} \sin \theta/2 \tag{22}$$

unde am pus aici

$$K_j^0 = I_j / \frac{\rho}{2} S V_0^2 = I_j T_E . \tag{23}$$

Discuția de mai sus s-a făcut pe baza ipotezei că secțiunea $S_0$ la infinit aval, rămîne finită. Secțiunea infinită nu poate să aibă loc decît dacă $\delta p < 0$ la traversarea suprafeței permeabile. În mod precis, secțiunea devine infinită dacă $\delta p$ este astfel încît $V_0 = 0$ adică,

$$\delta p = - \frac{\rho}{2} V_\infty^2 \tag{24}$$

sau

$$\overline{\delta p} = -1. \tag{25}$$

*Primită la redacție la 10 iunie 1961.*

## КОЛЬЦЕВЫЕ КРЫЛЬЯ СО СТРУЕЙ ЗАДНЕЙ КРОМКИ

### РЕЗЮМЕ

Рассматривается осесимметрическое обтекание тороидального крыла, предусмотренного трубчатой струйной пеленой и записываются условия на струйной пелене.

Затем указывается метод для определения асимптотического сечения следа в более общем случае, когда внутри крыла действует и проницаемая поверхность, ускоряющая или замедляющая проходящую через кольцевое крыло жидкость (например, диск воздушного винта или в режиме ветряной мельницы).

Даются применения к удлиненному цилиндрическому крылу, причем получаются простые формулы для сечения следа на бесконечности вниз по течению, полной тяги и пр.

## ANNULAR WINGS WITH JET-FLAP

### ABSTRACT

The axisymmetrical flow around a jet-flapped annular wing is considered and the conditions of the jet-flap sheet are given.

A method is presented for determining the asymptotical cross-section of the wake for the more general case when in the interior of the wing an actuator disk operates which accelerates or retards the flow passing through the annular wing (e.g., tractive propeller disk or wind mill disk).

Applications are included for long cylindrical annular wing. Simple formulae are obtained for the asymptotical cross-section of the wake, total thrust, etc.

### BIBLIOGRAFIE

1. N. N. PATRAULEA, *Contributions théorique à l'étude des profiles à volet fluide.* IX-e Congrès International de Mécanique Appliquée, Université de Bruxelles, **I** 460 (1956).
2. N. N. PATRAULEA, *Aerodinamica suprafeţelor permeabile.* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1956, 131.

## STUDII

### HIDROMECANICĂ

# METODICA DE STUDIU A MIŞCĂRII MACROTURBULENTE A FLUIDELOR GRELE ŞI UNELE REZULTATE OBŢINUTE

DE

E. RĂZVAN [1]

Într-o lucrare anterioară asupra scurgerii macroturbulente [1] [2]) s-a presupus că starea de pulsaţie într-o secţiune poate fi definită univoc şi cu o precizie acceptabilă, printr-un singur parametru. În plus, s-a găsit o ecuaţie integrală a mişcării macroturbulente conţinînd un coeficient de pierderi, care depindea de starea de pulsaţie în secţiune şi care deci nu putea fi determinat nici teoretic, nici după vreuna din numeroasele formule empirice propuse pentru condiţiile scurgerii uniform turbulente.

Rezultă că pentru elucidarea mecanismului mişcării, ca şi pentru aprecierea intensităţii de amortizare a macroturbulenţei în lungul scurgerii, este necesar să se recurgă la experiment.

În elaborarea programului experimental trebuie să se ţină seama de un fapt foarte important şi anume, că rezultatele care s-ar obţine pe instalaţii de dimensiuni reduse nu se pot extrapola automat, pentru că rolul viscozităţii în hidraulica scurgerii macroturbulente este foarte important şi, dacă similitudinea formării vîrtejurilor (respectiv a saltului hidraulic) pare asigurată prin respectarea criteriului $Fr =$ idem, similitudinea amortizărilor în lungul scurgerii nu este evidentă. În consecinţă, procesul de disipare a energiei poate apărea mai intens pe modele reduse, decît în natură, pe prototip, toate celelalte condiţii rămînînd aceleaşi. Ideea aceasta am regăsit-o într-o lucrare recentă [2].

---

[1] Institutul de studii şi cercetări hidrotehnice (ISCH), Bucureşti.

[2] *NOTA* : Într-o scurgere macroturbulentă, vîrtejurile avînd dimensiuni de acelaşi ordin cu o mărime geometrică caracteristică a scurgerii (de ex. adîncimea curentului, în cazul unei scurgeri cu nivel liber) — capătă frecvenţe de cîteva ori mai mari — decît într-o scurgere uniformă cu turbulenţă dezvoltată. Măsurătorile par să arate că pulsaţiile de viteză produse de trecerea acestor vîrtejuri au într-adevăr un caracter aperiodic.

Pentru verificarea acestei ipoteze se impun, ca o etapă indispensabilă a studiilor experimentale, măsurători pe instalații de proporții de același ordin cu ale construcțiilor reale.

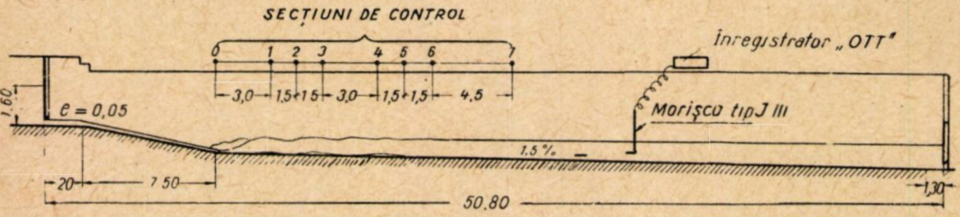

SECȚIUNI DE CONTROL
0
1
2
3
4
5
6
7
3,0
1,5
1,5
3,0
1,5
1,5
4,5
1,60
e = 0,05
Înregistrator „OTT"
Morișcu tip J III
1,5 ‰
20
7 50
50.80
1,30

Fig. 1. — Instalația experimentală folosită.

În acest scop, s-a folosit un canal de beton armat avînd o secțiune dreptunghiulară de 0,60 × 3,00 m și o lungime totală de 50,80 m (fig. 1, 2).

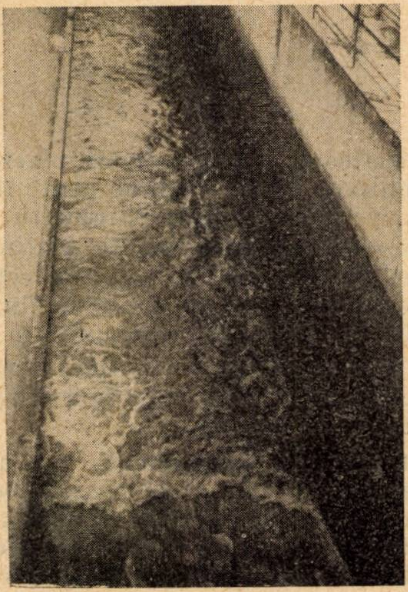


Fig. 2. — Vedere a scurgerii macroturbulente.

Canalul era alimentat de la o priză de apă industrială și era prevăzut cu vane de reglaj amonte și aval; prin manevrarea acestora s-au realizat scurgeri macroturbulente avînd caracteristicile indicate în tabela 1.

*Tabela 1*

| $q$ m³/s | $h_{cr}$ m | $h_c$ m | $h_2$ m | $\mathfrak{F}_{r_c}$ | $\zeta$ | $L_s$ m | $L_s'$ m |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,165 | 0,14 | 0,030 | 0,52 | 88 | 1,32 | 2,20 | 2,78 |
| 0,134 | 0,12 | 0,025 | 0,50 | 112 | 1,32 | 2,10 | 2,60 |

## NOTAŢII FOLOSITE

$q$ (m$^3$/s) — debit specific,
$h_{cr}$ (m) — adîncimea critică,
$h_c$ (m) — adîncimea contractată,
$h_c''$ (m) — adîncimea conjugată cu $h_c$,
$h_2$ (m) — adîncimea aval existentă,
$\eta = \frac{h_2}{h_1}$ — parametru adimensional,
$\zeta = \frac{h_2}{h_c''}$ — coeficient de înecare a saltului,
$\mathcal{F}r_c$ — numărul Froude în secţiunea contractată,
$h_s$ (m) — lungimea saltului neînecat,
$h_s'$ (m) — lungimea saltului înecat,
$x$ — coordonata curentă în direcţia scurgerii,
$N$ — numărul de ture,
$n$, $i$ — număr; indice,
$V$ (m/s) — viteza medie în secţiune,
$u$ (m/s) — viteza actuală,
$\overline{u}$ (m/s) — viteza mediată,
$u'$ (m/s) — pulsaţia vitezei actuale,
$\overline{u}'^2$ — pulsaţia medie patratică,
$K$ — intensitatea de macroturbulenţă.

Metodica de studiu a scurgerii macroturbulente este o problemă delicată. Una din manifestările specifice acestui tip de mişcare şi foarte importante din punct de vedere practic este pulsaţia presiunilor hidrodinamice asupra fundului albiei. Măsurarea pulsaţiei presiunilor este relativ accesibilă şi studii în această direcţie s-au făcut în diferite laboratoare, printre care şi al nostru. Aparatura de măsură este cunoscută: ea comportă un traductor rezistiv, care, sub acţiunea presiunii variabile, produce o variaţie de curent, care se poate măsura. Variaţia de curent se transmite la un oscilograf, de pe ecranul căruia aceasta se poate citi sau înregistra. Dar pulsaţia presiunii hidrodinamice reprezintă numai una din manifestările macroturbulenţei şi anume, una exterioară. Mult mai important, în special din punct de vedere teoretic, este studiul pulsaţiei vitezelor; dar această sarcină este legată de dificultăţi importante, legate în primul rînd de realizarea aparaturii de măsură, căreia i se prezintă exigenţe speciale de sensibilitate, stabilitate şi gabarite. O inerţie mai mare are ca urmare filtrarea pulsaţiilor de modul redus; acelaşi efect îl au şi gabaritele mari. Pe de altă parte, un instrument fin poate fi insuficient de robust la pulsaţiile de modul mare. După cum se vede, cerinţele puse instrumentului sînt contradictorii.

Sistemele de care dispunem în prezent pentru măsurarea pulsaţiei vitezelor sînt cunoscute: cel mai precis este anemometrul termic utilizat cu succes în aerodinamică. Funcţionarea acestui aparat se bazează pe faptul că un corp cald imersat într-un fluid în mişcare, cedează acestuia din căldura sa, o parte, proporţională cu viteza relativă. Există deci o bună corelație între temperatura corpului și viteza locală, corelație ce se determină prin etalonare. Pentru măsurători în curenți de aer s-a elaborat un aparat care reprezintă o aplicație a punții Wheatstone; elementul traductor este un filament de platină sudat pe o sondă specială și montat ca un braț al punții, celelalte trei brațe fiind rezistențe determinate. Pulsațiile de viteză produc pulsații de curent, proporționale cu componenta longitudinală a vitezei, în diagonala punții; curenții trebuie amplificați și aceasta constituie o complicare importantă a schemei.

Dintre avantajele acestui aparat, amintim marea sa sensibilitate și posibilitatea de a obține direct toate componentele tensorului turbulenței, într-un punct dat. Din păcate, pentru măsurători în curenți de apă, acest dispozitiv devine atît de complicat, încît utilizarea sa este greu accesibilă. În plus, metoda de cercetare a scurgerii cu termoanemometrul este locală, și, în cazul analizat o astfel de metodă nu este cea mai indicată.

O metodă substanțială de studiu a scurgerii este cea fotocinematografică, [3]. În esență, această metodă constă în fotocinematografierea rapidă (cu 3—500 imagini pe secundă) a mișcării unor bule de emulsie colorată, de densitate strict egală cu cea a apei. În acest mod, se materializează mișcarea ,,molară'' a fluidului. Prin aplicarea stereofotografiei și prelucrarea convenabilă a imaginilor, se pot obține caracteristicile tuturor componentelor vitezei actuale. Metoda aceasta a fost aplicată cu succes în laborator, la studiul unor scurgeri turbulente avînd viteze medii relativ reduse. În cazul unor curenți cu viteze mari se ivesc dificultăți tehnice suplimentare; în orice caz aplicarea metodei necesită condiții de laborator (vizualizare prin vitru, iluminare specială etc), practic greu de realizat pe o instalație de mari proporții, ca aceea pe care am avut-o la dispoziție.

Pentru măsurarea macropulsațiilor vitezelor în instalații de mari proporții se pot folosi însă moriștile. Aceste instrumente sînt folosite de aproape 100 de ani, pentru măsurarea vitezelor medii, dar mai rar pentru măsurarea pulsațiilor de viteză. Totuși ideea măsurării vitezelor actuale cu morișca, datează din 1923 și această ideie a fost aplicată cu rezultate valoroase în cazul scurgerilor uniform turbulente [4]. Utilizarea moriștilor pune, bineînțeles, unele probleme specifice, printre care: determinarea lungimii de sincronizare (caracteristică a sensibilității moriștii; aceasta este lungimea pe care trebuie să o străbată o particulă fluidă cu o creștere de viteză dată, pentru ca turația moriștii să se schimbe) și extrapolarea rezultatelor obținute, la o perioadă de mediere nulă.

Această ultimă problemă apare datorită faptului că vitezele obținute în mod nemijlocit, nu sînt cele instantanee, ci mediate pe durata $\tau$ a unei turații; durata $\tau$ apare astfel ca o perioadă de mediere și cu cît viteza de scurgere este mai mică, cu atît $\tau$ este mai mare, deci cu atît mai mare este diferența dintre viteza măsurată și cea reală. O cale de reducere la minimum a acestor diferențe ar fi micșorarea succesivă a pasului moriștii k, adică efectuarea unor măsurători succesive, cu o serie de moriști. Această cale prezintă dificultăți tehnice evidente. O altă cale, propusă în lucrarea [5], ar fi prelucrarea fiecărei cronograme, la diferite perioade de mediere instantanee $\tau$, pentru 1, 2, 3, ... ture, respectiv pentru 1, 2, 3, ... sec. Este clar că vitezele obţinute astfel vor fi cu atît mai apropiate de cele reale, cu cît perioadele vor fi mai mici; extrapolînd fiecare caracteristică la valoarea $\tau = 0$ se obţine rezultatul optim al măsurătorii. De observat că între vitezele obţinute prin extrapolarea la $\tau = 0$, şi cele prin prelucrarea obişnuită, diferenţa a fost de numai 5–6%.

Laturile negative ale moriştii, ca instrument de măsurare a pulsaţiilor sînt:

*a*) faptul că reacţionează numai la una din componentele vitezei actuale, respectiv la cea longitudinală;

*b*) faptul că ocupă un volum relativ important, ceea ce duce inevitabil la o anumită mediere a pulsaţiilor;

*c*) faptul că semnalele se obţin, în cel mai bun caz, la fiecare semirotaţie, că deci se măsoară, durata unei semirotaţii.

Aceste dezavantaje devin mai puţin dure în cazul macropulsaţiilor deoarece:

*a*) deşi ni se furnizează date asupra uneia din componentele vitezei locale, există posibilităţi de a le aprecia şi pe celelalte, fie şi într-o primă aproximaţie;

*b*) medierea pulsaţiilor se referă în special la cele de modul mic, care în bilanţul energetic al mişcării macroturbulente au un rol relativ redus;

*c*) metoda de extrapolare la perioada nulă expusă mai sus permite obţinerea vitezelor cvasi instantanee. Dealtfel, cum se va arăta, modul de a caracteriza intensitatea de turbulenţă ales, permite şi folosirea datelor directe ale cronogramelor.

Desigur că nici una din metodele indicate nu este desăvîrşită. În special pentru studiul mişcării macroturbulente, trebuie elaborat un sistem care să permită, fie şi indirect, dar univoc, caracterizarea intensităţii de turbulenţă pe o întreagă secţiune simultan, şi nu prin măsurători locale succesive. Un asemenea sistem ar trebui poate bazat pe folosirea unor săruri radioactive sau chiar a unui colorant convenabil. Dar în afară de dificultăţile tehnice obişnuite pentru punerea la punct a unei metodici noi, o problemă delicată este etalonarea, determinarea unei scări a intensităţii de macroturbulenţă pe secţiune. În acest scop trebuie generate într-o secţiune turbioane de amplitudine şi frecvenţă dată şi determinată corelaţia între intensitatea de turbulenţă şi radiaţie (sau coloraţie) în lungul curentului.

Cum însă această metodică este abia în curs de elaborare, a trebuit aleasă una din cele existente. Ţinînd seama de observaţiile precedente, s-a ales cea de-a treia, bazată pe folosirea moriştilor. Simplicitatea construcţiilor acestora şi mai ales completa determinare a etalonării lor (ceea ce nu e cazul cu celelalte metode) le recomandă pentru genul de măsurtori care se au în vedere.

Pentru a alege un instrument cît mai adecvat, au fost examinate patru tipuri de morişti:

*a*) Morişca „Dr. Lange" cu contor electric pentru turaţii (fig. 3). Instrumentul este destul de sensibil, avînd o lungime de sincronizare

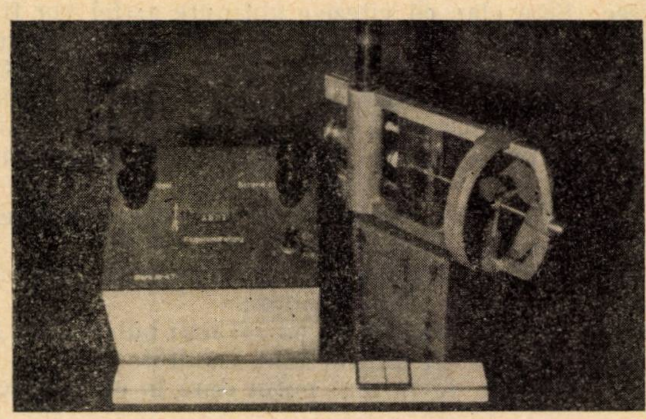


Fig. 3. – Morişca „Dr. Lange” cu contor electric.

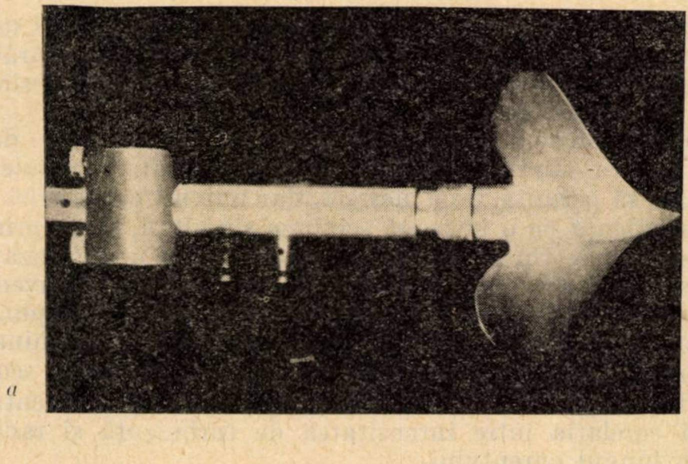


Fig. 4, *a*, *b*. – Morişca J I.

de 2,5 cm. Construcţia sa este delicată şi s-a dovedit că, în timpul măsurătorilor pe teren, contactele rămîn uneori închise continuu în intervale scurte de timp, ceea ce face ca indicaţia contorului să nu reflecte exact numărul de turaţii. Această deficienţă este neesenţială cînd intervalul de timp dintre două citiri este mare, deci la măsurarea vitezelor medii, dar este inacceptabilă la intervale sub o secundă, ca în cazul măsurătorii pulsaţiilor.

*b*) Micromorişca tip Jestovski (J.I) folosită curent în hidrometrie (fig. 4) este de o construcţie robustă, adecvată pulsaţiilor de mare intensitate. Însă schema sa prezintă două deficienţe care o fac neutilizabilă pentru înregistrări de pulsaţii : elicea se poate roti numai în sens direct şi sistemul de semnalizare reacţionează abia la 20 de rotaţii succesive. Pentru a depăşi aceste dificultăţi păstrînd în acelaşi timp avantajele instrumentului, în ISCH au fost executate o serie de modificări importante.

*c*) Morişca J. II. este precedenta, căreia i s-au adus următoarele transformări (fig. 5) : s-a înlocuit sistemul de rezemare, astfel ca elicea să se poată roti în ambele sensuri : S-a înlocuit sistemul de semnalizare original, cu altul care dă impulsuri de fiecare turaţie. Impulsurile au fost transmise la un înregistrator electric tip „OTT", prevăzut cu o bază de timp, care marca 0,2 sec. În figura 6 se poate vedea un exemplu de cronogramă obţinut cu morişca J.II.

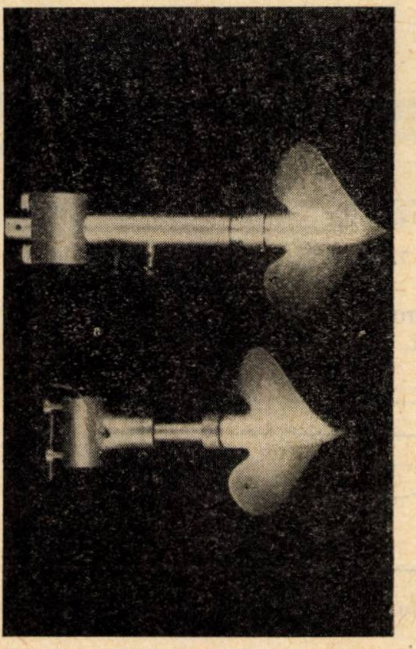


Fig. 5. — Morişca J II (adaptată în ISCH).

*d*) Morişca J.III are aceleaşi caracteristici ca şi precedenta, însă în plus i s-a adăugat un dispozitiv de semnalizare care permite înregistrarea separată a turaţiilor de sensuri diferite (fig. 7). Morişca J.III a fost conectată tot la un înregistrator „OTT". În figura 8 se poate vedea un exemplu de cronogramă obţinut cu această morişcă.

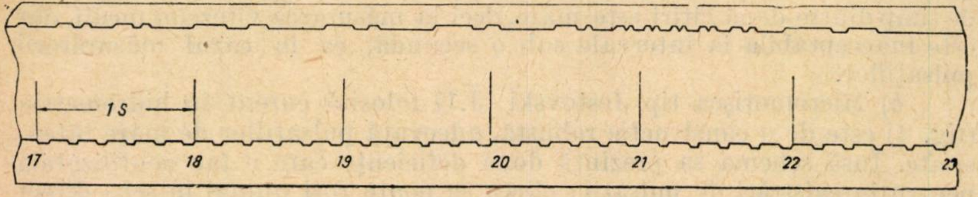


Fig. 6. — Exemplu de înregistrare a macropulsaţiilor de viteză cu morişca J II.

Morişca J.III a fost etalonată în laborator, într-un canal hidrodinamic unde vitezele au fost măsurate în paralel cu o micromorişcă ISCH, de caracteristici cunoscute (fig. 9). Tararea s-a făcut pentru ambele sensuri de rotaţie şi, evident au rezultat două caracteristici distincte (fig. 10) De remarcat că în intervalul practic interesant, ecuaţiile de funcţionare ale moriştii sînt liniare, adică există relaţia

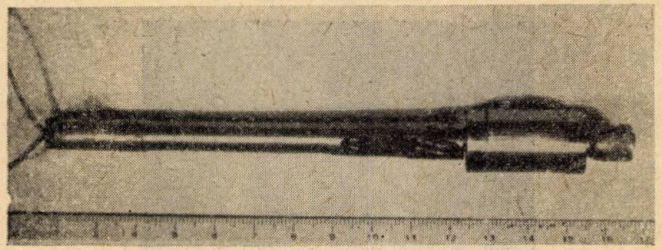


Fig. 7. — Morişcă J III (adaptată în ISCH).

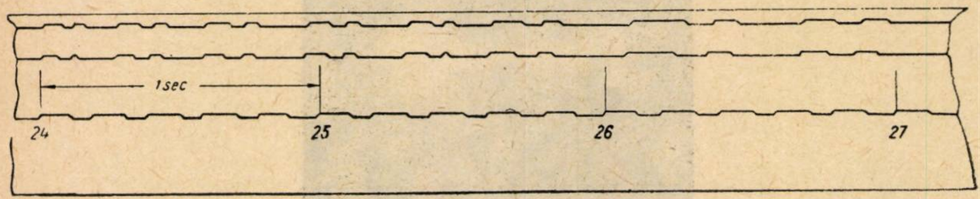


Fig. 8. — Exemplu de înregistrare a macropulsaţiilor cu morişca J III.

$$V = kn$$

unde $k$ este o constantă a elicei. Lungimea de sincronizare a moriştilor J.II, respectiv J.III, este de 5 cm.

Experienţele efectuate au constat din înregistrarea variaţiilor de viteză în regimurile hidraulice indicate în tabela 1 şi în şapte secţiuni indicate în figura 1.

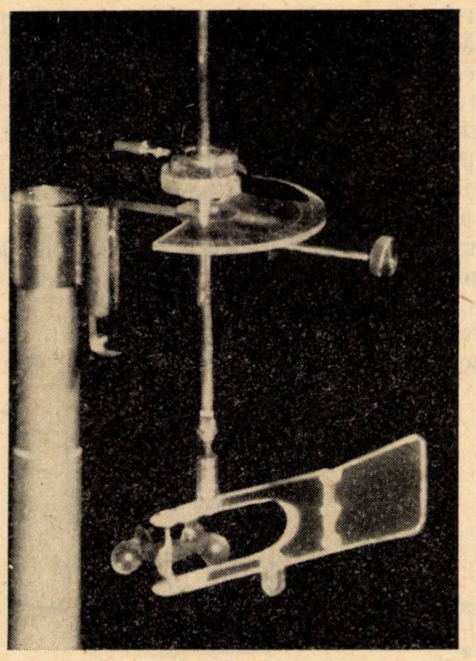
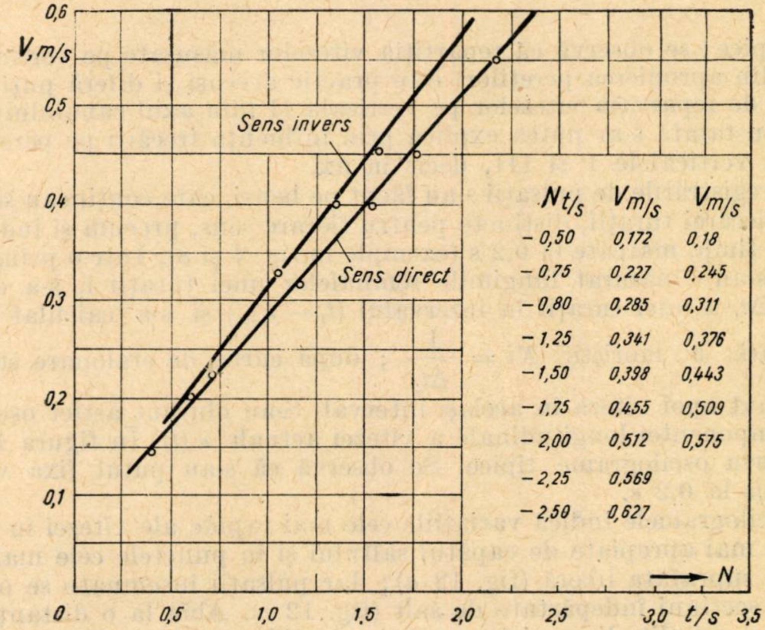


Fig. 9. – Micromorişca ISCH.



| $N_{t/s}$ | $V_{m/s}$ | $V_{m/s}$ |
|---|---|---|
| – 0,50 | 0,172 | 0,18 |
| – 0,75 | 0,227 | 0,245 |
| – 0,80 | 0,285 | 0,311 |
| – 1,25 | 0,341 | 0,376 |
| – 1,50 | 0,398 | 0,443 |
| – 1,75 | 0,455 | 0,509 |
| – 2,00 | 0,512 | 0,575 |
| – 2,25 | 0,569 | |
| – 2,50 | 0,627 | |

Fig. 10. – **Curbele de etalonare ale moriştii J III (ISCH).**

Pe fiecare verticală s-au făcut înregistrări în cel puţin patru puncte. De observat că măsurătorile s-au extins la o zonă de cca. 5 $L_s$, sensibil mai întinsă decît cea cuprinsă în alte studii asupra turbulenţei zonei de tranziţie, cunoscute de noi [67].

Durata înregistrării în fiecare punct a fost stabilită prin încercări preliminare, care au urmărit determinarea timpului minim de obţinere a vitezei medii, din oscilograme (viteza medie s-a măsurat separat cu o morişcă ,,Dr. Lange").

S-a ales o durată standard de 60 s, vitezele mediate pe 60 s şi respectiv pe 120 s fiind foarte apropiate. Această durată este de altfel aceeaşi cu cea admisă şi de alţi autori.

Caracterul plan al mişcării a fost verificat prin măsurători de sondaj efectuate cu morişca ,,Dr. Lange"; în figura 11 sînt prezentate cîteva epure tipice; se observă că repartiţia vitezelor măsurate pe verticalele I şi III (din apropierea pereţilor) este practic aceeaşi şi diferă puţin — cu ±5% — de repartiţia vitezelor pe verticala II (din axul canalului). Diferenţa constatată s-ar putea explica prin influenţa frecării pe pereţi, mai mare în verticalele 1 şi III, decît în ax.

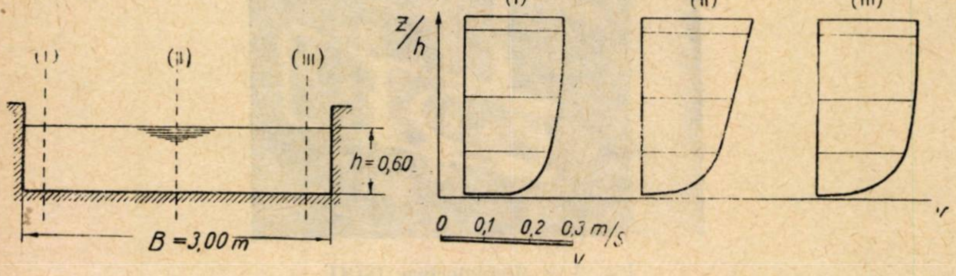


Fig. 11. — Epurele vitezelor mediate, într-o secţiune de control.

Înregistrările de pulsaţii s-au făcut pe benzi, care conţineau semnale asupra fiecărei turaţii, distincte pentru fiecare sens, precum şi indicaţiile bazei de timp, marcate la 0,2 s (exemple în fig. 4 şi 8). Într-o primă prelucrare s-au măsurat lungimile semnalelor unei turaţii i, s-a obţinut durata $\Delta t_i$ a unei turaţii în intervalul $(t_i - t_{i+1})$ şi s-a calculat viteza unghiulară a moriştii $Ni = \frac{1}{\Delta t_i}$; după curba de etalonare stabilită s-a obţinut apoi viteza în acelaşi interval. S-au obţinut astfel oscilogramele componentei longitudinale a vitezei actuale $u(t)$. În figura 12 sînt date cîteva oscilograme tipice. Se observă că s-au putut fixa variaţii de 5 cm/s la 0,2 s.

Oscilogramele indică variaţiile cele mai rapide ale vitezei în secţiunile cele mai apropiate de capătul saltului şi în punctele cele mai apropiate de suprafaţa liberă (fig. 12 *a*); dar pulsaţii însemnate se observă chiar în secţiuni îndepărtate de salt (fig. 12 *c*). Abia la o distanţă $x = 120\ h_{cr}$, amplitudinea şi frecvenţa pulsaţiilor scad sensibil (fig. 12 *d*).

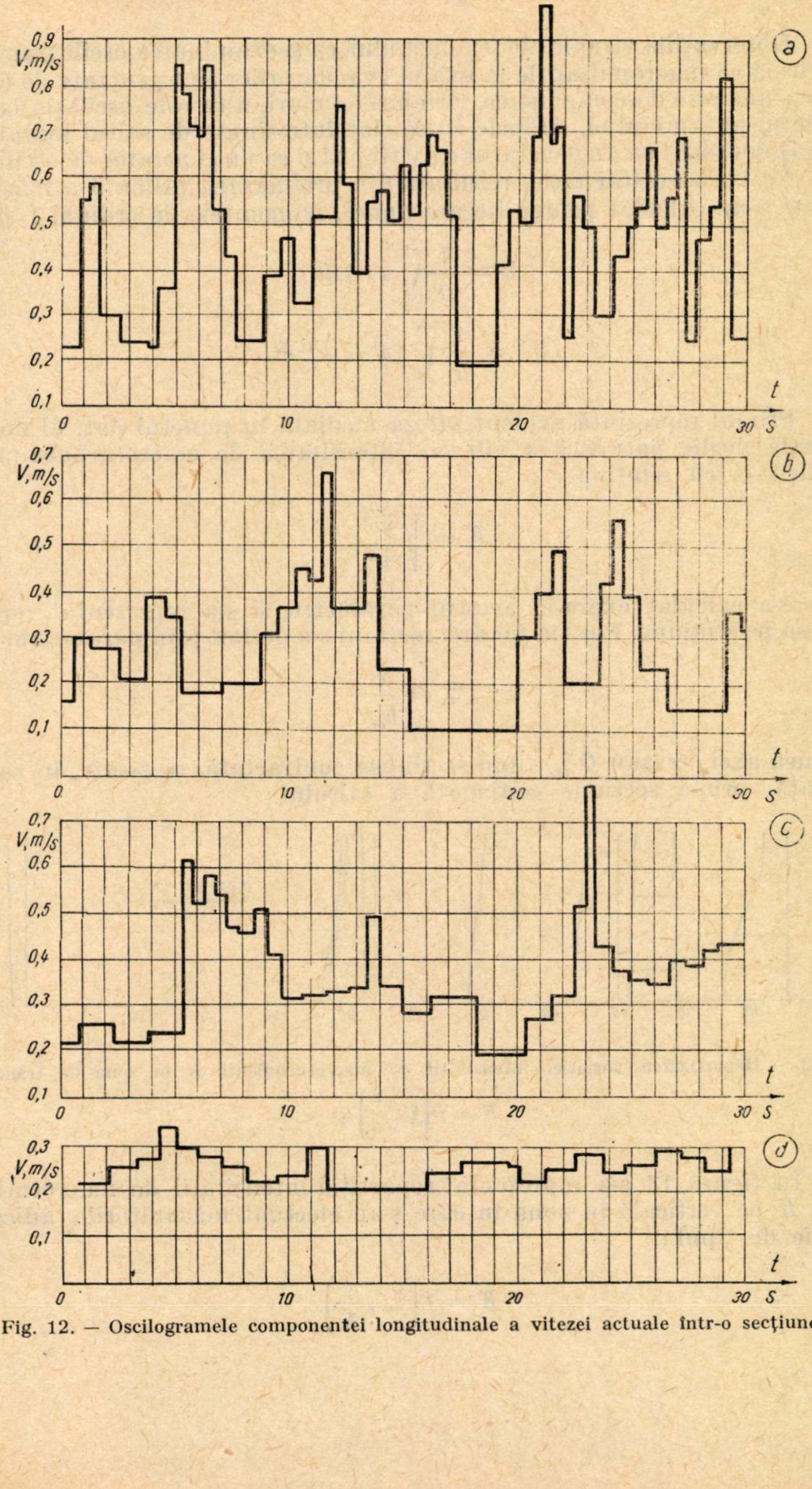


Fig. 12. — Oscilogramele componentei longitudinale a vitezei actuale într-o secțiune.

Observațiile vizuale ale fenomenului, ca și examinarea oscilogramelor confirmă că macropulsațiile în avalul evacuatorilor sînt generate de două surse : una este descompunerea vîrtejurilor mari, alta este oscilația lamei fluide în ansamblul ei. Ambele surse sînt întreținute de saltul hidraulic, care apare astfel ca un generator de vîrtejuri și ca un generator de oscilații.

Pe baza acestor date, rezultate din prelucrarea primară a măsurătorilor, s-au calculat pentru fiecare punct, momentele de ordinul 1 și 2 :

$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt, \tag{1}$$

$$\overline{u'^2} = \frac{1}{T}\int_0^T (u - \bar{u})^2\,dt. \tag{2}$$

Primul reprezintă evident viteza mediată în punctul dat, al doilea pulsația medie patratică a vitezei. Intensitatea de macroturbulență $K$ s-a definit cu relația :

$$K = \sqrt{\frac{\overline{u'^2}}{\bar{u}^2}}. \tag{3}$$

S-a calculat expresia acestui parametru și s-a reprezentat repartiția sa pe secțiune. Poziția fiecărei secțiuni s-a definit prin parametrul $\xi_x$ :

$$\xi_x = \frac{x}{h_{cr}} \tag{4}$$

originea axei $Ox$ (sau $O\xi_x$) fiind secțiunea contractată, respectiv, în cazul de față, prima secțiune conjugată a saltului.

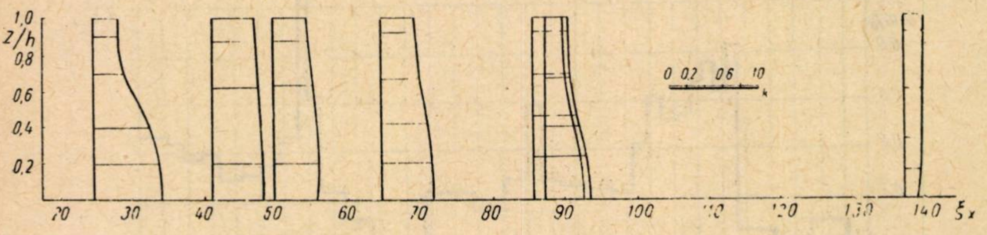


Fig. 13. — Repartizarea variaţiei intensităţii de macroturbulenţă $K$ în zona de tranziţie

$$K = f\left(\xi_x, \frac{z}{h}\right),$$

În figura 13 s-a reprezentat repartiția intensității de macroturbulență $K$ pe verticală în zona în care s-au efectuat măsurătorile, adică o relație de tipul :

$$K = f\left(\xi_x, \frac{z}{h}\right) \tag{5}$$

Se constată că:

*a*) Pe verticală, există o anumită neuniformitate a repartiţiei parametrului $k$, de regulă $k$ este mai mare la fund, decît la suprafaţă. Acest lucru s-ar explica prin faptul că vitezele mediate sînt mai mari la suprafaţă decît la fund.

*b*) Neuniformitatea repartiţiei pe verticală a parametrului $k$ este sensibilă în zona definită de inegalitatea $\xi_x < 35$, dar se reduce destul de rapid pentru $\xi_x > 35$ şi devine insensibilă la $\xi_x = 137{,}5$. Variaţia lui $k$ este un indice indirect al redistribuirii vitezelor pe verticală (de la o epură parabolică la alta dreptunghiulară).

*c*) Variaţia parametrului $k$ rezultată este coerentă; valorile $k$ scad în lungul scurgerii, datorită descompunerii vîrtejurilor, respectiv disipării energiei de pulsaţie; în două secţiuni apropiate ($\xi_x = 86$ şi $\xi_x = 87{,}5$) repartiţia şi valorile absolute sînt practic identice (ceea ce constituie şi un indiciu al preciziei de măsurare).

Date fiind aceste rezultate s-a considerat că pentru $\xi_x > 35$ se poate caracteriza intensitatea de macroturbulenţă în secţiune cu o singură valoare $K$. Pe această bază s-a reprezentat variaţia parametrului $K$ în lungul scurgerii (fig. 14)

$$K = f_1(\xi_x). \tag{6}$$

Pentru a putea aprecia rezultatele astfel obţinute s-au calculat valorile $K$ după formula empirică

$$K = \frac{1{,}52}{\frac{x}{h_2} - [1.69\sqrt{\eta - 4} - 0{,}195(\eta - 4)]}, \tag{7}$$

recomandată în lucrarea [6] pe baza experienţelor într-un canal vitrat de 0,624 × 0,40 × 3,50 m.

Valorile $K$ obţinute după această formulă pentru condiţii omoloage experienţelor noastre, au fost reprezentate pe acelaşi grafic din figura 14 în funcţie de $\xi_x$, adică

$$K = f_2(\xi_x).$$

Comparînd valorile $K$, obţinute din relaţiile (6) şi (7), reprezentate în figura 14 rezultă că:

*a*) În zona apropiată de capătul saltului ($\xi_x = 20 \div 30$) valorile $K$ cresc şi tind să se confunde.

*b*) În zona de tranziţie însă, valorile $K$ obţinute pe baza măsurătorilor în natură sînt la început sensibil mai mari, (aproape duble) faţă de cele obţinute pe baza măsurătorilor în laborator.

*c*) Într-o zonă îndepărtată de salt ($\xi_x > 120$) diferenţele dintre valorile $K$ tind să se reducă, ajungînd să se confunde, acolo unde macroturbulenţa s-a stins şi scurgerea a redevenit uniform turbulentă.

Aşadar, intensitatea de macroturbulenţă scade mult mai lent în natură, decît în laborator.

De observat că sensibilitatea limitată a instrumentului de măsură utilizat care filtrează macropulsațiile de amplitudine mică, nu amplifică ci reduce acest efect. În realitate este posibil că valorile absolute ale pulsației medii patratice $\overline{u'^2}$, și deci și ale intensității de macroturbulența $K$, în natură să fie și mai mari, ceea ce întărește concluzia formulată.

Deși datele obținute se referă numai la pulsația unei singure componente a vitezei, respectiv a celei longitudinale $u_x$, există o cale de apreciere și a influenței pulsației celorlalte componente $u_y$, $u_z$, ceea ce permite calculul corectivului energiei cinetice totale $\alpha$. Fie un element de suprafață $d\omega$, într-o secțiune vie situată în zona de tranziție ($\xi_x > 35$) și $u'_x$, $u'_y$, $u'_z$, componentele pulsației și a vitezei actuale $u$, asociată elementului $d\omega$. Energia cinetică $dE$ a fluxului care trece prin $d\omega$ în intervalul de timp $dt$ va fi:

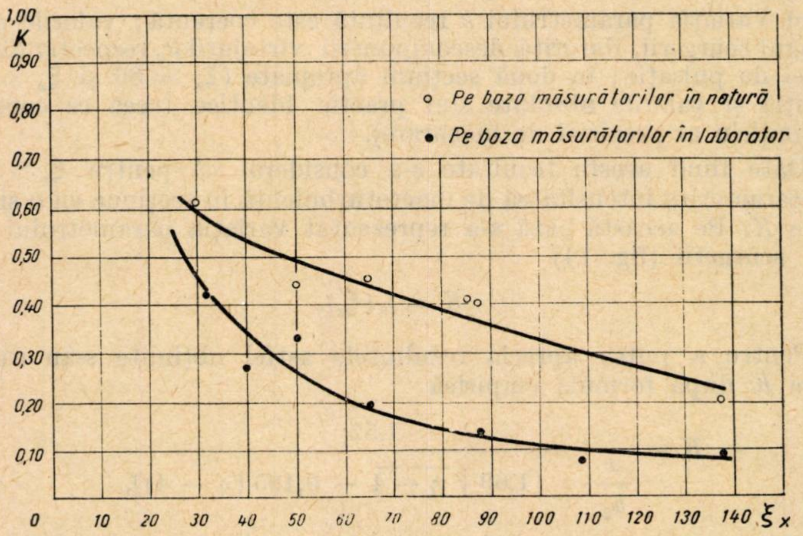


Fig. 14. —Variația intensității de macroturbulență $K = f_1(\xi_x)$ și $K = f_2(\xi_x)$.

$$dE = \frac{1}{2}[(\overline{u} + u'_x)^2 + u'^2_y + u'^2_z]\,\rho\,(\overline{u} + u'_x)\,d\omega\,dt,$$

în cate $\overline{u}$ este viteza mediată. Pentru a obține energia cinetică mediată, expresia $dE$ trebuie integrată într-un timp $T$ suficient de mare și rezultatul împărțit apoi la $T$. Notînd această operație de mediere cu bară, se obține:

$$\overline{(\overline{u} + u'_x)\,[(\overline{u} + u'_x)^2\,u'^2_y + u'^2_z\,]} = \overline{u}^3 + 3\overline{u}^2\,\overline{u}'_x + \overline{u}\,(3\overline{u}'^2_x + \overline{u}'^2_y + \overline{u}'^2_z) +$$

$$+\,\overline{u}'^3_x + \overline{u}_x\,\overline{u}'^2_y + \overline{u}'_x\,\overline{u}'^2_z.$$

Dar cum $\overline{u}' = 0$ şi ultimii trei termeni sînt infiniţi mici de ordin superior, se obţine pentru energia cinetică mediată :

$$E_T = \frac{1}{2}\left[\overline{u}^3 + \overline{u}\left(3\,\overline{u}_x^2 + \overline{u}_y^2 + \overline{u}'^2\right)\right] \rho d\omega.$$

Valoarea medie a energiei cinetice fiind :

$$\overline{E}_T = \frac{1}{2}\,\overline{u}^3\,\rho\, d\omega.$$

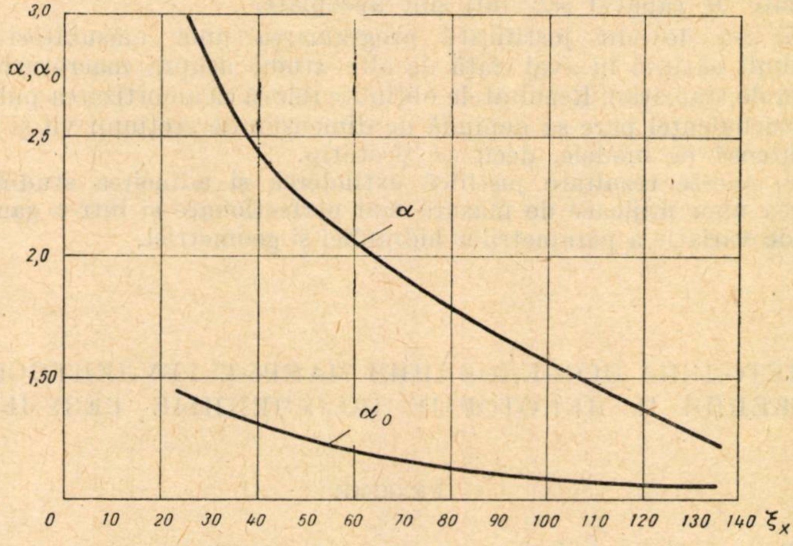


Fig. 15. — Variaţia coeficienţilor $\alpha = f\,(\xi_x)$ şi $\alpha_0 = f\,(\xi_x)$.

rezultă valoarea coeficientului de corecţie :

$$\alpha = 1 + \frac{3\,\overline{u_x'^2} + \overline{u_y'^2} + \overline{u_z'^2}}{\overline{u}^2}\,.$$

Deşi macroturbulenţa nu este izotropă, se poate admite aci :

$$\overline{u_x'^2} = \overline{u_y'^2} = \overline{u_z'^2}$$

şi deci

$$\alpha = 1 + 5\,k^2 \tag{8}$$

În mod analog se obţine

$$\alpha_0 = 1 + k^2 \tag{9}$$

S-au calculat valorile corectivelor $\alpha$ şi $\alpha_0$ cu datele $k$ din natură şi s-au reprezentat pe graficul din figura 15

$$\alpha = f\,(\xi_x) \quad \text{şi} \quad \alpha_0 = f\,(\xi_x). \tag{10}$$

De remarcat că, dacă în scurgerea uniform turbulentă valorile $\alpha$ sînt de ordinul 1,05–1,10, în cazul scurgerii macroturbulente rezultă $\alpha > 2$ pînă la $\xi_x < 50$, şi chiar la $\xi_x = 120$, $\alpha = 1{,}20$.

Pe baza rezultatelor obţinute se pot face o serie de observaţii :

*a*) Deşi morişca nu este instrumentul ideal pentru măsurarea pulsaţiei vitezelor, precizia datelor furnizate de ea în măsurători de teren, este de acelaşi ordin cu a celor obţinute prin alte metode, în laborator [6]. În sprijinul acestei afirmaţii vine şi faptul că rezultatele obţinute de noi şi de alţi autori pentru condiţii omoloage (respectiv în secţiuni apropiate de capătul saltului) sînt apropiate.

*b*) S-a dovedit justificată programarea unor măsurători într-o zonă mult extinsă în aval (faţă de alte studii asupra macroturbulenţei în zona de tranziţie). Rezultatele obţinute relevă că amortizarea pulsaţiilor macroturbulenţei pare să depindă de dimensiunile secţiunii vii şi că este mai intensă pe modele, decît pe prototip.

*c*) Aceste rezultate justifică extinderea şi adîncirea studiilor, cu folosirea unor mijloace de măsură mai perfecţionate şi într-o gamă mai largă de variaţie a parametrilor hidraulici şi geometrici.

## МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ МАКРОТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

### РЕЗЮМЕ

В настоящей работе излагаются аспекты некоторых проведенных автором исследований по макротурбулентному течению. Определение этого движения, характерные параметры и уравнение движения были представлены в предыдущей работе [1], результатом которой явилась необходимость экспериментальных исследований для освещения механизма движения. Эти исследования не могут ограничиться измерением распределения гидродинамических давлений по дну, что представляет собой лишь одно проявление макротурбулентности, а именно внешнее; особенно важно с теоретической и практической точек зрения, измерить макропульсации скорости.

Оправдывается необходимость выполнения измерений в широком диапазоне изменения характерных параметров, в частности на установках больших размеров, ибо не ясно могут ли числа $\mathcal{F}r$ и $\mathcal{R}e$, написанные со средними элементами, охарактеризовать полностью режим течения.

Были произведены измерения в бетонном канале с сечением в $0{,}60 \times 3{,}0$ м и длиной 50,80 м (рис. 1), причем удельные расходы доведены до 160 л/сек м.

Рассматриваются возможные системы измерения и оправдывается выбор вертушек. Были рассмотрены четыре типа вертушек (рис. 3,

4, 5, 7) и принята та вертушка, которая была построена в цехах ISCH. Она характеризовалась длиной синхронизации в 5 см и линейной характеристикой тарирования $V = RN$; винт вертушки имел возможность вращаться в обоих направлениях и давал на каждом обороте импульсы, идущие к электрическому регистрирующему прибору типа ,,*Ott*''. Отметчик времени указывал 0,2 сек. Приводится пример записи (рис. 8).

Предварительные опыты для опредления стандартной продолжительности опытов и плоского характера движения были проведены вертушкой типа ,,Др. Ланге'' (рис. 3, 11). На основании произведенных записей по семи сечениям, были определены осциллограммы продольной составляющей скорости и $(t)$ (рис. 12), и затем были вычислены для каждой измерительной точки величины

$$\overline{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u dt, \quad \overline{u'^2} = \frac{1}{T}\int_0^T (u - \overline{u})^2\, dt, \quad K = \sqrt{\frac{\overline{u'^2}}{\overline{u}^2}}\,.$$

Последний параметр представляет собой интенсивность макротурбулентности. Было изображено его изменение по сечению и вдоль течения (рис. 13). Оказывается, что при $\xi_x > 35$ $(\xi_x = x/gh_{cr})$ изменение $K$ по вертикали незначительно и принимается, что интенсивность макротурбулентности по сечению можно охарактеризовать одним значением $K$. На основании этого изображается изменение соотношения

$$K = f_1(\xi_x),$$

вытекающего из наших полевых измерений (рис. 14). На том же графике изображается

$$K = f_2(\xi_x),$$

полученное из лабораторных измерений. Вытекает, что в переходной зоне значения $K$ являются намного большими в натуре, на прототипе, чем в лаборатории, на модели.

Были вычислены на основании полевых измерений $\alpha$ и $\alpha_0$ и изображены в зависимости от $\xi_x$ (рис. 15).

## ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Применяемая экспериментальная установка.
Рис. 2. — Макротурбулентное течение в натуре.
Рис. 3. — Вертушка ,,Др. Ланге'' с электрическим счетчиком.
Рис. 4. — Вертушка J I.
Рис. 5. — Вертушка J II (приспособлена в ISCH).
Рис. 6. — Примеры записи макропульсаций скорости при помощи вертушки J II.
Рис. 7. — Вертушка J III (приспособлена в ISCH).
Рис. 8. — Примеры записи макропульсаций при помощи вертушки J III.
Рис. 9. — Микровертушка ISCH.
Рис. 10. — Тарировочные кривые вертушки J III (ISCH).

Рис. 11. — Эпюры осредненных скоростей в контрольном сечении.

Рис. 12. — Осциллограммы продольной составляющей актуальной скорости в некотором сечении.

Рис. 13. — Распределение изменения интенсивности макротурбулентности $K$ в переходной зоне $K = f\left(\xi_x \frac{z}{h}\right)$.

Рис. 14. — Изменение интенсивности макротурбулентности $K = f_1\,(\xi_r)$ и $K = f_2\,(\xi_x)$.

Рис. 15. — Изменение коэффициентов $\alpha = f\,(\xi_x)$ и $\alpha_0 = f\,(\xi_x)$

# MÉTHODES POUR L'ÉTUDE DU MOUVEMENT MACROTURBULENT DES FLUIDES LOURDS ET QUELQUES-UNS DES RÉSULTATS OBTENUS

## RÉSUMÉ

Dans ce travail, l'auteur continue d'exposer certains aspects des études qu'il a effectuées sur l'écoulement macroturbulent. La définition de ce mouvement, ses paramètres caractéristiques, ainsi qu'une équation du mouvement ont fait l'objet d'un travail antérieur [1], qui a montré, en outre, la nécessité des études expérimentales afin d'élucider le mécanisme du mouvement. Ces études ne sauraient être limitées à la mesure de la répartition des pressions hydrodynamiques sur le fond, qui ne représentent qu'une des manifestations de la macroturbulence, à savoir une manifestation extérieure ; au point de vue théorique et pratique, il est tout aussi important de mesurer les macropulsations de la vitesse. La nécessité d'effectuer des mesures dans un large domaine de variation des paramètres caractéristiques apparaît surtout dans le cas des installations de grandes dimensions, où il n'est pas évident que les nombres $\mathcal{F}r$ et $\mathcal{R}e$, écrits avec les éléments moyens, seraient capables de caractériser complètement le régime d'écoulement. On a effectué des mesures dans un canal de béton de 0,60 × 3,0 m de section et de 50,80 m de longueur (fig. 1) ; les débits spécifiques ont été d'environ 160 l/s.

L'auteur analyse les systèmes de mesures possibles et donne les arguments qui l'ont conduit à choisir les moulinets. Après avoir étudié quatre types de moulinets (fig. 3, 4, 5, 7), il en a adopté un, qui a été mis au point dans les ateliers de l'I.S.C.H. (Institut d'Etudes et de Recherches Hydrauliques). Le moulinet choisi est défini par une longueur de synchronisation de 5 cm et une caractéristique d'étalonnage linéaire, $V = kN$ ; son hélice tourne avec la même facilité dans les deux sens et donne, à chaque tour, une impulsion à un enregistreur électrique du type « Ott », dont la base de temps est de 0,2 s. L'auteur fournit un exemple d'enregistrement (fig. 8). Les expériences préliminaires pour déterminer la durée étalon et le caractère plan du mouvement ont été faites avec un moulinet « Dr. Lange » (fig. 3, 11). Les enregistrements,

effectués dans sept sections, ont permis de déduire les oscillogrammes de la composante longitudinale de la vitesse $u(t)$ (fig. 12). A partir de ces oscillogrammes, on a calculé ensuite, pour chaque point, les grandeurs

$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u dt, \quad \overline{u'^2} = \frac{1}{T}\int_0^T (u - \bar{u})^2 dt, \quad K = \sqrt{\frac{\overline{u'^2}}{\bar{u}^2}}.$$

Le dernier de ces paramètres est l'intensité de la macroturbulence, dont on a représenté la variation aussi bien dans la section que le long de l'écoulement (fig. 13). On constate que lorsque $\xi_x > 35$ ($\xi_x = x/h_{cr}$), la variation de $K$ sur la verticale est suffisamment petite pour que l'on admette avec raison que l'intensité de la macroturbulence puisse être caractérisée par une seule valeur de $K$ dans toute la section. Fondé sur cette hypothèse et sur les résultats de ses mesures sur les lieux, l'auteur a représenté (fig. 14) cette variation par la relation

$$K = f_1(\xi_x).$$

Sur le même graphique, on a représenté aussi

$$K = f_2(\xi_x),$$

déduite des mesures faites en laboratoire. Il s'ensuit que, dans la zone de transition, les valeurs de $K$ sont beaucoup plus grandes dans le cas d'un prototype que d'un modèle.

L'auteur a calculé, en outre, toujours à partir des mesures effectuées *in situ*, les valeurs de $\alpha$ et $\alpha_0$, qu'on a représentées en fonction de $\xi_x$ (fig. 15).

## EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Installation expérimentale utilisée.

Fig. 2. — L'écoulement macroturbulent réalisé.

Fig. 3. — Moulinet «Dr. Lange» à compteur électrique.

Fig. 4. — Moulinet J I.

Fig. 5. — Moulinet J II (adapté dans les ateliers de l'I.S.C.H.).

Fig. 6. — Exemple d'enregistrement des macropulsations de vitesse, avec le moulinet J II.

Fig. 7. — Moulinet J III (adapté dans les ateliers de l'I.S.C.H.).

Fig. 8. — Exemple d'enregistrement des macropulsations avec le moulinet J III.

Fig. 9. — Micromoulinet I.S.C.H.

Fig. 10. — Courbes d'étalonnage du moulinet J III (I.S.C.H.).

Fig. 11. — Epures des vitesses moyennes dans une section de contrôle.

Fig. 12. — Oscillogrammes de la composante longitudinale de la vitesse actuelle dans une section.

Fig. 13. — Répartition de la variation d'intensité de la macroturbulence $K$ dans la zone de transition $K = f\left(\xi_x, \frac{z}{h}\right)$.

Fig. 14. — Variation de l'intensité de la macroturbulence $K = f_1(\xi_x)$ et $K = f_2(\xi_x)$.

Fig. 15. — Variation des coefficients $\alpha = f(\xi_x)$ et $\alpha_0 = f(\xi_x)$.

## BIBLIOGRAFIE

1. E. **RĂZVAN**, *Parametrii caracteristici şi ecuaţia mişcării macroturbulente.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, *6* (1960).
2. И. И. **ЛЕВИ**, *Гидравлическое моделирование.* Москва, 1960.
3. Б. А. **ФИДМАН**, *Результаты измерения турбулентности в равномерном потоке.*, Изв. АН СССР, *11* (1953).
4. М. А. **ВЕЛИКАНОВ**, *Динамика русловых потоков.* **I**, Москва, 1954.
5. Е. М. **МИНСКИЙ**, *Турбулентности руслового потока.* Москва, 1953.
6. Д. И. **КУМИН**, *Турбулентности и гашение энергии при сопряжении бьефов.* Известия ВНИИГ, **55** (1956).
7. М. **ФОМИЧЕВ**, *Исследование характеристик потока на участке сопряжения бьефов.* Изд. АН СССР, 1959.
8. A. A. **TOWNSEND**, *The structure of the turbulent shear flow.* Cambridge, 1956.
9. E. **CARAFOLI**, T. **OROVEANU**, *Mecanica fluidelor*, Bucureşti, 1950.
10. D. **CIOC**, *Hidraulica şi mecanica fluidelor*, Bucureşti, 1960.

# CONSIDERAȚII ASUPRA DETERMINĂRII DISTRIBUȚIEI PRESIUNILOR ÎN LAGĂRELE ALIMENTATE SUB PRESIUNE

DE

V. N. CONSTANTINESCU

După cum este cunoscut, pentru a mări capacitatea portantă a lagărelor la viteze reduse sau pentru a îmbunătăți comportarea dinamică și răcirea acestora, se utilizează curent în tehnică alimentarea cu lubrifiant sub presiune. Pe această cale chiar posibilitatea ca să se înlăture contactul direct între suprafețe și pentru cazul cînd viteza relativă dintre suprafețe este foarte redusă. Efectul hidrodinamic de producere a presiunilor este atunci neglijabil iar regimul de lubrificație este denumit ,,hidrostatic''. Ca lubrifiant pot fi utilizate atît lichidele, cît și gazele.

Calculul lagărelor hidrostatice poate fi efectuat dacă se poate determina distribuția presiunilor care se produce datorită unui debit dat sau unei presiuni de alimentare cunoscute. În toate situațiile problema se reduce la a calcula repartiția presiunilor considerînd cunoscută presiunea în dreptul orificiilor sau fantelor de alimentare. Aceste valori sînt de multe ori necunoscute inițial, dar pot fi ulterior determinate scriind ecuații de debit corespunzătoare.

În unele cazuri simple se poate obține o aproximație suficientă înlocuind distribuția presiunilor cu una schematizată, de exemplu o variație liniară a presiunilor plecînd de la valoarea presiunilor de alimentare la valoarea presiunii din mediul înconjurător, pe frontiera lagărului. În general însă este necesar și util să se poată calcula cît mai corect distribuția presiunilor deoarece de aceasta depinde nu numai capacitatea portantă a lagărului, ci și grosimea stratului de lubrifiant (prin intermediul debitului de lubrifiant care depinde de presiune):

De aceea în cele ce urmează, vom căuta să determinăm distribuția presiunilor pentru unele tipuri de lagăre în special axiale.

Neglijînd influența forțelor de inerție asupra mișcării din stratul de lubrifiant, ecuația diferențială a presiunilor se scrie [1]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3 \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(h^3 \frac{\partial \eta}{\partial z}\right) = 0, \tag{1}$$

sau vectorial

$$\operatorname{div}\,(h^3 \operatorname{grad}\, \eta) = 0. \tag{2}$$

În ecuațiile de mai sus s-a adoptat sistemul de coordonate $x, y, z$ curent utilizat în problemele de lubrificație (axa $y$ normală la suprafețe); $h$ este grosimea stratului de lubrifiant, iar cu $\eta$ s-a notat

$$\eta = p^{\frac{1}{\varkappa}+1}, \tag{3}$$

unde, în cazul gazelor, $\varkappa$ este exponentul politropic al evoluției gazului lubrifiant ($\varkappa \cong 1$). În cazul lichidelor $\varkappa = \infty$ astfel încît $\eta = p$, deci prin $\eta$ trebuie să se înțeleagă atunci chiar presiunea.

În cazul cînd grosimea $h$ este constantă, din ecuația (1) rezultă că funcția $\eta$ este armonică,

$$\Delta \eta = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = 0, \tag{4}$$

observație care simplifică mult uneori determinarea presiunilor.

Ecuația (1), chiar sub forma simplificată (4) este greu de integrat pentru condiții la limită cu totul generale, soluția trebuind să fie găsită pentru fiecare caz sau cel puțin pentru anumite tipuri de condiții la limite. O metodă utilă și pentru alte probleme de lubrificație [2] este aceea de a dezvolta soluția $\eta$ într-o serie de produse de funcții de $x$ și $z$ metodă care, după cum se va arăta în cele ce urmează este indicată pentru situațiile în care alimentarea se face printr-o fantă.

Fie deci $\eta$ dezvoltat într-o serie de forma

$$\eta = \sum f_{1m}(x)\, f_{2m}(z), \tag{5}$$

care, introdusă în ecuația (1) conduce la următoarele ecuații diferențiale ordinare pentru determinarea funcțiilor $f_{1m}$ și $f_{2m}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 f_{1m}}{dx^2} + \frac{3}{h}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{df_{1m}}{dx} + \chi_m f_{1m} = 0 \\ \frac{d^2 f_{2m}}{dz^2} + \frac{3}{h}\frac{\partial h}{\partial z}\frac{df_{2m}}{dz} - \chi_m f_{2m} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

unde $\chi_m$ este o constantă arbitrară. Ecuațiile de mai sus sînt evident valabile numai dacă termenii $\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x}$, $\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial z}$ sînt funcții numai de $x$, respectiv numai de $z$. Această proprietate are loc dacă

$$h = h_1(x)\, h_2(z) \tag{7}$$

ceea ce este cazul pentru majoritatea aplicațiilor, deoarece de obicei $\frac{\partial h}{\partial z} = 0$.

Ecuații de tipul (6) intervin și în numeroase alte probleme de lubrificație și au fost studiate pentru diferite forme de variație a grosimii $h$, în special pentru variații liniare și trigonometrice [2]. Soluția astfel obținută poate conține 4 $m$ constante arbitrare, 3 $m$ constante dacă mișcarea este simetrică față de una din axele de coordonate și în sfîrșit 2 $m$ constante dacă mișcarea este simetrică față de ambele axe de coordonate. Deoarece însă condițiile la limită sînt total diferite de cazurile de lubrificație hidrodinamică menționate, soluțiile deja obținute nu pot furniza decît unele indicații calitative asupra formei analitice de variație a presiunilor. Mai mult, dacă există unul sau mai multe orificii de alimentare de diametre reduse, în vecinătatea acestora mișcarea prezintă o singularitate logaritmică [1], convergenta seriei (5) este slabă, iar calculele devin laborioase. De aceea s-a afirmat de la început că forma (5) a soluției este utilizată în special pentru lagărele alimentate printr-o fantă sau prin buzunare de alimentare de dimensiuni relativ mari, pe frontiera cărora presiunea este constantă.

Fie mai întîi cazul mai simplu $h =$ constant. Atunci ecuațiile (6) se integrează fără dificultăți iar funcția $\eta$ (5) ia forma

$$\eta = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m(\mathrm{ch}\,\sqrt{\chi_m}z + B_m \mathrm{sh}\,\sqrt{\chi_m}z)\,(\cos\sqrt{\chi_m}x + C_m \sin\sqrt{\chi_m}x) \quad (8)$$

Dacă mișcarea este simetrică în raport cu $z$, $B_n = 0$, iar dacă mișcarea este simetrică în raport cu $x$, $C_m = 0$; dacă există o simetrie dublă în raport cu $x$ și $z$ (suprafețe dreptunghiulare, eliptice etc.), din (8) se deduce

$$\eta = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \mathrm{ch}\,\sqrt{\chi_m}z \cos\sqrt{\chi_m}x \quad (9)$$

Dacă suprafața considerată are drept frontiere într-una din direcții două linii drepte, de exemplu $x = \pm\frac{l}{2}$ atunci

$$\sqrt{\chi_m} = (2n+1)\frac{\pi}{l} \quad (10)$$

și

$$\eta = \eta_0 + \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1}\,\mathrm{ch}\,(2n+1)\,\pi\lambda\frac{z}{b}\cos(2n+1)\,\pi\frac{x}{l} \quad (11)$$

cu $\lambda = \frac{b}{l}$, unde $\eta_0$ este valoarea funcției $\eta$ (3) corespunzătoare presiunii din mediul exterior $p_0$. În acest mod condiția $\eta = \eta_0$ pentru $x = \pm\frac{l}{2}$ este automat satisfăcută. Cu ajutorul constantelor $A_{2n+1}$ se pot satisface apoi celelalte condiții la limită, respectiv $\eta = \eta_0$ pe restul frontierei de alimentare şi $\eta = \eta_1$ pe frontiera buzunarului sau fantei de alimentare. Aceste condiţii pot fi impuse într-un număr de puncte. De exemplu cu 4 termeni ai seriei (11) se pot satisface condiţiile la limită menţionate într-un număr de 10 puncte în cazul a două suprafeţe dreptunghiulare (punctele $E$, $F$, $G$, $H$, $I$, $K$, $L$, $M$ şi dreptele $AB$ şi $CD$ pentru exemplul din fig. 1). Metoda este însă aplicabilă numai dacă $\lambda < 1$. Pentru alungiri $\lambda$ mai mari este necesară considerarea unui număr mai mare de termeni din seria (11) iar calculele devin laborioase. Din contra dacă lăţimea $b_i$ a buzunarului de alimentare este mare faţă de $l$ (cazul alimentării printr-o fantă) convergenta soluţiei este mult îmbunătăţită, dacă se adaugă soluţiei (11) o soluţie particulară, funcţie numai de $x$. Din ecuaţia (1) rezultă că această soluţie particulară $\eta_\infty$, trebuie să fie în mod necesar o funcţie liniară de $x$.

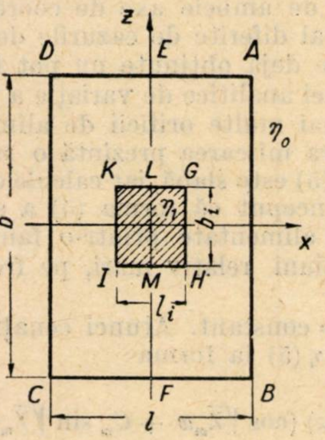


Fig. 1

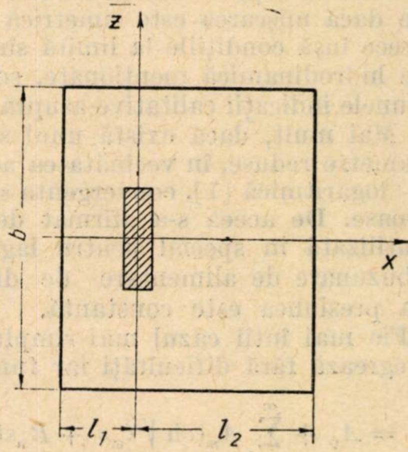


Fig. 2

Fie cazul a două suprafeţe dreptunghiulare alimentate nesimetric ca în figura 2. Soluţia particulară va avea forma

$$\left.\begin{aligned} \eta_\infty &= \eta_0 + (\eta_i - \eta_0)\left(1 + \frac{x}{l_1}\right); \quad -l_1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \eta_\infty &= \eta_0 + (\eta_i - \eta_0)\left(1 - \frac{x}{l_2}\right); \quad 0 \leqslant x \leqslant l_2 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

care poate fi dezvoltată în serie trigonometrică

$$\eta_\infty = \eta_0 + \frac{2(\eta_i - \eta_0)}{\frac{\pi^2}{4} - \varphi_i^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\cos(2n+1)\varphi_i}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)\varphi + \frac{\sin 2n\varphi_i}{4n^2} \sin 2n\varphi \right], \tag{13}$$

unde

$$\varphi = \frac{\pi}{l}\left(x + \frac{l_1 - l_2}{2}\right); \quad \varphi_i = \frac{\pi}{2}\,\frac{l_1 - l_2}{l}; \quad l = l_1 + l_2, \tag{14}$$

În acest mod soluția $\eta$ se scrie, dacă mişcarea este simetrică în raport cu $z$

$$\eta = \eta_\infty - \sum_{m=0}^{\infty} A_m \operatorname{ch} \sqrt{\chi_m} z \left(\cos \sqrt{\chi_m} x + C_m \sin \sqrt{\chi_m} x\right). \tag{15}$$

Condiția $\eta = \eta_0$ pentru $x = -l_1, l_2$ este automat satisfăcută dacă se ia

$$(\sqrt{\chi_m})_{m=2n} = \frac{2n\pi}{l}; \quad (\sqrt{\chi_m})_{m=2n+1} = (2n+1)\frac{\pi}{l}\cdot \tag{16}$$

Apoi din condiția $\eta = \eta_0$ pentru $z = \pm\frac{b}{2}$ se deduce

$$\left.\begin{aligned} & A_0 = \eta_0; \quad A_{2n}C_{2n} = \frac{2(\eta_i - \eta_0)}{\frac{\pi^2}{4} - \varphi_i^2}\frac{\sin 2n\varphi_i}{4n^2}; \quad A_{2n} = 0 \\ & A_{2n+1} = \frac{2(\eta_i - \eta_0)}{\frac{\pi^2}{4} - \varphi_i^2}\frac{\cos(2n+1)\varphi_i}{(2n+1)^2}; \quad C_{2n+1} = 0, \end{aligned}\right| \tag{17}$$

astfel încît soluția se scrie, ținînd seama de (14)

$$\begin{aligned} \eta = \eta_0 + \frac{2l^2(\eta_i - \eta_0)}{\pi^2 l_1 l_2} \sum_{n=0}^{\infty} & \left[\left(1 - \frac{\operatorname{ch}(2n+1)\frac{\pi z}{l}}{\operatorname{ch}(2n+1)\frac{\pi\lambda}{2}}\right)\frac{\cos(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{l_1 - l_2}{l}}{(2n+1)^2}\cdot\right. \\ & \cdot\cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{l}\left(x + \frac{l_1 - l_2}{2}\right)\right] + \\ & \left. + \left(1 - \frac{\operatorname{ch} 2n\frac{\pi z}{l}}{\operatorname{ch} 2n\frac{\pi\lambda}{2}}\right)\frac{\sin 2n\frac{\pi}{2}\frac{l_1 - l_2}{l}}{4n^2} \sin\left[2n\frac{\pi}{l}\left(x + \frac{l_1 - l_2}{2}\right)\right]\right]. \end{aligned} \tag{18}$$

Dacă mişcarea este simetrică şi în raport cu $x$ (fanta plasată simetric) atunci $l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$, $\varphi_i = 0$ iar formula (18) ia forma simplă

$$\eta = \eta_0 + \frac{8}{\pi^2}(\eta_i - \eta_0)\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{ch\,(2n+1)\frac{\pi z}{l}}{\operatorname{ch}(2n+1)\frac{\pi\lambda}{2}}\right)\frac{\cos(2n+1)\frac{\pi x}{l}}{(n+1)^2}. \tag{19}$$

Soluțiile de mai sus satisfac în mod riguros condițiile la limită $\eta = \eta_0$ pe frontiera exterioară a lagărului. În schimb, pentru condiția la limită ca $\eta = \eta_1$ pe conturul buzunarului de alimentare, nu avem la dispoziţie decît constanta $\eta_i$. În consecinţă conturul buzunarului trebuie să aibă o formă apropiată curbelor $\eta =$ const. rezultatele din soluţiile de mai sus.

Astfel de exemplu în fig. 3, 4 s-au reprezentat curbele $\frac{\pi^2}{8}\frac{\eta-\eta_0}{\eta_i-\eta_0} =$ $=$constant, pentru $\lambda = 1$ şi $\lambda = 2$ rezultate din soluţia (19). Se constată

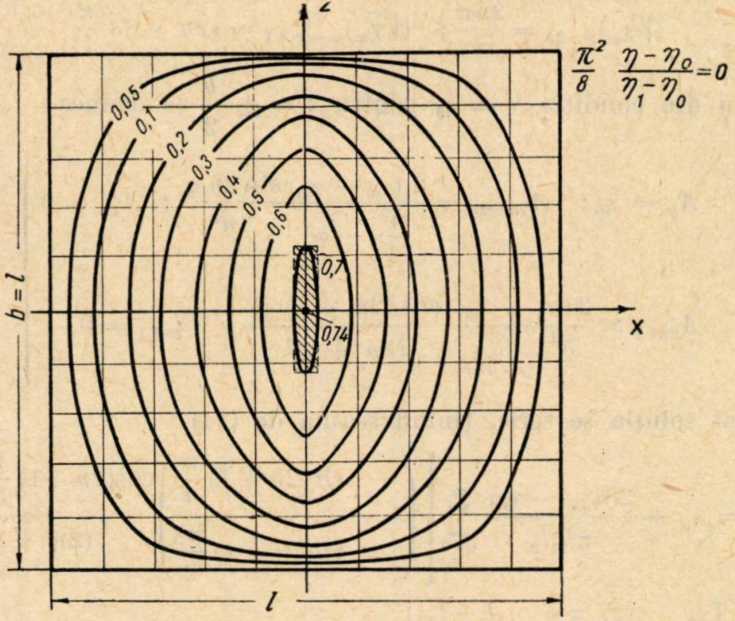


Fig. 3

astfel că în zona centrală curbele $\eta =$ const. se apropie mult de forma unui dreptunghi sau fantă alungită. Constanta $\eta_i$ se determină atunci astfel încît pe această frontieră $\eta$ să ia valoarea dată $\eta_1$.

Rezultatele de mai sus pot fi uşor extinse la cazul a două suprafeţe în formă de sector circular (fig. 5), utilizate în construcţia unor lagăre axiale. Astfel în coordonate polare $r$, $\theta$, ecuaţia (2) sau (4) se scrie

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\eta}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\eta}{\partial\theta^2}=0. \tag{20}$$

Utilizînd pentru $\eta$ o dezvoltare analoagă cu (5) se obţin ecuaţiile diferenţiale

$$\left.\begin{aligned} r\frac{d}{dr}\left(r\frac{df_{1m}}{dr}\right)+\chi_m f_{1m}=0\\ \frac{d^2f_{2m}}{d\theta^2}-\chi_m f_{2m}=0\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

şi

$$\eta = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left(\operatorname{ch} \sqrt{\chi_m}\,\theta + B_m \operatorname{sh} \sqrt{\chi_m}\,\theta\right) \left[\cos\left(\sqrt{\chi_m} \ln \frac{r}{r_a}\right) + \sin\left(\sqrt{\chi_m} \ln \frac{r}{r_a}\right)\right], \tag{22}$$

unde $r_a$ este raza corespunzătoare orificiului de alimentare.

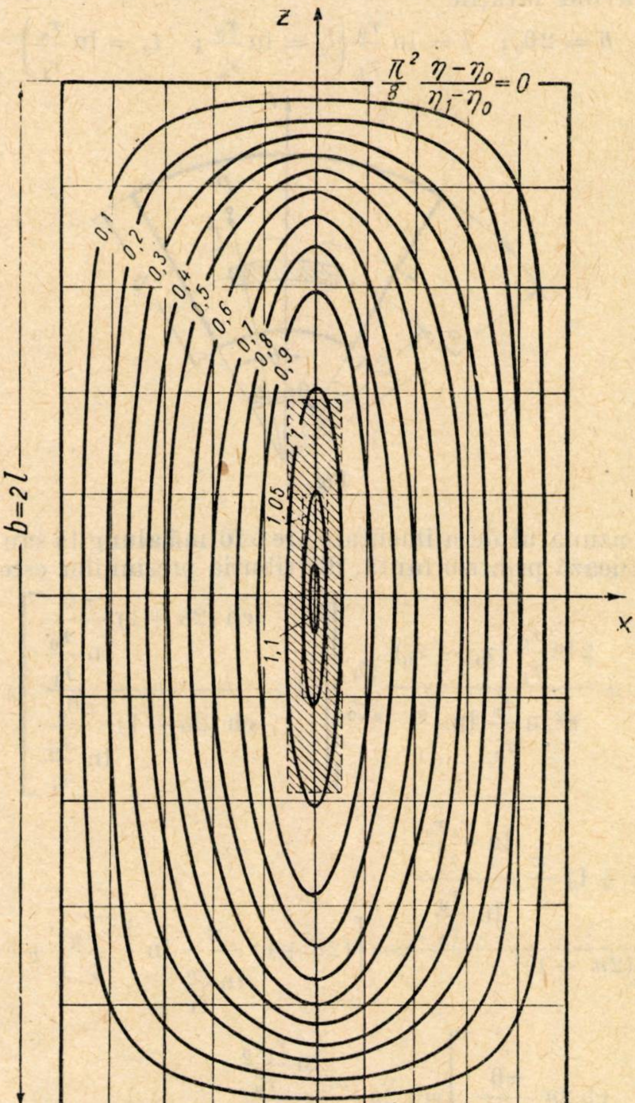


Fig. 4

Comparînd această soluţie cu (8) se constată o identitate completă dacă se efectuează substituţia

$$x = ln \frac{r}{r_a}; \qquad z = \theta. \tag{23}$$

Problema este deci echivalentă cu aceea corespunzătoare unui dreptunghi avînd laturile

$$b = 2\theta_0; \quad l = \ln \frac{r_0}{r_1}\left(l_1 = \ln \frac{r_0}{r_a}; \quad l_2 = \ln \frac{r_a}{r_1}\right). \tag{24}$$

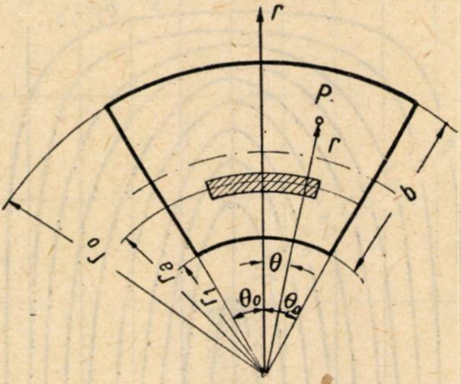


Fig. 5

Dacă buzunarul de alimentare are o formă alungită sau dacă alimentarea se efectuează printr-o fantă, distribuția presiunilor este dată de (18)

$$\eta = \eta_0 + \frac{2\ln\frac{r_0}{r_1}(\eta_i - \eta_0)}{\pi^2 \ln\frac{r_0}{r_a}\ln\frac{r_a}{r_1}} \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[1 - \frac{\operatorname{ch}(2n+1)\frac{\pi\theta}{\ln\frac{r_0}{r_1}}}{\operatorname{ch}(2n+1)\frac{\pi\theta_0}{\ln\frac{r_0}{r_1}}}\right]\cdot\right.$$

$$\frac{\cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{\ln\frac{r_1 r_0}{r_a^2}}{\ln\frac{r_0}{r_1}}\right.}{(2n+1)^2}\cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{\ln\frac{r_0}{r_1}}\ln\frac{\sqrt{r_1 r_0}}{r_a^2}\right] +$$

$$\left. + \left[1 - \frac{\operatorname{ch}2n\frac{\pi\theta}{\ln\frac{r_0}{r_1}}}{\operatorname{ch}2n\frac{\pi\theta_0}{\ln\frac{r_0}{r_1}}}\right]\frac{\sin 2n\frac{\pi}{2}\frac{\ln\frac{r_1 r_0}{r_a^2}}{\ln\frac{r_0}{r_1}}}{4n^2}\sin\left[2n\frac{\pi}{\ln\frac{r_0}{r_1}}\ln\frac{r\sqrt{r_1 r_0}}{r_a^2}\right]\right\}.$$

Soluţia corespunzătoare formulei (19) este

$$\eta = \eta_0 + \frac{8}{\pi^2}(\eta_i - \eta_0)\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{\operatorname{ch}(2n+1)\dfrac{r\theta}{\ln\dfrac{r_0}{r_1}}}{\operatorname{ch}(2n+1)\dfrac{\pi\theta_0}{\ln\dfrac{r_0}{r_1}}}\right)\frac{\cos(2n+1)\dfrac{\pi\ln\dfrac{r}{r_a}}{\ln\dfrac{r_0}{r_1}}}{(2n+1)^2}. \tag{25}$$

Ea nu mai corespunde însă alimentării simetrice în raport cu raza medie a sectorului, ci la o rază $r_a$ astfel încît

$$\ln\frac{r_0}{r_a} = -\ln\frac{r_1}{r_a} = \frac{1}{2}\ln\frac{r_0}{r_1};\quad r_a^2 = r_0 r_1. \tag{26}$$

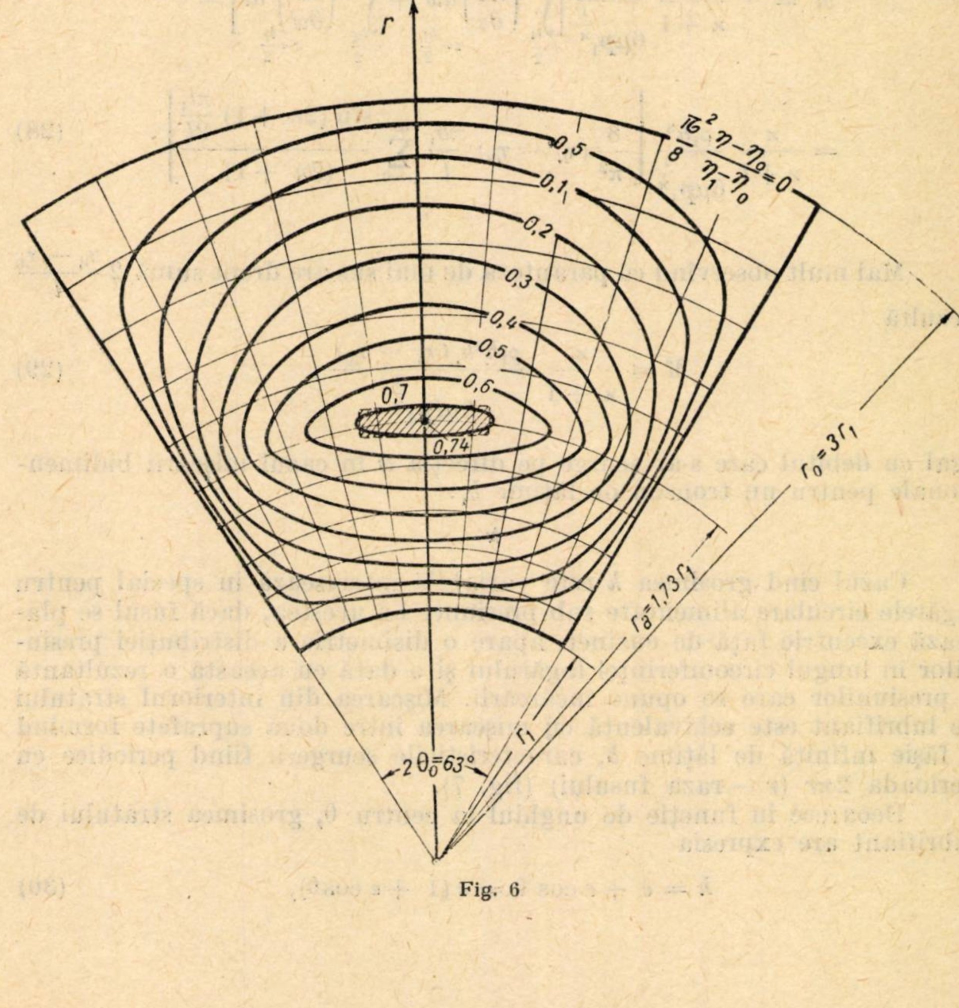


Fig. 6

Cu ajutorul relației (25) s-au trasat în figura 6 curbele $\frac{\pi^2}{8}\frac{\eta-\eta_0}{\eta_i-\eta_0}$ pentru cazul unui sector circular avînd $2\theta_0 = 63°$ și $\frac{r_0}{r_1} = 3$, condiții care corespund cazului $\lambda = 1$ din figura 3.

Debitul masic de lubrifiant se poate scrie apoi sub forma

$$M = -\frac{\rho_a h^3}{12\mu}\int_{g_i} \operatorname{grad} p\, \bar{n}\, ds, \tag{27}$$

unde $ds$ este un element diferențial luat în lungul curbei $g_i$ corespunzînd buzunarului de alimentare iar $\bar{n}$ versorul normal la această curbă. De exemplu după operații simple rezultă, dacă curba $q_i$ este un dreptunghi de laturi $l_i$, $b_i$, iar mișcarea simetrică în raport cu $x$ și $z$

$$M = -\frac{\varkappa}{\varkappa+1}\frac{\rho_1 h^3}{6\mu p_1^{\frac{1}{\varkappa}}}\left[\int_{-\frac{l_i}{2}}^{\frac{l_i}{2}}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)_{z=\frac{b_i}{2}} dx + \int_{-\frac{b_i}{2}}^{\frac{b_i}{2}}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_{x=\frac{l_i}{2}} dt\right] =$$

$$= \frac{\varkappa}{\varkappa+1}\frac{\rho_1 h^3}{6\mu p_1^{\frac{1}{\varkappa}}}\left[\frac{8}{\pi^2}(\eta_i-\eta_0)\frac{\pi b_i}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi l_i}{2l}}{(2n+1)}\right]. \tag{28}$$

Mai mult observînd că paranteza de mai sus are drept sumă $2\frac{\eta_i-\eta_0}{l}$ rezultă

$$M = \frac{\varkappa}{\varkappa+1}\frac{\rho_1 h^3 b_i(\eta_i-\eta_0)}{3\mu l p_1^{\frac{1}{\varkappa}}}, \tag{29}$$

egal cu debitul care s-ar scurge pe direcția $x$ în cazul mișcării bidimensionale pentru un tronson de lățime $b_i$.

★

Cazul cînd grosimea $h$ este variabilă interesează în special pentru lagărele circulare alimentate sub presiune. La acestea, dacă fusul se plasează excentric față de cuzinet, apare o disimetrie a distribuției presiunilor în lungul circomferinței lagărului și o dată cu aceasta o rezultantă a presiunilor care se opune încărcării. Mișcarea din interiorul stratului de lubrifiant este echivalentă cu mișcarea între două suprafețe formînd o fășie infinită de lățime $b$, caracteristicile scurgerii fiind periodice cu perioada $2\pi r$ ($r$ — raza fusului) (fig. 7).

Deoarece în funcție de unghiul la centru $\theta$, grosimea stratului de lubrifiant are expresia

$$h = c + e\cos\theta = c(1+\varepsilon\cos\theta), \tag{30}$$

unde $c$ este jocul radial, $e$ – excentricitatea iar $\varepsilon = \frac{e}{c}$ excentricitatea relativă, ecuațiile (6) se scriu

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 f_{1m}}{d\theta^2} - \frac{3\varepsilon \sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}\frac{df_{1m}}{d\theta} + \beta_m f_{1m} = 0,\\ &\frac{d^2 f_m}{dz^2} - \frac{\beta_m}{r^2} f_{2m} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

unde acum $\beta_m = r^2\chi_m$.

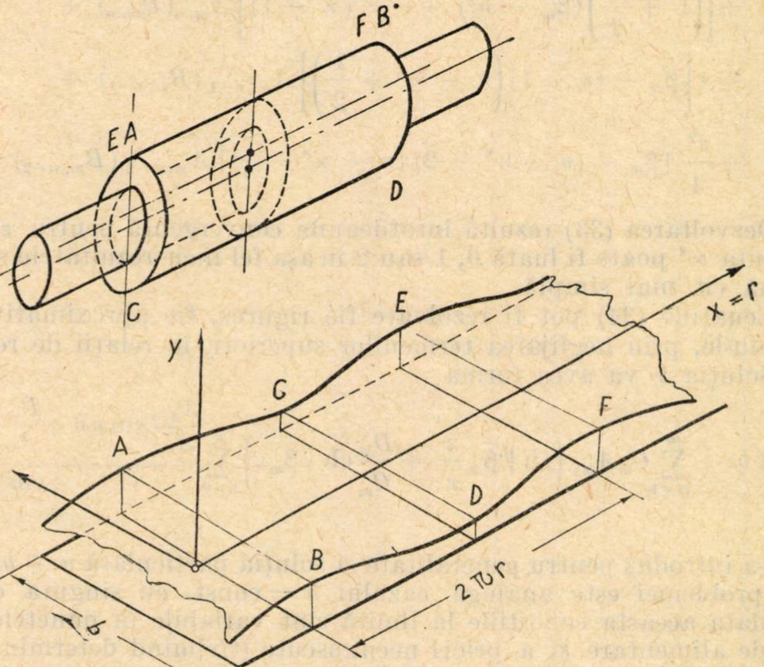


Fig. 7

Funcțiile $f_m$ au o expresie analoagă cu cele scrise anterior

$$f_{2m} = C_m \operatorname{sh} \sqrt{\beta_m}\frac{z}{r} + D_m \operatorname{ch} \sqrt{\beta_m}\frac{z}{r}, \tag{32}$$

unde $C_m = 0$ dacă mișcarea este simetrică în raport cu $z$. Pentru funcțiile $f_{1m}$ se poate utiliza dezvoltarea [2]

$$f_{1m}(\theta) = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(A_{n\,n}\sin n\theta + B_{m\,n}\cos n\theta)}{(1+\varepsilon\cos\theta)^{\varkappa^*}}, \tag{33}$$

rezultînd atunci următoarele ecuații cu diferențe finite pentru determinarea constantelor $A_{m,n}$, $B_{m,n}$:

$$
\begin{aligned}
&A_{m,-1} = -A_{m,1} \quad ; \quad B_{m,-1} = B_{m_1}\\
&A_{m,-2} = -A_{m,2} \quad ; \quad B_{m,-2} = B_{m_2}\\
&\frac{\varepsilon^2}{4}[\beta_m - (n + \varkappa^\star + 2)(n + \varkappa^\star - 1)]\, A_{m,n+2}\,(B_{m,n+2}) +\\
&+ \varepsilon\left[\beta_m - (n+1)\left(n + \varkappa^\star - \frac{1}{2}\right) + \frac{\varkappa^\star}{2}\right] A_{m,n+1}\,(B_{m,n+1}) +\\
&+\left[\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)(\beta_m - n^2) + \frac{\varkappa^\star\varepsilon}{2}(\varkappa^\star - 1)\right] A_{m,n}(B_{m,n}) +\\
&+ \varepsilon\left[\beta_m - (n-1)\left(n - \varkappa^\star + \frac{1}{2}\right)\right] A_{m,n-1}\,(B_{m,n-1}) +\\
&+\frac{\varepsilon^2}{4}[\beta_m - (n - \varkappa^\star - 2)(n - \varkappa^\star - 1)]\, A_{m,n-2}\,(B_{m,n-2}) = 0.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Dezvoltarea (33) rezultă întotdeauna convergentă pentru $\varepsilon < 1$ [2]. Constanta $\varkappa^\star$ poate fi luată 0, 1 sau 2 în așa fel încît rezultatele să capete o formă cît mai simplă.

Ecuațiile (34) pot fi rezolvate fie riguros, fie aproximativ, transformîndu-le, prin neglijarea termenilor superiori, în relații de recurență.

Soluția $\eta$ va avea forma

$$
\eta = a + bz + \sum_{m=1}^{\infty} C_m A_{m1}\left(\operatorname{sh}\sqrt{\beta_m}\frac{z}{r} + \frac{D_m}{C_m}\operatorname{ch}\sqrt{\beta_m}z\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\dfrac{A_{mn}}{A_{m_1}}\sin n\theta + \dfrac{B_{mn}}{A_{m_1}}\cos n\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^{\varkappa^\star}},
\tag{35}
$$

unde s-a introdus pentru generalitate și soluția particulară $a + bz$. Rezolvarea problemei este analogă cazului $h = \text{const.}$ cu singura deosebire că de data aceasta condițiile la limită sînt variabile în punctele sau pe liniile de alimentare și a priori necunoscute (trebuind determinate ulterior prin relații de debit).

Cel mai simplu caz este acela pentru care presiunile sînt constante pe cele două frontiere ale benzii infinite, de exemplu

$$
\begin{aligned}
\eta &= \eta_1, \qquad \text{pentru} \qquad z = 0,\\
\eta &= \eta_0, \qquad \text{pentru} \qquad z = \frac{b}{2}\cdot
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Atunci $A_{mn} = B_{mn} = C_m = D_m = 0$ iar soluția $\eta$ se scrie

$$
\eta = \eta_1 - (\eta_1 - \eta_0)\frac{2z}{b}\cdot
\tag{37}
$$

De multe ori, pentru simplificarea calculelor se înlocuiește variația reală a presiunilor după $z$ cu una liniară. Rezultatele de mai sus permit determinarea condițiilor în care simplificarea de mai sus este corectă. Să punem astfel soluția $\eta$ sub forma

$$\eta = (\alpha + \beta z)\,[\gamma f(\theta) + \delta]. \tag{38}$$

Înlocuind în ecuația (1) se deduce că funcția $f(\theta)$ trebuie să satisfacă ecuația diferențială

$$\frac{d}{d\theta}\left(h^3 \frac{df}{d\theta}\right) = 0, \tag{39}$$

corespunzătoare deci problemei bidimensionale a lagărelor circulare și egală cu

$$f(\theta) = \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^2}\left[\frac{-\varepsilon\sin\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} - \frac{3\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\,\frac{\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} + \right.$$

$$\left. + 2\,\frac{2+\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\right], \tag{40}$$

constantele de integrare fiind deja incluse în relația (38). În diagrama

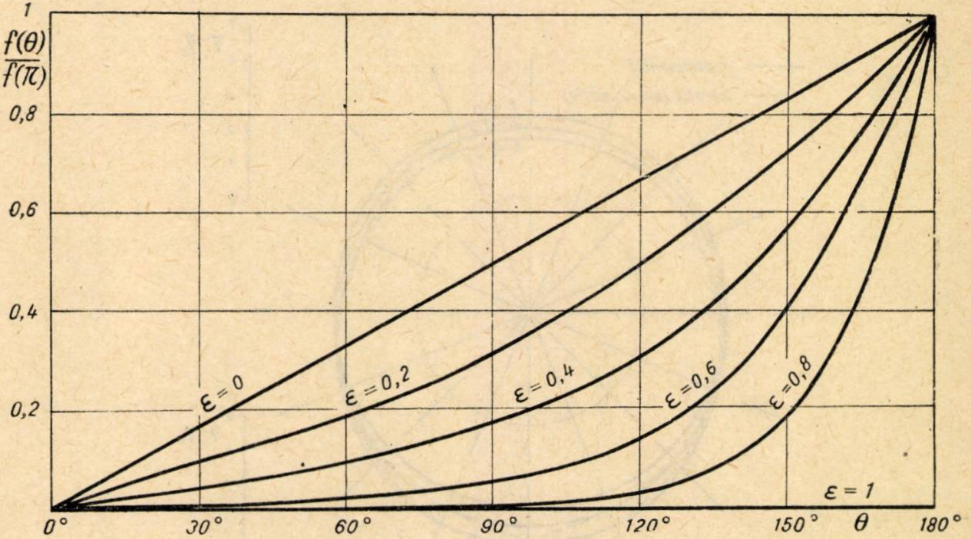


Fig. 8

din fig. 8 s-au trasat curbele $\frac{f(\theta)}{f(\pi)}$ pentru diferite valori $\varepsilon$. Aceste curbe prezintă puncte unghiuloase la $\theta = 0$ și $\theta = \pi$, datorită termenului

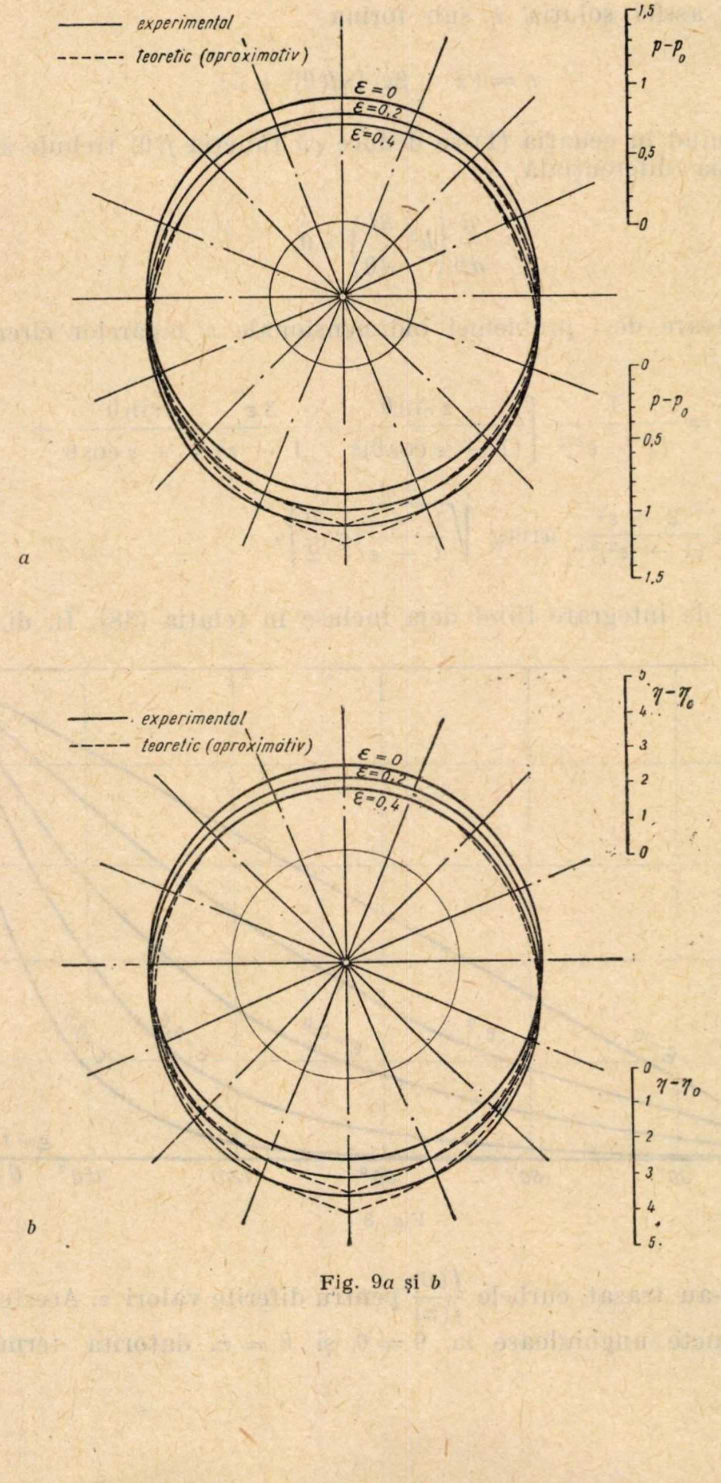

experimental
teoretic (aproximativ)
ε = 0
ε = 0,2
ε = 0,4
1,5
p − p₀
1
0,5
0
0
p − p₀
0,5
1
1,5
a
experimental
teoretic (aproximativ)
ε = 0
ε = 0,2
ε = 0,4
5
η − η₀
4
3
2
1
0
0
η − η₀
1
2
3
4
5
b

Fig. 9*a* și *b*

arctg. Totuși, pentru excentricități reduse, relația (40) poate reprezenta suficient de exact distribuția presiunilor în lagărele circulare alimentate sub presiune pe o fantă pe circumferința întregului lagăr [3].

Astfel în figura 9 *a* s-a reprezentat distribuția experimentală a presiunilor în secțiunea mediană a unui lagăr circular alimentat cu aer printr-o fantă de lățime 0,5 c, $c = 0{,}057$ mm, raza fusului $r = 15$ mm, lățimea $b = 80$ mm, presiunea înainte de fantă $p_a = 3$ kgf/cm$^3$ [3] pentru $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = 0{,}2$ și $\varepsilon = 0{,}4$. Pe baza acestor date s-au construit curbele $\eta(\theta)$ reprezentat în figura 9 *b*. Cu linie punctată s-au reprezentat curbele $\eta(\theta)$ la $z = 0$, determinate printr-o alegere convenabilă a constantelor $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$. Se constată că diferențele față de curbele experimentale sînt destul de reduse, diferențele asupra presiunilor (fig. 9 *a*) fiind și mai reduse.

De exemplu pentru $\varepsilon = 0{,}4$, presiunile sînt date de formula

$$p = p_0\left[1 + \left(1 - \frac{2z}{b}\right)(1{,}9 + 2{,}1)\frac{f(\theta)}{f(\pi)}\right]^{1/2} \qquad (41)$$

iar distribuția presiunilor pe suprafața desfășurată a lagărului este reprezentată în diagrama din figura 10. Rezultatele obținute în acest mod

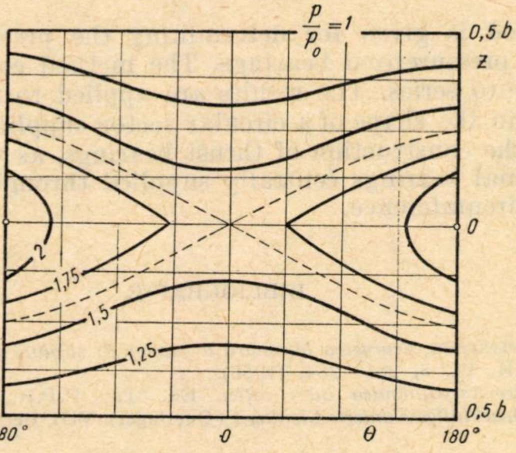


Fig. 10

sînt destul de apropiate de cele exacte. Eventual precizia rezultatelor poate fi îmbunătățită dacă se consideră soluția (38) ca o soluție particulară, care se adaugă dezvoltării în serie (35). În acest caz condițiile de racordare a curbelor la $\theta = 0, \pi$ sînt mai bune, în schimb calculele devin laborioase.

*Primită la redacție la 25 iunie 1961.*

# К ОПРЕДЕЛЕНИЮ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЙ В ПОДШИПНИКАХ, ПИТАЕМЫХ ПОД ДАВЛЕНИЕМ

## РЕЗЮМЕ

В работе излагается метод определения распределения давлений в подшипниках с жидкостной или газовой смазкой под давлением, состоящий из разложения решения в ряд.

Результаты применяются к случаю прямоугольных поверхностей и поверхностей в виде кругового сектора, питаемых через центральную щель, которые применяются для построения упорных подшипников и для расчета круглых подшипников, питаемых центрально через щель, расположенную по окружности подшипника.

# CONSIDERATIONS ON THE PRESSURE DISTRIBUTION IN HYDROSTATIC BEARINGS

## ABSTRACT

A method is given for determining the pressure distribution in gas or liquid pressurerized bearings. The method consists in developing the solution into series. The results are applied to rectangular surfaces and to those in the shape of a circular sector supplied through a central slot, used in the construction of thrust bearings, as well as to the calculation of journal bearings centrally supplied through a slot situated on the bearing circumference.

## BIBLIOGRAFIE

1. V. N. Constantinescu, *Scurgerea laminară a gazelor în straturi subțiri*. Comunicările Acad. R.P.R. **VI**, *2*, 281–284, (1956).
2. N. Tipei, *Hidro-Aerodinamica lubrificației*. Ed. Acad. R.P.R., 1957.
3. B. Brunzel, *Druckluftgeschmierte Gleitlager* (Querlager). VDI Berichte, **20**, 123–131 (1957).

## UNGERE – FRECARE – UZURĂ

# METODE PENTRU MĂSURAREA GROSIMII FILMULUI DE LUBRIFIANT LA LAGĂRE CIRCULARE

DE

D. PAVELESCU și I. ILIUC

Într-o lucrare precedentă [3], s-a prezentat o metodă cu izotopi radioactivi, prin care s-a putut determina grosimea limită a filmului de lubrifiant la care se menține regimul hidrodinamic, între două plăci metalice circulare ; s-au scos totodată în evidență părerile controverse ce există asupra valorii acestei grosimi, care se mențin tocmai din cauza dificultăților de măsură și a eficacității limitate a metodelor ce au fost utilizate în unele cazuri (metode optice, cu interferență, cu raze X, electrice-capacitive sau inductive) [2], [3], [6], [7], [8], [9], [10].

O parte din metodele menționate limitează însă utilizarea lor numai la faza de laborator sau la cazuri particulare. Nu cunoaștem din literatura de specialitate, o metodă de măsurare a filmului de ulei la lagăre, care să utilizeze izotopii radioactivi.

Posibilitatea măsurării grosimii filmului de lubrifiant la lagăre în regim dinamic, interesează în mod deosebit, atît prin aceea că contribuie la verificarea unor ipoteze ce stau la baza teoriei lubrificației lagărelor, cît și la confirmarea practică a unor elemente de calcul a lagărelor circulare de alunecare. Este cunoscut faptul că grosimea minimă a filmului de lubrifiant condiționează uzura minimă, siguranța în exploatare și deci durabilitatea maximă a lagărului. De asemenea distribuția temperaturii în lagăr — și temperatura de intrare și ieșire a uleiului —, influențînd asupra variației viscozității și deci a grosimii filmului de lubrifiant, devine un factor esențial în proiectarea și funcționarea lagărului ; cunoașterea acestei distribuții este deci la rîndul ei de importanță deosebită [4].

Din literatura de specialitate și din stadiul actual al tehnicii respective de fabricație, rezultă că toate aceste probleme sînt în momentul de față de mare actualitate, soluționarea lor impunîndu-se a fi făcută prin metode cît mai moderne.

Față de cele de mai sus, s-au continuat cercetările, studiindu-se o metodă radioactivă în paralel cu o metodă electrică inductivă. Necesitatea

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1845

acestor două metode este impusă de condiţiile specifice în cazul măsurătorilor de peliculă la lagăre circulare :

— Posibilitatea de măsură fără contact direct în punctele în care se efectuează măsurătoarea;

— intervalul de măsură între 1—100 microni (pentru diametrul fusului de circa 45 mm);

— suprafaţa de referinţă să nu fie exterioară cuzinetului, pentru a nu include deplasările din celelalte lagăre, inclusiv elasticitatea materialului;

— rotirea axului să nu influenţeze rezultatul măsurătorilor;

— să se asigure reproductibilitatea rezultatelor experimentale cu o eroare relativă medie cît mai mică;

— metoda utilizată să nu conducă la o aparatură ancombrantă, sau numai la condiţii de laborator.

Deoarece, în ambele cazuri măsurătoarea se face prin intermediul traductorului respectiv — contor Geiger Müller sau cu scintilaţie, şi respectiv traductor electric —, se pune de la început problema stabilirii unei competenţe comune a contorului de radiaţie şi a traductorului inductiv, faţă de elementul de măsurat.

Instalaţia de măsură respectivă (traductor + circuit de măsură) trebuie să asigure o dependenţă convenabilă din punctul de vedere al sensibilităţii şi preciziei între un „volum util'' $V_u$ de ulei ce trebuie sesizat de traductor şi parametrul de ieşire al instalaţiei de măsură (impulsuri pe minut, sau o altă mărime electrică).

Dacă $Y$ este parametrul de ieşire, atunci traductorul trebuie să asigure dependenţa

$$Y = f(V_u) \text{ sau } Y = f(K.\delta). \tag{1}$$

Din figura 1, rezultă următoarele notaţii :

$\delta$ = grosimea filmului de ulei într-o direcţie oarecare;

$C = r_2 - r_1$, jocul radial;

$e$ = excentricitatea — distanţa dintre axele cuzinetului şi fusului;

$\alpha = \frac{e}{C}$, excentricitatea relativă;

$\theta$ = unghiul dintre linia centrelor $O_1 - O_2$ şi o direcţie oarecare; (s-a considerat un lagăr circular în cazul $\alpha = 1$).

În situaţia măsurătorii arătate, volumul util este

$$V_u = S.\ L, \tag{2}$$

unde

$L$ = lungimea pe generatoare, egală cu fanta traductorului;

$S$ = secţiunea cuprinsă între fus şi cuzinet şi direcţiile $\theta - \Delta\theta$ şi $\theta + \Delta\theta$

În cazul unui lagăr circular, $\delta$ grosimea peliculei rezultă din relaţia [5]

$$\delta = C(1 + \alpha\cos\theta). \tag{3}$$

Secţiunea $S$ se poate obţine din (3) :

$$S = \int_{\theta-\Delta\theta}^{\theta+\Delta\theta} \delta d\theta = C(2\,\Delta\theta + 2\alpha\sin\Delta\,\theta\cdot\cos\theta). \tag{4}$$

În cazul în care se consideră variabilă grosimea peliculei $\delta$, se obţine :

$$S = 2\,\Delta\theta C + 2(\delta - C)\,\sin\Delta\theta, \tag{5}$$

în care $2\,\Delta\theta$ este unghiul corespunzător porţiunii de peliculă „utilă" traductorului.

După cum se vede, pentru un lagăr circular şi un traductor de anumite dimensiuni, volumul util este funcţie numai de grosimea peliculei $\delta$ pe direcţia corespunzătoare axului traductorului.

Pentru posibilitatea de măsurare a lui $\delta$ corespunzător unghiului $\theta$ este necesară o etalonare prealabilă şi deci realizarea într-un mod oarecare de diferite grosimi pe direcţia $\theta$ şi măsurarea simultană a valorilor parametrului de ieşire. O soluţie ar putea fi deplasarea pe o anumită direcţie, din 10 în 10 microni, a cuzinetului, împreună cu montura respectivă. Realizarea practică a acestei soluţii este însă dificilă, din care cauză s-a urmărit etalonarea pe altă cale.

Se pot obţine diferite valori pentru $S$ şi deci respectiv pentru $\delta$, dacă pentru $\alpha = 1$ şi $\omega = 0$ se dau diferite înclinaţii traductorului faţă de linia centrelor (s-a notat cu $\omega$ suma vitezelor unghiulare a cuzinetului şi fusului).

Din relaţiile (3) şi (4) rezultă în acest caz :

$$\delta' = C(1 + \cos\theta), \tag{3'}$$

$$S' = C(2\,\Delta\theta + 2\,\sin\Delta\theta\,\cos\theta) \tag{4'}$$

sau în funcţie de $\delta'$

$$S' = 2\,\Delta\theta\;C + 2(\delta' - C)\,\sin\Delta\theta \tag{5'}$$

Dacă secţiunile $S$ şi $S'$ sînt egale, volumele respective utile $V_u$ şi $V'_u$ sînt egale; etalonarea traductorului este deci valabilă permiţînd citirea grosimilor $\delta = \delta'$ pentru că la acelaşi $\delta$ secţiunile volumului util al traductorului sînt aceleaşi indiferent de $\alpha$. Etalonarea se va putea efectua deci în regim static la $\alpha = 1$, prin încărcarea repetată a cuzinetului.

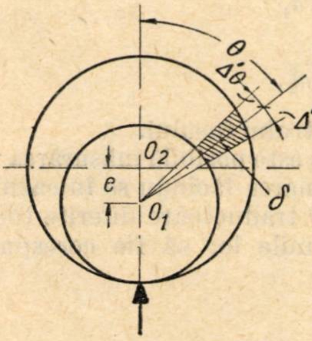


Fig. 1

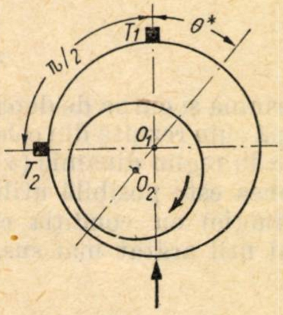


Fig. 2

În abscisa diagramei de etalonare se poate considera $\delta$, $S$ sau direct $\theta$, în ordonată fiind trecută mărimea de ieşire $Y$ a instalaţiei de măsură. Pentru o rezolvare mai uşoară, se reprezintă şi funcţia $\cos\theta$ pe diagrama de etalonare.

Pentru determinarea poziţiei centrului fusului, şi deci pentru determinarea lui $\theta^*$ (unghiul dintre direcţia rezultantei presiunilor şi linia centrelor), şi $\alpha$, sînt necesare cîte două determinări.

În figura 2 sînt reprezentate poziţiile de măsură ale traductoarelor $T_1$ şi $T_2$ în raport cu direcţia de aplicare a forţei, pentru cazul mai general $\alpha \neq 1$.

Pentru grosimile $\delta_1$ şi $\delta_2$ rezultă :

$$\delta_1 = C[1 + \alpha\cos(2\pi - \theta^*)], \tag{6}$$

$$\delta_2 = C\left[1 + \alpha\cos\left(2\pi - \theta^* - \frac{\pi}{2}\right)\right], \tag{7}$$

de unde

$$\frac{\delta_1}{C} - 1 = \alpha\cos\theta^*\,;\; \frac{\delta_2}{C} - 1 = -\,\alpha\sin\theta^*, \tag{8}$$

însă pentru $\alpha = 1$ rezultă

$$\frac{\delta_1}{C} - 1 = \cos\theta_1 = a_1, \tag{9}$$

$$\frac{\delta_2}{C} - 1 = \cos\theta_2 = a_2, \tag{9'}$$

$a_1$ şi $a_2$ fiind ordonatele respective de pe diagrama de etalonare corespunzătoare valorilor $\cos\theta_1$ şi $\cos\theta_2$.

Din ultimele relaţii de mai sus rezultă deci că

$$\alpha\cos\theta^* = a_1 \text{ şi } -\alpha\sin\theta^* = a_2$$

$$\text{de unde} \quad \operatorname{tg}\theta^* = -\frac{a_2}{a_1} \tag{10}$$

şi

$$\alpha = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \tag{11}$$

care determină şi curba de deplasare a centrului fusului.

După cum rezultă din cele de mai sus este posibilă măsurarea valorilor $\delta$, $\theta^*$, şi $\alpha$ în regim dinamic ($\alpha \neq 1$) etalonarea făcîndu-se în cazul $\alpha = 1$ ; de asemenea este posibilă utilizarea unor traductoare diferite (de radiaţii şi de inducţie) cu condiţia ca dimensiunile lor să fie corespunzătoare volumului util arătat mai sus.

## METODA RADIOACTIVĂ

Ca funcţie de volum, s-a ales activitatea $\Lambda_v$ care este direct proporţională cu volumul util, dacă activitatea specifică este constantă :

$$\Lambda_v = \Lambda_s \times V_u\,. \tag{12}$$

Pentru realizarea instalației care să utilizeze variația activității pentru măsurarea lui $\delta$ în condițiile cerute, au trebuit rezolvate următoarele etape:

*a*) Alegerea și obținerea unui trasor radioactiv care să poată fi răspîndit omogen în întregul volum de ulei, ca și în cazul metodei din lucrarea [3].

Ca trasor a fost ales indiu radioactiv (In $^{114*}$) care prezintă mai multe avantaje pentru scopul de față.

Pentru a putea asigura repartizarea omogenă a trasorului în ulei, este necesar ca indiul metalic să fie transformat într-o combinație solubilă în ulei; s-a constatat eficace oleatul de indiu. Trebuie menționat faptul că s-au ivit dificultăți la obținerea oleatului de indiu pur, apt de a fi expus în reactor, și de asemenea la dizolvarea oleatului radioactiv în ulei, dificultăți care însă au putut fi depășite. S-a constatat, de asemenea, necesitatea de a se activa la un flux puternic de neutroni ($10^{13}$ n/cm$^2$/s) precum și faptul că se produce o ușoară descompunere a preparatului.

*b*) Realizarea unui dispozitiv de măsură. Acest dispozitiv este compus din traductorul propriu-zis, un colimator, suportul cuzinetului, canalele de alimentare și cele colectoare de ulei, dispozitivul trebuind să asigure o eficacitate totală maximă, pentru volumul de ulei măsurat și una cît mai mică pentru volumele alăturate acestuia. Schița instalației este prezentată în figura 3.

Pentru scopul arătat s-a intercalat între volumul de ulei măsurat și traductor (în cazul de față un contor cu scintilație), un colimator de plumb, care se prelungește pe o anumită porțiune și în cuzinet. S-a utilizat un cuzinet de oțel, grosimea peretelui pe direcția măsurată fiind redusă la minimum 0,7 mm; dimensiunea fantei de măsură este de 3 × 12 mm. Măsurătoarea se poate executa în condiții similare și cu un cuzinet de bronz, compoziție etc.

Pentru a se realiza un fond de numărare cît mai redus trebuie micșorat la minimum volumul constant de ulei din preajma colimatorului de plumb. Acest deziderat a putut fi realizat utilizînd pentru alimentarea și evacuarea uleiului două cavități inelare cu secțiune minimă, obținute constructiv la capetele cuzinetului.

Prin utilizarea indiului radioactiv ($E_\gamma = 0{,}191$ MeV și $E_\beta = 1{,}958$ MeV), eficacitatea colimatorului de plumb crește mult deoarece coeficientul de atenuare masic pentru Pb în acest caz este de aproximativ 6 ori mai mare decît pentru Fe.

Realizarea fizică a dispozitivului de măsură este arătată în fotografiile din figurile 4 și 4 *a*.

Ca traductor s-a folosit un fotomultiplicator cu scintilator de iodură de sodiu cu taliu, așezat în axul fasciculului de radiație. Utilizarea fotomultiplicatorului a permis, (față de contorii G-M), datorită eficacității ridicate, o reducere esențială a activității specifice a uleiului.

*c*) Realizarea unei etanșări corespunzătoare și a unui sistem de circulație fără pierderi.

Pentru realizarea etanșării și pentru reducerea la minimum a volumului conductelor de circulație a uleiului radioactiv din apropierea traduc-

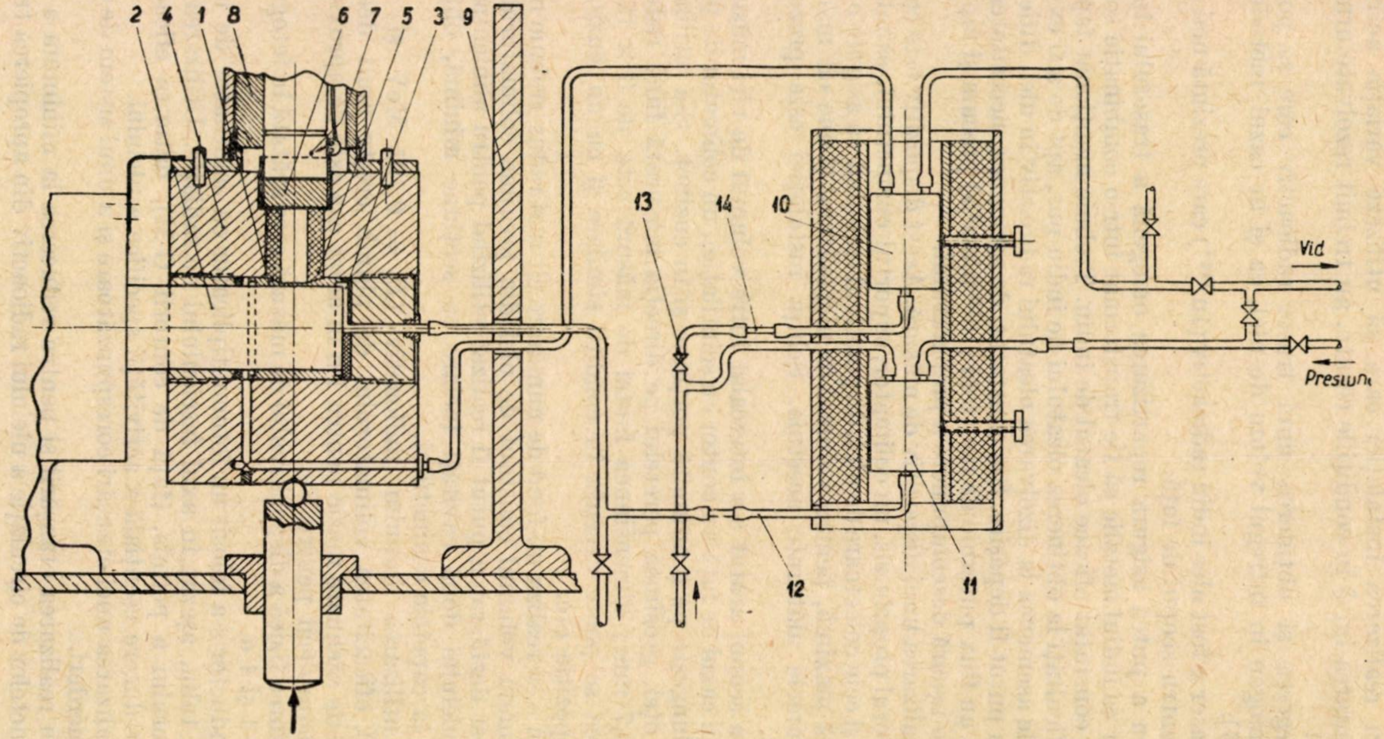


Fig. 3.— Instalaţie pentru măsurarea cu izotopi radioactivi a grosimii peliculei de lubrifiant într-un lagăr în funcţionare.

*1* – Cuzinet de bronz; *2* – Ax oţel; *3* – Garnituri; *4* – Suportul cuzinetului; *5* — Colimator din plumb; *6* – Scintilator; *7* – Fotomultiplicator; *8* – Suportul fotomultiplicatorului; *9* – Ecran din plumb; *10* – Recipient colector; *11* – Recipient de alimentare; *12* – Conducte polivinil; *13* – Cleme; *14* – Vizori.

torului, s-a recurs la alimentarea cuzinetului printr-o parte şi la evacuarea uleiului prin cealaltă parte. Scăpările de ulei din cavitatea colectoare au fost evitate într-o măsură mare prin crearea unei depresiuni. În vederea reducerii volumului total de ulei, şi în acelaşi timp pentru evitarea pierde-

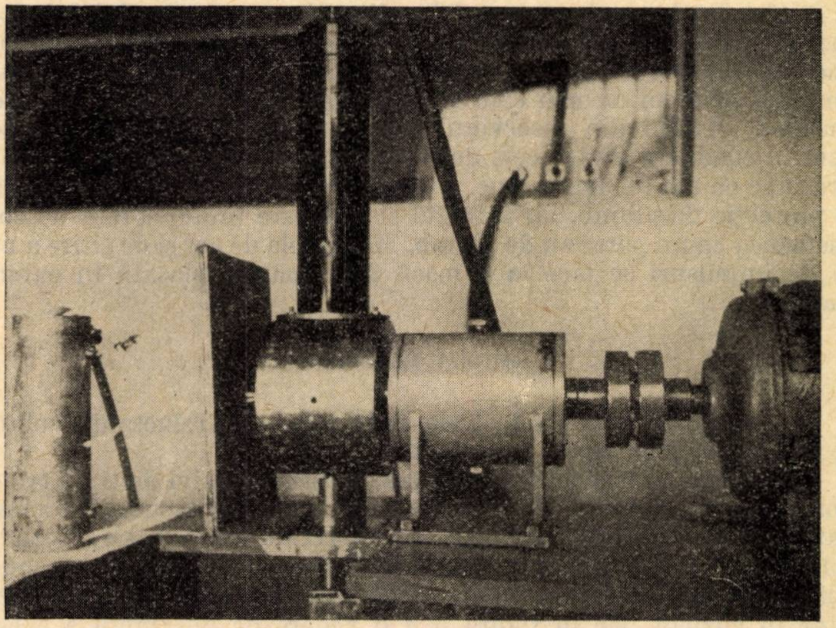


Fig. 4. — Realizarea instalaţiei din figura 3.

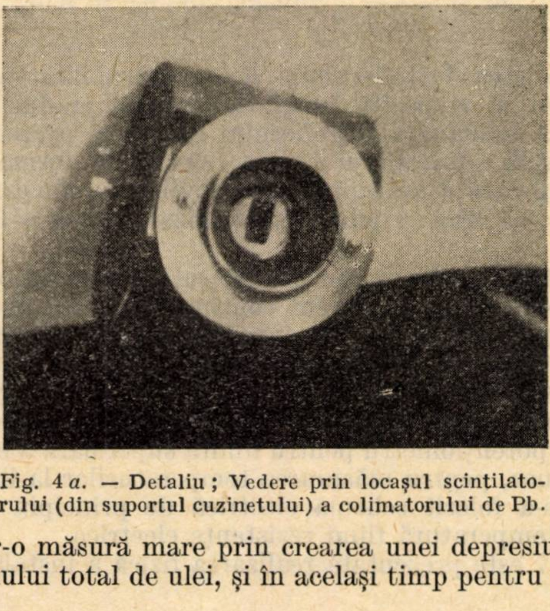


Fig. 4 *a*. — Detaliu ; Vedere prin locaşul scintilatorului (din suportul cuzinetului) a colimatorului de Pb.

rilor s-a recurs la soluția alimentării periodice a cuzinetului cu ulei prin manevre de aer comprimat și vacuum, dispozitivul de alimentare rezultînd din figura 3.

Astfel după umplerea cu ulei radioactiv a rezervorului inferior, se creează în sistem presiunea și depresiunea necesară care trimite uleiul prin cuzinet în rezervorul superior. Vizoare montate pe conducte, semnalează terminarea rezervei de ulei sau eventuale globule de aer în ulei. Pentru readucerea uleiului din rezervorul superior în cel inferior, se deschide accesul în conducta dintre cele două rezervoare și se inversează conducta de presiune cu cea de depresiune. Ambele rezervoare de ulei sînt prevăzute cu o protecție de plumb, iar întregul sistem este protejat față de contor, de asemenea cu un paravan de plumb. Manevrele de aer și de citire a numărului de impulsuri se face la o masă de comandă plasată în exteriorul camerei.

## METODA ELECTRICĂ

Ca funcție de volum a fost aleasă în acest caz, reluctanța volumului util, același ca și în cazul precedent.

În cuzinet au fost montați doi traductori inductivi de tipul transformator, fluxul magnetic închizîndu-se prin materialul fusului. În acest caz variația grosimii peliculei de lubrifiant $\delta$ determină o variație a reluctanței întrefierului, care se traduce într-o modificare a f.e.m. din secundarul transformatorului. În figura 5 este prezentată o secțiune din traductorul montat în cuzinet, iar în figura 5 *a* o vedere de ansamblu a acestuia.

În acest caz reluctanța porțiunii neferoase a întrefierului este

$$R_m = \frac{\delta}{\mu . a . b} \qquad \text{sau } R_m = \frac{\delta . a}{\mu . a^2 b} = K . S, \tag{13}$$

unde : $\delta$ = grosimea întrefierului ; $\mu$ = permeabilitatea lubrifiantului ; *a* și *b* = lățimea și respectiv lungimea capului traductorului (miezul).

Rezultă că reluctanța întrefierului este deci proporțională cu secțiunea transversală a întrefierului și nu depinde de forma acestuia. Acest lucru este valabil dacă $\delta$ are valori mici, condiție care în cazul de față a fost îndeplinită ($\delta = 0{,}1$ mm ; traductorul realizat are : $a = 3{,}5$ mm și $b/2 = 5$ mm).

Pentru măsurarea f.e.m. din secundarul transformatorului s-a utilizat o metodă de compensație în curent continuu [1], care permite realizarea unei sensibilități și stabilități corespunzătoare. Schema electrică de principiu este arătată în figura 6, unde s-a notat cu : TRI — traductor ; *2* — punți de redresare cu diode cu siliciu (ДГ-Ц8) ; *3* — potențiometru pentru reglarea f.e.m. de compensare ; *4* — rezistențe de limitare ; *5* — microampermetru ; *6* — potențiometru pentru limita superioară a scalei.

De asemenea, pentru măsurarea temperaturilor la intrarea și ieșirea lubrifiantului, s-a folosit schema electrică de principiu din figura 6 *a*, traductorii de temperatură fiind rezistențe electrice.

În figura 7 este prezentată realizarea fizică a instalației de măsură.

## ETALONARE ŞI MĂSURĂTORI

În ambele cazuri, suportul cuzinetului (capul de măsură) este plasat în consolă faţă de un fus de oţel de 45 mm Ø, încărcarea făcîndu-se printr-un sistem de pîrghii, poate ajunge pînă la sarcini de 2 000 kg. Suportul cuzinetului cu traductoare este gradat din 10 în 10 grade, permiţîndu-se rotirea sa pentru diferite valori ale unghiului θ.

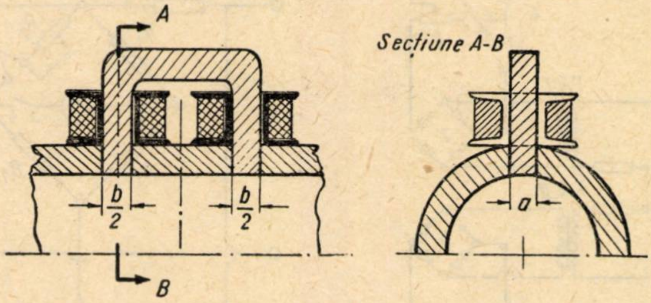


Fig. 5

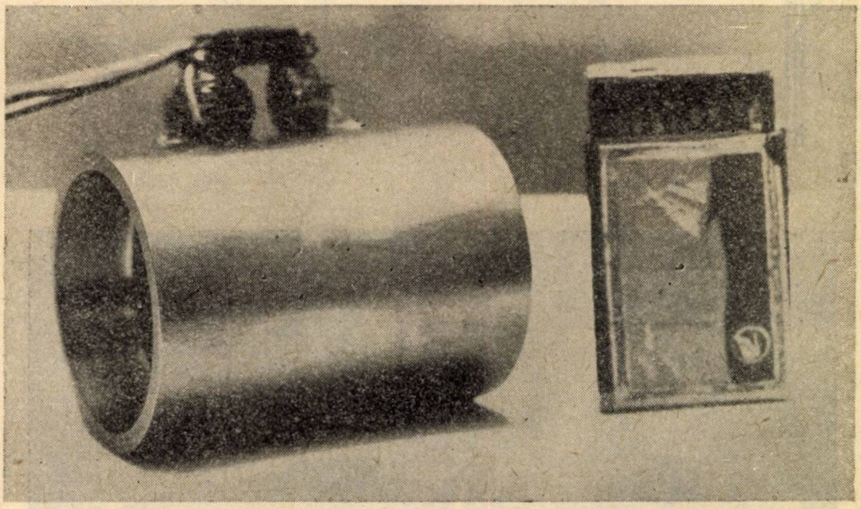


Fig. 5 *a*

*a*) În cazul metodei radioactive. S-a lucrat cu o activitate de circa 80 $\mu$ Cu/cm$^3$ ulei STAS 205 cu oleat de indiu radioactiv. S-a obţinut un fond de 1 500 impulsuri/min şi o variaţie utilă de circa 3 000 imp/min. Curba de etalonare este prezentată în figura 8.

Cantitatea totală de ulei, ce este limitată de activitatea respectivă, a fost suficientă pentru o funcţionare continuă de aproximativ 5 min. Pentru fiecare punct experimental s-au efectuat cel puţin 6 determinări de 5 min. Împrăştierea mare a rezultatelor a făcut necesară repetarea deter-

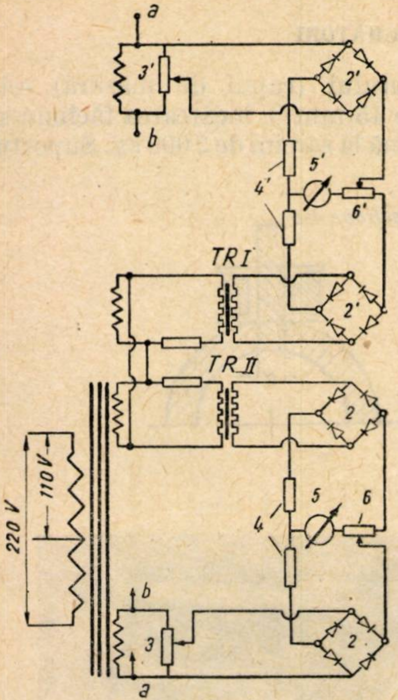

a
3'
2'
b
5'
4'
6'
TR I
2'
TR II
2
5
6
4
110 V
220 V
b
3
2
a

Fig. 6

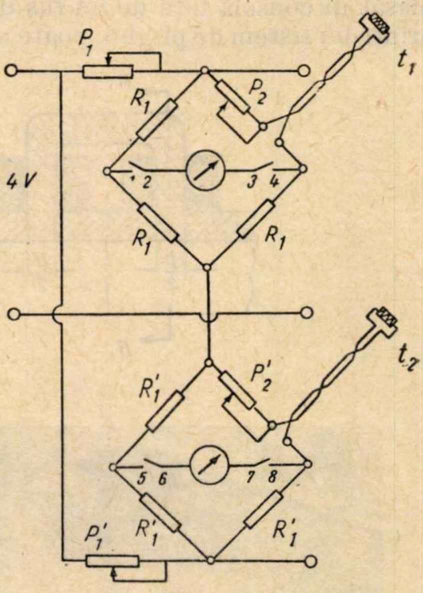

P1
t1
P2
R1
=4V
2
3
4
R1
R1
t2
P'2
R'1
5
6
7
8
P'1
R'1
R'1

Fig. 6a

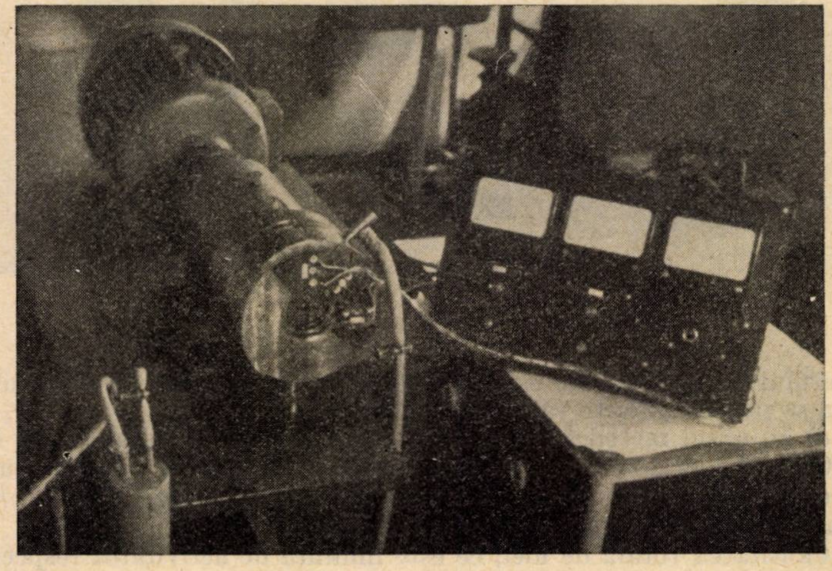


Fig. 7. — Aparatura de măsură prin metoda inductivă. În prim plan suportul cuzinetului; în dreapta: două microampermetre pentru $\delta_1$ şi $\delta_2$ — al treilea pentru $T_1$ şi $T_2$.

minărilor şi selectarea valorilor. De asemenea, a impus şi o încercare cu activitate mai mare. Astfel s-a utilizat clorura de indiu radioactiv în soluţie apoasă, activitatea specifică fiind în acest caz de circa 0,5 m Cu/cm³. S-a obţinut un fond de circa 26 000 imp/min şi o variaţie utilă de circa

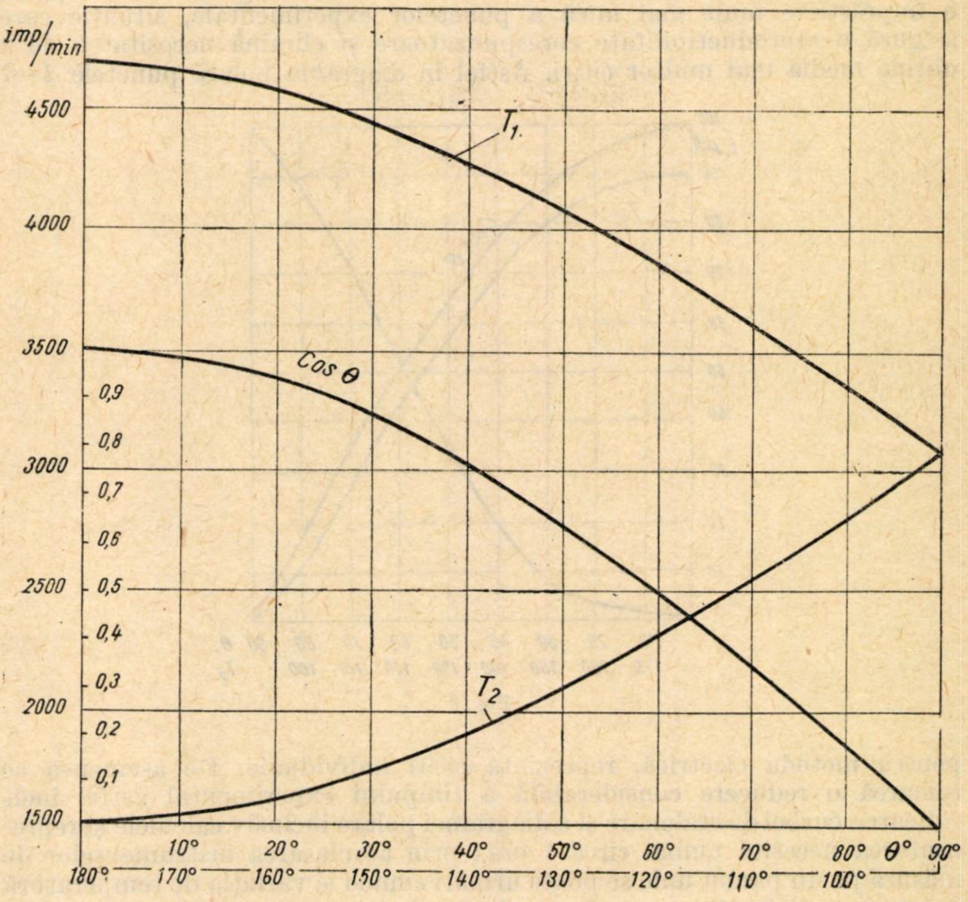


Fig. 8

25 000 imp/min, arătînd că prin mărirea activităţii nu s-a putut îmbunătăţi sensibilitatea.

Variaţiile mari ale fondului parazit sau ale valorilor înregistrate pot fi explicate atît prin aceea că au apărut volume de ulei radioactiv parazite în afara locurilor stabilite cît şi prin apariţia în unele cazuri a bulelor de aer în volumul util de măsurat.

Rezultatele sînt prezentate în figura 10 (diagrama polară a traiectoriei centrului fusului) împreună cu rezultatele obţinute cu metoda inductivă. În tabelă sînt arătate valorile parametrilor comuni şi ale celor diferiţi.

*b*) În cazul metodei inductive s-a obţinut o sensibilitate maximă de $1\mu/1$ div a microampermetrului.

Etalonarea s-a făcut în acelaşi mod ca şi la metoda radioactivă, curba de etalonare pentru o serie de măsurători fiind prezentată în figura 9. Rezultatele obţinute cu ulei STAS 410 sînt arătate în figura 10. Se remarcă o împrăştiere mult mai mică a punctelor experimentale, situaţie care asigură o reproductibilitate corespunzătoare şi elimină necesitatea de a obţine media mai multor citiri. Astfel în diagrama polară punctele *1—7* pentru metoda electrică, reprezintă citiri individuale. De asemenea se remarcă o reducere considerabilă a timpului experimental astfel încît ridicarea curbei de etalonare şi a diagramei polare inclusiv calculele şi reprezentarea necesită numai circa 1 oră; prin amplasarea instrumentelor de măsură pe un panou unic se poate urmări comod şi variaţia de temperatură la intrare şi ieşire. Se remarcă necesitatea de a se efectua citiri după stabilizarea variaţiei temperaturii.

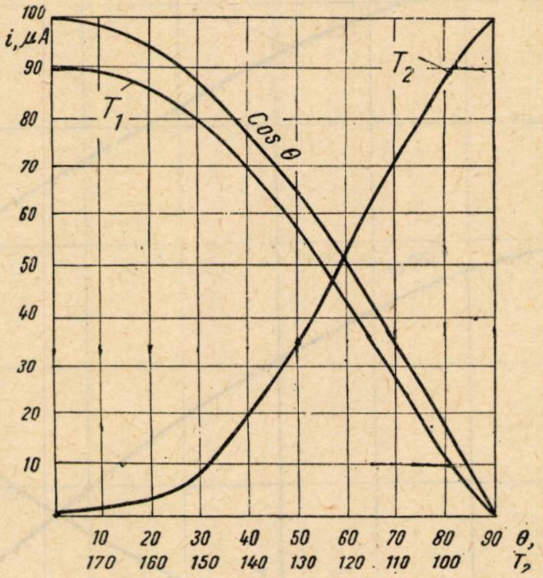
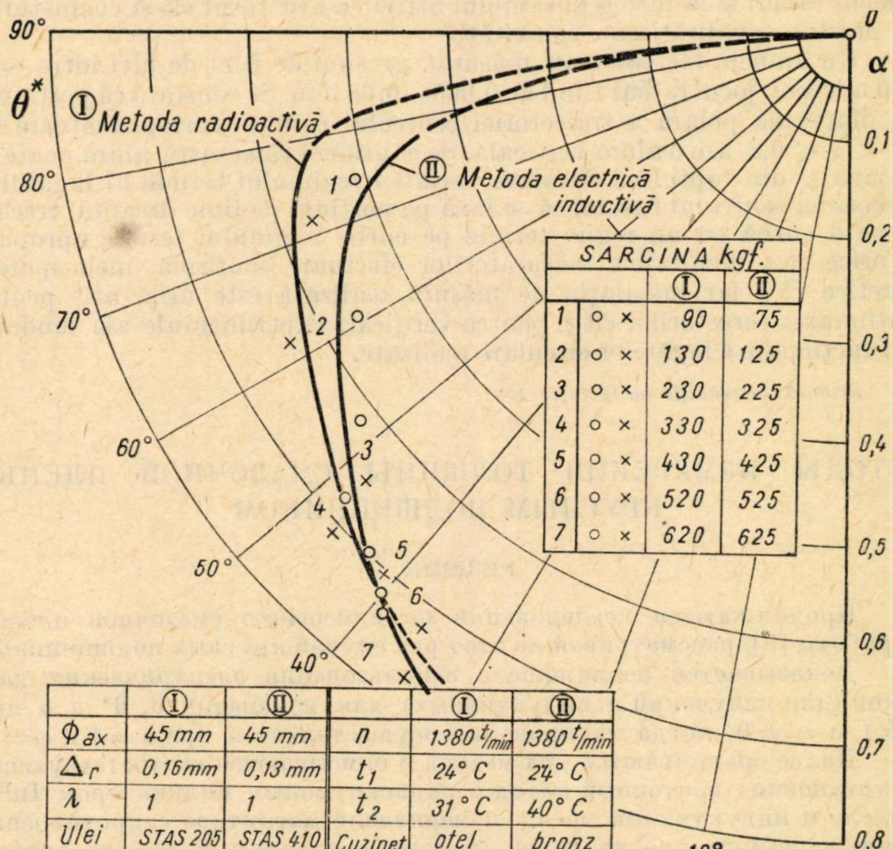


Fig. 9

*Concluzii.* Din studiile efectuate rezultă concluzia că ambele metode se pretează la determinarea grosimii filmului de lubrifiant la un lagăr circular în regim dinamic, metoda inductivă folosită, fiind însă de preferat.

Dacă principial, sensibilitatea metodei radioactive poate fi mărită considerabil, prin mărirea activităţii specifice a uleiului, în mod practic acest lucru conduce la complicarea instalaţiei de măsură prin soluţiile constructive impuse de protecţie şi de necesitatea de reducere a fondului parazit. De asemenea o funcţionare normală a instalaţiei implică necesitatea recirculării unui volum mai mare de ulei radioactiv, realizarea unei etanşeităţi absolute etc. În orice caz soluţia ce se dă nu poate depăşi cadrul de laborator, impunînd un personal specializat, o eroare medie relativă de ± 20% şi un timp experimental relativ mare, în cazul în care volumul experimental de ulei este mic şi trebuie periodic recirculat.

În cazul în care, din considerente de protecţie, s-a folosit un volum mic de ulei, au apărut, în afară de necesitatea unui timp experimental mai mare, şi dificultăţi la recirculare (ulei spumat, pierderi în conducte etc.) cu posibilităţi de erori. În general, fondul parazit este foarte mare, şi nu poate fi redus.



SARCINA kgf

| | | | ① | ② |
|---|---|---|---|---|
| 1 | ○ | × | 90 | 75 |
| 2 | ○ | × | 130 | 125 |
| 3 | ○ | × | 230 | 225 |
| 4 | ○ | × | 330 | 325 |
| 5 | ○ | × | 430 | 425 |
| 6 | ○ | × | 520 | 525 |
| 7 | ○ | × | 620 | 625 |

| | ① | ② | | ① | ② |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Phi_{ax}$ | 45 mm | 45 mm | $n$ | 1380 t/min | 1380 t/min |
| $\Delta_r$ | 0,16 mm | 0,13 mm | $t_1$ | 24° C | 24° C |
| $\lambda$ | 1 | 1 | $t_2$ | 31° C | 40° C |
| Ulei | STAS 205 | STAS 410 | Cuzinet | oțel | bronz |
| $P_{alim}$ | 1,4 at. | 1,4 at. | | | |

Fig. 10

De asemenea, la orice defecţiune funcţională a lagărului, posibilitatea de intervenţie este dificilă, demontarea trebuind neapărat precedată de spălare, fapt care conduce la pierderi de ulei radioactiv, posibilitate de iradiere şi de mărire a timpului experimental.

Faţă de aceste aspecte, în cazul studiat, metoda electrică inductivă realizată se dovedeşte a fi superioară şi mai eficace prin simplitatea aparaturii şi a utilizării ei.

De asemenea, se remarcă sensibilitatea, reproductibilitatea rezultatelor (eroarea relativă medie în limitele $\pm 3\%$). Metoda şi aparatura inductivă se pretează atît pentru măsurători de laborator cît şi pentru măsurători industriale ; menţionăm că în ambele cazuri performanţele sînt limitate de condiţiile de prelucrare a suprafeţelor, de respectarea toleranţelor respective la jocul radial şi la întreg ansamblul astfel ca atît fusul cît şi cuzinetul să nu prezinte ovalităţi sau conicităţi.

Cu ambele metode s-au măsurat grosimi de film de ulei între $\sim$14 şi 60 microni, jocul radial fiind de 0,065 – 0,08 mm. Se constată că porţiunea din diagrama polară a traiectoriei centrului fusului, corespunzătoare lui $0{,}3 < \alpha < 0{,}8$, are o alură verticală. Se consideră că această alură poate să provină şi din faptul că datorită variaţiei regimului termic al lagărului, deplasarea centrului fusului să se facă pe porţiuni de linie dreaptă, trecînd de pe o curbă cu un regim termic pe curba regimului termic apropiat, În orice caz, rezultatele măsurătorilor efectuate confirmă unele ipoteze teoretice [5], iar instalaţia de măsură realizată este utilă atît pentru continuarea cercetărilor cît şi pentru verificări experimentale ale modului de funcţionare a lagărelor circulare realizate.

*Primită la redacţie la 12 iunie 1961.*

## МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ ТОЛЩИНЫ СМАЗОЧНОЙ ПЛЕНКИ КРУГЛЫМ ПОДШИПНИКОМ

### РЕЗЮМЕ

Продолжаются исследования по измерению смазочной пленки из работы [3], рассматривая на этот раз случай круглых подшипников.

Доказывается возможность использования электрических датчиков (для излучений и индуктивных) для измерения $\delta$, $\theta^*$ и $\alpha$ при $\alpha \neq 1$ и $\omega \neq 0$, когда тарирование осуществляется при $\alpha = 1$ и $\omega = 0$.

Далее сравниваются два метода и описываются соответствующие им установки: изотопный метод с радиоактивным индикатором $\mathrm{In}^{114*}$ в масле и индуктивный метод, измеряющий магнитное сопротивление междужелезного пространства (масленая пленка). В работе авторы приходят к выводу, что индуктивный метод имеет преимущества, судя по его простоте , воспроизводимости, следовательно и возможности широкого применения.

## METHODS FOR MEASURING THE LUBRICANT FILM THICKNESS IN JOURNAL BEARINGS

### ABSTRACT

The investigation carried out for measuring the lubricant film thickness [3] are continued, the case of journal bearings being now approached.

The possibility of using electrical transducers (radiation and inductive transducers) for measuring $\delta$, $\theta^*$ and $\alpha$ is proved when $\alpha \neq 1$ and $\omega \neq 0$, the calibration being made for $\alpha \neq 1$ and $\omega \neq 0$.

Two measuring techniques and the respective equipment are then comparatively presented; a technique which uses the radioactive tracer In $^{114*}$ introduced into oil and an inductive technique which measures the reluctance produced by the oil film. It is shown that the inductive technique is more advantageous for its simplicity and reproducibility and consequently has a wider field of application.

## BIBLIOGRAFIE

1. I. Iliuc, P. Freund, *Aparat pentru determinarea grosimii straturilor protectoare pe cale nedestructivă.* Studii şi cercetări de macanică aplicată, *3*, 786 (1960).
2. Ia. I. Kogan, O. I. Bogdanov, Ie. I. Iantowski, *Das Messen der Dicke des Ölfilms in Gleit- und Stützlagern.* Deutsche Elektrotechnik, **II**, *2*, 81—83 (1957).
3. D. Pavelescu, I. Iliuc, *Studiul prin metode radioactive a influenţei viscozităţii asupra grosimii filmului de lubrifiant.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, *3*, 641 (1958).
4. N. Tipei, V. N. Constantinescu, Al. Nica, *Calculul lagărelor de alunecare.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, *6*, 1377 (1960).
5. N. Tipei, *Hidroaerodinamica lubrificaţiei.* Ed. Acad. R.P.R. Bucureşti, 1957, 11—84 şi 528—538.
6. A. Tondl, *Cîteva rezultate experimentale privind mişcarea fusului în lagăr.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, *3*, 603 (1960).
7. A. A. Кутков, *Измерение толщины смазочных слоев.* Измерительная техника, *10* (1959).
8. C. Siripongse, P. R. Rogers, A. Cameron, *Thin Film Lubrication.* Engineering, **186**, 4821, 146 (1958).
9. I. O. Macconochie, A. Cameron, *The Measurement of Oil-Film Thickness in Gear Teeth.* Transactions of the ASME S. D. Journ. of Basic Engineering, March 1960.
10. S. I. El-sisi, G. S.A Shawki, *Measurement of Oil-Film Thickness between Disks by Electrical Conductivity.* Trans. of the ASME. S. D. Journ. of Basic Engineering, March 12 (1960).

# CONSIDERAȚII ASUPRA MĂRIRII REZISTENȚEI LA UZURĂ A SUPAPELOR DE LA MOTOARE

DE

V. MARCU și N. PASCU

Elaborarea unor materiale rezistente la uzură prin coroziune la temperatură ridicată, sau îmbunătățirea celor existente prin aplicarea unor tratamente speciale constituie una din problemele mult studiate în prezent.

În urma cercetărilor efectuate s-au propus mai multe soluții dintre care alitarea cu ajutorul metalizării prin pulverizare a dat rezultate bune.

Prin adaos de aluminiu în compoziția oțelului sau fontei la turnare, se realizează aliaje cu caracteristici refractare bune. Aceste aliaje sînt însă fragile și cu slabe calități de turnare și prelucrare.

Aceste inconveniente se pot însă evita prin obținerea unor straturi superficiale de difuziune a aluminiului în oțel.

Prin aceste straturi de difuziune se realizează o protecție bună a pieselor împotriva coroziunii la o temperatură înaltă, fără a se atenua calitățile lor mecanice.

Ca urmare a acestor calități straturile de difuziune în general și straturile de difuziune a aluminiului în oțel, în mod special, au căpătat o largă răspîndire.

Astfel în U.R.S.S. la Uzina de mașini ,,V. I. Lenin'' de pe Neva, alitarea cu metalizarea prin pulverizare se aplică cu succes la protecția exhaustoarelor de fum cald [1].

În R. P. Polonă procedeul se aplică cu succes la protecția cutiilor de cementare care rezistă de 5 – 8 ori mai mult decît cele nealitate, la creuzetele pentru topirea aluminiului, care rezistă de 10 ori mai mult decît creuzetele de fontă etc.

În Franța și Anglia procedeul a căpătat o largă răspîndire, fiind deja standardizat.

În R.P.R. alitarea utilizînd metalizarea prin pulverizare se aplică deja la cîteva întreprinderi.

La uzina ,,Steagul Roșu'' din Brașov se alitează cu succes cutiile de calcinat modelele fuzibile pentru turnarea de precizie precum și alte piese [20].

La uzina ,,Semănătoarea'' se aplică la alitarea cutiilor de cementare : La întreprinderea ,,Automatica'' se aplică cu succes alitarea elementelor de încălzire. Astfel, țevi din oțel OLT 35 de formă ovală 11,5 × 8 mm, cu peretele de 1 mm au fost puse după alitare să funcționeze la temperatura de 560°C timp de 904 ore în aer liber ; în acest interval de timp nu s-a produs nici o oxidare a suprafeței. Concomitent o țeavă din același material nealitată și pusă să funcționeze în aceleași condiții, a pierdut prin detașare de oxizi, după 200 ore de funcționare, 18 grame din greutatea inițială a țevii, ceea ce reprezintă o pierdere de 2,1% pentru 100 ore de funcționare.

La uzina de țevi ,,Republica'' s-a aplicat experimental alitarea dornurilor de perforare prin metoda Erhardt pentru elaborarea țevilor fără sudură.

Dornurile nealitate efectuează aproximativ 1 200 perforări și apoi trebuie recondiționate. Cu dornurile alitate s-au efectuat aproximativ 1 980 perforări ceea ce reprezintă o creștere cu 60% a durabilității lor.

Mărirea rezistenței la uzură a supapelor constituie una din problemele mult studiate de cercetătorii din acest domeniu.

Alitarea supapelor ca mijloc de mărire a rezistenței lor la uzură constituie una din soluțiile eficace ale acestei probleme.

## CONSIDERAȚII GENERALE ASUPRA ALITĂRII

Răspîndirea atît de largă a proceselor de difuziune este determinată de natura molecular-cinetică a difuziunii prin aceea că la baza ei stă mobilitatea termică a atomilor corpului solid.

După Frenkel, sub influența oscilațiilor termice, atomii pot părăsi locurile lor din rețeaua cristalină. Locurile libere rezultate pot fi ocupate fie de atomii metalului de bază, fie de atomii substanței difuzate.

La fiecare temperatură există o anumită densitate de echilibru a locurilor goale și a atomilor liberi. La o temperatură mai ridicată corespunde o densitate mai mare a locurilor libere.

Ecuațiile diferențiale de bază ale legilor difuziunii sînt [18]

$$dm = -D\frac{\partial c}{\partial x}dsdt,$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2},$$

$\frac{\partial c}{\partial x}$ = gradientul de concentrație,

$D$ = constantă de difuziune,

$s$ = secțiunea prin care difuzează,

$t$ = durata de încălzire,

$m$ = masa care difuzează.

În cazul difuziunii staționare în fiecare punct al axei $x$ avem

$$\frac{\partial c}{\partial t} = 0 \quad \text{și} \quad \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0,$$

prin integrare căpătăm

$$c = B - Ax.$$

Punînd condițiile la limită : $x = 0$ și $c = c_0$ (valoarea maximă a componentei difuzate) pentru suprafața cilindrului și $x = h$ cînd concentrația substanței care difuzează este egală cu zero ($c = 0$) putem determina pe $A$ și $B$, iar de aici se pot găsi ușor concentrațiile $c$ ale substanței difuzate la orice adîncime $x$.

$$C_x = C_0\left(1 - \frac{x}{h}\right).$$

Însă, în cazul alitării, unde are loc o saturație prin difuziune a metalului piesei, distribuția concentrației substanței difuzate nu corespunde distribuției stabilite în procesul staționar al difuziunii.

Pentru acest caz ecuația diferențială care exprimă a doua lege a lui Fik poate fi integrată pentru condițiile la limită, date care corespund procesului de saturație a metalului prin difuziune. În urma acestei integrări se găsește dependența concentrației într-un strat dat la adîncimea $x$ funcție de timpul $t$, $c(x,t)$.

După integrarea corespunzătoare se obține :

$$\frac{C_0 - C(x,t)}{C_0} = \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right),$$

unde $c_0$ este concentrația maximă pe suprafața piesei ; $c(x,t)$ concentrația la adîncimea $x$ pentru timpul $t$. Funcția $\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)$ permite să se calculeze distribuția concentrației substanței care difuzează după adîncimea stratului de difuziune.

Constanta de difuziune poate fi prezentată printr-o expresie de tip general

$$D = Ae^{-\frac{Q}{RT}},$$

unde

$A$ = un factor de proporționalitate care nu depinde de temperatură,
$Q$ = căldura de difuziune,
$R$ = constanta gazelor,
$T$ = temperatura,
$A = \frac{\delta^2}{\delta\tau}$ (după Frenkel),

în care

$\delta$ = distanţa intermoleculară,

$\tau$ = perioada oscilaţiilor atomilor în jurul poziţiei de echilibru.

Grosimea stratului de difuziune poate fi caracterizată prin mărimea

$$L = 2\sqrt{Dt}.$$

Introducînd în această ecuaţie constanta de difuziune sub forma dată de Frenkel, obţinem :

$$L = 2\sqrt{\frac{\delta^2 t}{\delta\tau}\, e^{-\frac{Q}{RT}}}.$$

Prin determinarea experimentală a valorii lui $A$ şi $Q$ pentru un regim oarecare se poate apoi calcula grosimea straturilor de difuziune, care se formează pentru orice alte regimuri de difuziune ($T$, $t$).

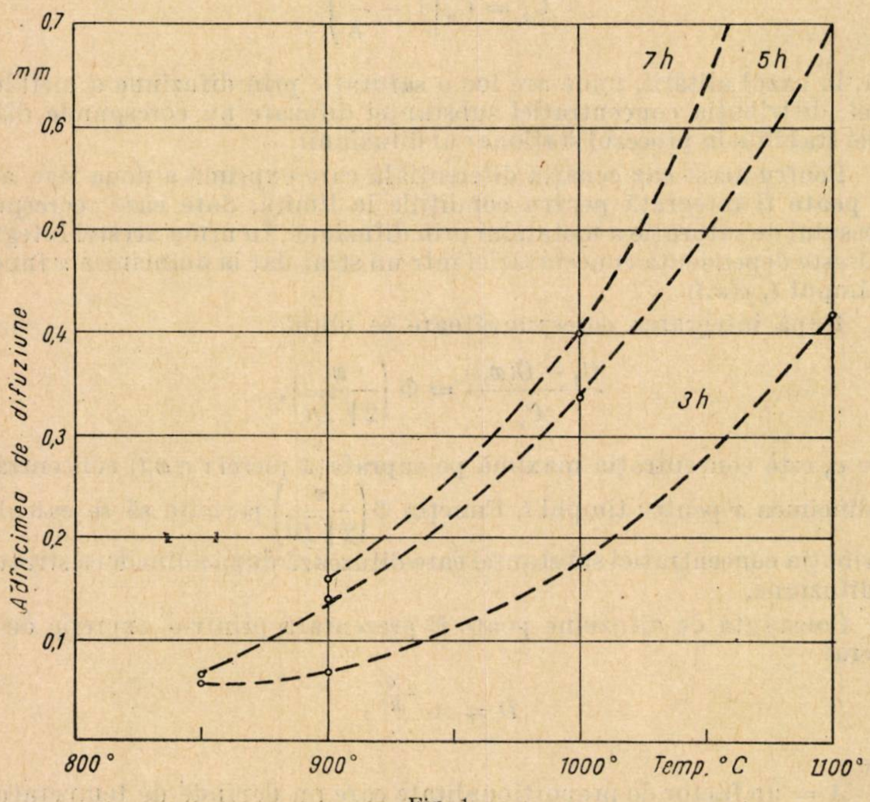


Fig. 1

În acest scop s-au făcut experienţe pentru determinarea grosimii stratului difuzat în cazul alitării.

În figura 1 sînt prezentate rezultatele experimentale care ne arată variaţia grosimii stratului difuzat în funcţie de temperatură, iar în figura 2 rezultatele experimentale care ne arată cum variază grosimea stratului difuzat în funcţie de timpul de încălzire [9], [10].

După cum s-a, arătat şi mai sus, în cazul alitării, avem o difuziune a aluminiului în oţel, fontă sau cupru pînă la saturarea stratului superficial. Pentru obţinerea acestui rezultat este necesar ca în momentul cînd piesa este încălzită la o anumită temperatură, aluminiul să fie prezent pentru a putea difuza.

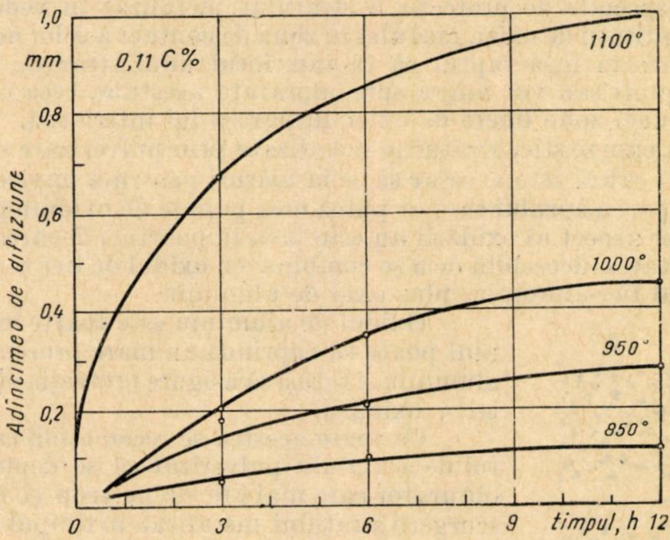


Fig. 2

Problema principală constă în a se asigura prezenţa unei cantităţi optime de aluminiu, ceea ce se obţine prin următoarele metode :

— Aluminarea cu ajutorul pulberii de aluminiu. operaţie denumită şi calorizare, efectuată după o tehnologie aproape similară cementării cu carbon;

— Scufundarea într-o baie de aluminiu topit ;

— Placarea cu aluminiu la cald sau la rece ;

— Metalizarea prin pulverizare cu aluminiu.

Ultimul procedeu capătă din ce în ce o mai mare răspîndire, deoarece este simplu de realizat, economic și permite alitarea pieselor cu forme geometrice complicate, mărimea lor fiind limitată doar la capacitatea cuptorului de recoacere.

Aparatul de metalizare prin pulverizare tip I.M.A.-I.O.R., care se fabrică în serie în R.P.R. poate fi utilizat, cu anumite precauţii, şi pentru metalizarea cu aluminiu. El a fost conceput iniţial pentru recondiţionarea prin metalizare cu oţel a pieselor uzate şi nu prezintă suficientă stabilitate în cadrul metalizării cu aluminiu.

După metalizarea prin pulverizare cu aluminiu, piesa este supusă unui tratament termic prin care se obţine difuziunea aluminiului în oţel. O condiţie esenţială pentru obţinerea difuziunii aluminiului în oţel este ca în zona limită dintre cele două straturi să nu existe impurităţi, grăsimi sau oxizi.

Din această cauză piesa ce urmează a fi alitată trebuie în prealabil bine curăţată. Acest lucru se obţine în mod eficace prin sablare.

În cursul traiectoriei prin aer particulele de aluminiu pulverizat se oxidează puţin. Din această cauză stratul metalizat conţine un anumit procent de oxizi. Deşi aceşti oxizi nu influenţează calitatea metalului pulverizat de a adera la metalul de bază, însă fiind greu fuzibili contribuie la ridicarea temperaturii de difuziune. Din această cauză este necesar să se ia măsuri speciale de protecţie a stratului metalizat în vederea evitării creşterii cantităţii de oxizi, mai ales în zona de contact a celor două straturi.

Remarcăm însă faptul că în interiorul unui strat de metal topit oxizii vor pluti sau vor migra spre suprafaţa acestuia, ceea ce contribuie la crearea unei zone libere de oxizi în partea lui inferioară.

După cum se ştie, straturile metalizate prin pulverizare sînt poroase. Din această cauză este necesar să se ia măsuri pentru a împiedica pătrunderea prin pori a aerului care ar putea crea puncte de oxidare pe suprafaţa piesei. Acest aspect al oxidării nu este prea important, deoarece aluminiul are proprietatea deosebită de a se combina cu oxidul de fier şi de a-l reduce la compusul fier-aluminiu, plus oxid de aluminiu.

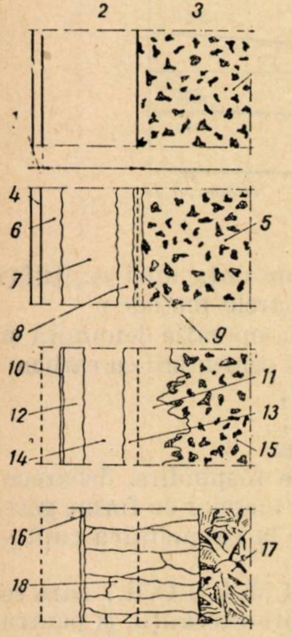


Fig. 3

Oxidul de aluminiu este foarte inert şi aluminiul poate să cuprindă un mare procent de oxid de aluminiu şi totuşi să asigure protecţia oţelului împotriva oxidării.

Cu toate acestea se recomandă ca peste stratul de aluminiu pulverizat să se depună un strat obturator care mai are drept scop şi împiedicarea scurgerii stratului metalizat în timpul tratamentului termic de recoacere necesar obţinerii difuziunii.

### STRUCTURA STRATULUI DIFUZAT

În primul stadiu al tratamentului de difuziune are loc dizolvarea fierului în aluminiu.

Difuziunea aluminiului începe la suprafaţa piesei şi după tratamentul termic structura stratului este următoarea :

Stratul protector este distrus şi suprafaţa piesei conţine un strat de $Al_2O_3$. Din cauza duratei scurte de încălzire nu se produc alte schimbări de cît o mărire a granulaţiei. Dacă piesa este încălzită la temperaturi mai mari (800—900°C) se produce o schimbare în structura stratului cu o scădere a concentrării aluminiului. Ca elemente principale în stratul difuzat sînt cristale mixte de aluminiu în fier $\alpha$. După un tratament mai îndelungat, la temperatură ridicată, linia de demarcaţie a stratului difuzat este mai bine conturată. Cristalele mixte iau o formă lunguiaţă, axa lor principală avînd direcţia de difuziune.

Rezultatele fenomenului de alitare sînt indicate în figura 3 [2].

## PROCESUL TEHNOLOGIC

Pentru răspîndirea pe scară largă a alitării trebuie în primul rînd pus la punct procesul tehnologic și apoi determinate caracteristicile fizico-mecanice ale pieselor alitate.

Procesul tehnologic cuprinde următoarele aspecte :

— Pregătirea piesei ce trebuie alitată.

— Stabilirea grosimii optime a stratului de aluminiu care trebuie depus.

— Alegerea materialului ce se utilizează pentru obturarea porilor stratului metalizat și modul de aplicare al lui.

— Stabilirea tratamentului termic de difuziune.

*a*) După cum s-a arătat și mai sus, piesa ce urmează a fi alitată trebuie ca în prealabil să fie bine curățată. De asemenea, pentru ca să existe o aderență a stratului de aluminiu metalizat este necesar ca în prealabil suprafața piesei să fie făcută rugoasă.

Această pregătire a suprafeței se realizează în condiții optime prin sablare. Materialul și distanța de sablare se aleg în funcție de duritatea și grosimea piesei.

*b*) În urma cercetărilor întreprinse s-a constatat că stratul de aluminiu depus trebuie să aibă grosimea optimă de 0,2—0,5 mm. O grosime mai mare a stratului influențează în mod negativ asupra aderenței lui. În cazul suprafețelor plane, la o grosime mai mare stratul se exfoliază chiar la rece, iar în cazul suprafețelor de revoluție, stratul are tendința de a se scurge în timpul tratamentului termic de difuziune.

Din această cauză grosimea stratului depus trebuie riguros controlată.

Pentru măsurarea grosimii stratului depus se pot utiliza mai multe metode. Una din cele mai comode metode este cea electroinductivă, care utilizează caracterul dependenței dintre grosimea stratului de acoperire și corespondentul lui electric, intensitatea sau fluxul.

Caracterul dependenței dintre grosimea $\delta$ și curentul $I$, sau fluxul $\Phi$, este reprezentată de legea circuitului magnetic, pentru miezuri executate din material feromagnetic.

În figura 4 se dă fotografia unui astfel de aparat care are următoarele caracteristici [16] :

Gabarit 180 × 140 mm,
Tensiunea de alimentare 110/220 V,
Tensiunea de lucru în primar $u = 1{,}5$ V,
Intensitatea maximă $I$ max $= 100$ A,
Intervalul de măsură a grosimii unui strat 0—1 mm,
Eroare relativă ± 5%.

Măsurarea se face prin intermediul unui cap de palpare care se aplică pe stratul ce dorim să-l măsurăm. Indicația microampermetrului reprezintă echivalentul electric al grosimii stratului de măsurat. Pe baza unei curbe de etalonare se stabilește grosimea stratului depus.

*c*) *Materialul ce se utilizează pentru obturarea porilor stratului metalizat și modul de aplicare al lui.* Pentru a se împiedica pătrunderea oxigenului sau altor agenți corosivi prin porii stratului metalizat, în timpul tratamentului termic de recoacere precum și pentru a se evita scurgerea aluminiului topit, se aplică un strat obturator și protector care nu se topește la temperatura tratamentului.

În urma experiențelor ce s-au efectuat, s-au elaborat mai multe rețete de straturi obturatoare în funcție de condițiile de funcționare ale piesei. În cele ce urmează să dă compoziția mai multor tipuri de straturi obturatoare care au dat rezultate bune.

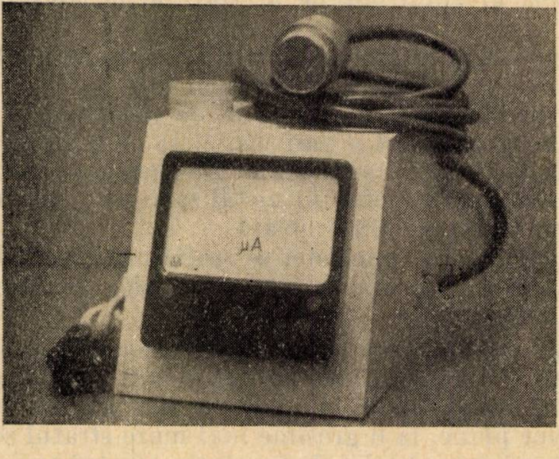


Fig. 4

*Rețeta 1* [1], [12]

— 48 % grafit argintiu,
— 20 % argilă refractară,
— 30 % nisip cuarțos,
— 20% clorură de amoniu.

Aceste materiale se dizolvă în sticlă solubilă (luată în proporție de 100—125% din greutatea componenților uscați), obținîndu-se o soluție vîscoasă, amestecîndu-se cu grijă pînă la fărîmițarea completă a bulgărilor; pasta obținută este aplicată apoi într-un strat uniform.

Se va observa ca la uscare să nu se producă bășici și stratul de acoperire să nu se desprindă de suprafață.

*Rețeta 2* [2]

Stratul de aluminiu depus se acoperă cu o soluție de 20% clorură de aluminiu, apoi cu un strat de sticlă solubilă și nisip. După uscare se aplică un nou strat de sticlă solubilă.

*Rețeta 3* [11]

Soluție omogenă de bitum într-un solvent de white spirit și petrol.

*Rețeta 4* [17]

— Carbonat de sodiu anhidru 5%,
— Borax 2%.
Amestecul se dizolvă în apă.

*d) Tratamentul termic de difuziune.* După cum s-a arătat și mai sus grosimea stratului de difuziune depinde de timpul și temperatura de încălzire, iar caracteristicile mecanice ale pieselor alitate depind de acea grosime.

Din această cauză, în funcție de regimul de funcționare al piesei, de dimensiunile și de caracteristicile ei geometrice, se aplică și regimul termic de difuziune.

Se dă mai jos regimurile termice experimentale pentru alitarea unor piese care au dat rezultate bune.

*Regimul 1* [1]

— Se introduce piesa în cuptor la temperatura de 250°C și se menține la această temperatură timp de 30 minute.

— Se ridică temperatura, cu viteza de 40—50°C/h pînă la 550—560°C și se menține la această temperatură timp de 30—40 minute.

— Se ridică în continuare temperatura cu viteza de 60—80°C/h pînă la 950—970°C și se menține la această temperatură timp de 3,5—4 ore.

— Urmează răcirea lentă a piesei în cuptor pînă la 300°C.

— Se răcește apoi în aer.

— Acest regim se aplică mai ales la piesele care nu sînt supuse la șocuri mecanice.

*Regimul 2* [2]

— Se încălzește cuptorul pînă la 600—700°C.

— Se introduce piesa și se ține timp de 15—30 minute.

— Se urcă rapid temperatura pînă la 1200—1250°C, ținîndu-se piesa timp de 14—40 minute.

— Se coboară temperatura pînă la 600°C.

— Se scoate piesa și se răcește în aer liber.

Mai comod se poate aplica acest regim utilizînd două cuptoare, unul încălzit pînă la 600°C și celălalt pînă la 1200°C, piesa introducîndu-se pe rînd în cele două cuptoare. Acest regim este recomandabil pentru piesa ce lucrează un timp îndelungat fără întrerupere la temperatură ridicată.

*Regimul 3* [2]

— Se introduce piesa în cuptor încălzindu-se lent pînă la 600—700°C.

— Se urcă brusc temperatura pînă la 800°C și se ține timp de două ore.

— Se coboară temperatura pînă la 300°C.

— Se scoate piesa și se răcește în aer liber.

Acest regim este recomandabil mai ales pentru piesa cu pereți subțiri.

*Regimul 4* [3]

Pentru alitarea supapelor s-a aplicat cu succes următorul regim :

— S-au introdus supapele în cuptor și s-a ridicat treptat temperatura pînă la 650°C, menținîndu-se 60 minute.

— S-a ridicat rapid temperatura pînă la 900°C (în timp de 15 minute) și s-a menținut la această temperatură timp de 3 ore.

— S-a coborît temperatura cuptorului în mod treptat pînă la 300°C.

— S-a răcit în aer liber.

Cu acest regim adîncimea stratului difuzat a fost de 0,2 mm.

În cazul alitării supapelor trebuie luate măsuri de precauție în timpul tratamentului de difuziune deoarece există pericolul ca coada supapei să se deformeze.

Pentru a se evita acest lucru supapele sînt suspendate vertical în timpul tratamentului de difuziune.

În unele cazuri, cînd condițiile permit, se încălzește numai ciuperca supapei.

## REZULTATE EXPERIMENTALE

În urma tratamentului de alitare s-au obținut următoarele caracteristici ale pieselor alitate.

*Duritate.* Straturile alitate prezintă o duritate ridicată. Astfel în cazul unui tratament de difuziune pînă la 800°C se constată o microduritate Vickers de $HV = 750$ kgf/mm$^2$ (sarcina 20 g). Mai adînc, în interiorul stratului, $HV = 300-400$ kgf/mm$^2$ iar în cazuri speciale 1 000 kgf/mm$^2$.

În figura 5 se arată variația durității într-o secțiune a stratului difuzat [21].

*Ductilitate.* Dacă se aplică în mod corect tratamentul de difuziune, stratul obținut poate fi compus numai din cristale mixte de Al și fier $\alpha$ cu o concentrație uniformă de Al.

În acest caz stratul difuzat are plasticitate și nu prezintă schimbări sau crăpături, de exemplu la o deformație la rece de 25%. În structura stratului nu apar crăpături sau desprinderi după forjări repetate.

Dacă stratul metalizat este tratat termic la o temperatură prea joasă și la o durată prea redusă, crapă în cazul cînd este supus la deformații.

În figurile 6 și 7 se arată posibilitățile de deformație plastică a pieselor alitate [2].

*Rezistența la coroziune.* Natura gazului de încălzire are o mare influența asupra felului cum piesa se corodează sau a defectelor care apar. Importanța acțiunii exercitate de gazul de încălzire s-a determinat prin pierderea în greutate obținută prin înlăturarea oxizilor. Experiențele s-au făcut prin încălzire aproape trei ore la temperatura de 900–1000°C şi s-au obţinut următoarele rezultate:

— În acid carbonic cantitatea de oxizi formată la 900°C este mică, pierderea în greutatea fiind de 0,02 g/mm$^2$ şi la 1000°C de 0,088 g/mm$^2$.

— Vaporii de apă sînt un mediu foarte corosiv. Astfel într-o atmosferă de aproape 30% vapori de apă şi 70% azot la temperatura de 900°C, pierderea în greutate a fost de 0,07 g/mm$^2$ iar la 1000°C de 0,29 g/mm$^2$.

— În aer uscat pierderea în greutate a fost de 0,038 g/mm$^2$ la 900°C şi de 0,118 g/mm$^2$ la 1000°C.

— S-au făcut experienţe pentru determinarea rezistenţei la coroziune la temperatură ridicată în atmosfera de $SO_2$ a pieselor alitate.

Condiţiile de experimentare au fost următoarele:

— Timpul de experimentare 490 ore cu următorul ciclu: 70 ore la temperatura de experimentare, apoi răcirea lentă timp de două ore [15].

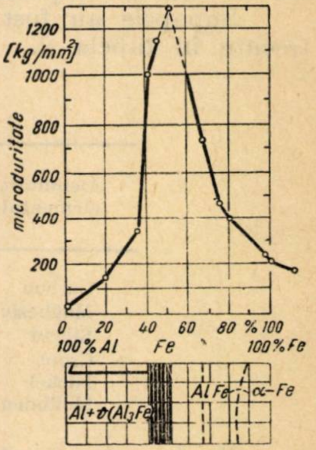


Fig. 5

— Atmosferă cu $SO_2$ (0,1% în volum, debit 20 l/min),

— Epruveta 50 × 70 × 0,6 mm.

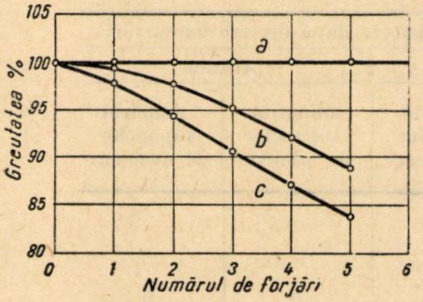


Fig. 6

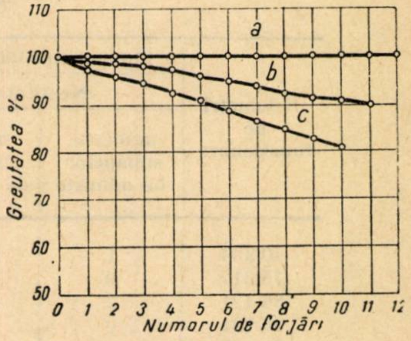


Fig. 7

În aceste condiţii s-au obţinut rezultatele din tabela 1.

*Tabela 1*

| Temperatura | Creşterea în greutate mg/cm$^2$ | |
|---|---|---|
| °C | Oţel alitat | Oţel nealitat |
| 620 | 0,3 | 12,5 |
| 700 | 1,0 | 213,0 |
| 800 | 6,8 | — |

Se constată o rezistenţă foarte bună la coroziune la temperatură ridicată a epruvetelor alitate.

*Comportarea în exploatare.* O altă serie de experienţe s-au făcut pentru verificarea comportării în exploatare a supapelor alitate [13].

Supapele au fost confecţionate din materialul cu caracteristicile trecute în tabela 2.

*Tabela 2*

| Denumirea elementului | Compoziţia chimică a supapelor de admisie % | Compoziţia chimică a supapelor de evacuare % |
|---|---|---|
| Carbon | 0,35—0,45 | 0,35—0,50 |
| Magneziu | 0,25—0,40 | 1 max. |
| Siliciu | 3,60—4,20 | 1 max. |
| Crom | 1,85—2,50 | 23,0—24,0 |
| Nickel | | 4,50—5,00 |
| Molibden | | 2,50—3,00 |

S-a luat drept criteriu de durabilitate a supapelor numărul de km parcurs de autovehicule echipate cu motoare pe care erau montate supapele alitate.

S-au obţinut rezultatele trecute în tabela 3.

*Tabela 3*

| Kilometri de funcţionare | Supape constatate defecte după diverse parcursuri | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Nealitate | | Alitate | |
| | numărul supapelor de admisie | numărul supapelor de evacuare | numărul supapelor de admisie | numărul supapelor de evacuare |
| 40 394 | 1 | 0 | | |
| 75 317 | 0 | 1 | | |
| 86 421 | 2 | 0 | | |
| 96 721 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 108 148 | | | 0 | 0 |
| 138 233 | | | 0 | 0 |

Se constată că în timp ce după 86 421 km s-au stricat 4 supape nealitate, după 138 233 km n-a existat nici o supapă alitată defectă.

## CONCLUZII

1) Se constată că procesul tehnologic de alitare utilizînd metalizarea prin pulverizare este simplu şi nu cere utilaj complicat.

2) Piesele alitate au o duritate mare.

3) Dacă se aplică corect tratamentul termic de difuziune piesele alitate pot fi chiar forjate în anumite condiții.

4) Piesele alitate au o mare rezistență la uzură prin coroziune la temperatură ridicată.

5) Experiențele au dovedit buna comportare în exploatare a supapelor alitate.

*Primită la redacție la 12 iunie 1961.*

## К УВЕЛИЧЕНИЮ ИЗНОСОСТОЙКОСТИ КЛАПАНОВ ДВИГАТЕЛЕЙ

### РЕЗЮМЕ

В статье описывается способ алитирования клапанов, начиная с изложения теоретических соображений о процессе диффузии в металлах и продолжая технологическим процессом алитирования распылением алюминия.

Приводятся несколько рецептов затворных слоев для защиты во время термической обработки, а также несколько режимов термической обработки для получения диффундированного слоя.

Приводятся экспериментальные результаты с характеристиками алитированных деталей, причем выявляются, главным образом, преимущества алитированных клапанов при эксплуатации.

## CONSIDÉRATIONS SUR L'AUGMENTATION DE LA RÉSISTANCE À L'USURE DES SOUPAPES DE MOTEURS

### RÉSUMÉ

Cet article commence par une présentation du procédé de calorisation des soupapes, en exposant d'abord quelques considérations théoriques sur les processus de diffusion dans les métaux, et ensuite le processus technologique de la calorisation par pulvérisation d'aluminium.

Les auteurs donnent quelques recettes pour des couches de protection contre l'oxydation durant le traitement thermique, et proposent quelques régimes de traitement thermique permettant d'obtenir la couche diffusée.

Ils indiquent les résultats expérimentaux, ainsi que les caractéristiques des pièces calorisées, et font ressortir les avantages qu'offrent, surtout en exploitation, les soupapes calorisées.

## BIBLIOGRAFIE

1. S.A. ZALIS, *Alitarea pieselor mari sudate.* Vestnik mașinostroenia (1958) nr. 5 (mai).
2. T. DRAZKIEWICZ, ST. GEBALSKI, *Protecția contra supraîncălzirii prin aluminiu pulverizat.* Schweisstechnik, *4* (1957).
3. V. MARCU, M. VASILESCU, P. FREUND, *Protecția contra coroziunii prin straturi de metal pulverizat.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *2* (1958).
4. M. VASILESCU, P. FREUND, *Metalizarea prin pulverizare.* I.D.T., București, 1958.
5. R. H. ESHELMAN, *Alitarea automată a supapelor la mașinile Pontiac.* The Tool Engineer, *2* (1956).
6. * * * *Metalizarea la fabricarea de supape. La Machine Moderne. 573,* dec. t. (1956).
7. * * * *Realizarea în R.P.R. a unui aparat de metalizare prin pulverizare.* Metalurgia și construcția de mașini, **X**, *9* (sept) (1958).
8. SAM TOUR, *Straturi obținute utilizînd metalizarea prin pulverizare și difuziune.* The Welding Journal, **34**, *4* (aprilie) (1955).
9. S. C. BOGDANOV, *Studiul metalelor și tratamente termice, plasticitatea la cald și la rece a stratului alitat.* Vestnik mașinostroenia, *7* (iulie) (1952).
10. A. P. GUBICEV, *Metalurgie fizică.* Ed. tehnică, București, 1954.
11. * * * *Straturi din metal pulverizat.* Standard Britanic 2569/1955 — Partea a 2-a. *Protecția fierului și oțelului cu aluminiu împotriva coroziunii la temperatura între 120—950°C.*
12. * * * *Exploatarea aparatelor de metalizare.* I.D.T., București, 1956.
13. K. ROSE, *Straturi noi alitate.* Materials and Methods, **43**, *3* (martie) (1956).
14. M. VASILESCU, *Utilizarea metalizării pentru obținerea unor suprafețe rezistente la temperaturi înalte.* Metalurgia și construcția de mașini, **XII**, *8* (aug.) (1960).
15. L. GRAND, *Alitarea oțelului și a metalelor feroase.* Revue de l'Aluminium, **34**, *239* (ian.) (1957).
16. I. ILIUC, P. FREUND, *Metodă nedestructivă pentru determinarea grosimii straturilor protectoare.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, *3* (1960).
17. * * * *Metallisation au pistolet,* Norme franceze PN A 91—201 (Aluminaje).
18. N. S. GORBUNOV, *Straturile de difuziune de pe fier și oțel.* Ed. Academiei de Științe a U.R.S.S., 1952.
19. ZOLTÁN GÁBOS, *Termodinamica fenomenologică.* Ed. Acad. R.P.R., București, 1959.
20. M. SCHILLER, *Metalizarea prin pulverizare.* Metalurgia și construcția de mașini, *8* (august) (1960).
21. ST. GEBALSKI, *Caracteristici plastice ale aluminiului difuzat în oțel obținut prin pulverizare.* Schweisstechnik, *4* (aprilie) (1957).

# NOTE

## ASUPRA FORMULEI GENERALIZATE A LUI DUPUIT

DE

T. OROVEANU

Formula lui Dupuit, care dă valoarea debitului în scurgerea staționară unidimensională cu suprafață liberă a unui lichid printr-un mediu poros, a fost considerată mult timp ca aproximativă. Într-adevăr, ipotezele care se utilizează la deducerea acestei formule simplifică destul de mult fenomenul real și faptul că valorile debitelor astfel calculate sînt foarte apropiate de datele experimentale era privit ca rezultatul unei compensări a diferitelor simplificări. I. A. Ciarnîi [1] a demonstrat însă că formula lui Dupuit rămîne valabilă și atunci cînd se consideră în calcule schema fizică reală a fenomenului. Mai tîrziu, același autor [2] a generalizat această formulă pentru cazul unui mediu poros neomogen al cărui coeficient de filtrare $k_f$ este variabil în direcția verticală. Dacă se consideră un strat poros orizontal și se alege un sistem de coordonate $Ox_1x_2x_3$ astfel ca axa $Ox_3$ să aibă sensul verticalei ascendente, I. A. Ciarnîi a arătat că, în scurgerea liniară, formula debitului este

$$Q = \frac{1}{l}\left[H_1\int_0^{H_1} k_f(x_3)\,dx_3 - H_2\int_0^{H_2} k_f(x_3)\,dx_3 - \int_{H_2}^{H_1} k_f(x_3)\,x_3\,dx_3\right]. \qquad (1)$$

În această formulă $k_f(x_3)$ este coeficientul de filtrare, $H_1$ nivelul suprafeței libere corespunzînd lui $x_1 = 0$ și $H_2$ acela care corespunde lui $x_1 = l$ $(H_1 > H_2)$.

Scurgerea se produce în direcția axei $Ox_1$, iar pe frontierele $x_1 = 0$ și $x_1 = l$ se admite că presiunea variază după legea hidrostatică.

Într-o lucrare anterioară [3], ne-am ocupat de studiul scurgerii cu suprafață liberă a lichidelor prin medii poroase neomogene, al căror coeficient de filtrare variază în direcția verticalei. În dezvoltarea calculelor prin care am generalizat ecuația lui Boussinesq pentru acest caz, am introdus funcția

$$g(x_3) = \int_0^{x_3} k_f(x_3)\,dx_3, \qquad (2)$$

ceea ce ne dă

$$\int_0^{H_1} k_f(x_3)dx_3 = g(H_1), \qquad \int_0^{H_2} k_f(x_3)\,dx_3 = g(H_2), \tag{3}$$

precum și

$$\begin{aligned}\int_{H_2}^{H_1} k_f(x_3)x_3dx_3 &= |x_3g(x_3)|_{H_2}^{H_1} - \int_{H_2}^{H_1} g(x_3)\,dx_3 = H_1\,g(H_1) - \\ &- H_2g(H_2) - \int_{H_2}^{H_1} g(x_3)\,dx_3.\end{aligned} \tag{4}$$

Acest ultim rezultat presupune numai că funcția $k_f(x_3)$ este continuă în intervalul închis $(0, x_3)$ pentru $0 < x_3 \leqslant H_1$. Cu această condiție avem

$$\frac{dg(x_3)}{dx_3} = k_f(x_3) \tag{5}$$

și putem aplica regula de integrare prin părți, așa cum am făcut în relația (4).

Înlocuind rezultatul obținut în (1), ajungem la formula

$$Q = \frac{1}{l}\int_{H_2}^{H_1} g(x_3)dx_3 \tag{6}$$

sau

$$Q = \frac{1}{l}\int_{H_2}^{H_1} g(H)dH \tag{7}$$

ceea ce reprezintă același lucru.

Formula găsită, care are avantajul de a fi mai compactă decît (1), este echivalentă cu aceea dată în lucrarea citată [3]. Reamintim că pentru scurgerea staționară unidimensională am ajuns la ecuația

$$\frac{d^2H}{dx_1^2} + \frac{1}{K}\left(\frac{dH}{dx_1}\right)^2 = 0, \tag{8}$$

cu

$$K(H) = \frac{g(H)}{k_f(H)}, \tag{9}$$

a cărei soluție este

$$x_1 = e^{-C_1}\int g(H)dH + C_2. \tag{10}$$

De asemenea, pentru debit am găsit formula

$$Q = -\,e^{C_1}. \tag{11}$$

Condițiile la limite permit determinarea constantei $e^{C_1}$ și apoi aceea a valorii efective a debitului [1]).

---

[1]) În lucrarea citată [3], formulele sînt date sub formă adimensională, pentru simplificarea aplicațiilor numerice.

Observăm însă că (10) se mai poate scrie

$$\int_0^l dx_1 = e^{-C_1}\int_{H_1}^{H_2} g(H)dH, \tag{12}$$

sau

$$e^{C_1} = -\frac{1}{l}\int_{H_2}^{H_1} g(H)dH \tag{13}$$

şi după înlocuirea în (11) obţinem formula (7). Putem aplica deci, pentru calculul debitului oricare din formulele (7) sau (11), prima prezentînd însă avantajul de a nu necesita, în prealabil, determinarea formei suprafeţei libere, respectiv a constantelor din (10).

*Primită la redacţie la 5 mai 1961.*

## К ОБОБЩЕННОЙ ФОРМУЛЕ ДЮПУИ

### РЕЗЮМЕ

В настоящей заметке приводится новая форма формулы Дюпуи, которая была обобщена И. А. Чарным [2] для неоднородных пористых сред, и показывается ее эквивалентность полученному в [3] результату.

## SUR LA FORMULE GÉNÉRALISÉE DE DUPUIT

### RÉSUMÉ

Dans cette note, l'auteur indique une nouvelle forme de la formule de Dupuit, dont I. A. Tcharnyi [2] a donné la généralisation pour les milieux poreux non homogènes. Il montre ensuite que cette formule est équivalente au résultat obtenu dans [3].

### BIBLIOGRAFIE

1. И. А. Чарный, *Строгое доказательство формулы Дюпуи для безнапорной фильтрации с промежутком высачивания.* Доклады Академии Наук СССР, **LXXIX**, *6*, (1951).
2. — *Безнапорная фильтрация в среде с переменной вдоль вертикали проницаемостью.* Доклады Академии Наук СССР, **LXXXVIII**, *5* (1953).
3. T. Oroveanu. *Cîteva consideraţii asupra scurgerii cu suprafaţă liberă a unui lichid printr-un mediu poros neomogen.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **XI**, *1* (1960).

# REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

## DATE NOI ÎN TEHNICA RODĂRII MOTOARELOR CU ARDERE INTERNĂ [1]

DE

OLGA BIŢĂ şi I. DINCĂ

### 1. GENERALITĂŢI

Performanţele unui motor nou sau ieşit din reparaţie capitală precum şi durata sa de funcţionare între două reparaţii generale sînt condiţionate — pe lîngă parametri constructivi — de calitatea materialelor din care sînt executate piesele componente, precum şi de calitatea suprafeţelor în frecare.

Mărirea randamentului motoarelor de o anumită construcţie se obţine prin frecarea mutuală a pieselor conjugate, la încărcări şi turaţii progresive, înainte de a trece în exploatare la sarcină normală.

Operaţia aceasta denumită rodaj este momentul cel mai important din frecarea suprafeţelor în contact atît pentru motoarele noi cît şi pentru cele reparate, avînd o influenţă hotărîtoare asupra ciclului de funcţionare ; de aceea rodajul a început să fie inclus în tehnologia obligatorie, menită să desăvîrşească uzinarea.

Obţinerea unor rezultate optime de rodaj este condiţionată de o serie de factori mecanici, termo-electrici şi chimici.

Factorii de natură mecanică predomină şi rezultă din prelucrarea suprafeţelor, construcţia, montajul şi rezistenţa corespunzătoare a pieselor.

Condiţiile termice şi electrice rezultă din cele mecanice şi chimice, acestea din urmă fiind determinate în bună măsură de combustibilul şi mai ales lubrifiantul folosit.

Făcînd analogia cu procesul de aşchiere şi utilizînd pentru studii microscopul electronic, care permite studiul transformărilor superficiale pe o adîncime de aproximativ 500 Å, procesul de rodaj poate fi explict în modul următor : asperităţile uneia dintre suprafeţe se comportă în procesul de deplasare relativă ca niște dălți microscopice care retează asperitățile mai moi și mai fine. Păstrînd analogia cu așchierea, înseamnă că aceste ,,scule'' au o durată limitată de utilizare, astfel că după un anumit timp chiar și vîrfurile tari dispar, fapt care duce la netezirea suprafețelor. În plus, zona activă de contact se mărește, atît prin deformațiile elastice și plastice ale asperităților cît și prin formarea zonelor mixte metal-lichid, ca o consecință a microdefectelor și ondulațiilor suprafețelor.

---

[1] Lucrare prezentată la Consfătuirea asupra aşchierii metalelor şi rodajului din 15—17 dec. 1960 — Bucureşti.

Energia moleculelor stratului superficial se mărește, astfel că ele sînt într-o stare de activitate intensă, avînd drept efect formarea de oxizi pe suprafețele metalice. Uzura de rodaj ca pierdere de material nu se produce decît după oxidarea particulelor transferate, ceea ce pare normal dacă se au în vedere ipotezele lui Joule, conform cărora dacă nu s-ar produce oxidarea, așchierea metalelor nu s-ar putea realiza, așchia sudîndu-se imediat la metalul de bază sau la cuțit [1].

Straturile superficiale de oxizi ce se formează prin acest gen de prelucrare, au o mare aderență numai atunci cînd structura și duritatea lor nu sînt mult diferite de acelea ale metalului de bază, formînd în acest caz pelicule rezistente. La o rețea cristalină mai largă ca a metalului, se produc în pătura de oxizi compresiuni, iar la una mai strînsă, tensiuni. Aceste solicitări pot duce la distrugerea rețelei, dînd naștere la sfărîmături de oxizi ce se amestecă în straturile superficiale neregulate ce fac parte structural din metal.

Avînd în vedere structura și duritatea lor diferită, apare firesc faptul că nu toți oxizii se comportă la fel de bine. Astfel fierul formează trei oxizi : $Fe_2O_3$, $FeO$ și $Fe_3O_4$, dintre care primul are chiar acțiune abrasivă. Se afirmă [1] că totdeauna cînd se ajunge la accident, se constată prezența hematitei ($Fe_2O_3$) în timp ce uzurile minime sînt asociate cu prezența wustitei ($FeO$) sau magnetitei ($Fe_3O_4$).

Remarcăm fenomene asemănătoare și în cazul altor metale. Spre exemplu oxidul de aluminiu, datorită durității sale mari, are un efect nociv observat prin rizurile formate pe arborele motor, în cazul folosirii cuzineților care conțin în compoziția lor acest metal.

Modificările superficiale cu reacții chimice de acest fel, se pot produce și cu alte elemente din ambianță, rezultînd sulfuri, cloruri etc. Pentru fiecare metal, există o anumită combinație sau o categorie de combinații, care dau rezultate bune din punctul de vedere al uzurii în special în perioada de rodaj (de exemplu sulfura de molibden, iodura de plumb, bromura de cupru, stearatul de zinc etc.)

Rezultatele bune date de straturile superficiale se explică fie prin rezistența sporită a peliculelor formate, fie prin structura lor lamelară și proprietatea moleculelor de a se orienta, asigurînd alunecarea straturilor succesive, în modul binecunoscut de la grafitul coloidal.

Dacă oxizii se produc în mod natural în procesul de frecare, ceilalți compuși se produc numai accidental sau în condiții pregătite cu grijă. Astfel, se știe că majoritatea aditivilor antigripanți conțin un compus cu sulf, clor sau fosfor. La punctele calde, cînd energia de activare a reacției este depășită, se produc sulfuri, cloruri sau produse mixte organo-metalice.

În majoritatea cazurilor formarea acestora este condiționată de prezența prealabilă a apei și a oxigenului.

Din acest punct de vedere se prevăd posibilități numeroase de protecția suprafețelor în frecare, acționînd asupra atmosferei ambiante sau asupra agenților din lubrifiant.

Modificările în stratul superficial au ca efect pe lîngă fenomenele amintite, o oarecare mărire a durității (10—20 unități Brinell) datorită deformațiilor plastice.

Deoarece suprafețele nu sînt perfect netede, inițial, datorită rugozității, se formează insule mici de contact care concentrează eforturile și astfel temperatura ce se dezvoltă poate depăși temperatura de topire a celor două metale sau numai a unuia ; procesul se poate localiza marcînd începutul gripajului. În continuare, aceste începuturi înrăutățesc calitatea suprafețelor prin creșterea inegală a asperităților, datorită adaosului de material ce rezultă la forfecarea punților de sudură în mișcarea relativă a suprafețelor conjugate.

În cursul rodajului, rugozitatea inițială și calitatea stratului de la suprafață se schimbă treptat, astfel că după rodajul complet se ajunge la o rugozitate optimă din punct de vedere al uzurii apreciată la 0,4—0,6 microni [2].

În ceea ce privește calitatea suprafețelor, literatura de specialitate prezintă păreri contradictorii.

Astfel F. P. Bowden și colaboratorii săi consideră că uzura este cu atît mai mică cu cît suprafețele sînt mai netede, tinzînd spre o superfinisare [2].

În acest spirit trebuia considerată aplicarea superfinisării electrolitice a suprafețelor în frecare de către unele întreprinderi constructoare de mașini (Hispano Suisse). S. P. Lane, din contra, afirmă că realizarea unor suprafețe cu rogozitatea mai mică de 0,15 microni mărește tendința de gripare și recomandă prelucrarea pînă la asperități de 0,4—0,6 microni [3].

R. Williams și S. B. Daniel recomandă asperități de ordinul 0,5—1 micron, cu condiția ca înălțimea lor să fie cel puțin dublă față de dimensiunile ondulațiilor rezultate din prelucrare [4].

Deși toate aceste păreri au o fundamentare științifică rezultatele trebuie considerate valabile doar în cadrul condițiilor în care s-au efectuat experiențele.

Problema firească ce se ridică de aici este : dacă suprafețele conjugate ale cuplurilor mecanice în frecare trebuie prelucrate fin sau rugos.

Pentru această apreciere trebuie avut în vedere faptul că în afară de microgeometrie, în procesul uzurii de rodaj, o influență care uneori este preponderentă o au atît macrodefectele cît și defectele de montaj [2].

Astfel, s-a remarcat că, cu cît raportul dintre macrogeometrie și rugozitate este mai mare, cu atît efectul negativ al macroasperităților în procesul de rodaj se manifestă mai intens [2], [4]. Reiese deci că în cazul superfinisării trebuie avut în vedere o înaltă tehnicitate în ceea ce privește prelucrarea și montajul.

Acestor defecte li se mai pot suprapune cele provenite din manipularea neatentă a pieselor, sgîrieturile profunde etc.

Toate acestea împiedică funcționarea normală a ansamblurilor de frecare, favorizînd uzuri locale anormale, cu supraîncălziri, curgerea plastică a materialului și după caz fie realizarea unor noi condiții normale de funcționare (realizarea rodajului), fie distrugerea suprafețelor cu urmări ireparabile pentru mașină [2].

Calculul hidrodinamic al ansamblurilor de frecare nu poate ține seama de asemenea defecte, așa că sarcina rodajului este tocmai aceea de a le înlătura, permițînd agregatului să revină la un regim de echilibru apropiat de cel stabilit de proiectare.

Un important factor care intervine în procesul de rodaj este calitatea lubrifiantului.

Prin folosirea în timpul rodajului a unor uleiuri diferite, s-a constatat influența considerabilă a calității acestora asupra formării suprafețelor, înțelegînd prin aceasta nu numai netezirea lor ci și comportarea lor ulterioară. Comportarea suprafețelor în frecare arată că în cazul rodajului cu ulei fluid, stratul de la suprafață se distruge mai puțin decît în cazul folosirii unui ulei vîscos [5].

Pentru explicarea influenței calității uleiurilor se indică două puncte de vedere:

1) Primul, se bazează pe premise elaborate de prof. Rebinder și anume că influența lichidelor active din punct de vedere chimic adsorbite, care se manifestă cu o onctuozitate înaltă în cazul frecării semilichide în condiții normale de funcționare, acționează în mod opus la presiuni locale mari, sporind uzura prin pătrunderea lor din zona de deformare; totuși pe parcurs, ele măresc durabilitatea suprafețelor prin participarea la fenomenul de durcizare și la formarea stratului Beylby (strat vitros caracterizat printr-o mare rezistență).

2) Cel de-al doilea punct de vedere se bazează pe proprietatea uleiurilor fluide de a conduce mai bine căldura și de a reface mai ușor peliculele distruse.

Una din ipotezele unanim recunoscute despre natura eficacității lubrifianților din uleiuri minerale este presupunerea existenței în aceștia a unor impurități polare care sînt adsorbite chimic pe suprafețele mecanice. Experiențele făcute cu lubrifianți din hidrocarburi pure fără adaosuri polare, au arătat deteriorări rapide ale suprafețelor și un coeficient de frecare ridicat.

Acțiunea adaosului polar se explică prin reacțiunea acestuia cu oxizii formați pe suprafețele metalice dînd săpunuri metalice cu bune proprietăți lubrifiante. În acest caz, tipul oxidului format va determina eficacitatea ungerii. Astfel, experiența arată că $Fe_3O_4$ este un lubrifiant mai eficace decît $Fe_2O_3$ din punct de vedere al împiedicării sudării suprafețelor.

În cazul folosirii unui aditiv antigripant, uzura inițială este mai mare diminuîndu-se repede, ajungînd chiar la zero, în timp ce uleiul fără aditiv dă o uzură inițială mai mică, dar care evoluează treptat depășind la un moment dat uzura provocată de aditivi [2] și [4].

## 2. METODE DE RODAJ

Dezideratele ca un rodaj să fie socotit optim sînt următoarele :

— să evite gripajul,

— să nu degradeze suprafețele,

— să dureze cît mai puțin.

Pînă în prezent nu au fost elaborate încă regimuri optime de rodaj pentru motoarele cu ardere internă care să permită netezirea rapidă, cît mai completă și în bune condiții a suprafețelor în frecare. Metoda se realizează în regimuri diferite (ca durată, mod de încărcare, agent folosit). De asemenea, nu există încă date suficiente pentru stabilirea unui regim de rodaj la motoarele ieșite din reparație capitală, de cele mai multe ori copiindu-se tehnologia folosită pentru motoarele noi.

În general, pregătirea suprafețelor în frecare pentru a suporta sarcinile pe care condițiile de exploatare le impun, se face prin încărcări progresive, pe perioade de timp relativ lungi și prin folosirea uleiului obișnuit în exploatare.

Soluțiile adoptate în sensul scurtării perioadei de rodaj diferă după uzinele constructoare. Astfel Hispano Suisse folosește superfinisarea electrolitică, montajul în condiții ideale prin folosirea cheilor dinamometrice, alinierile cu ajutorul aparatelor optice etc., reducînd perioada de rodaj la zero.

În standardul german B.S. nr. 1905/1952 se arată că folosirea unor pulberi abrazive cu Ø 1—90 microni, permite ca rodajul să fie complet terminat în două ore. Metoda este rapidă, dar ridică obiecțiuni dintre care cea mai importantă este aceea că și după spălarea motorului, rămîne aproximativ 20—30% din materialul abraziv folosit care poate avea acțiune dăunătoare în comportarea ulterioară a motorului.

O metodă interesantă este aceea folosită de uzinele Cadillac [5]. Prin întrebuințarea unor uleiuri cu viscozitate scăzută și centrifugarea uleiului la întoarcerea în carter, rodajul se execută în două ore, în condițiile cele mai bune. Pentru eliminarea particulelor abrazive se face o circulație forțată de ulei folosindu-se o pompă auxiliară.

Datele din literatura de specialitate sovietică indică soluțiile adoptate pentru scurtarea periodei de rodaj în uzină, fără să se renunțe la rodajul de durată (de parcurs).

Astfel la motoarele Ziss 120, Gaz 51, D 54, perioada de rodaj a fost redusă cu 45% prin folosirea unui ulei de fuse cu viscozitatea $V_{50} = 2°E$ cu un adaos de 5% sulforezol. S-a ajuns la perioada de rodaj în uzină de 32 minute la Ziss, 90 minute la D 54 și 70 minute la Gaz 51. La motoarele ieșite din reparații, perioada de rodaj a fost de 210 minute. Rodajul făcut cu aftol 10 a dat aceleași rezultate. Metoda elaborată aparține candidatului în științe P. A. Voinov [5].

L. A. Damianov arată că Uzinele Molotov folosesc rodajul în gol la 1 200 de ture, la cald, iar Uzinele Stalin aplică metoda rodajului numai la rece cu o sarcină de 8 CP [6].

Pentru aprecierea regimurilor de rodaj se folosesc următorii indici :

1) Momentul terminării procesului prin schimbarea curbei de uzură.

2) Ritmul mediu de uzură în perioada de rodaj apreciat prin tangenta unghiului curbei de uzură reprezentativă.

3) Starea suprafețelor după aspect vizual și microfotografic.

Alura diferită a curbelor pentru diferite uleiuri și regimuri a fost aceea care a dus la ideea accelerării rodajului. În acest sens, studiile pe motoare ale lui Damianov au permis elaborarea procesului de folosire a uleiului $VU_{50} = 2°E$, AS 5 și 20% petrol cu presiunea 4–5 atm pompat de o instalație auxiliară. După 80–100 minute rodajul se poate considera terminat.

În urma încercărilor pe 4 motoare, s-a constatat că cilindrii motorului, fusurile arborilor cotiți și îndeosebi cuzineții lagărelor se rodează mult mai bine în regim intermitent, segmenții rodîndu-se la fel în ambele cazuri. Soluția propusă constă în următoarele :

— 30′ rodaj la rece la 600 ture în gol,

— 30′ rodaj la cald la 900 ture în gol,

— 20′ la cald la 1 200 ture.

Metoda preconizată de către P. A. Voinov [7] se caracterizează în general prin următoarele :

— Folosirea uleiului de fuse $V_{50} = 2°E$ cu 5% sulforezol timp de 30–100′ în funcție de puterea motorului.

— Asigurarea unui regim de ungere forțat prin pompa auxiliară.

Motoarele rodate după această tehnologie au dus la sporirea economiilor de ulei cu 12%, iar în cazul motoarelor D 54, acestea au ajuns pînă la 30%.

Asperitățile de prelucrare ale suprafețelor conjugate erau de 1–3 microni, iar după rodaj acestea au ajuns la 0,1–0,2 microni. Uzura după rodaj a fost de aproximativ 1,73 microni la 1 000 km parcurși.

Remarcăm că toate aceste date se referă la rodajul în uzină. Practica uzinelor sovietice nu exclude rodajul progresiv făcut de beneficiar.

Uzinele constructoare de motoare din diferite țări dispun de o serie destul de mare de metode eficace și bine verificate de scurtarea timpului de rodaj. Tratarea lor mai detaliată, indicînd regimul tehnologic folosit, este dată în literatura tehnică respectivă. Aceasta se referă în special la rodarea ansamblului cilindru-segmenți.

O parte din metodele expuse au devenit clasice, altele sînt mai recente.

Necesitatea clarificării unor probleme impune o caracterizare scurtă a acestor metode.

Printre metodele clasice se pot considera [8] :

*a*) Finisarea suprafețelor conjugate segment-cilindru printr-o strunjire precisă,

*b*) Introducerea unor garnituri metalice sau nemetalice în materialul segmentului,

*c*) Acoperirea cu straturi relativ moi — cositorirea, cadmierea sau arămirea peretelui exterior al segmentului,

*d*) Oxidarea de suprafață a peretelui exterior a segmentului.

Referitor la prima metodă de soluționare a problemei se pot face unele obiecții : datorită aderenței incomplete dintre peretele segmentului și cilindrului, perioada inițială de rodaj se caracterizează prin puternice scăpări de gaze în carter. Etanşarea eficace a pistonului se produce după un interval de timp relativ lung.

Introducerea de garnituri metalice sau nemetalice în pereții exteriori ai segmenților de piston, cu rezistență neînsemnată la eroziune, asigură chiar după cîteva minute de funcționare o etanșeitate mulțumitoare pistonului ceea ce, în comparație cu segmenții obişnuiți, ar corespunde cu terminarea perioadei de rodaj. Dezavantajul constă în micșorarea suprafeței active a segmentului și o oarecare dificultate la execuție și montaj.

Prin cositorire, cadmiere, arămire, rezultatele sînt mult mai bune, dar aceste mijloace nu-și găsesc nici ele o răspîndire prea mare fiind prea scumpe.

Procedeul de oxidare superficială a peretelui exterior al segmentului care aproape nu este cunoscut în Europa, constituie o metodă tipică de scurtare a perioadei de rodaj a motoarelor, larg aplicată în S.U.A.

În ultimii ani au fost obținute posibilități reale de scurtare la minimum a perioadei de rodaj, la motoarele cu piston. Rezultatele obținute în prezent în practica de exploatare dovedesc că metodele moderne sînt hotărît superioare față de cele clasice, astfel că se poate vorbi despre soluții oarecum mulțumitoare din toate punctele de vedere.

Lăsînd la o parte particularitățile tehnice caracteristice, aproape toate mijloacele moderne se bazează pe acelaşi principiu: acoperirea superficială a pereților exteriori ai segmenților cu componenții aleși în mod corespunzător pentru a influența într-un fel stabilit (dorit) interacțiunea suprafețelor conjugate ale segmenților și cilindrilor.

Mai frecvent sînt folosite:

*a*) Straturi de fosfați și fosfați grafit;

*b*) Straturi abrazive;

*c*) Straturi de alunecare.

Practica fosfatării s-a folosit pe scară largă, mai ales la tancuri și avioane, în timpul războiului mondial, în scopul asigurării segmenților puternic solicitați contra acțiunii corosive a gazelor fierbinți la pornirea motorului. Metoda dezvoltată și perfecționată a dus la realizări practice de mare importanță. Astfel aplicarea unor straturi de fosfați pe segment, asigură o etanșeitate suficientă după 30 de minute de funcționare a motorului.

Cele mai bune rezultate le-a dat folosirea fosfaților macrogranulari. Straturile cu structură microgranulară nestabilă se caracterizează prin apariția unor grăunți inegali și tendințe accentuate de fisurare.

Porozitatea caracteristică a straturilor de fosfați îmbunătățește și condițiile de ungere. Metoda se aplică cu succes mai ales atunci cînd segmenții sînt prelucrați prin strunjire, lăsîndu-se asperități de 5—15 microni (canale paralele cu marginile circulare ale segmentului).

O îmbunătățire a metodei constă în folosirea straturilor de fosfați —grafit. Prezența grafitului micșorează considerabil pierderile prin frecare și exclude aproape posibilitățile gripării suprafețelor conjugate, chiar în cazul de întrerupere a peliculei lubrifiante de lungă durată prin aducerea lubrifiantului proaspăt pe peretele cilindrului.

Metoda acoperirii segmenților cu un strat de 20 microni de substanță abrazivă, cu un liant special și umplerea parțială a porozităților cu grafit coloidal a dat rezultate foarte bune, dar necesită o serie de complicații tehnologice, care o fac aproape improprie.

Durata rodajului în acest caz este de 10 minute, cînd urmele de prelucrare și stratul abraziv dispar.

Dintre toate mijloacele cunoscute și actual folosite, pentru scurtarea procesului de rodaj la motoarele cu ardere internă, cele mai bune rezultate se obțin prin acoperirea pereților exteriori ai segmenților cu straturi de alunecare. Metoda se bazează pe folosirea proprietăților unor materiale plastice sau neplastice ce se aseamănă oarecum cu aliajele de cositor folosite la lagăre.

Influența prezenței stratului de alunecare se manifestă prin crearea deosebit de rapidă a unei suprafețe portante perfecte la elementele conjugate, ceea ce permite o etanșare aproape imediată. După trecerea a 2 minute de funcționare a motorului, diagramele indicatoare au confirmat realizarea gradului nominal de compresie și repartiția reglementară a presiunilor caracteristice de regim ale ciclului de funcționare în cilindru.

Straturile de alunecare se caracterizează printr-o îmbinare puternică cu materialul de bază cu o lipsă aproape totală a tendinței de sfărîmare sau fisurare locală (asigură în acest fel o mare aderență). Pînă la dispariția completă a ultimelor urme de prelucrare prin așchiere, straturile de alunecare umplu toate canalele și rizurile chiar foarte mici de pe pereții exteriori ai segmenților și se mențin pînă la erodarea completă a acestor straturi.

Rezultate excelente a dat folosirea ca strat de acoperire, a bisulfurii de molibden care își menține proprietățile sale lubrifiante în aerul atmosferei, într-un interval de temperaturi de la $-70 \div +750°C$, iar în vid pînă la $+1400°C$. Ca lubrifiant este un material solid și uscat care aderă puternic la suprafețe datorită atomilor săi polari de sulf. Capacitatea portantă a peliculei de $MoS_2$ ajunge la 7 000 $kg/cm^2$, coeficientul de frecare scăzînd o dată cu creșterea presiunii pe suprafață, spre deosebire de ceilalți lubrifianți. Spre deosebire de grafit nu are nevoie de o peliculă absorbantă. Operația de acoperire cu pulbere de $MoS_2$ se face prin lăpuire. O peliculă o dată aplicată, nu se mai poate îndepărta și se recunoaște prin faptul că suprafața capătă o culoare cenușie mată.

În R.F.G. aplicarea metodei la o motocicletă a dus la următoarele rezultate : motocicleta a mers 18 km cu 40—60 km/oră, apoi o oră cu 90—95 km/oră, parcurgînd după aceea 5 500 km. După demontare nu s-a observat nici o defecțiune. Faptul ilustrează că practic, rodajul este redus la zero prin această metodă [9].

Folosirea aditivilor antigripanți a căror acțiune se bazează în același timp pe polaritatea lor și pe reacția chimică pe care o dau cu metalul la locurile amenințate de gripaj, a dat rezultate satisfăcătoare atît în scopul reducerii perioadei de rodaj cît și a îmbunătățirii calitative ulterioare și a prelungirii duratei de funcționare a motoarelor.

În acest sens se indică de către Academia Militară din Lenigrad [10] folosirea ca agent de rodaj la motoarele de nave a unui ulei cu 1,3—1,5%

sulf, reducînd astfel timpul total de rodaj de 6—10 ori şi mărind în acelaşi timp durabilitatea ulterioară a motoarelor de 1,5—2 ori faţă de rodajul cu ulei curat.

De asemenea, Institutul Naval din Odessa a efectuat un studiu asupra posibilităţii folosirii uleiurilor activizate ca uleiuri de siguranţă şi rodaj [11].

Pornind de la ideea scurtării perioadei de rodaj şi folosirea timpului în care se efectuează acesta pe parcurs sub sarcina progresivă, ca timp efectiv productiv, în cadrul Institutului de mecanică aplicată al Academiei R.P.R. s-a elaborat o metodă chimică de rodaj, aplicată cu succes în cazul motoarelor de tractor romîneşti, Suportul ştiinţific al metodei constă, după cum s-a arătat mai înainte, în folosirea proprietăţilor unor aditivi organici de a avea o acţiune corosivă asupra proeminenţelor suprafeţelor în frecare în anumite condiţii. Rodajul complet al motoarelor după această metodă se face în uzină şi se termină în aproximativ 8 ore [2].

Tehnologia de detaliu a acestei metode a făcut obiectul unei alte comunicări susţinute în cadrul aceleiaşi consfătuiri asupra aşchierii şi rodajului ce a avut loc în Bucureşti între 15—17 dec. 1960.

*Primită la redacţie la 28 iunie 1961.*

## НОВЫЕ ДАННЫЕ О ПРИТИРКЕ ДВИГАТЕЛЕЙ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ

### РЕЗЮМЕ

Первая часть работы содержит общие сведения о поведении трущихся пар в период притирки, освещая происходящие явления, а так же степень участия различных факторов механического, химического, электрического и пр. характера. Показывается влияние качества поверхностей и применяемых смазочных материалов на притирку.

Во второй части представляются обычные и специальные методы притирки, настаивая на тех, которые стремятся максимально уменьшить время притирки, и, одновременно, получить оптимальные трущиеся пары.

Уделяется особое внимание методам покрытия слоями из соответствующих компонентов для того, чтобы можно было управлять по желанию взаимодействием сопряженных поверхностей, а так же применению примесий для защиты от заедания.

Из сравнительного представления методов выводятся условия, которым должна удовлетворять оптимальная притирка: избегание заедания, возможно меньшая продолжительность, подготовка поверхностей в виду наилучшего последующего поведения.

В заключение излагается метод химической притирки, примененный в Институте прикладной механики.

# NEW DATA ON THE RUNNING-IN OF INTERNAL COMBUSTION ENGINES

## ABSTRACT

The first part of this paper contains general considerations on the behaviour of lubricated systems during the running-in period, the intervening phenomena and the importance of various factors of mechanical, chemical and electrical nature being explained. The effect of the quality of surfaces and lubricants on the running-in period is shown.

The second part presents ordinary and special running-in techniques, particular stress being laid on those the purpose of which is a maximum shortening of the running-in time and the obtaining of optimum lubricated systems.

Particular attention is paid to the coating of surfaces in order to influence in a desired manner their interactions, as well as to the use of anti-seizure additives.

A comparative presentation of methods shows the requirements of an optimum running-in of internal combustion engines, i.e., avoiding of seizure, short duration, mechanical treatment of surfaces.

Finally, the chemical method worked out at the Institute of Applied Mechanics is presented.

## BIBLIOGRAFIE

1. F. S. MURRAY, R. L. JOHNSON, *Temperatura limită de volum criteriu al eficacității materialelor de ungere sintetice în condiții de ungere de frontieră.* Mașinostroienie, **IV** (1955).
2. O. PREOȚESCU și colaboratori, *Considerații asupra uzurii ansamblurilor de frecare în perioada de rodaj*, Studii și cercetări de mecanică aplicată, **I** (1957).
3. S. P. LANE, *Wear of Automatic Engine Cylinders and Piston Rings*, Mechs. Wear, Ed. Am. Soc. for Metals, New York, 1951.
4. R. WILLIAMS, S. E. DANIEL, *The Running of Engines. Choice of Cylinder Pore Finish.* Proc. of the Automobile Division, **55**, *4* (1954).
5. P. VERONA, *Noutăți în rodajul motoarelor*, IDT, București, 1955.
6. L. A. DAMIANOV, *Rodajul cilindrilor motoarelor Zis 120 și Gaz 51 după reparații generale*, Bul. constr. mașini, *12* (1955).
7. P. A. VOINOV, *Alegerea condițiilor optime pentru rodajul motoarelor.* Bul. Constr. Mașini, *2* (1955).
8. W. LESNIAK, *Ameliorarea condițiilor de rodaj la segmenții de piston.* Tehnika motorysacina, *3* (1955).
9. H. MAUSOLFF, *Încercarea cu bisulfură de molibden și ulei compundat pentru reducerea rodajului unei motociclete.* Krafahrzeng Tehnik, (1958).
10. * * * *Rodarea suprafețelor supuse uzurii de frecare a motoarelor de nave folosind uleiuri cu adaos pe sulf.* Recinoi transport, *12*, 27—29 (1958).
11. L. V. ELIN, P. I. KOHANOVSKI, T. V. VASILIEVA, *Uleiuri cu aditivi de suprafață ca lubrifianți de siguranță și rodaj.* — Frecarea și Uzura în Mașini, Acad. St. U.R.S.S., Inst. de Mașini (1946).

# RECENZII

J. BÉLA, *Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuaţii liniare*, Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1961, 224 p.

Studiul sistemelor de ecuaţii algebrice liniare face parte din domeniul analizei numerice şi prezintă o importanţă deosebită pentru multe probleme de ordin ştiinţific sau tehnic. Într-adevăr, se ştie — de exemplu — că cele mai multe probleme ale fizicii matematice nu se pot rezolva prin metode exacte de calcul, metodele aproximative căpătînd o deosebită importanţă; multe din aceste din urmă metode, chiar foarte diferite în ceea ce priveşte punctul de plecare şi aparatul matematic folosit, conduc în ultimă instanţă la rezolvarea unui sistem de ecuaţii liniare cu un număr finit (dar mare) de necunoscute sau cu o infinitate de necunoscute. Lucrarea lui J. Béla este destinată studiului sistemelor de ecuaţii liniare cu un număr finit de necunoscute, pentru care s-au dat multe metode de rezolvare, exacte sau aproximative, fiecare din ele utile în diferite cazuri particulare în care — datorită numărului mare de necunoscute — metoda lui Cramer nu mai poate fi aplicată practic.

Capitolul I este destinat unor noţiuni introductive, cuprinzînd transformările liniare, descompunerea diadică şi teoria spaţiilor liniare normate.

În capitolul al II-lea se dau metode exacte directe de rezolvare, dintre care cea mai importantă este metoda de eliminare a lui Gauss, căreia i se pot da unele interpretări mecanice foarte interesante. Menţionăm de asemenea metoda compactă, metoda rădăcinilor pătrate, metoda ortogonalizării, metoda vectorilor conjugaţi şi metoda lui Morris. Se indică şi rezolvarea sistemelor de ecuaţii omogene şi neomogene cu ajutorul descompunerii diadice.

Metodele exacte indirecte sînt tratate în capitolul al III-lea. Dacă notăm sistemele de ecuaţii liniare neomogene sub forma $Ax = v$, $v$ fiind un vector dat, $A$ fiind matricea coeficienţilor iar $x$ un vector necunoscut, metodele exacte sînt acelea care ne dau soluţia exactă a sistemului printr-un număr finit de operaţii (făcînd abstracţie de erorile de rotunjire). Spre deosebire de metodele exacte directe, o metodă exactă este numită indirectă cînd soluţia sistemului se calculează pornind de la inversa matricei A, punînd-o sub forma $x = A^{-1}v$. Asemenea metode au avantajul că ne dau posibilitatea de a rezolva şi sistemele $Ax = w$, unde $w$ este un vector oarecare. În capitolul menţionat se studiază pe larg obţinerea matricei, inverse prin diferite metode (metoda eliminării, metoda compactă etc). Menţionăm de asemenea şi considerarea acumulării erorilor de rotunjire.

Capitolul al IV-lea cuprinde metode de iteraţie (aproximaţii succesive). În afara iteraţiilor obişnuite, se folosesc diferite metode, dintre care cităm: metoda lui Seidel, metoda relaxării, metoda de iteraţie cu diferenţe minime, metoda pantei maxime, metoda lui Schulz etc.

Lucrarea este însoţită de o bogată bibliografie (116 titluri).

Problemele ridicate în această monografie sînt interesante şi deosebit de actuale. De aceea lucrarea este binevenită şi, prin faptul că datele de natură teoretică — riguroase din punct de vedere matematic — sînt însoţite de numeroase exemple numerice, poate fi folosită cu deosebit succes de un cerc larg de cititori.

*P. P. Teodorescu*

EUGEN ZAHARESCU, *Contribuţii la studiul capacităţii portante a fundaţiilor*. Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1961, 298 p.

Lucrarea are caracterul unei monografii, urmărind un dublu scop : prezentarea critică a stadiului actual al problemei capacităţii portante a fundaţiilor, expunerea rezultatelor cercetărilor teoretice şi experimentale întreprinse de autor.

Sînt analizate sistematic, pe baza unui material bibliografic foarte bogat şi adus la zi, multiple aspecte ale problemei : procesele dezvoltate în masivul de pămînt a cărei capacitate portantă este solicitată, criteriile existente cu privire la starea de eforturi limită în pămînturi, criteriile de modelare a capacităţii portante, metodica şi principalele rezultate ale experimentelor întreprinse de numeroşi cercetători, metodele de calcul existente. Se dă o clasificare şi o comparaţie critică a metodelor de calcul existente, gruparea lor făcîndu-se în funcţie de ipoteza admisă cu privire la starea de eforturi şi deformaţii în masivul de pămînt.

Autorul aduce o preţioasă contribuţie originală la studiul problemei capacităţii portante, atît prin studiul experimental al proceselor dezvoltate în masivele de pămînt, cît şi prin metoda pe care o propune pentru calculul capacităţii portante a masivelor de pămînt necoeziv şi omogen, mărginite de o suprafaţă orizontală plană şi încărcate au o sarcină centrică înclinată (problema plană).

Metoda de calcul propusă porneşte de la ipoteza stării mixte de eforturi (existenţa în masivul de pămînt în stadiul echilibrului limită, a unei pene de pămînt aflat în stadiul elastic sub fundaţie, zonele adiacente afectate de procesul de pierdere a stabilităţii fiind în stare de eforturi limită). Autorul se bazează în rezolvarea problemei pe metoda de calcul a acad. V. V. Sokolovski şi pe studiile lui M. N. Gorbunov-Posadov, aducînd însă mai multe elemente noi şi anume : pe baza rezultatelor experimentale, se ajunge la concluzia că sîmburele elastic de sub fundaţie are în secţiune forma unui triunghi, cu unghiurile egale cu $\varphi \pm \delta$ în care $\varphi$ este unghiul de frecare internă al pămîntului, $\delta$ înclinarea sarcinii exterioare. Se precizează poziţia rezultantei eforturilor la contactul dintre faţa amonte a sîmburelui elastic şi zona în stare de eforturi limită. În calculul presiunii pe faţa aval a sîmburelui elastic, se aplică o metodă inspirată de lucrările prof. Gorbunov-Posadov, dar diferită de aceasta (se ocoleşte punctul singular reprezentat de punctul extrem al zonei încărcate de sarcina exterioară printr-un arc de cerc, la fel ca în lucrarea lui Gorbunov-Posadov, dar se deplasează cu un interval foarte mic spre aval începutul zonei în stare pasivă de eforturi limită, ceea ce permite aplicarea metodei indiferent de mărimea unghiului de frecare internă a pămîntului). Autorul prezintă în lucrare grafice care dau mărimea presiunii pe faţa aval a sîmburelui elastic, în funcţie de unghiul de frecare internă a pămîntului şi de înclinarea sarcinii exterioare. În acest fel, metoda de calcul devine foarte comodă, reducîndu-se la extragerea din grafic a presiunii pe faţa aval a sîmburelui elastic, apoi determinarea din condiţiile de echilibru static a mărimii presiunii pe faţa amonte a sîmburelui elastic şi a mărimii încărcării maxime (corespunzătoare capacităţii portante maxime) pe suprafaţa masivului de pămînt. Operaţia este foarte simplă, dat fiind că pentru toate cele trei forţe se cunosc direcţia şi punctul de aplicaţie, iar pentru una dintre ele se cunoaşte şi mărimea absolută. Sînt de menţionat încă două aspecte care pledează pentru justeţea metodei de calcul propusă : ca formă, curba de capacitate portantă tip Gersevanov (efortul tangenţial maxim în funcţie de încărcarea verticală centrică aplicată masivului de pămînt) este mai apropiată de formele curbelor experimentale, în cazul metodei propuse de E. Zaharescu, decît în cazul metodelor propuse de alţi autori, dat fiind că are o boltire mai accentuată şi deplasată spre încărcări verticale mai mari; deşi în valoare absolută, există o mare diferenţă între rezultatele experimentale şi cele indicate de formulă (aşa cum se întîmplă şi cu celelalte metode existente), raportul dintre capacităţile portante corespunzătoare stărilor de îndesare maxime şi minime ale nisipului este acelaşi, atît pentru valorile rezultate din determinările experimentale, cît şi prin calcul.

Sînt demne de relevat şi mai multe aspecte ale studiilor experimentale :

— autorul a reuşit să pună la punct o foarte bună tehnică de urmărire a deplasărilor particulelor în procesul de încărcare a masivului de nisip. În mod deosebit sînt de remarcat excelentele imagini determinate prin fotofixaj ;

— studiile experimentale au mers mai departe decît cele teoretice, atacînd şi problema încărcărilor excentrice. S-a pus în evidenţă faptul că, pentru o excentricitate dată în valoare absolută şi o anumită înclinare a sarcinii exterioare, capacitatea portantă maximă este sensibil mai mare cînd excentricitatea este deplasată în direcţia opusă componentei orizontale a sarcinii exterioare, decît în cazul contrar.

— s-au stabilit corelaţii experimentale între deplasările verticale sau direcţia rezultată a deplasărilor fundaţiei în faza de încărcare maximă a fundaţiei şi lăţimea fundaţiei, mărimea particulelor pămîntului, înclinarea sarcinii exterioare.

— experienţele au arătat că zonele antrenate în mişcare prin ruperea masivului au în faza finală un contur foarte variabil de la o încercare la alta, forma lor în această fază fiind determinată de factori întîmplători. Există o diferenţă netă între traseul suprafeţelor de lunecare şi al celor de rupere.

Concluziile monografiei sînt destul de pesimiste. Cu tot volumul imens de studii întreprinse de numeroşi cercetători printre care figurează savanţi de renume mondial, rezultatele sînt departe de a fi satisfăcătoare. În particular, se constată încă diferenţe inadmisibil de mari între rezultatele indicate de formulele de calcul şi cele stabilite experimental. Se pare că, în mare măsură, aceste diferenţe se datoresc criteriului nejust de plasticitate utilizat în calculul masivelor de pămînt precum şi metodicei necorespunzătoare de determinare a coeficienţilor rezistenţei la lunecare a pămînturilor.

Cu siguranţă, se va ajunge la depăşirea actualului moment critic în problema capacităţii portante. Între principalele căi de înlăturare a acestui impas şi care se întrevăd în momentul de faţă, figurează şi două dintre liniile urmate de E. Zaharescu în studiul său : tratarea capacităţii portante ca o problemă mixtă, luarea în considerare nu numai a stării de eforturi, dar şi a deplasărilor care însoţesc pierderea stabilităţii masivelor de pămînt.

Starea de confuzie existentă în problema capacităţii portante a masivelor de pămînt face cu atît mai utilă monografia întocmită de E. Zaharescu. Cuprinzînd atît expunerea aspectelor de interes ştiinţific ale problemei cît şi indicaţiile necesare aplicaţiilor practice, lucrarea lui E. Zaharescu constituie un document valoros pentru cercetătorii ştiinţifici şi inginerii preocupaţi de problema capacităţii portante a masivelor de pămînt.

*R. J. Bally*

* * * *Труды третьей всесоюзной конференции по трению и износу в машинах* (Lucrările celei de-a III-a Conferinţe Unionale asupra frecării şi uzurii maşinilor). Изд. Академии Наук СССР, 1960.

În Editura Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S. au apărut în trei volume lucrările prezentate la cea de-a treia Conferinţă Unională asupra frecării şi uzurii maşinilor, care a avut loc în aprilie 1958 la Moscova. Aceste conferinţe sînt organizate de Institutul de Construcţii de Maşini al Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S. şi au avut loc pînă în prezent periodic la un interval de nouă ani (prima s-a ţinut în anul 1940 iar a doua în 1949).

La Conferinţa din 1958, în cadrul celor 5 secţii de lucru, au fost prezentate 6 rapoarte şi peste 150 lucrări aparţinînd a circa 200 specialişti. Cu cîteva excepţii, marea majoritate a acestor lucrări au fost publicate sub forma celor 3 volume menţionate. Prezentarea lucrărilor este grupată pe domenii de preocupări.

Astfel în volumul I sînt publicate lucrările privind uzura şi materialele de antifricţiune. Capitolul I al primei părţi se referă la lucrările din domeniul uzurii propriu-zise, influenţa diferiţilor factori care influenţează uzura şi metodele pentru îmbunătăţirea comportării la uzură a suprafeţelor. În afara raportului general prezentat de prof. M. M. Hruşciov, din cele 11 lucrări ale acestui capitol remarcăm lucrarea unui colectiv condus de B. I. Kosteţki, privind clasificarea metalelor şi aliajelor după comportarea lor la uzură ; lucrarea prof. I. V. Kraghelski privind uzura ca rezultat al deformaţiilor repetate a straturilor superficiale ; lucrarea unui colectiv condus de L. S. Palatkin asupra unor probleme ale fizicii uzurii metalelor ; lucrarea semnată de K. V. Saviţki privind deformaţiile elastice care se produc în timpul procesului de frecare.

În capitolul II al primului volum sînt grupate 12 lucrări care tratează probleme legate de proprietăţile mecanice şi de aderenţă a metalelor şi de variaţia acestora datorită frecării şi uzurii. Remarcăm lucrările : *Asupra mecanismului de apariţie şi distrugere a adeziunii în procesul de frecare* de S. B. Ainbinder şi A. S. Pranci ; *Influenţa sulfizării asupra frecării şi uzurii metalelor* de prof. Iu. M. Vinogradov ; *Dinamica transformărilor structurale în timpul uzurii*, lucrare a unui colectiv condus de I. M. Liubarski ; *Unele probleme ale teoriei sudurii metalelor* de A. P. Semenov etc.

Al treilea capitol cuprinde 7 lucrări privind uzura de abraziune şi uzura în condiţii de frecare particulare.

Partea a doua a primului volum este consacrată materialelor de antifricţiune şi cuprinde 5 lucrări. Remarcăm lucrarea de sinteză privind încercarea materialelor de antifricţiune de I. Ia. Alşiţ şi L. N. Suşkina, lucrarea privind legăturile dintre proprietăţile fizice ale materialelor de antifricţiune şi comportarea lor la rodaj de A. D. Kuriţina etc.

Al doilea volum cuprinde problemele legate de frecarea uscată şi la limită şi de materialele de fricţiune.

Prima parte, intitulată *Frecarea uscată*, cuprinde, în afara unui raport general al prof. I. V. Kraghelski, un număr de 15 lucrări dintre care remarcăm : *Frecarea de alunecare la mişcarea punctelor materiale pe suprafeţe anizotrope* de A. U. Galeev şi Iu. I. Perşiţ ; *Lucrul mecanic al forţelor de frecare şi uzura corpurilor în rostogolire* de N. I. Glagolev ; *Studiul frecării ca rezultat al rezistenţei dintre două straturi superficiale subţiri a două corpuri solide*, de G. I. Epifanov şi N. I. Minaev ; *Mecanismul frecării în cuplul metal-grafit*, de L. A. Plutalova ; *Mecanismul de distrugere a suprafeţelor sub acţiunea unor încărcări repetate*, de L. B. Erlih etc.

În partea a doua, intitulată *Frecarea la limită*, este publicat raportul prof. B. V. Deriaghin privind problemele actuale ale frecării la limită şi 7 lucrări tratînd despre acest subiect, ca :

*Variaţia contactului elastic al straturilor onctuoase de ungere*, de A. S. Ahmatov şi L. V. Koşlakova *Lucrările privind teoria vibraţiilor autoexcitate cu frecare şi asupra legii de frecare cu doi termeni*, realizate de colective conduse de prof. B. V. Deriaghin ; *Teoria hidrodinamică a frecării semifluide*, de V. A. Kudinov etc.

Partea a treia a acestui volum este intitulată *Problema termică a frecării*, care este în acelaşi timp şi titlul raportului publicat de prof. V. S. Şcedrov. În continuare sînt publicate 8 lucrări din acest domeniu, dintre care cităm : *Asupra unor probleme ale frecării semifluide (rodajul, gripajul, stabilitatea mişcării)* de V. A. Kudinov ; *Creşterea de temperatură în procesul de frînare şi răcirea ulterioară la frînele roţilor avioanelor*, de G. E. Ciupilko ; *Influenţa cîmpului de temperatură asupra caracteristicilor de frecare şi modelarea procesului de frecare*, de V. S. Şcedrov, A. V. Cicinadze şi G. I. Troianovskaia etc.

În sfîrşit, a patra şi ultima parte a acestui volum este consacrată problemelor legate de materialele de fricţiune şi conţine 6 lucrări dintre care cităm articolul de sinteză cu acest subiect al prof. I. V. Kraghelski şi V. M. Gudcenko ; *Unele probleme ale frecării în cuplul metal-oxizi ceramici*, de S. I. Mişkind ; *Studiul uzurii metalelor şi aliajelor prin frecare uscată la temperaturi înalte*, de L. A. Ciatînian etc.

Volumul al treilea este consacrat teoriei hidrodinamice a lubrificaţiei, calculului şi construcţiei lagărelor şi lubrifianţilor. După un raport general prezentat de prof. E. M. Gutiar, în prima parte, teoria hidrodinamică a lubrificaţiei şi calculul lagărelor, sînt grupate 20 lucrări, din care cităm : *Studiul proceselor de frecare în lagărele greu încărcate ale laminoarelor*, de N. N. Bulovski ; Lucrările de sinteză ale prof. A. K. Diacikov consacrate *Studiului lagărelor axiale formate din sectoare* ; *Unele probleme ale teoriei hidrodinamice a ungerii cu luarea în considerare a deformaţiilor suprafeţelor*, de M. V. Korovcinski ; *Calculul lagărelor axiale formate din sectoare cu condiţii la limită complexe*, de D. P. Parghin ; *Ungerea suprafeţelor poroase*, de N. Tipei ; *Lagăre axiale funcţionînd la viteze mari*, de E. V. Trifonov ; *Teoria reodinamică a ungerii viscoplastice*, de N. V. Tiabin etc.

Partea a doua este consacrată lubrifianţilor şi conţine un raport de sinteză al prof. G. V. Vinogradov şi 11 lucrări, printre care : *Studii asupra bisulfurii de molibden*, de un colectiv condus de I. Ia. Alşiţ ; *Influenţa compoziţiei şi naturii mediilor gazoase asupra proprietăţilor de rezistenţă la uzură a uleiurilor*, de M. D. Bezborodko, N. T. Pavlovskaia şi V. V. Arharova ; *Rezistenţa la uzură şi proprietăţile de antifricţiune a unor săruri topite*, de un colectiv sub conducerea prof. G. V. Vinogradov ; *Uzura de abraziune a rulmenţilor în considerarea influenţei lubrifiantului*, de V. A. Vişniakov şi V. G. Lebedev ; *Studii asupra temperaturii critice a peliculei de lubrifiant*, de K. I. Klimov şi G. I. Kicikin ; *Influenţa aditivilor sintetici asupra lubrifianţilor şi proprietăţilor de frecare şi uzură a acestora*, de un colectiv condus de P. I. Sanin.

În partea a treia, intitulată *Proprietăţile mecanice ale lubrifianţilor*, sînt publicate un număr de 6 lucrări care se ocupă cu determinarea viscozităţii şi a unor efecte termice în timpul proceselor de frecare.

În partea a patra, *Condiţiile de utilizare ale lubrifianţilor*, sînt grupate alte 7 lucrări. Dintre acestea cităm : *Influenţa temperaturii şi presiunii asupra viscozităţii amestecurilor de uleiuri cu silicaţi organici*, de un colectiv condus de M. M. Kusakov ; *Efecte termice în procesul de frecare a lubrifianţilor plastici*, de V. P. Pavlov ; *Particularitatea comportării lubrifianţilor plastici în lagărele cu rostogolire*, de A. I. Kolesnikov ; *Uzura motoarelor de autovehicule în funcţie de diferite moduri de curăţire a uleiului din instalaţia de ungere*, de S. A. Lebedev şi M. A. Grigoriev ; *Studiul uzurii motoarelor de automobil la funcţionarea cu diferite uleiuri*, de N. A. Tractovenko şi A. S. Lozar ; *Consideraţii teoretice asupra condiţiilor de exploatare a uleiurilor la motoare*, de I. I. Elovici etc.

Ultima parte a celui de-al treilea volum conţine, grupate sub titlul de *Compoziţia chimică şi exploatarea lubrifianţilor*, un număr de 8 lucrări, dintre care cităm: *Mecanismul protecţiei suprafeţelor de frecare contra uzurii prin coroziune cu ajutorul aditivilor din uleiuri*, de Iu. S. Zaslavski, G. I. Şor, R. N. Şneerova; *Uleiuri de compoziţie chimică optimă*, de S. E. Krein şi O. P. Evdokimov; *Asupra utilizării eterilor sintetici în calitate de lubrifianţi*, de un colectiv condus de G. I. Fuks; *Capacitatea de ungere şi proprietăţile straturilor subţiri de lubrifianţi*, de G. I. Fuks şi I. I. Kaverina etc.

În sfîrşit, volumul al treilea mai cuprinde în încheiere rezoluţia conferinţei.

În ansamblu lucrările Conferinţei de frecare şi uzură cuprind un material vast din toate domeniile importante ale acestei probleme. Lucrările, de o înaltă factură ştiinţifică, abordează teme variate. Rezultatele sînt întotdeauna completate de date experimentale, ceea ce sporeşte valoarea lor ştiinţifică şi practică. Se remarcă o polarizare a preocupărilor către cîteva probleme moderne puse de dezvoltarea industriei din Uniunea Sovietică în perioada actuală ca: studiul sub toate aspectele a lagărelor axiale greu încărcate, pentru turbine hidraulice, studiul uzurii ca rezultat al fenomenelor superficiale care au loc în timpul frecării, materiale moderne de lagăre, utilizarea materialelor plastice ca materiale de antifricţiune şi fricţiune, reologia lubrificaţiei, utilizarea lubrifianţilor solizi.

Rezultatele prezentate sintetizează principalele rezultate obţinute de şcoala sovietică de lubrificaţie şi uzură şi ridică problemele ştiinţifice de viitor. Deosebit de interesantă este din acest punct de vedere rezoluţia Conferinţei care schiţează orientarea cercetărilor ştiinţifice pentru următorii ani în funcţie de cerinţele dezvoltării industriale din Uniunea Sovietică.

În concluzie, lucrările Conferinţei de frecare şi uzură cuprind un material bogat şi util nu numai pentru cei care se preocupă de aspectele ştiinţifice ale lubrificaţiei, dar şi pentru inginerii din industrie şi institutele de proiectări.

*V. N. Constantinescu*

А. А. ИЛЬЮШИН, П. М. ОГИБАЛОВ, *Упруго-пластические деформации полых цилиндров* (Deformaţiile elastoplastice ale cilindrilor cu goluri). Издательство Московского Университета, 1960, 228 p.

Problema determinării stării de tensiune şi a stării de deformaţie în cazul unor plăci cilindrice groase supuse la presiuni mari prezintă un deosebit interes pentru industria construcţiilor de maşini. Cazul unor tuburi groase (în secţiune transversală inele circulare) a fost considerat de mult, atît în domeniul elastic (de către Golovin în secolul trecut) cît şi în domeniul elastoplastic, pentru mici deformaţii, datorite unei presiuni uniforme axial simetrice. Autorii prezentei monografii îşi propun să întreprindă un studiu cu caracter mult mai general, atît pentru deformaţii plastice mari cît şi pentru cazul unor materiale neomogene.

Capitolul I este destinat studiului relaţiilor de bază şi a teoremelor generale în teoria deformaţiilor elasto-plastice; se consideră şi influenţa variaţiilor de temperatură. În capitolul al II-lea este întreprins un studiu al deformaţiilor elasto-plastice mici în cazul cilindrilor cu goluri; se dă o rezolvare exactă a problemei tuburilor, se aplică metoda soluţiilor elastice şi se ia în considerare influenţa sarcinilor concentrate.

În capitolul al III-lea se introduce efectul consolidării şi se consideră metodele de ecruisaj ale cilindrilor cu goluri; menţionăm problema auto- şi termofretajului, precum şi studiul deformaţiilor cilindrilor cu proprietăţi mecanice neomogene. Capitolul al IV-lea tratează problema stratului critic termic, din punct de vedere calitativ, precum şi influenţa acţiunii repetate a temperaturii; se insistă asupra regimului termic periodic staţionar. În capitolul al V-lea se introduce efectul dinamic al unei presiuni uniforme; se consideră, în special, cazul unei stări de deformaţie plană pentru un material incompresibil.

Capitolul al VI-lea este destinat unor încercări de laborator în caz static şi dinamic.

Lucrarea este însoţită de o bogată bibliografie.

Prin înaltul nivel ştiinţific, datorit unor savanţi sovietici bine cunoscuţi în literatura de specialitate, precum şi prin tendinţa de aplicare directă a rezultatelor obţinute la probleme cu caracter practic, monografia prezentată este de un real folos atît cercetătorilor ştiinţifici cît şi inginerilor mecanici care proiectează şi execută organe de maşini supuse la presiuni şi temperaturi ridicate.

*P. P. Teodorescu*

А. П. ВЛАСОВ, К. П. САВИНКОВ, *Высокочастотная металлизация* (Metalizarea cu curenţi de înaltă frecvenţă). Машгиз, 1960, Москва, 121 p.

Metalizarea prin pulverizare devine din ce în ce un procedeu mai bine studiat, mai bine pus la punct şi cu largi posibilităţi de aplicare.

Una din principalele probleme o constituie sursa de căldură cu ajutorul căreia se poate topi materialul ce trebuie pulverizat.

În general, s-a constatat că pentru metalizarea cu materiale neferoase, rezultate foarte bune se pot obţine cu aparate oxiacetilenice. În acest caz însă se pun anumite probleme de securitatea muncii.

Aparatele cu arc electric au căpătat o largă răspîndire mai ales la recondiţionarea pieselor uzate prin metalizare cu oţel.

În ultimii ani s-au elaborat noi tipuri de aparate care utilizează curenţii de înaltă frecvenţă ca sursă pentru topirea materialului de adaos.

Lucrarea recenzată se ocupă de această problemă.

În primul rînd autorii trec în revistă principalele aparate de metalizare oxiacetilenice şi cu arc electric ce se fabrică în serie în U.R.S.S., Cehoslovacia, Anglia etc. şi caracteristicile chimice, fizice şi mecanice ale straturilor ce se obţin utilizînd aceste aparate.

Apoi în lucrare se analizează principiile procesului tehnologic de metalizare cu curenţi de înaltă frecvenţă. În această parte a lucrării autorii fac o prezentare a fenomenelor fizice ce au loc şi care produc încălzirea metalelor la trecerea unui curent de înaltă frecvenţă şi arată cum au fost ele luate în consideraţie pentru realizarea unui cap de pulverizare. În continuare, sînt prezentate caracteristicile fizico-mecanice ale straturilor obţinute prin această metodă.

Un capitol al cărţii este rezervat descrierii aparatelor de metalizare cu curenţi de înaltă frecvenţă fabricate în U.R.S.S. şi sînt de asemenea prezentate o serie de experienţe prin care se ilustrează eficacitatea aplicării în producţie a metodei.

Aplicarea pe scară largă a metodei este însă legată de existenţa utilajului necesar pentru alimentarea cu curent de înaltă frecvenţă care ridică costul instalaţiei.

Lucrarea este prima de acest gen publicată pe plan internaţional şi are meritul de a pune la dispoziţia specialiştilor din acest domeniu rezultatele preţioase obţinute de autori după mulţi ani de cercetare.

*P. Freund*

G. MARTINČEK, *Prizmatické lomenice a valcové škrupiny* (Plăci prismatice și cilindrice subțiri). Vydavatelstvo Slovensjej Akadémie Vied, Bratislava, 1958, 176 p.

Monografia lui G. Martinček este dedicată, în special, studiului plăcilor prismatice, a căror teorie este mult deosebită de teoria plăcilor cilindrice subțiri. Totuși rezultalele obținute în ultimul caz pot fi folosite cu succes și pentru învelitorile cilindrice, într-o primă aproximație, mai ales în cazul unor curbe directoare mai complicate (cazuri eventual nestudiate încă prin metode exacte de calcul).

După o scurtă introducere, cuprinsă în capitolul I, se trece în capitolul al II-lea la studiul plăcilor prismatice subțiri, în ipoteza rigidității la deplasări a muchiilor.

Capitolul al II-lea este dedicat teoriilor de încovoiere și metodelor de calcul ale acestor plăci. Se dă întîi metoda de calcul aproximativă a lui Vlasov, introducîndu-se și influența grinzilor de margine sau a grinzilor pereți de la capete; autorul dă apoi o nouă metodă de calcul, pe care o exemplifică pentru diferite cazuri particulare. Pentru plăci prismatice simetrice, încărcate simetric, se dă în capitolul al IV-lea o metodă aproximativă de calcul, care nu mai necesită rezolvarea unui sistem de ecuații liniare, ca în cazul general.

Capitolele V și VI folosesc din nou teoria lui V. Z. Vlasov, pentru plăci prismatice și cilindrice subțiri de beton armat, insistîndu-se asupra cazului plăcilor încastrate.

Lucrarea este însoțită de o interesantă bibliografie (43 titluri).

Această monografie este bazată pe rezultatele cercetărilor întreprinse la Institutul de arhitectură și construcții al Academiei slovace de științe, fiind destinată unor probleme care au început să fie din ce în ce mai mult studiate în ultimul timp. Ea poate fi consultată cu folos atît în cercetarea științifică cît și în proiectare, datorită faptului că rezultatele teoretice, interesante în sine, sînt totdeauna însoțite de exemple numerice și sînt concretizate în diagrame utile.

*P. P. Teodorescu*

---

A. WIEMER, *Pneumatische Längenmessung* (Măsurarea lungimilor pe cale pneumatică). Berlin, VEB — Verlag Technik, 1960, 155 p., 125 fig.

Cartea cu titlul de mai sus, scrisă de ing. A. Wiemer, cuprinde 13 capitole. După introducere, în capitolul 2 se expun bazele teoretice ale metodei Solex, se precizează noțiunile folosite și se dau indicații asupra construcției canalului de scurgere a aerului comprimat. În capitolul 3 se arată diferitele procedee de măsurare pneumatică a lungimilor ca : prin măsurarea volumului de aer scurs, sau a presiunilor în două puncte ale canalului de scurgere, sau a diferenței de presiune, sau prin compararea presiunilor dintr-o coloană etalon și din cea de scurgere, sau prin măsurarea vitezelor de scurgere etc.

În capitolul 4 se tratează domeniul de utilizare, precizia măsurătorilor, consumul de aer și timpul cerut pentru montarea aparaturii de măsură.

În capitolul 5 se arată cum se măsoară mărimile de stare ale aerului ca : temperatura, presiunea, volumul specific sau cum se poate exprima starea aerului, dacă una din aceste mărimi se poate deduce din măsurarea vitezei aerului.

Capitolul 6 prezintă diferite regulatoare care trebuie să menţină presiunea aerului constantă, lucru absolut necesar unor măsurători pneumatice precise.

Capitolul 7 arată importanţa purităţii aerului şi mijloacele de curăţire a aerului.

În capitolul 8 se descriu diferitele aparate de măsură pneumatice.

În capitolul 9 se arată elementele componente esenţiale ale aparatajului de măsură pneumatică necesar la mecanizarea proceselor de aşchiere a metalelor.

În capitolul 10 se arată modul cum se execută măsurătorile pneumatice asupra unor piese de mare serie ca : arbori, canale, conuri etc.

În capitolul 11 se arată desfăşurarea măsurătorilor pe maşina în repaos, în funcţiune şi conducerea maşinilor de aşchiere.

În capitolul 12 se indică unele scheme la măsurarea benzilor, sîrmelor şi canalelor circulare.

În capitolul 13 se prezintă principiile şi schemele de măsurare a alungirii pieselor.

În capitolul 14 se arată cîteva scheme pentru măsurarea calităţii suprafeţelor prelucrate.

Lucrarea recenzată oferă un material ştiinţific de bună calitate şi cu utilizări practice imediate. Expunerea este clară şi însoţită de un mare număr de figuri şi scheme de măsurători şi poate constitui un ghid şi un sprijin în tehnica măsurătorilor lungimilor pieselor prelucrate la maşini unelte. Ea arată că măsurătorile pneumatice ale lungimilor sînt simple şi la orice grad de precizie se doreşte. Scrisă la un nivel mediu spre superior, ea este indicată pentru industria metalurgiei prelucrătoare şi pentru laboratoarele de cercetări din construcţia de maşini.

*Is. Niculescu*

---

ALBIN CHRONOWICZ, *The Design of Shells. A Practical Approach*, (Proiectarea plăcilor curbe subţiri. O abordare practică) Second Edition, Crosby Lockwood & Son, Ltd, London, 1960, 202 p.

Ediţia a doua a cărţii apare la numai un an de la publicarea primei ediţii (1959), indiciu cert asupra primirii favorabile de către cititorii de specialitate. Din cauza intervalului foarte redus între apariţiile celor două ediţii, nu a fost posibilă o revizuire integrală, astfel încît textul este acelaşi, cu corectarea unor erori de tipar.

Aşa cum arată subtitlul *O abordare practică*, scopul cărţii lui A. Chronowicz este de a face accesibilă proiectarea plăcilor curbe subţiri atît studenţilor, cît şi inginerilor proiectanţi care nu sînt încă specializaţi în această direcţie.

Titlul principal al lucrării este prea general, deoarece în realitate sînt tratate doar plăcile cilindrice. Domeniul acesta este însă prezentat cu toată competenţa unui teoretician şi totodată a unui practician rutinat.

Cartea cuprinde 13 capitole. După un indice al principalelor notaţii, în capitolul întîi se prezintă teoria de membrană a plăcilor subţiri cilindrice. Sînt deduse ecuaţiile de echilibru şi de deformaţii, se indică modul de integrare directă sau cu ajutorul seriilor trigonometrice.

Capitolul al 2-lea se referă la ecuaţia diferenţială a plăcilor subţiri cilindrice în teoria încovoierii. Admiţînd că directoarea este circulară, grosimea constantă şi placa rezemată simplu pe timpane la extremităţile generatoarelor, se stabileşte ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul al 8-lea, prin metoda simplificată a lui Finsterwalder, pe care o satisfac momentele transversale. Dat fiind caracterul practic al lucrării, s-a omis aspectul istoric şi o prezentare critică a diferitelor metode analitice existente.

Capitolele 3 şi 4 examinează plăcile simetrice, respectiv plăcile de capăt.

Shedurile sînt tratate în capitolul al 5-lea.

Plăcile cilindrice cu grinzi marginale precomprimate sînt studiate în capitolul al 6-lea. În afara exemplului numeric se dau şi cîteva detalii constructive complet cotate.

În capitolul următor (al 7-lea) sînt analizate plăcile anizotrope (cu nervuri).

După examinarea soluţiilor analitice exacte, se trece la metode aproximative cum sînt :

— metoda suprafeţelor prismatice (cap. 8).

— metoda echilibrării eforturilor de lunecare (cap. 9),

— aplicarea analogiei coloanei (cap. 13).

Trei capitole (10, 11, 12) cuprind o serie de considerente constructive (de exemplu armarea colţurilor, îngroşări locale, siguranţa la flambaj), cadrele şi arcele de capăt.

O listă bibliografică rezumată la un număr limitat de publicaţii de interes deosebit încheie lucrarea.

Intenţia autorului de a prezenta o lucrare practică şi utilă este pe deplin realizată. Spre deosebire de marea majoritate a problemelor de plăci curbe subţiri, care sînt prezentate inginerului mai mult sub aspectul matematic, autorul a reuşit să publice o carte utilă. Exemplele numerice care se găsesc în fiecare capitol nu sînt simple aplicaţii academice, ci reprezintă notele de calcul ale unei serii de construcţii importante, proiectate în cea mai mare parte de autor.

Dublată de o foarte bună prezentare grafică, cartea lui A. Chronowicz va satisface pe deplin pe toţi acei care se preocupă de problemele practice ale plăcilor subţiri cilindrice.

*Mircea Soare*

---

W. FLÜGGE, *Stresses in Shells* (Eforturi în plăci curbe subţiri). Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960, 500 + XII p.

W. Flügge este bine cunoscut prin studiile sale în domeniul plăcilor curbe subţiri şi, mai ales, prin cele două ediţii ale cărţii sale *Statik und Dynamik der Schalen*. În lucrarea de faţă dînsul se ocupă, în şapte capitole, de determinarea stării de tensiune şi a stării de deformaţie în plăcile curbe subţiri acţionate de sarcini exterioare oarecare. Un apendice este destinat inelelor circulare. La fiecare paragraf se dă o bogată bibliografie, conţinînd în marea majoritate numai studii occidentale.

Capitolul 1, intitulat *Proprietăţile generale ale sistemelor de tensiuni în plăcile curbe subţiri*, este destinat studiului variaţiei tensiunilor şi a eforturilor în jurul unui punct, mai ales în coordonate oblice.

Capitolele 2, 3 şi 4 sînt consacrate determinării directe a tensiunilor în plăcile curbe subţiri de revoluţie, cilindrice sau de formă oarecare. Teoria de membrană este prezentată dintr-un punct de vedere critic, utilizînd toate posibilităţile sale şi subliniind erorile care se pot face. Rezultatele obţinute sînt aplicate la diferite categorii de plăci curbe subţiri : sferice, conice, tubulare, poligonale etc. Se menţionează considerarea problemelor de tip eliptic şi de tip hiperbolic.

Încovoierea plăcilor cilindrice subţiri este studiată în capitolul al 5-lea. Se stabilesc ecuaţiile cu derivate parţiale ale problemei şi se dau diferite metode de a integra aceste ecuaţii, pe cale exactă sau aproximativă. Apoi se discută diferitele aproximaţii de calcul folosite, după destinaţia constructivă a plăcii curbe subţiri. Cap. al 6-lea tratează încovoierea plăcilor subţiri de revoluţie, insistîndu-se asupra problemei plăcilor sferice şi conice. Se dă o soluţie şi pentru armonici de ordin superior.

Instabilitatea elastică a plăcilor curbe subţiri este luată în considerare în capitolul al 7-lea, mai ales pentru plăci cilindrice. Se studiază problema cu sau fără o sarcină tangenţială. Se menţionează de asemenea cazul compresiunii axiale neuniforme şi se stabilesc cîteva rezultate pentru plăcile subţiri sferice.

Cartea, scrisă ,,de un inginer pentru ingineri", după însăşi cuvintele autorului, cuprinde multe probleme practice. Se observă grija autorului de a urmări fenomenul fizic şi de a ajunge, după dezvoltările matematice necesare, la o interpretare fizică şi tehnică a rezultatelor obţinute. Lipsa aproape totală a literaturii de specialitate sovietice precum şi a celei din ţările de democraţie populară se resimte în studiul diferitelor probleme.

Această lucrare este utilă inginerilor care au de rezolvat probleme dificile, ca şi tuturor celor ce întreprind studii în această direcţie.

*P. P. Teodorescu*

C. H. NORRIS, R. J. HANSEN, M. J. HOLLEY Jr., J. M. BIGGS, S. NAMYET, J. K. MINAMI, *Structural Design for Dynamic Loads* (Proiectarea structurilor acţionate de sarcini dinamice). Mc. Graw-Hill-Civil Engineering Series, New York — Toronto-London, 1959, 453 p.

Interesul tot mai mare pentru aplicarea în calculul şi proiectarea construcţiilor a teoriilor şi metodelor dinamicii a făcut să apară în ultimii ani o seamă de studii de specialitate în această problemă. Aceste studii se adresează însă unui cerc restrîns de specialişti şi sînt greu accesibile proiectanţilor care au în general puţine cunoştinţe de dinamică. De aceea o lucrare de informare care să dea acestora posibilitatea de a-şi însuşi noţiunile de bază şi de a-şi face o idee generală asupra domeniului era de strictă necesitate.

O astfel de lucrare este cea de care ne ocupăm. Concepută în special ca un ghid pentru îndrumarea inginerului proiectant ea păstrează un nivel teoretic superior, evidenţiindu-se în special grija pentru rigurozitatea şi dozarea materialului. Se prezintă, într-o formă clară şi concisă, rezultate recente ale cercetărilor de specialitate.

Materialul folosit la alcătuirea lucrării are ca bază conferinţele ţinute în vara anului 1956 în cadrul unui program special asupra proiectării structurilor la acţiunea sarcinilor dinamice, la Institutul politehnic din Massachusetts (MIT). Scopul acestui program era tocmai de a pune la dispoziţia celor interesaţi o informare generală asupra rezultatelor obţinute în rezolvarea practică a problemelor de dinamică a construcţiilor.

Intenţia autorilor nefiind de a da lucrării caracterul unui manual, unele probleme de detaliu au fost mai sumar tratate, pentru completări făcîndu-se trimiteri la lucrări de specialitate. Din acelaşi motiv, au fost omise exerciţiile şi s-au dat numai un număr redus de exemple. Alegerea acestora a fost însă bine făcută pentru a da expunerii un caracter mai intuitiv.

Aspectele generale ale problemelor puse de solicitările dinamice, situaţiile în care asemenea solicitări apar în construcţii, modul principial în care se face proiectarea şi se ţine seama de acţiunea lor şi planul după care a fost concepută cartea sînt prezentate pe scurt în introducere.

Lucrarea propriu-zisă, alcătuită din 20 de capitole, este împărţită în 4 părţi, primele trei cuprinzînd consideraţii teoretice asupra comportării materialelor, a problemelor generale ale calculului dinamic şi a metodelor lor de rezolvare, iar ultima, aplicaţii ale acestor consideraţii la cazurile specifice de solicitări dinamice întîlnite în construcţii.

Prima parte a lucrării studiază *comportarea materialelor sub acțiunea sarcinilor dinamice*, ocupîndu-se de materialele cele mai răspîndite în construcțiile moderne : oțelul și betonul. Fiecare din cele două capitole ce o compun este dedicat unuia din aceste materiale. Sînt studiate proprietățile lor și comportarea elementelor structurale metalice sau de beton și se dau recomandări aplicabile la cazurile specifice întîlnite în calculul dinamic.

Partea a doua este închinată *calculului structurilor la acțiunea sarcinilor dinamice*. În capitolele 3, 4 și 5 sînt prezentate metodele clasice de calcul dinamic a sistemelor cu mase concentrate cu unul și cu mai multe grade de libertate și a sistemelor cu masă distribuită. Se insistă asupra factorilor dinamici de încărcare ce sînt analizați în amănunțime pentru diferite tipuri de solicitări dinamice și se scot în evidență simplificările ce rezultă din posibilitatea de suprapunere a modurilor normale de vibrație. Cazul maselor distribuite este tratat în perfectă analogie cu cazul maselor concentrate. Principalele limitări impuse în aceste capitole și posibilitățile de extindere a teoriei în cazul înlăturării acestor limitări sînt comentate în capitolul 6. Capitolul 7 evidențiază dificultățile calculului exact la solicitările dinamice și ca urmare prezintă metode aproximative de calcul cu aplicațiile lor la probleme specifice.

Pentru rezolvarea practică a problemelor de calcul dinamic este însă necesară de cele mai multe ori *aplicarea posibilităților moderne ale tehnicii de calcul*. Acestea sînt prezentate în partea a treia a lucrării care se ocupă cu introducerea în calculul dinamic a metodelor numerice — în capitolul 8 — și a mașinilor de calcul cu acționare continuă (analogice) sau discontinuă (digitale).

În ultima parte, care reprezintă ca volum jumătate din totalul lucrării, sînt expuse *aplicațiile calculului dinamic la diferite cazuri specifice de solicitare*.

Capitolele 15—18 sînt consacrate rezultatelor recente ale cercetărilor lui R. J. Hansen, J. M. Biggs și S. Namyet în legătură cu calculul structurilor rezistente la acțiunea exploziilor.

O tratare interesantă se dă cazului solicitărilor seismice. Capitolul 16 prezintă considerații generale asupra cutremurelor și a efectelor lor. Între acestea se discută pe larg distrugerea unei importante construcții de beton armat în urma cutremurului de la Fukui (Japonia) din 1948. Prevederile prescripțiilor de calcul de specialitate americane și japoneze sînt date pe larg în capitolul 17. Pe baza acestora și a metodelor practice de calcul la acțiunea sarcinilor seismice, expuse în capitolul 18, se prezintă calculul comparativ al unei construcții reale de beton armat cu 8 nivele. Indicarea modului în care se rezolvă problema calculului seismic în practica curentă de proiectare în Japonia este de un deosebit interes.

Problema vibrațiilor provocate de acțiunea sarcinilor mobile rezultate din trafic este tratată în capitolul 19, aproape exclusiv pentru cazul podurilor de șosea, mai puțin studiate pînă astăzi și ale căror proporții și răspîndire au devenit din ce în ce mai însemnate. Rezultatele teoretice sînt comparate cu verificările obținute prin studii pe modele și prin măsurătorile efectuate la scară naturală pentru cazuri reale. Din discutarea efectului diferiților parametri care influențează săgețile dinamice sînt deduse recomandări și diagrame pentru ușurarea calculului practic.

Efectele dinamice produse de solicitările date de vînt sînt studiate în capitolul 20, după ce în prealabil sînt scoase în evidență cazurile în care este justificată adoptarea ipotezei statice simplificatoare. Problema efectului amortizării este reliefată pe scurt, sînt furnizate unele date — cam restrînse — asupra cercetărilor din ultima vreme. În încheiere sînt prezentate cîteva exemple interesante de comportare dinamică la acțiunea vîntului : se discută comportarea turnurilor neancorate, a liniilor de transmisie, a coșurilor industriale și a podurilor suspendate.

Pentru valoarea și noutatea materialului pe care-l prezintă, lectura cărții este recomandabilă tuturor celor ce au contingențe cu domeniul dinamicii construcțiilor.

*G. Șerbănescu*

ROBERT WESLEY TRUITT, *Hypersonic Aerodynamics* (Aerodinamica hipersonică). The Ronald Press Company, New York, 1959, 462 p.

Volumul de faţă reprezintă o trecere în revistă, bogat documentată, a rezultatelor cercetărilor obţinute în domeniul aerodinamicii hipersonice în ultimii ani. Sînt prezentate studii asupra fenomenelor ce apar în aerodinamica hipersonică, direcţiile în care au fost conduse cercetările, metodele utilizate şi comparaţii între rezultatele teoretice şi cele experimentale, însoţite de observaţii critice.

După cum rezultă din prefaţă, cartea a fost iniţial scrisă ca un curs pentru studenţi. Acest scop se întrevede în prezentarea sistematică a materialului, însoţită de observaţii care pun în evidenţă anumite caractere esenţiale ale fenomenelor şi în culegerea de probleme de la sfîrşitul cărţii. Lucrarea însă a depăşit acest scop iniţial şi este utilă aerodinamicienilor care doresc să se documenteze în problemele scurgerilor la viteze hipersonice.

Vom expune pe scurt materialul cuprins în cele zece capitole ale lucrării.

În primul capitol, după o scurtă introducere, este prezentată teoria newtoniană de impact aplicată la scurgerea în jurul plăcii plane, aripilor bi- şi tridimensionale cu grosime finită, cilindrului circular, emisferei şi conului. Se determină în aceste cazuri coeficienţii aerodinamici.

Scurgerea hipersonică bidimensională este tratată în capitolul al doilea. Se introduce teoria newtoniană modificată în care se iau în consideraţie şi forţele centrifuge pentru corpurile bidimensionale cu suprafeţe curbe. Sînt expuse de asemenea şi metode bazate pe similaritatea hipersonică pentru scurgeri (moderat hipersonice) la numere Mach mai mari decît cele corespunzătoare teoriei supersonice liniarizate şi mai mici decît cele corespunzătoare scurgerii newtoniene.

În al treilea capitol sînt tratate scurgerile hipersonice tridimensionale. Se studiază scurgerile în jurul corpurilor de revoluţie, cu sau fără incidenţă, la viteze hipersonice mari. Tot în acest capitol sînt studiate şi scurgerile cu viteze hipersonice moderate; se fac comparaţii între rezultatele teoretice şi cele experimentale şi se dau exemple de calcul.

În capitolul patru este studiată problema corpurilor de rezistenţă minimă sub diferite aspecte în cadrul teoriei scurgerii continue cît şi în cadrul teoriei scurgerii gazelor rarefiate.

În capitolul cinci este prezentată o teorie hipersonică care într-un anumit sens poate fi numită a micilor perturbaţii. Se studiază scurgerea hipersonică permanentă în jurul unui corp tridimensional subţire cu botul ascuţit; se dau exemple pentru a ilustra metode posibile de soluţionare şi gradul de simplificare rezultat din ipoteza micilor perturbaţii.

Studiul scurgerilor hipersonice în jurul corpurilor zvelte este făcut în capitolul şase utilizîndu-se teoria newtoniană; se dau soluţii într-o primă şi într-o a doua aproximaţie.

În capitolul şapte este prezentată scurgerea hipersonică în jurul corpurilor bontite, dîndu-se o atenţie specială studiului scurgerii în regiunea cuprinsă între unda de şoc şi suprafaţa corpului în regiunea botului.

În capitolele opt şi nouă se pun unele probleme de proiectare utile celor care lucrează în această direcţie. Astfel în capitolul 8 se studiază scurgerea hipersonică în jurul configuraţiilor complete şi se determină caracteristicele aerodinamice ale acestora ţinînd seama de contribuţia fiecărei componente ale configuraţiei date, iar în capitolul 9 sînt tratate probleme de stabilitate şi control.

La viteze hipersonice mari aerul este supus la mari modificări de stare şi nu mai poate fi considerat ca un gaz perfect. În capitolul 10 se ia în consideraţie comportarea reală a gazului și se studiază efectul pe care această comportare îl are asupra forțelor aerodinamice ce acționează asupra corpurilor ce se deplasează cu viteze hipersonice. Se prezintă în continuare interacțiunea dintre un cîmp magnetic și cîmpul de scurgere a unui fluid conductibil electric ; se dau unele rezultate care indică posibilitățile tehnice magneto-aerodinamice de modificare a caracteristicelor aerodinamice ale vehiculelor hipersonice.

În concluzie, putem spune că autorul a reușit în lucrarea de față să prezinte multe aspecte importante ale scurgerilor hipersonice, foarte actuale și direct legate de problemele de aerodinamica vitezelor foarte mari. Bibliografia bogată ce însoțește fiecare capitol este utilă celor ce doresc să aprofundeze unele probleme speciale.

*Ș. Săndulescu*

# PUBLICAŢII PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE

Trudî Rostovskogo n. D. Instituta selskohoziaistvennogo maşinostroeniia, Vîp. 11/1958 ; 12/1959
Trudî Dnepropetrovskogo Instituta Injenerov jeleznodorojnogo transporta, Vol. XXVI/1958 ; XXIX/1959.

**De la „Leningradskii voenno-mehaniceskii Institut"**

— Sbornik zadaci po soprotivleniu materialov, I/1959 ; II/1960.
— Sbornik trudov, no. 15/1960.
— S. M. TEŞEVOI, Rukovodstvo dlia vîpolnenia zadanii po maşinostroitelnomu cerceniiu. 1960, 173 p.

Voprosî proizvodstva i issledovaniia jeleznodorojnîh relsov. Moskva, 1960, 274 p.
KOSTERIN IU. I., Mehaniceskie avtokolebaniia pri suhom trenii. Izd.-vo Ak. Nauk SSSR, Moskva, 1960, 76 p.
— Vasilii Grigorievici FESENKOV, Izd.-vo Akad. Nauk SSSR, Moskva, 1961, 115 p.
— Abram Fedorovici IOFFE, Izd.-vo Akad. Nauk SSSR, Moskva, 1960, 135 p.
GHERŢ E. V., Teoriia i rascet silovîh pnevmaticeskih ustroistv. Izd.-vo Akad. Nauk SSSR.
Godişnik na naucinoizledvatelskia institut za tehnolojki izledvania na gorivata, Sofia, I,II/1957 ; III/1958 ; IV, V/1959.
Godişnik na naucinoizledovatelskia institut za goriva i toplotehnika, Sofia, VI/1960.
Wytrzymelose Zmeczemiowa tworzyn i elementow metalowych. Institut Lotnictwa, Warszawa, 1961, 191 p.
W. POHLENZ, Die Drehzahlregelung der Kraftmaschinen. Akademie-Verlag Berlin, 1960, 42 p.
Godişnik na maşino-elektrotehniceski Institut, Sofia, Tom VI, 1959.
College of Aeronautics Cranfield Note No. 116/1961.
College of Aeronautics Cranfield Report No. 146/1961.
Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt. Berichte No. 154, 168/1961.
Jahrbuch 1960. Technische Hochschule München. 307 p. 1961.
Handbook of mechanical wear. Editat de Ch. Lipson & L. V. Colwell, The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1961, 466 p.
Research, development & public service activity. 1958—1959. Department of Engineering, University of California, Los Angeles, 1960, 95 p.
F. HALBWACHS, Recherches sur la dynamique du corpuscule tournant relativiste et l'hydrodynamique relativiste des fluides dotés d'une densité de moment angulaire interne. Paris, 1960, Teză. Université de Paris, 294 p.

M. KARDOSCH, Mécanisme de la déviation des jets propulsifs. Publications scientifiques et techniques du Min. de l'Air. Paris, 1959, 154 p.

N. M. SAVERIN, Increasing the loading in gearing and decreasing its weight. Pergamon Press, London, 1951, 204 p.

## Disertaţii de la Universitatea Tehnică Berlin

W. BEITZ, Untersuchung der elastischen und dämpfenden Eigenschaften drehelastischer Kupplungen und ihrer Dauerfestigkeit 1961, 108 p.

J. FRIEDRICHS, Untersuchungen über die Vorgänge in einer statisch belasteten Verbindung von Welle und Nabe durch Ringfeder-Spannelemente. 1961, 75 p.

## Disertaţii de la Institutul Politehnic Zürich

G. FISCHER, L'arc électrique court à plasma réduit et la technique de l'étincelage : électro-érosion et traitements superficiels. 1959, 93 p.

A. KÜNZLI, Die Berechnung der Spannungen in Rotoren, die aus Scheiben und Zylinderschalen aufgebaut sind. 1959, 83 p.

## Disertaţii de la Institutul Politehnic Stuttgart

J. POKORNY, Untersuchung der Reibungsvorgänge in Kupplungen mit Reibscheiben aus Stahl. 1960, 133 p.

H. KOHLMANN. Die Berechnung und Untersuchung einstufiger Gasturbinen radialer Bauart. 1960, 157 p.

# LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R.P.R.

## MECANICĂ APLICATĂ

E. CARAFOLI, **Aerodinamica vitezelor mari (fluide compresibile)**, 708 p., 20 lei
E. CARAFOLI, T. OROVEANU, **Mecanica fluidelor**, vol. II, 412 p., 10 lei
N. N. PATRAULEA, **Aerodinamica suprafeţelor permeabile**, 175 p., 16,25 lei
N. TIPEI, **Hidro-aerodinamica lubrificaţiei**, 696 p., 16 lei
AL. MARINESCU, **Teoria elicopterului**, 268 p., 12,60 lei
GH. BUZDUGAN, **Maşini pentru încercările mecanice ale materialelor**, 192 p., 5 lei

## AUTOMATICĂ

C. PENESCU, **Automatica şi telemecanica sistemelor energetice**, vol. I, 787 p., 52,50; vol. II, 576 p., 35,70 lei; vol. III, 417 p., + 9 pl., 30,20 lei.

* * * **Probleme de automatizare, I. A doua consfătuire asupra automatizărilor industriale din R.P.R.** (5-8 iunie 1957), 345 p., 15 lei; II. **Folosirea maşinilor electronice de calcul în industrie şi economie. Extrase din lucrările prezentate la consfătuirea asupra maşinilor electronice de calcul** (ianuarie 1960), 171 p., 8,55 lei; III. **Sesiunea asupra problemelor teoretice şi practice privitoare la automatizările industriale** (13 octombrie 1960) 188 p., 8,80 lei.

## CONSTRUCŢII

R. J. BALLY, **Metode electrice de îmbunătăţire a pămînturilor în lucrările de construcţii**, 248 p., 10 lei.

* * * **Măsuri constructive pentru prevenirea degradărilor construcţiilor fundate pe pămînturi argiloase cu contracţii mari**, 31 p., 1 leu.

GH. RUSU, **Tehnica măsurătorilor în construcţiile masive**, 319 p., 25,90 lei.

E. ZAHARESCU, **Contribuţii la studiul capacităţii portante a fundaţiilor**, 300 p. + 4 pl., 16,40 lei.

Intreprinderea poligrafică nr. 2, str. Brezoianu nr. 23—25, București — c. 3993

33

R
di F 2557

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

6

ANUL XII
1961

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

# STUDII ȘI CERCETĂRI DE
# MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

## COMITETUL DE REDACŢIE

*Redactor responsabil:*

ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri:

ACADEMICIAN N. PROFIRI;

A. BELEŞ, membru corespondent al Academiei R.P.R.;

CR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.;

R. BOGDAN, conferenţiar la Institutul de petrol, gaze şi geologie, Bucureşti;

N. TIPEI, conferenţiar la Institutul politehnic, Bucureşti;

M. ARCAN, şef secţie; Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor (INCERC), Bucureşti.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
APARE DE 6 ORI PE AN
*Redacţia:* INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"
**Str. Const. Mille 15, tel. 17.34.09**

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

# STUDII ȘI CERCETĂRI
# DE
# MECANICĂ APLICATĂ

6

ANUL XII

1961

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

**Revista**

*STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ*

*publică:*

— Studii originale de *înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.*

— Note (*lucrări mai scurte*) *cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.*

— Referate ştiinţifice şi tehnice *în care se expune: stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.*

— Recenzii *asupra cărţilor şi studiilor romîne sau străine.*

*Domeniile de specialitate ale revistei sînt:*

— *Aeromecanică (mecanica fluidelor, aerodinamică, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).*

— *Hidromecanică (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine hidraulice şi pompe, amenajări hidraulice).*

— *Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).*

— *Mecanică generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).*

— *Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode de executarea lucrărilor de construcţii).*

— *Tehnica măsurătorilor (aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).*

*Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.*

★

*Articolele vor fi redactate într-o formă concisă şi clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părţile cunoscute ale problemei.*

*Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar şi citeţ cu cerneală. Figurile şi graficele se vor desena în tuş pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar şi în număr cît mai mic.*

*Literatura citată în text se va însera la sfîrşitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariţie, iar pentru revistă se va indica şi numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.*

*Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză şi germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.*

*Aceleaşi norme sînt valabile şi pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.*

*Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, Bucureşti, str. C. Mille nr. 15, raionul Gh. Gheorghiu-Dej.*

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

# STUDII ŞI CERCETĂRI
# DE
# MECANICĂ APLICATĂ

Tomul XII, nr. 6 1961

## SUMAR

**STUDII**

*AEROMECANICĂ* Pag.

N. N. PATRAULEA, Analogia reoelectrică tridimensională fără influenţa frontierelor 1187
AUGUSTIN PETRE şi CRISTIAN STĂNESCU, Distribuţia aeroelastică a sarcinilor aerodinamice pentru suprafeţele portante de secţiune constantă, ţinînd seama de restrîngerile de fixare . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1193

*HIDROMECANICĂ*

D. DUMITRESCU, C. IAMANDI şi D. GH. IONESCU, Cercetări asupra canalelor cu evacuare laterală . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1205
D. DUMITRESCU şi C. M. IANCU, Contribuţii la studiul deversoarelor cu muchie ascuţită . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1219

*UNGERE — FRECARE — UZURĂ*

V. N. CONSTANTINESCU, Determinarea distribuţiei presiunilor în lagărele alimentate sub presiune, prin utilizarea unei analogii hidrodinamice . . . . . . . . . . 1239

*TEORIA MECANISMELOR*

D. MANGERON şi C. DRĂGAN, Studiul cinematic al mecanismelor spaţiale cu patru organe prin metoda matricială-tensorială . . . . . . . . . . . . . . . . 1257
CHR. PELECUDI, Reprezentarea funcţiilor cu ajutorul arcelor de came de rotaţie şi tachet de translaţie . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1271
GEORGE BĂRĂNESCU, Determinarea dimensiunilor principale ale unui mecanism bielă-manivelă general . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1293

*ELASTICITATE — PLASTICITATE — REZISTENŢA MATERIALELOR*

FLORIAN VIRGILIU, Contribuţii privind calculul de rezistenţă a sapelor cu lame . . 1305
VALERIU PETCU, Calculul grinzilor continue de beton armat în domeniul plastic . . 1321

VIBRAŢII

Pag.

V. MANEA, Consideraţii asupra problemei oscilaţiilor autovehiculelor în mers rectiliniu cu viteza constantă . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1335

TEHNOLOGIA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

M. P. POPOV, I. MITRICĂ şi E. D. DECIU, Geometria sculei aşchietoare pentru prelucrarea oţelurilor carbon . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1357

**REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE**

IACOB HARGHEL, Calculul liniilor de influenţă a podurilor pe bolţi cu tablierul susţinut prin pereţi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1379

**NOTE**

E. DEUTSCH, Încovoierea unei bare prismatice avînd secţiunea transversală mărginită de lemniscata lui Booth . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1399

**RECENZII** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1407

**PUBLICAŢII PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE** . . . . . . . . . . . . . 1417

*Index alfabetic pe 1961* . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1419

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ „ТРАЯН ВУЯ"

# ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том XII, № 6 1961

## СОДЕРЖАНИЕ

**СТАТЬИ**

*АЭРОМЕХАНИКА* Стр.

Н. Н. ПАТРАУЛЯ, Трехмерная реоэлектрическая аналогия без влияния границ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1187
АУГУСТИН ПЕТРЕ и КРИСТИАН СТЭНЕСКУ, Аэроупругое распределение аэродинамических сил для несущих поверхностей постоянного сечения с учетом ограничений закрепления . . . . . . . . . . . . . 1193

*ГИДРОМЕХАНИКА*

Д. ДУМИТРЕСКУ, К. ЯМАНДИ и Д. ИОНЕСКУ, Исследование каналов с боковым отводом . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1205
Д. ДУМИТРЕСКУ и К.М. ЯНКУ, К исследованию водосливов с острым ребром . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1219

*СМАЗКА — ТРЕНИЕ — ИЗНОС*

В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, Определение распределения давления в подшипниках, питаемых под давлением, путем применения гидродинамической аналогии . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1239

*ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ*

Д. МАНДЖЕРОН и К. ДРАГАН, Кинематическое исследование новым матрично-тензорным методом четырехзвенных пространственных механизмов . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1257
К. ПЕЛЕКУДИ, Изображение функций при помощи дуг вращательных кулачков с толкателем, исполняющ импоступательное движение . . 1271
ДЖЕОРДЖЕ БЭРЭНЕСКУ, Определение основных размеров общего шатунно-кривошипного механизма . . . . . . . . . . . . . . . 1293

Стр

*УПРУГОСТЬ – ПЛАСТИЧНОСТЬ – СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ*

ФЛОРИАН ВИРДЖИЛИУ, К расчету на прочность лопастных долот . . 1305

ВАЛЕРИУ ПЕТКУ, Расчет неразрезных железобетонных балок в пластической области . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1321

*КОЛЕБАНИЕ*

В. МАНЯ, К задаче колебаний автомашин при прямолинейном движении с постоянной скоростью . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1335

*ТЕХНОЛОГИЯ СПЛОШНЫХ ТВЕРДЫХ СРЕД*

М. П. ПОПОВ, И. МИТРИКА и Е. Д. ДЕЧУ, Геометрия режущего инструмента для обработки углеродистых сталей . . . . . . . . . . 1357

**НАУЧНЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕФЕРАТЫ**

ЯКОБ ХАРГЕЛ, Расчет линий влияния арочных мостов с пролетным строением, поддерживаемым стенками . . . . . . . . . . . . . . . 1379

**ЗАМЕТКИ**

Е. ДЕЙЧ, Игзиб призматического стержня с поперечным сечением, ограниченным лемнискатой Бута . . . . . . . . . . . . . . . . . 1399

**РЕЦЕНЗИИ** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1407

**ПУБЛИКАЦИИ, ПОСТУПИВШИЕ В РЕДАКЦИЮ ПУТЕМ ОБМЕНА** . . . 1417

*Алфавитный указатель за 1961 год* . . . . . . . . . . . . . . . . 1419

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

**Журнал**

## *ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ*

*публикует:*

— Оригинальные исследования *высокого уровня, представляющие общий научный интерес, связанный с практикой.*

Заметки (*краткие работы*) *оригинального характера, представляющие уточнение некоторого вопроса.*

— Научные и технические рефераты, *в которых излагаются: современное состояние определенной задачи с выявлением нового подхода к ней, замечания и обсуждения некоторых работ по прикладной механике.*

— Рецензии *на румынские или зарубежные книги и исследования. В журнале публикуются работы по следующим специальностям.*

— *Аэромеханика* (*механика жидкостей и газов, аэродинамика, газодинамика, механика самолета, аэроупругость, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, термоаэродинамика реактивных двигателей, вентиляция, ветродвигатели*).

— *Гидромеханика* (*гидравлика, гидромеханические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства*).

— *Машиностроение* (*кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей, механика сплошных твердых сред*).

— *Общая механика* (*сопротивление материалов, упругость, пластичность, вибрация и удары, устойчивость электрические и гидравлические аналогии*).

—*Статика и динамика сооружений* (*методы статистического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, механика грунтов, устойчивость грунтов, методы производства строительных работ*).

— *Техника измерений* (*электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в технике*).

*Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех отечественных специалистов и зарубежных сотрудников.*

⋆

*Статьи должны быть написаны в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений (относящихся к уже известным частям проблем).*

*Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала, формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует делать китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.*

*Литература, цитированная в тексте должна даваться обшим списком в конце статьи. Нужно указать инициалы и фамилию автора, заглавие, том, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов — и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются*

*Кроме текста, для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском языке или же на русском, французском, английском или немецком языках. Резюме должно составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к работам зарубежных сотрудников, редактированным на русском, английском, французском или немецком языках.*

*Рукописи препровождаются по адресу: Институт прикладной механики. Бухарест, ул. Константин Милле, 15, район Г. Георгиду-Деж.*

## Le périodique

*«STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ»*
*(«ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE»)*

*publie:*

— *des* études originales *à caractère hautement scientifique, recherches fondamentales d'intérêt général, orientées vers l'activité pratique;*

— *des* notes *(communications brèves) à caractère général, ou constituant une mise au point d'une certaine question;*

— *des* exposés scientifiques et techniques *où l'on expose: l'état actuel d'un certain problème, en soulignant son aspect nouveau; des remarques et discussions concernant certains travaux de mécanique appliquée;*

— *des* notes bibliographiques *au sujet des livres et des études roumains et étrangers.*

*Les domaines de spécialité de la revue sont les suivants:*

— *aéromécanique (mécanique des fluides, aérodynamique, dynamique des gaz, mécanique de l'avion, aéroélasticité, aérodynamique des moteurs à combustion interne, thermo-aérodynamique des moteurs à réaction, ventilation, aéromoteurs);*

— *hydromécanique (hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines hydrauliques et pompes);*

— *constructions mécaniques (cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des machines, automation, étude des surfaces, technologie des milieux solides continus);*

— *mécanique générale (résistance des matériaux, élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques);*

— *statique et dynamique des constructions (méthodes de calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilité des terrains, méthodes d'exécution des travaux de construction);*

— *technique des mesures (appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisations des ultra-sons et des isotopes radioactifs en technique).*

*La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires en publiant, dans ce but, les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.*

★

*Les articles seront rédigés dans un style concis et clair, étant évitées les introductions trop longues concernant les données connues des problèmes.*

*Les manuscrits seront envoyés en trois exemplaires, dactylographiés, aux formules écrites de manière lisible, à l'encre. Les figures, ainsi que les diagrammes, seront tracés à l'encre de Chine sur du papier calque. On utilisera le nombre de figures strictement indispensable.*

*Les références bibliographiques seront mentionnées à la fin de l'article. On y indiquera le nom de l'auteur, le titre de l'ouvrage, le tome, la page, le lieu de la parution et, pour les périodiques on ajoutera le numéro auquel on se réfère. On ne fera pas mention des travaux non publiés.*

*Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé en roumain ou, éventuellement, en russe, français, anglais ou allemand (environ une page pour 20 pages dactylographiées de texte).*

*Les mêmes normes sont valables pour les collaborateurs étrangers, qui peuvent rédiger leurs travaux en russe, anglais, français ou allemand.*

*Les manuscrits seront envoyés à l'adresse suivante; Institut de Mécanique Appliquée « Traian Vuia», 15, str. Constantin Mille, Bucarest, Roumanie.*

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE «TRAIAN VUIA»

# ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome XII, n° 6 1961

## SOMMAIRE

### ÉTUDES

#### *AÉROMÉCANIQUE*

Page

N. N. PATRAULEA, Three-dimensional rheoelectric analogy without the influence of boundaries . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1187

AUGUSTIN PETRE and CRISTIAN STĂNESCU, Aeroelastic distribution of aerodynamic loads for lifting surfaces of constant cross-section, taking into consideration the end restraints . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1193

#### *HYDROMÉCANIQUE*

D. DUMITRESCU, C. IAMANDI and D. GH. IONESCU, Investigations on channels with lateral evacuation . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1205

D. DUMITRESCU et C. M. IANCU, Contribution à l'étude des déversoirs en mince paroi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1219

#### *LUBRIFICATION – FROTTEMENT – USURE*

V. N. CONSTANTINESCU, Determination of the pressure distribution in hydrostatic bearings by using a hydrodynamic analogy . . . . . . . . . . . . . . . . 1239

#### *THÉORIE DES MÉCANISMES*

D. MANGERON et C. DRĂGAN, Etude cinématique des mécanismes dans l'espace à quatre organes, par une nouvelle méthode matricielle-tensorielle . . . . . . . 1257

CHR. PELECUDI, Representation of functions with the aid of arcs of rotation cams and translation tappets . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1271

GEORGE BĂRĂNESCU, Détermination des dimensions principales d'un mécanisme bielle-manivelle général . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1293

Page

### *ÉLASTICITÉ – PLASTICITÉ – RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX*

FLORIAN VIRGILIU, Contributions au calcul de la résistance des trépans à lames . . 1305
VALERIU PETCU, Plastic analysis of reinforced concrete continuous beams . . . . 1321

### *VIBRATIONS*

V. MANEA, Considérations sur le problème des oscillations des automobiles en mouvement rectiligne à vitesse constante . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1335

### *TECHNOLOGIE DES MILIEUX SOLIDES CONTINUS*

M. P. POPOV, I. MITRICĂ und E. D. DECIU, Die Geometrie des Werkzeuges zur Zerspanung von Kohlenstahlwerkstoffen . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1357

### **RAPPORTS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES**

IACOB HARGHEL, Die Berechnung der Einflusslinien der Bogenbrücken mit wandartig gestützter Fahrbahn . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1379

### **NOTES**

E. DEUTSCH, Flexion d'une barre prismatique dont la section transversale est limitée par la lemniscate de Booth . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1399

**REVUE BIBLIOGRAPHIQUE** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1407

**LIVRES REÇUS À LA RÉDACTION** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1417

*Index alphabétique pour l'année 1961* . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1419

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

# STUDII

## AEROMECANICĂ

# ANALOGIA REOELECTRICĂ TRIDIMENSIONALĂ FĂRĂ INFLUENȚA FRONTIERELOR

DE

N. N. PATRAULEA

L. Malavard [1] a soluționat efectuarea analogiilor reoelectrice ale mișcărilor plane fluide incompresibile fără influența frontierelor bazinului care conține electrolitul. În această lucrare vom prezenta montajul care trebuie realizat în cazul scurgerilor spațiale, pentru evitarea influenței frontierelor bazinului.

În acest scop am folosit teorema de inversiune Lord Kelvin, după care, oricărei funcții armonice în spațiu,

$$U(\overline{\lambda}, r),$$

i se poate asocia o altă funcție armonică, $U'(\overline{\lambda}, r')$, definită prin relația

$$U'(\overline{\lambda}, r') = \frac{K}{r'} U(\overline{\lambda}, r) \tag{1}$$

unde prin $\overline{\lambda}$ s-a notat versorul razelor vectoare coliniare $r$ și $r'$ avînd originea în punctul de inversiune, $O$.

Principiul prelungirii, la fel ca și în plan, constă din înlocuirea domeniului infinit $D''$ exterior domeniului cuvei reoelectrice prin domeniul finit $D'$ al unui bazin auxiliar care matematic este transformatul prin inversiune al primului.

Pentru a putea utiliza inversiunea Kelvin la analogia reoelectrică este în primul rînd necesar ca domeniul bazinului principal de experimentare să fie sferic ; altfel, prin conectarea electrozilor omologi de pe pereții celor două bazine nu s-ar realiza egalitatea celor două funcții armonice.

Fie așadar două bazine sferice $\Sigma$, $\Sigma'$ avînd raza $R_0$ prevăzute cu electrozi $E_i$ și $E_i'$ distribuiți pe suprafața sferelor fiecare corespunzînd unor arii $S_i$ cît mai mici în raport cu aria sferei (fig. 1).

Fiecare electrod $E_i$ al sferei $\Sigma$ este conectat cu electrodul $E_i'$ din punctul omolog al sferei $\Sigma'$.

Se vede imediat că simpla conectare nu satisface pe deplin analogia deoarece garantează numai egalitatea funcţiilor $U$ şi $U'$ ultima fiind definită de

$$U'(\bar{\lambda}, R') = \frac{R_0}{R'} U(\bar{\lambda}, R); \quad R = \frac{R_0^2}{R'}. \tag{2}$$

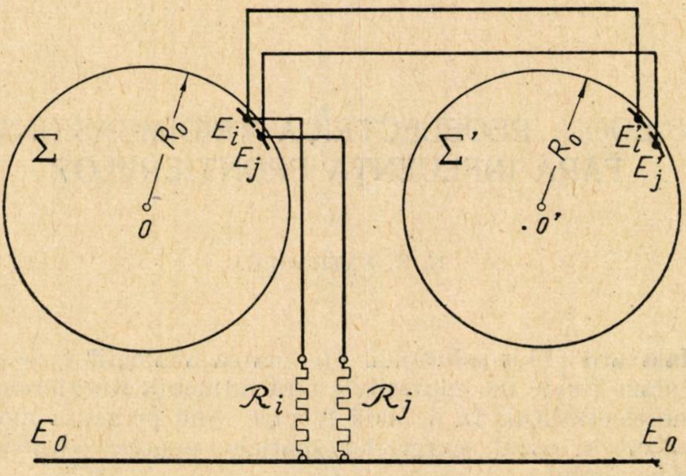


Fig. 1

Într-adevăr, pe sferele omologe de rază $r_0$, trebuie îndeplinită şi relaţia hidrodinamică

$$\frac{\partial u'}{\partial r'} = -\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r_0}, \tag{3}$$

care se bazează pe continuitatea fluidului la traversarea sferei analoge $\sigma$ şi pe definiţia inversiunii Kelvin. Cu notaţiile

$$\begin{aligned} \bar{r}' &= \frac{r'}{r_0}, \quad \bar{r} = \frac{r}{r_0}, \\ \bar{u} &= \frac{u}{u_1}, \quad \bar{u}' = \frac{u'}{u_1}, \end{aligned} \tag{4}$$

condiţia (3) se scrie

$$\frac{\partial \bar{u}'}{\partial \bar{r}'} = -\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} - \bar{u}. \tag{5}$$

Prin $u_1$ s-a notat o diferenţă de potenţial hidrodinamic caracteristică.

După cum se vede, spre deosebire de analogia reoelectrică plană, în relaţia de mai sus a apărut şi termenul $-\bar{u}$ ceea ce ne conduce să completăm montajul reoelectric astfel : fiecare electrod $E_i$ este legat la un electrod comun prin intermediul unor rezistenţe $\mathcal{R}_i$.

Dacă aceste rezistențe sînt convenabil dimensionate, se poate satisface condiția la limită (5).

Într-adevăr, relația hidrodinamică (5) poate fi scrisă aproximativ astfel :

$$\psi_i' = -\psi_i - s_i \frac{u}{r_0} \tag{6}$$

unde prin $\psi_i'$, $\psi_i$ s-au notat debitele hidrodinamice care ies din sferele respective prin suprafețele $s_i$, $s_i'$.

În scurgerea electrică din cele două bazine, vom avea realizată în mod analog următoarea relație de continuitate a curentului electric

$$I_i + I_i' = I_{0i}. \tag{7}$$

Prin $I_{0i}$ s-a notat curentul electric de la $E_i$ către electrodul comun $E_0$ al cărui potențial îl notăm cu $U_0$. Conform legii lui Ohm avem mai departe

$$U_0 - U_i = \mathcal{R}_i I_{0i} \tag{8}$$

și

$$S_i \frac{\partial \widetilde{U}_i}{\partial R} = \rho I_i, \qquad S_i' \frac{\partial \widetilde{U}_i'}{\partial R} = \rho' I_i', \tag{9}$$

unde $\rho$ și $\rho'$ reprezintă rezistivitățile electroliților în cele două bazine iar semnul $\sim$ indică o valoare medie a derivatei $\partial U_i / \partial R$ pe suprafețele mici $S_i$. Pentru simplificarea scrierii vom renunța mai departe la acest semn. Relația (7) se va scrie,

$$\frac{S_i}{\rho} \cdot \frac{\partial U_i}{\partial R} + \frac{S_i'}{\rho'} \frac{\partial U_i'}{\partial R'} = \frac{U_0 - U_i}{\mathcal{R}_i'} \tag{10}$$

sau

$$\frac{\partial U_i'}{\partial R'} = -\frac{\rho'}{\rho} \frac{S_i}{S_i'} \cdot \frac{\partial U_i}{\partial R} - (U_i - U_0) \cdot \frac{\rho'}{\mathcal{R}_i S_i'}.$$

Dacă în particular folosim același electrolit, facem $S_i' = S_i$ și se consideră $U_0 = 0$, relația de mai sus devine

$$\frac{\partial U_i'}{\partial R'} = -\frac{\partial U_i}{\partial R} - U_i \frac{\rho}{S_i R_i}, \tag{11}$$

sau înmulțind toată relația cu $R_0$ și adoptînd notații adimensionale pentru lungimi, obținem

$$\frac{\partial \bar{U}_i'}{\partial \bar{R}'} = \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \bar{R}} - U_i \frac{\rho R_0}{S_i \mathcal{R}_i}. \tag{12}$$

Bara pe $U$ și $U'$ indică adimensionalizarea potențialelor respective prin raportarea lor la o diferență de potențial electrică omologă celei hidrodinamice, $u_1$.

Pentru satisfacerea analogiei nu ne mai rămîne decît să alegem în aşa fel $\rho$, $S_i$, $R_0$, $\mathcal{R}_i$ încît să avem

$$\rho R_0 = S_i \mathcal{R}_i. \tag{13}$$

Din această relaţie se vede că $\mathcal{R}_i$ este rezistenţa unei coloane de electrolit de lungime egală cu raza sferei $R_0$ şi avînd secţiunea $S_i$.

Rezistenţele $\mathcal{R}_i$ s-ar putea realiza din acelaşi electrolit într-un bazin separat. În acest caz relaţia (13) este satisfăcută oricare ar fi rezistivitatea $\rho$ a electrolitului comun.

Rezistenţele $\mathcal{R}_i$ *uscate* prezintă avantajul că necesită un spaţiu mai mic şi nu implică o manoperă specială înaintea fiecărei experienţe. Pentru satisfacerea relaţiei (5) va trebui să se utilizeze un electrolit cu rezistivitate bine determinată conform relaţiei (13). Reglajul rezistivităţii se poate face uşor prin adăugire de apă distilată dacă este necesară o mărire a rezistivităţii şi o acidulare dacă este necesară o scădere a acesteia.

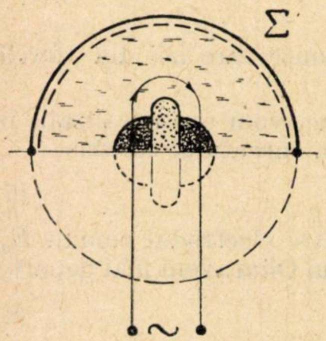


Fig. 2

*Aplicaţie la mişcarea axial simetrică.* Cu ajutorul metodei expuse se pot studia foarte simplu mişcările axial simetrice, fără influenţa frontierelor. În acest scop se pot utiliza două bazine avînd ca fund un plan diametral al sferei, iar suprafaţa laterală poate fi practic cilindrică (în loc de sferică). Fundul plan este înclinat astfel ca axa de simetrie să coincidă cu un diametru al sferei.

*Realizarea unui curent asimptotic paralel.* Realizarea mişcării în jurul unui corp situat în sfera $\Sigma$ şi în prezenţa unui curent paralel la mare distanţă de $\Sigma$ se poate face aşezînd un dublet în centrul sferei $\Sigma'$ deoarece dacă în mişcarea hidrodinamică potenţialul la mari distanţe este de forma $V_\infty x$, în domeniul $\Sigma'$ şi în vecinătatea originei potenţialul transformat va fi de forma

$$u' \approx V_\infty x r = \frac{V_\infty \cos \alpha}{r'^2}, \tag{14}$$

$\alpha$ fiind unghiul făcut de vectorul de poziţie cu axa $Ox$.

În ceea ce priveşte realizarea practică a dubletului în centrul sferei se poate proceda astfel: se modelează din material izolant suprafaţa de curent indusă de dublet în vecinătatea originii sferei $\Sigma'$ iar din material conductor două suprafeţe echipotenţiale ca în figura 2. Alimentînd aceşti electrozi de la generatorul de curent electric, în domeniul $\Sigma$ se induce un curent paralel (în lipsa unui model în $\Sigma$).

Configuraţia din vecinătatea originii sferei trebuie să fie de dimensiuni suficient de mici în raport cu raza sferei pentru ca să nu depindă practic de condiţiile la limită specifice problemei de rezolvat (de ex. de corpul care s-ar plasa în sfera principală $\Sigma$).

*Primită la redacţie la 20 iunie 1961*

# ТРЕХМЕРНАЯ РЕОЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ БЕЗ ВЛИЯНИЯ ГРАНИЦ

## РЕЗЮМЕ

Автор указывает схему, которую нужно осуществить для получения электрических аналогий гидродинамических движений без влияния границ реоэлектрического бассейна. Схема совпадает со схемой, указанной Л. Малаваром для плоских движений [1].

Применяется теорема инверсии Келвина для продолжения течения из основного бассейна в другой бассейн при помощи некоторых электрических соединений. Последний бассейн представляет собой преобразования путем инверсии внешности основного бассейна, содержащего исследуемую модель.

Указываются применения к осесимметрическим движениям и моделирование асимптотического параллельного потока.

# THREE-DIMENSIONAL RHEOELECTRIC ANALOGY WITHOUT THE INFLUENCE OF BOUNDARIES

## ABSTRACT

This paper presents a scheme for achieving the electrical analogies of the three-dimensional hydrodynamic motions without the influence of the rheoelectric tank boundaries. The scheme does not coincide with that indicated by L. Malavard for plane motions [1].

Lord Kelvin's inversion theorem is used for prolonging the flow from the main tank into a second one, with the aid of certain electrical connexions. The latter tank represents the transformation by inversion of the domain exterior to the main tank which contains the investigated model.

Applications are given for axisymmetrical motion and for the asymptotic parallel stream.

## BIBLIOGRAFIE

1. LUCIEN C. MALAVARD, *Recent developments in the method of the rheoelectric analogy applied to aerodynamics*. Journ. Aer. Sci., **24**, *5*, 321 (1957).

# DISTRIBUȚIA AEROELASTICĂ A SARCINILOR AERODINAMICE PENTRU SUPRAFEȚELE PORTANTE DE SECȚIUNE CONSTANTĂ, ȚINÎND SEAMA DE RESTRÎNGERILE DE FIXARE

DE

AUGUSTIN PETRE și CRISTIAN STĂNESCU

În cazul avioanelor moderne, a căror flexibilitate este destul de ridicată, deformațiile structurii conduc la o redistribuire a sarcinilor aerodinamice care poate să fie diferită esențial de aceea calculată în ipoteza unei comportări complet rigide.

În consecință apare necesitatea ca structura să fie proiectată pentru distribuția sarcinii aerodinamice care corespunde structurii deformate.

După cum se știe, la o suprafață portantă centrul de răsucire și cel aerodinamic nu coincid, primul fiind plasat în general în spatele centrului aerodinamic, decalajul existent între aceste două centre fiind cauza răsucirii aripii.

Ca urmare a deformațiilor elastice care apar, sînt induse forțe aerodinamice adiționale, deoarece răsucirea suprafeței portante în lungul anvergurii duce la un spor de incidență. La rîndul ei, creșterea de portanță produce deformații suplimentare, unghiul de răsucire mărindu-se.

Pentru vitezele de zbor care se găsesc sub viteza critică de divergență, creșterea răsucirii și a portanței sînt convergente și se ajunge la o stare de echilibru stabil.

În modul acesta problema găsirii distribuției sarcinii pe o aripă este de a determina distribuția răsucirii, de-a lungul anvergurii aripii, corespunzătoare condiției de echilibru stabil.

În prezenta lucrare se dă soluția acestei probleme pornindu-se de la ecuațiile teoriei răsucirii împiedicate a barelor cu pereți subțiri de profil închis.

Modul de abordare a problemei, prin considerarea răsucirii împiedicate, implică satisfacerea unor condiții la limită suplimentare, ceea ce redă fenomenul mai aproape de realitate.

Se consideră o suprafaţă portantă construită ca bară cilindrică cu pereţi subţiri, avînd secţiunea transversală închisă şi constantă în lungul anvergurii.

Admiţînd ipoteza nedeformabilităţii secţiunii transversale, precum şi ipoteza lui A. A. Umansky, potrivit căreia deplanarea secţiunilor transversale în răsucirea împiedicată este proporţională cu aceea din cazul răsucirii libere, se poate scrie expresia deplanării unui punct oarecare al secţiunii transversale

$$u = \frac{\overline{\omega}}{\nu}\left(\frac{M_t}{GI_p} - \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y}\right) \tag{1}$$

unde $\overline{\omega}$ este deplanarea unitară corespunzătoare răsucirii libere iar

$$\nu = 1 - \frac{I_d}{I_p}. \tag{2}$$

Momentul de răsucire va avea expresia

$$M_t = GI_d\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y} + \frac{EI_\omega}{\nu}\left(\frac{1}{GI_p}\frac{\mathrm{d}m_t}{\mathrm{d}y} - \frac{\mathrm{d}^3\varphi}{\mathrm{d}y^3}\right) \tag{3}$$

în care $m_t$ este momentul de răsucire, distribuit în lungul anvergurii, pe unitatea de lungime.

Ecuaţia care determină unghiul de răsucire $\varphi$ este

$$\overline{k}^2\frac{\mathrm{d}^4\varphi}{\mathrm{d}y^4} - \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}y^2} = -\frac{m_t}{GI_d} + \frac{\overline{k}^2}{GI_p}\frac{\mathrm{d}^2 m_t}{\mathrm{d}y^2}, \tag{4}$$

unde $\overline{k}$ este o constantă a cărei expresie este

$$\overline{k} = \sqrt{\frac{EI_\omega}{\nu GI_d}},$$

celelalte notaţii fiind cele cunoscute în cazul structurilor cu pereţi subţiri.

Dacă se notează cu $c$ coarda aripii, cu $e$ distanţa între axa elastică şi linia centrelor aerodinamice şi cu $d$ distanţa între axa elastică şi linia centrelor de greutate (fig. 1), atunci expresia momentului de răsucire repartizat pe unitatea de anvergură va fi:

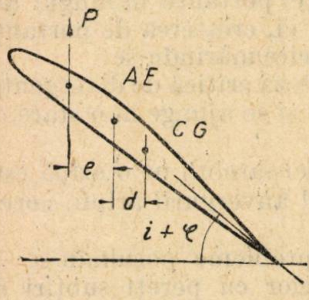


Fig. 1

$$m_t = -qce\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\varphi - qce\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}i - qc^2c_m + pnd. \tag{5}$$

În membrul drept al acestei relaţii s-au trecut momentele ce corespund coeficientului $c_m$, momentul dat de portanţa corespunzătoare incidenţei $i + \varphi$, $i$ fiind incidenţa de zbor pentru aripa rigidă precum şi momentul dat de greutatea aripii, ţinînd seama că aripa este solicitată cu un factor de sarcină $n$. Valoarea acestui factor de sarcină, ţinînd seama de sporul de incidenţă care se obţine prin deformaţia aripii, va fi :

$$n = \frac{2}{W}\int_0^{\frac{b}{2}} qc\,\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}(i + \varphi)\,\mathrm{d}y, \tag{6}$$

unde $W$ este greutatea totală a avionului, iar $b$ anvergura aripii. Atît în (5), cît şi în (6), prin $q = \frac{\rho}{2}V^2$ s-a notat presiunea dinamică, iar cu $\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}$ panta curbei de portanţă. Ţinînd seama de (6) şi introducînd (5) în ecuaţia (4), se obţine ecuaţia diferenţială care condiţionează repartiţia aeroelastică a sarcinii în anvergură, luînd în consideraţie şi efectele restrîngerilor de fixare :

$$\bar{k}^2\frac{\mathrm{d}^4\varphi}{\mathrm{d}y^4} + \left(\frac{\bar{k}^2 qce\,\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}}{GI_p} - 1\right)\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}y^2} - \frac{qce\,\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}}{GI_d}\,\varphi =$$

$$= \frac{qce\,\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}}{GI_d}\,i + \frac{qc^2c_m}{GI_d} - \frac{2\,pdqc\,\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}}{GI_dW}\int_0^{\frac{b}{2}}(i + \varphi)\,\mathrm{d}y. \tag{7}$$

Dacă $\bar{k}^2 = 0$ se obţine ecuaţia diferenţială care condiţionează repartiţia aeroelastică a sarcinii în cazul răsucirii libere. Deosebirea între cazul răsucirii împiedicate şi al răsucirii libere are drept urmare mărirea numărului de condiţii la limită : faţă de cazul clasic vor trebui satisfăcute încă două condiţii, cîte una în plus la fiecare extremitate a aripii.

Utilizînd schimbarea de variabilă

$$y = \frac{b}{2}\,\zeta \tag{8}$$

şi introducînd următorii parametri adimensionali :

$$\lambda^2 = \frac{b^2qce\,\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}}{4\,GI_d}, \tag{9}$$

$$k = \frac{4\,\bar{k}^2}{b^2}, \tag{10}$$

se remarcă că se poate scrie :

$$\frac{\bar{k}^2qce}{GI_p}\,\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i} = k\,(1 - \nu)\,\lambda^2,$$

iar ecuaţia (7) devine :

$$k\frac{\mathrm{d}^4\varphi}{\mathrm{d}\zeta^4}+[k(1-\nu)\lambda^2-1]\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\zeta^2}-\lambda^2\varphi=$$

$$=\lambda^2\left[\left(1-\frac{pb}{W}\cdot\frac{d}{e}\right)i+\frac{c}{e}\cdot\frac{c_m}{\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}}-\frac{pb}{W}\,\frac{d}{e}\int_0^1\varphi\mathrm{d}\zeta\right]. \tag{11}$$

Pentru ecuaţia (11), ecuaţia caracteristică este

$$kr^4-[1-k(1-\nu)\lambda^2]r^2-\lambda^2=0.$$

Dacă se notează

$$2a=\frac{1-k(1-\nu)\lambda^2}{k};\quad b=\frac{\lambda^2}{k}>0, \tag{12}$$

aceasta devine :

$$r^4-2ar^2-b=0. \tag{13}$$

Rezolvînd ecuaţia (13) şi notînd cu $\alpha$ şi $\beta$ modulele rădăcinilor, se obţine :

$$\begin{aligned}\alpha&=\sqrt{\frac{1}{2k}\left[k(1-\nu)\lambda^2-1+\sqrt{k^2(1-\nu)^2\lambda^4+2k(1+\nu)\lambda^2+1}\right]},\\ \beta&=\sqrt{\frac{1}{2k}\left[k(1-\nu)\lambda^2+1+\sqrt{k^2(1-\nu)^2\lambda^4+2k(1+\nu)\lambda^2+1}\right]}.\end{aligned} \tag{14}$$

Revenind la ecuaţia (11) soluţia ecuaţiei se poate scrie

$$\varphi=K(C_1\sin\alpha\zeta+C_2\cos\alpha\zeta+C_3\,\mathrm{sh}\beta\zeta+C_4\,\mathrm{ch}\,\beta\zeta-1), \tag{15}$$

în care prin $K$ s-a notat :

$$K=\left(1-\frac{pb}{W}\,\frac{d}{e}\right)i+\frac{c}{e}\,\frac{c_m}{\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}}-\frac{pb}{W}\,\frac{d}{e}\,C \tag{16}$$

unde $C$ este o constantă dată de :

$$C=\int_0^1\varphi\mathrm{d}\zeta. \tag{17}$$

Constantele de integrare urmează a fi determinate din condiţiile la limită :

1. La încastrare ( $\zeta=0$) secţiunea fiind împiedicată să se rotească şi să se deplaneze, rezultă că este necesar să fie satisfăcute următoarele condiţii :

$$\varphi=0;\quad u=0. \tag{18}$$

În baza soluţiei (15), prima condiţie (18) conduce la ecuaţia

$$C_2+C_4=1. \tag{19}$$

A doua condiție (18) se reduce, în baza relațiilor (1), (3) și a expresiei (5) pentru $m_t$, la următoarea ecuație :

$$\alpha\left[-\beta^2+\frac{1}{k(1-\nu)}\right]C_1+\beta\left[\alpha^2+\frac{1}{k(1-\nu)}\right]C_3=0. \tag{20}$$

2. La extremitatea liberă a aripii, evident, se impune ca

$$M_t=0\,;\qquad \sigma_y=0. \tag{21}$$

Corespunzător primei condiții rezultă, în baza relației (3) și a expresiei (5), ecuația :

$$-\beta\cos\alpha\cdot C_1+\beta\sin\alpha\cdot C_2+\alpha\operatorname{ch}\beta\cdot C_3+\alpha\operatorname{sh}\beta\cdot C_4=0. \tag{22}$$

Ultima condiție (21) conduce la ecuația :

$$\begin{gathered}\alpha^2\left[-\beta^2+\frac{1}{k(1-\nu)}\right]\sin\alpha\cdot C_1+\alpha^2\left[-\beta^2+\frac{1}{k(1-\nu)}\right]\cos\alpha\cdot C_2-\\-\beta^2\left[\alpha^2+\frac{1}{k(1-\nu)}\right]\operatorname{sh}\beta\cdot C_3-\beta^2\left[\alpha^2+\frac{1}{k(1-\nu)}\right]\operatorname{ch}\beta\cdot C_4=0.\end{gathered} \tag{23}$$

Din sistemul de ecuații (19), (20), (22), (23) se determină constantele de integrare $C_1$, $C_2$, $C_3$ și $C_4$.

Din condițiile (19) și (20) se poate scrie

$$\begin{gathered}C_4=1-C_2,\\ C_3=-\frac{\alpha}{\beta}\,\frac{-\beta^2+\dfrac{1}{k(1-\nu)}}{\alpha^2+\dfrac{1}{k(1-\nu)}}\,C_1,\end{gathered} \tag{24}$$

expresii care introduse în (22) și (23) conduc la

$$\begin{gathered}\left[-\frac{\alpha}{\beta}\,\frac{1-\beta^2k(1-\nu)}{1+\alpha^2k(1-\nu)}\,\frac{\operatorname{ch}\beta}{\operatorname{sh}\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sh}\beta}\right]C_1+\left[\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{\sin\alpha}{\operatorname{sh}\beta}-1\right]C_2+1=0,\\ \frac{\alpha}{\beta}\left[\frac{\alpha}{\beta}\,\frac{\sin\alpha}{\operatorname{ch}\beta}+\frac{\operatorname{sh}\beta}{\operatorname{ch}\beta}\right]\frac{1-\beta^2k(1-\nu)}{1+\alpha^2k(1-\nu)}\,C_1+\\+\left[\frac{\alpha^2}{\beta^2}\cdot\frac{1-\beta^2k(1-\nu)}{1+\alpha^2k(1-\nu)}+1\right]C_2-1=0.\end{gathered} \tag{25}$$

Deoarece pentru cazurile practice $\beta$ are valori mari, se poate scrie

$$\operatorname{sh}\beta\approx\operatorname{ch}\beta. \tag{26}$$

Rezolvînd sistemul (25), (26) și notînd

$$\frac{1-\beta^2k(1-\nu)}{1+\alpha^2k(1-\nu)}=\nu\,\frac{1-\lambda^2k(1-\nu)}{1+\lambda^2k(1-\nu)}=\mathrm{A} \tag{27}$$

rezultă

$$C_1 = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \dfrac{\alpha^3}{\beta^3} A}{1 + \dfrac{\alpha}{\beta}\left(1 - \dfrac{\alpha^2}{\beta^2}\right) A\,\mathrm{tg}\,\alpha + \dfrac{\alpha^4}{\beta^4} A^2},$$
$$C_2 = \frac{1 - \dfrac{\alpha^3}{\beta^3} A\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 + \dfrac{\alpha}{\beta}\left(1 - \dfrac{\alpha^2}{\beta^2}\right) A\,\mathrm{tg}\,\alpha + \dfrac{\alpha^4}{\beta^4} A^2}. \tag{28}$$

Introducînd aceste expresii în (24) se obţine

$$C_3 = -\frac{\alpha}{\beta} A C_1,$$
$$C_4 = -C_3. \tag{29}$$

Valorile acestor coeficienţi în funcţie de λ, *k* şi ν (9), (10), (2) sînt date în tabela 1.

Se observă de asemenea că deformaţiile de răsucire nu tind spre infinit, pentru valori ale lui λ corespunzătoare vitezei critice de divergenţă, ca şi în cazul în care nu se consideră restrîngerile de fixare.

Pentru determinarea completă a sarcinilor exterioare şi a soluţiei, este necesară determinarea constantei $C$, (17), a cărei expresie este

$$C = \int_0^1 \varphi\,\mathrm{d}\zeta = K\left[C_1 \frac{1 - \cos\alpha}{\alpha} + C_2 \frac{\sin\alpha}{\alpha} + C_3 \frac{\mathrm{ch}\,\beta - 1}{\beta} + C_4 \frac{\mathrm{sh}\,\beta}{\beta} - 1\right]. \tag{30}$$

Ţinînd seamă de (28), (29) precum şi de faptul că $\mathrm{sh}\,\beta \approx \mathrm{ch}\,\beta$ rezultă

$$C = K\left[\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\alpha}\cdot\frac{1 + \dfrac{\alpha^2}{\beta^2} A + \dfrac{\alpha^3}{\beta^3} A \dfrac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha} + \dfrac{\alpha^5}{\beta^5}\cdot\dfrac{A^2}{\mathrm{tg}\,\alpha}}{1 + \dfrac{\alpha}{\beta}\left(1 - \dfrac{\alpha^2}{\beta^2}\right) A\,\mathrm{tg}\,\alpha + \dfrac{\alpha^4}{\beta^4} A^2} - 1\right], \tag{31}$$

astfel încît din (16) se obţine

$$K = \frac{1 - \dfrac{pb}{W}\dfrac{d}{e} + \dfrac{c}{e}\dfrac{c_m}{\dfrac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\, i}}{1 + \dfrac{pb}{W}\cdot\dfrac{d}{e}\left[\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\alpha}\,\dfrac{1 + \dfrac{\alpha^2}{\beta^2} A + \dfrac{\alpha^3}{\beta^3} A \dfrac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha} + \dfrac{\alpha^5}{\beta^5}\dfrac{A^2}{\mathrm{tg}\,\alpha}}{1 + \dfrac{\alpha}{\beta}\left(1 - \dfrac{\alpha^2}{\beta^2}\right) A\,\mathrm{tg}\,\alpha + \dfrac{\alpha^4}{\beta^4} A^2} - 1\right]}\, i. \tag{32}$$

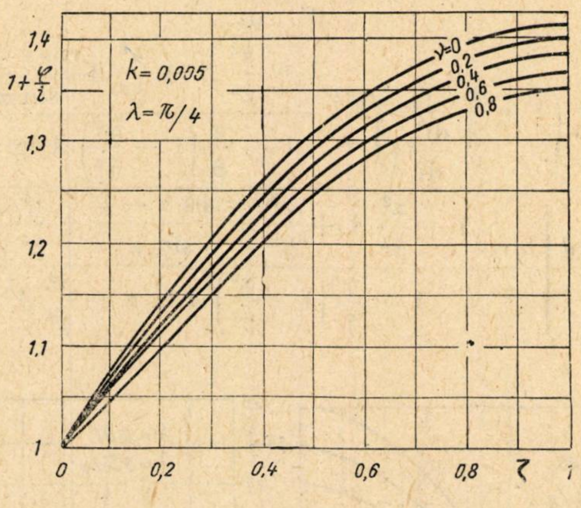

1,4
$1+\frac{\varphi}{i}$
1,3
1,2
1,1
1
0
0,2
0,4
0,6
0,8
$\zeta$
1
$k=0{,}005$
$\lambda=\pi/4$
$\nu=0$
0,2
0,4
0,6
0,8

Fig. 2

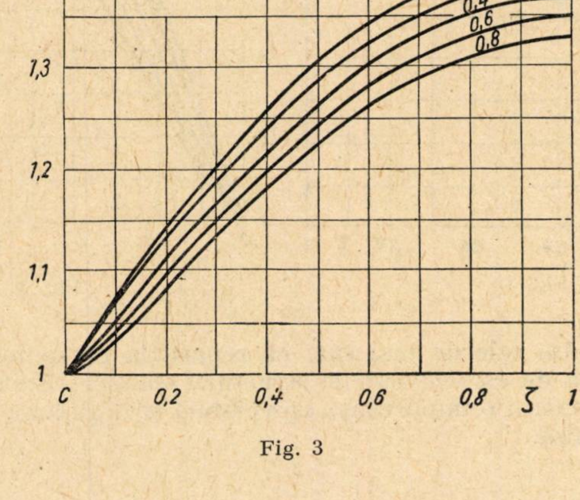

1,5
$1+\frac{\varphi}{i}$
1,4
1,3
1,2
1,1
1
0
0,2
0,4
0,6
0,8
$\zeta$
1
$k=0{,}01$
$\lambda=\pi/4$
$\nu=0$
0,2
0,4
0,6
0,8

Fig. 3

Factorul de sarcină se calculează ţinînd seama de (6) şi (15) şi va fi :

$$n = \frac{qcb}{W} \cdot \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i} \times$$

$$\times \frac{-\frac{c}{e}\frac{c_m}{\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}i} + \left(1 + \frac{c}{e}\frac{c_m}{\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}i}\right)\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\alpha}\,\frac{1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}A + \frac{\alpha^3}{\beta^3}A\frac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha} + \frac{\alpha^5}{\beta^5}\frac{A^2}{\mathrm{tg}\,\alpha}}{1 + \frac{\alpha}{\beta}\left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)A\,\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{\alpha^4}{\beta^4}A^2}}{1 + \frac{pb}{W}\frac{d}{e}\left[\frac{tg\,\alpha}{\alpha}\,\frac{1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}A + \frac{\alpha^3}{\beta^3}A\frac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha} + \frac{\alpha^5}{\beta^5}\frac{A^2}{\mathrm{tg}\,\alpha}}{1 + \frac{\alpha}{\beta}\left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)A\,\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{\alpha^4}{\beta^4}A^2} - 1\right]}\, i. \tag{33}$$

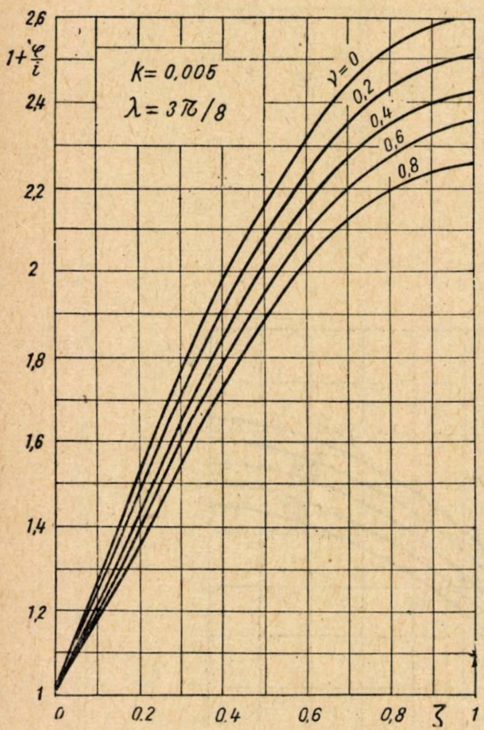


Fig. 4

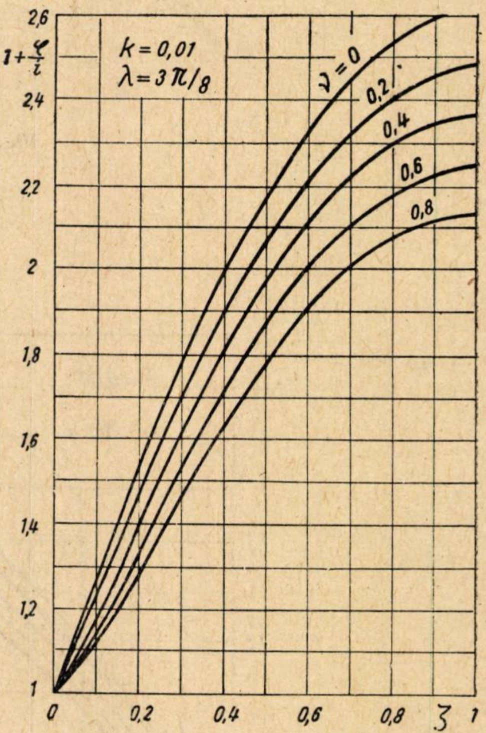


Fig. 5

Rezultă, din cele de mai sus, că repartiţia portanţei în anvergură este dependentă de caracteristicile structurii elastice. Restrîngerile de fixare au de asemenea o importanţă apreciabilă şi neglijarea lor nu poate fi în general admisă.

Pentru calculul repartiţiei reale a sarcinii aerodinamice se procedează în modul următor : se calculează mărimile $\lambda^2$, $k$ şi $\nu$, ţinînd seamă de expresiile lor (2), (9), (10). Funcţie de aceste valori se determină constantele $C_1$ $C_2$, $C_3$ şi $C_4$ utilizînd fie expresiile (28) şi (29), fie tabela 1.

Avînd dat factorul de sarcină $n$, se determină incidenţa $i$, din secţiunea de încastrare, utilizînd expresia (33). Se poate de asemenea determina factorul de sarcină, avînd incidenţa rigidă $i$ dată. Deformaţia de răsucire se obţine utilizînd expresia (15). Repartiţia reală a sarcinii aerodinamice $P$ se obţine utilizînd relaţia

$$P = qc \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}(i + \varphi).$$

*Tabela 1*

| $\lambda$ | $k$ | $\nu$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_4 \approx - C_3$ | $C/K$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\pi}{8}$ | 0,005 | 0 | 0,414 | 1 | 0 | 0,055 |
| | | 0,2 | 0,412 | 0,9977 | 0,0023 | 0,045 |
| | | 0,4 | 0,411 | 0,995 | 0,005 | 0,044 |
| | | 0,6 | 0,410 | 0,993 | 0,007 | 0,043 |
| | | 0,8 | 0,409 | 0,991 | 0,009 | 0,042 |
| $\frac{\pi}{8}$ | 0,01 | 0 | 0,414 | 1 | 0 | 0,055 |
| | | 0,2 | 0,412 | 0,997 | 0,003 | 0,045 |
| | | 0,4 | 0,411 | 0,9935 | 0,0065 | 0,044 |
| | | 0,6 | 0,409 | 0,9902 | 0,0098 | 0,042 |
| | | 0,8 | 0,408 | 0,9987 | 0,013 | 0,041 |
| $\frac{\pi}{4}$ | 0,005 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0,275 |
| | | 0,2 | 0,989 | 0,989 | 0,011 | 0,255 |
| | | 0,4 | 0,978 | 0,978 | 0,022 | 0,242 |
| | | 0,6 | 0,967 | 0,967 | 0,033 | 0,230 |
| | | 0,8 | 0,956 | 0,956 | 0,044 | 0,220 |
| $\frac{\pi}{4}$ | 0,01 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0,275 |
| | | 0,2 | 0,985 | 0,985 | 0,015 | 0,252 |
| | | 0,4 | 0,969 | 0,969 | 0,031 | 0,232 |
| | | 0,6 | 0,9535 | 0,9535 | 0,0465 | 0,212 |
| | | 0,8 | 0,940 | 0,940 | 0,060 | 0,195 |
| $\frac{3\pi}{8}$ | 0,005 | 0 | 2,42 | 1 | 0 | 1,05 |
| | | 0,2 | 2,32 | 0,960 | 0,040 | 0,965 |
| | | 0,4 | 2,24 | 0,927 | 0,073 | 0,900 |
| | | 0,6 | 2,17 | 0,894 | 0,106 | 0,835 |
| | | 0,8 | 2,09 | 0,863 | 0,137 | 0,775 |
| $\frac{3\pi}{8}$ | 0,01 | 0 | 2,42 | 1 | 0 | 1,05 |
| | | 0,2 | 2,29 | 0,948 | 0,052 | 0,940 |
| | | 0,4 | 2,18 | 0,910 | 0,090 | 0,845 |
| | | 0,6 | 2,075 | 0,857 | 0,143 | 0,755 |
| | | 0,8 | 1,975 | 0,817 | 0,183 | 0,675 |

În tabela 2, şi grafic în figurile 2—5, sînt date rapoartele între repartiţia de portanţă reală şi repartiţia de portanţă pentru aripa considerată rigidă, pentru diferite valori ale parametrilor $\lambda^2$, $k$ şi $\nu$, în cazul în care s-a neglijat efectul forţelor de inerţie ale aripii ($d = 0$) şi s-a presupus $c_m \approx 0$.

*Tabela 2*

| | | | $1+\frac{\varphi}{i}$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda$ | $k$ | $\nu$ | $\zeta = 0$ | $\zeta = 0,2$ | $\zeta = 0,4$ | $\zeta = 0,6$ | $\zeta = 0,8$ | $\zeta = 1$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | 0,005 | 0 | 1 | 1,144 | 1,260 | 1,346 | 1,396 | 1,414 |
| | | 0,2 | 1 | 1,130 | 1,245 | 1,330 | 1,380 | 1,400 |
| | | 0,4 | 1 | 1,121 | 1,232 | 1,315 | 1,365 | 1,385 |
| | | 0,6 | 1 | 1,107 | 1,218 | 1,300 | 1,348 | 1,366 |
| | | 0,8 | 1 | 1,096 | 1,202 | 1,285 | 1,330 | 1,350 |
| $\frac{\pi}{4}$ | 0,01 | 0 | 1 | 1,144 | 1,260 | 1,346 | 1,396 | 1,414 |
| | | 0,2 | 1 | 1,126 | 1,240 | 1,325 | 1,374 | 1,392 |
| | | 0,4 | 1 | 1,113 | 1,220 | 1,302 | 1,352 | 1,370 |
| | | 0,6 | 1 | 1,095 | 1,201 | 1,282 | 1,330 | 1,350 |
| | | 0,8 | 1 | 1,080 | 1,185 | 1,265 | 1,310 | 1,330 |
| $\frac{3\pi}{8}$ | 0,005 | 0 | 1 | 1,534 | 1,990 | 2,329 | 2,536 | 2,620 |
| | | 0,2 | 1 | 1,478 | 1,910 | 2,238 | 2,438 | 2,511 |
| | | 0,4 | 1 | 1,426 | 1,845 | 2,161 | 2,353 | 2,423 |
| | | 0,6 | 1 | 1,378 | 1,785 | 2,088 | 2,283 | 2,359 |
| | | 0,8 | 1 | 1,334 | 1,720 | 2,015 | 2,196 | 2,269 |
| $\frac{3\pi}{8}$ | 0,01 | 0 | 1 | 1,534 | 1,99 | 2,329 | 2,536 | 2,62 |
| | | 0,2 | 1 | 1,462 | 1,88 | 2,21 | 2,405 | 2,48 |
| | | 0,4 | 1 | 1,394 | 1,806 | 2,11 | 2,302 | 2,366 |
| | | 0,6 | 1 | 1,332 | 1,714 | 2,00 | 2,180 | 2,250 |
| | | 0,8 | 1 | 1,275 | 1,623 | 1,90 | 2,077 | 2,135 |

*Primită la redacţie la 3 iulie 1961*

# АЭРОУПРУГОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ ДЛЯ НЕСУЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ ЗАКРЕПЛЕНИЯ

## РЕЗЮМЕ

В работе излагается метод расчета распределения несущей силы по размаху с учетом деформаций структуры укрепления в предположении, что последняя является тонкостенной закрытого профиля и практически постоянного сечения по размаху. Здесь вводятся эффекты ограничения закрепления, а также препятствия против депланации поперечных сечений. Характеристики несущих поверхностей входят посредством параметров $\lambda^2$, $k$ и $\nu$ (2), (9) и (10). Для практических случаев было вычислено в таб. 2 и на рис. 2—5, в зависимости от этих параметров, отношение распределения несущей силы в рассматриваемом случае к распределению этой силы в случае жесткого крыла. Случай $\nu = 0$ совпадает со случаем крыльев, рассматриваемых как стержни при свободном кручении.

# AEROELASTIC DISTRIBUTION OF AERODYNAMIC LOADS FOR LIFTING SURFACES OF CONSTANT CROSS-SECTION, TAKING INTO CONSIDERATION THE END RESTRAINTS

## ABSTRACT

This paper presents a method for calculating the spanwise lift distribution taking into consideration the deformations of the strength structure whenever the latter one is assumed to have thin walls, closed profile and practically constant cross-section. Here, the effect of end restraints as well as the deformation restraints of plane cross-sections are introduced. The characteristics of the lifting surfaces intervene through the parameters $\lambda^2$, $k$ and $\nu$ (2), (9) and (10). For practical cases, the ratio of the lift distribution in the examined case to that of the rigid wing has been calculated in table 2 and fig. 2, 3, 4, 5. The case $\nu = 0$ coincides to that of wings considered as rods in free twist.

## BIBLIOGRAFIE

1. R. Bisplinghoff. H. Ashley. R. Halfman, *Aeroelasticity*. Cambridge, 1955.
2. A. Petre, M. Atanasiu, *Bare cu pereţi subţiri*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1960.
3. В. Э. Власов, *Тонкостенные упругие стержни*. Гос. изд. физ.-мат. лит., Москва, 1959.

# CERCETĂRI ASUPRA CANALELOR CU EVACUARE LATERALĂ

DE

D. DUMITRESCU
MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI R.P.R.

C. IAMANDI şi D. GH. IONESCU

**Introducere.** Deversoarele laterale, în general, şi canalele cu evacuare laterală, în particular, au făcut obiectul unor cercetări teoretice şi îndeosebi experimentale, enumerate în mare parte în lucrarea [1]. În cazul canalelor cu evacuare laterală, elemente importante ale unor construcţii hidrotehnice, aceste cercetări s-au limitat însă la cazul traseelor rectilinii în plan şi al muchiilor deversante ascuţite sau cu profil practic. În cadrul proiectării unei amenajări hidrotehnice, actualmente în curs de construcţie, Secţia de hidromecanică a Institutului de mecanică aplicată „Traian Vuia" a studiat un canal cu evacuare laterală ce nu se încadrează printre tipurile curente, deoarece prezintă curburi ale traseului în plan, iar profilul deversant este un prag lat.

De aceea, au fost necesare studii şi lucrări experimentale asupra canalelor cu evacuare laterală, atît pentru rezolvarea cazului concret cerut de producţie, cît şi în vederea studierii sistematice a influenţei unor factori noi, ca traseul în plan sau forma profilului deversant. În special rezultatele ultimului grup de cercetări, în parte încă în curs de efectuare, urmăresc să aducă noi contribuţii în această problemă.

**Obiectul studiului.** În cele ce urmează se vor prezenta mai ales rezultatele obţinute în cazul concret menţionat mai sus, al unui canal cu evacuare laterală, amplasat pe malul stîng al unui rîu, modelul avînd iniţial următoarele caracteristici (fig. 1) : porţiunea deversantă de 10 m lungime şi de secţiune transversală trapezoidală variabilă, avînd la fundul canalului lăţimea maximă $b = 40$ cm, lăţimea minimă $b = 5$ cm, iar panta taluzelor $m = 1 : 1{,}5$ ; traseul în plan format din două porţiuni rectilinii unite printr-o curbă şi o contracurbă ; panta canalului $5‰$ ; panta crestei deversante $2{,}5\%$ ; profilul deversant de tip prag lat. Protejarea canalului se realizează prin dale de beton turnate pe loc, pragul deversor din beton

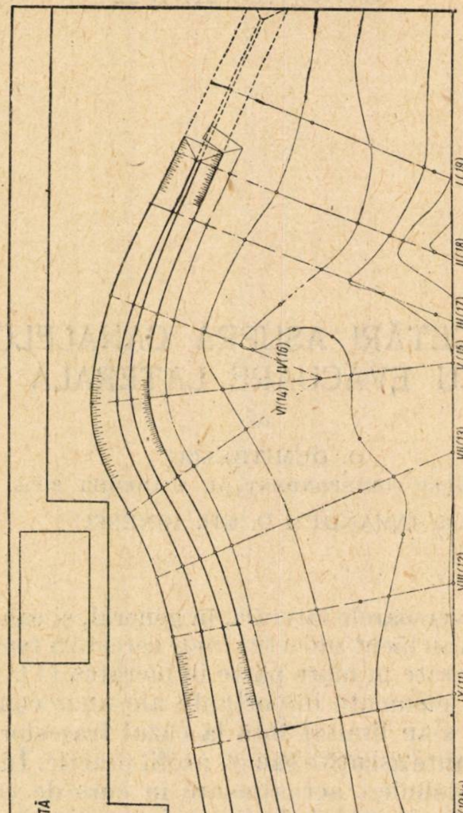

ZONA MODELATĂ
SCARA 1:200
LINISTITOR
I(19)
II(18)
III(17)
V(15)
IV(16)
VI(14)
VII(13)
VIII(12)
IX(11)
X(10bis)
XI(10)

Fig. 1

masiv, iar protecția taluzelor se asigură pe o lățime de 20 cm. Canalul este traversat, în dreptul profilelor *II* — *V*, de un fir de vale care trebuie protejat, pentru a preîntîmpina erodările.

În afară de descărcătorul propriu-zis, a fost modelată și o zonă aferentă a versantului, caracterizată printr-o pantă de cca. 15%, versantul avînd în exteriorul zonei modelate o pantă de cca. 7,5%.

În alegerea scării de modelare, s-au avut în vedere atît posibilitățile de spațiu și debit ale laboratorului, cît și eventualitatea apariției unor lame deversante mici pe creasta deversorului, în urma repartiției neuniforme a debitului în lungul acesteia. Cea mai indicată a rezultat scara 1 : 10, ($\lambda = 10$). Modelarea cu distorsiune, deși ar fi realizat lame deversante mai mari, nu a fost adoptată, avîndu-se în vedere forma specială a descărcătorului. Calculele hidraulice au arătat că, în cazul studiat, numărul Reynolds corespunzînd mișcării din natură este întotdeauna mai mare ca 10 000, astfel încît nu mai influențează pierderile de sarcină [2]*). Ca de obicei în cazul mișcărilor cu suprafață liberă, modelarea respectă exact similitudinea Froude și cu suficientă aproximație similitudinea Reynolds.

Experiențele au fost efectuate cu debitele $q_1 = 50$ l/s, $q_2 = 75$ l/s $q_3 = 119$ l/s și $q_4 = 175$ l/s, corespunzînd în natură debitelor $Q_1 = 15,8$ m$^3$/s, $Q_2 = 23,7$ m$^3$/s, $Q_3 = 37,6$ m$^3$/s și $Q_4 = 56$ m$^3$/s. Menționăm că debitul $Q_4$ este cu 50% mai mare ca cel considerat maxim în proiectare.

Ansamblul de modelare a fost compus din modelul propriu-zis, instalația de alimentare și evacuare a apei și dispozitivele de măsură. Modelul s-a construit pe o platformă din elemente prefabricate, la o cotă asigurînd experimentarea în condiții optime. Apa era luată din canalele de înmagazinare ale laboratorului de un grup de pompare cu un debit maxim de 200 l/s, refulată pe model prin intermediul unui bazin de liniștire prevăzut cu grătare de liniștire duble, verticale și orizontale, apoi evacuată de pe model printr-un canal de colectare longitudinal (fig. 2).

**Studiul variantelor.** Studiul a început prin analizarea soluției proiectate (varianta P.L. — I, fig. 2), avînd caracteristicile enumerate la punctul precedent, pentru a se obține date imediate interesînd proiectarea, precum și elementele necesare comparării cu alte variante. Încercările au arătat că, spre deosebire de ipotezele făcute în proiectare, grosimea lamei deversante nu este constantă, gradul de neregularitate crescînd o dată cu debitul. Ipoteza uniformității înălțimii lamei deversante este realizată numai la debite sub 15 m$^3$/s, ceea ce reprezintă cca. 40% din debitul maxim considerat în proiectare. Aceasta se datorește atît traseului în plan al canalului, cît și variației raportului dintre viteza longitudinală și cea transversală (de deversare) din canal. Aceleași cauze explică și aspectul suprafeței libere în axa canalului (fig. 3). De aici rezultă neuniformitatea coeficientului de debit în lungul evacuatorului, ceea ce dovedește că metodele de calcul uzuale nu pot fi folosite decît pentru aprecieri globale, justificînd încă o dată necesitatea studiului de laborator. O primă concluzie este că, în cadrul soluției proiectate, o parte din lungimea evacuatorului este insuficient folosită.

---

*) p. 144.

În legătură cu neuniformitatea distribuţiei debitului în lungul crestei deversante, trebuie menţionată şi o importantă zonă de stagnare din dreptul profilului *V*, datorită atît vitezelor mari, cît şi curburii traseului canalului,

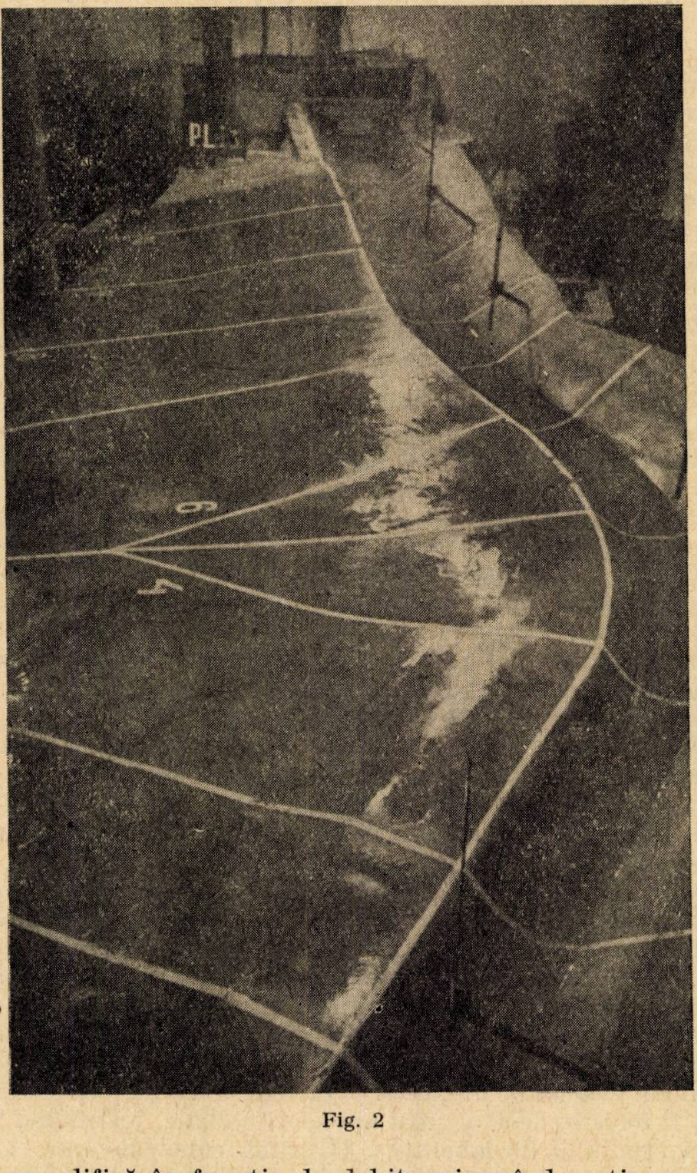
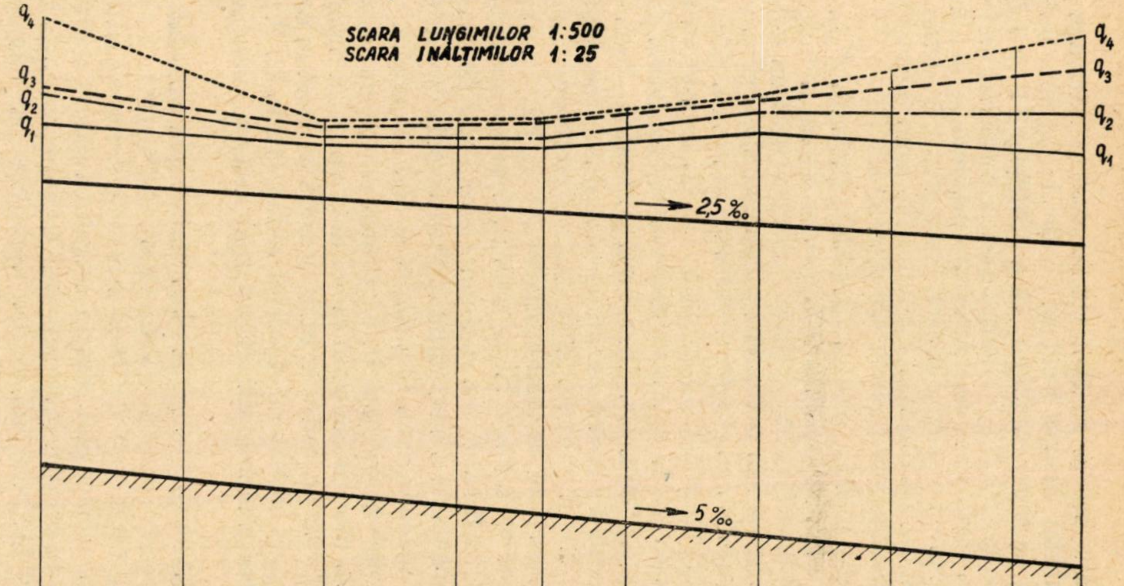


Fig. 2

zonă ce se amplifică în funcţie de debit, micşorînd secţiunea eficace de scurgere. Acest fenomen influenţează deversarea, ajungîndu-se, în cazul debitului $q_4$, la dezgolirea totală a crestei deversante în dreptul profilului *V*.

**P.L.I : SUPRAFAȚA LIBERĂ IN AXA CANALULUI**


SCARA LUNGIMILOR 1:500
SCARA INĂLȚIMILOR 1: 25
$q_4$
$q_3$
$q_2$
$q_1$
→ 2,5 ‰
→ 5 ‰
$q_4$
$q_3$
$q_2$
$q_1$

| Nr. profilului | | XI (10) | X (10 b) | IX (11) | VIII (12) | VII (13) | VI (14) | V (15) | IV (16) | III (17) | II (18) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cota fundului canalului (dm) | | 87,88 | 87,81 | 87,35 | 87,69 | 87,65 | 87,61 | 87,55 | 87,49 | 87,43 | 87,39 |
| Cota crestei deversorului (dm) | | 89,38 | 89,35 | 89,31 | 89,29 | 89,27 | 89,24 | 89,21 | 89,18 | 89,15 | 89,13 |
| Nivele in canal (cm) $q_1$ = 50 l/s | PL $I_1$ | 15,0 | | 16,7 | | 17,2 | | 19,0 | | | 19,6 |
| Nivele in canal (cm) $q_2$ = 75 l/s | PL $I_2$ | 13,3 | | 17,0 | | 17,7 | | 20,0 | | | 21,6 |
| Nivele in canal (cm) $q_3$ = 119 l/s | PL $I_3$ | 17,8 | | 16,6 | | 18,5 | | 20,6 | | | 23,6 |
| Nivele in canal (cm) $q_4$ = 175 l/s | PL $I_4$ | 21,0 | | 17,5 | | 18,7 | | 20,7 | | | 25,2 |
| Distanța intre profile (dm) | | | 13,20 | 13,20 | 12,50 | 8,00 | 8,00 | 12,25 | 12,25 | 11,60 | 6,40 |
| Distanțe cumulate (dm) | | | 13,20 | 26,40 | 38,90 | 46,90 | 54,90 | 67,15 | 79,40 | 91,00 | 97,40 |

Fig. 3

Scurgerea pe versant are în general viteze mari pe întreaga zonă modelată, grosimea stratului de apă fiind în medie de 2,5 cm. Datorită configurației terenului și curburii canalului, zona profilelor *IV* — *VI* este alimentată din mai multe direcții (fig. 4), astfel încît se formează un curent de apă puternic (fig. 5) a cărui zonă de intensitate maximă se deplasează în funcție de debit. Atenuarea efectului acestei concentrări de debit, care periclitează în mod deosebit stabilitatea terenului în zona respectivă, a constituit unul dintre obiectivele principale ale studiului.

Rezultatele obținute pentru soluția inițială (varianta P.L. — I) au stat la baza celorlalte variante studiate de laborator și care, avîndu-se în vedere stadiul avansat al lucrărilor de execuție, au mers pe linia îmbunătățirii proiectului, fără a preconiza schimbări fundamentale. Prima modificare a constituit-o orizontalizarea crestei deversante (varianta P.L. — II), care a fost apoi păstrată astfel în tot cursul studiului. La această variantă se menține neuniformitatea grosimii lamei deversante, iar forma suprafeței libere este asemănătoare cu aceea din soluția proiectată. Zona inactivă de la începutul porțiunii deversante se micșorează, dar se mențin fenomenele locale : zona de staționare din canal în dreptul profilului *V* și concentrarea debitului pe versant în dreptul profilelor *IV* — *VI*. În axa canalului vitezele sînt de ordinul a 1m/s, iar pe creasta deversorului unghiul format de vectorul viteză cu linia de cea mai mare pantă este de cca. 40°. Orizontalizarea crestei deversante a adus îmbunătățirea condițiilor de scurgere, însă numai în mică măsură, ceea ce a impus și alte schimbări.

Folosirea unor panouri deflectoare în porțiunea de început a canalului deversor, în vederea măririi înălțimii lamei deversante în amontele lor (varianta P.L. — III), sau prevederea unor praguri de fund în avalul porțiunilor caracterizate prin coeficienți de debit reduși (varianta P.L. — — IV) s-au dovedit nerecomandabile datorită fenomenelor necorespunzătoare produse în aval.

Mult mai eficace s-a dovedit lungirea canalului cu evacuare laterală (varianta P.L. — V) succesiv cu 5% (P.L. — V a), 10% (P.L. — V b), 15% (P.L. — V c) și 20% (P.L. — V d). Deși aspectele scurgerii datorite efectelor curbelor și contracurbelor (de exemplu dezgolirea crestei în dreptul profilului *V*) se păstrează cu o intensitate suficient de mare, variația înălțimii lamei deversante are loc între limite mai apropiate, iar fenomenul de colectare a apei în dreptul profilelor *IV* — *VI* este mai redus.

Protejarea versantului, de o deosebită însemnătate pentru stabilitatea întregii lucrări, este indicată a fi efectuată și direct, chiar în ipoteza realizării uniformității debitului în lungul întregului canal deversor. În cazul de față, efectul vitezei mari a apei pe versant, care depășea 2 m/s (în natură), era atenuat în parte de grosimea mică a lamei (cca. 0,30 m în natură) precum și de faptul că mișcarea apei nu se efectua în lungul liniei de cea mai mare pantă. Rămîneau totuși necesare lucrări de apărare a versantului, mai ales în regiunea profilelor *IV* — *VI*. În acest scop s-au preconizat, pe toată lungimea canalului, trei rînduri de trepte de disipare,

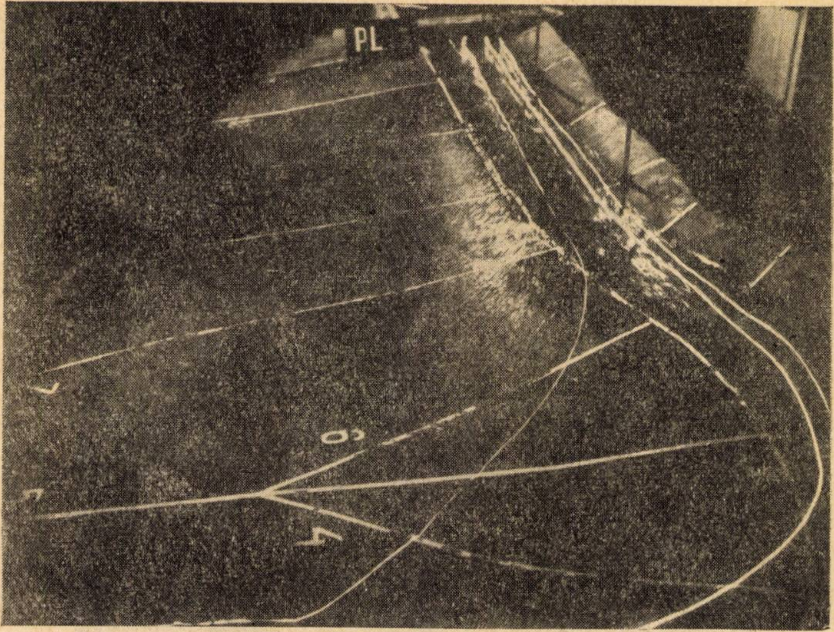


Fig. 4

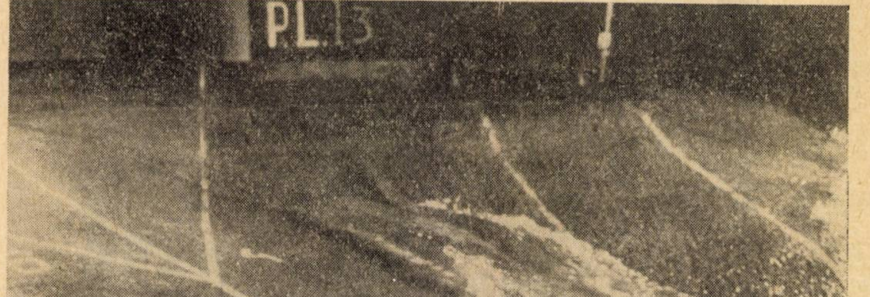


Fig. 5

avînd lăţimea de 20 cm şi înălţimea de cca. 5 cm (pe model) iar în zona profilului *V* s-au prevăzut încă 3 – 4 rînduri suplimentare (Varianta P.L.—VI, fig. 6). Aceasta a condus la îmbunătăţirea radicală a situaţiei de

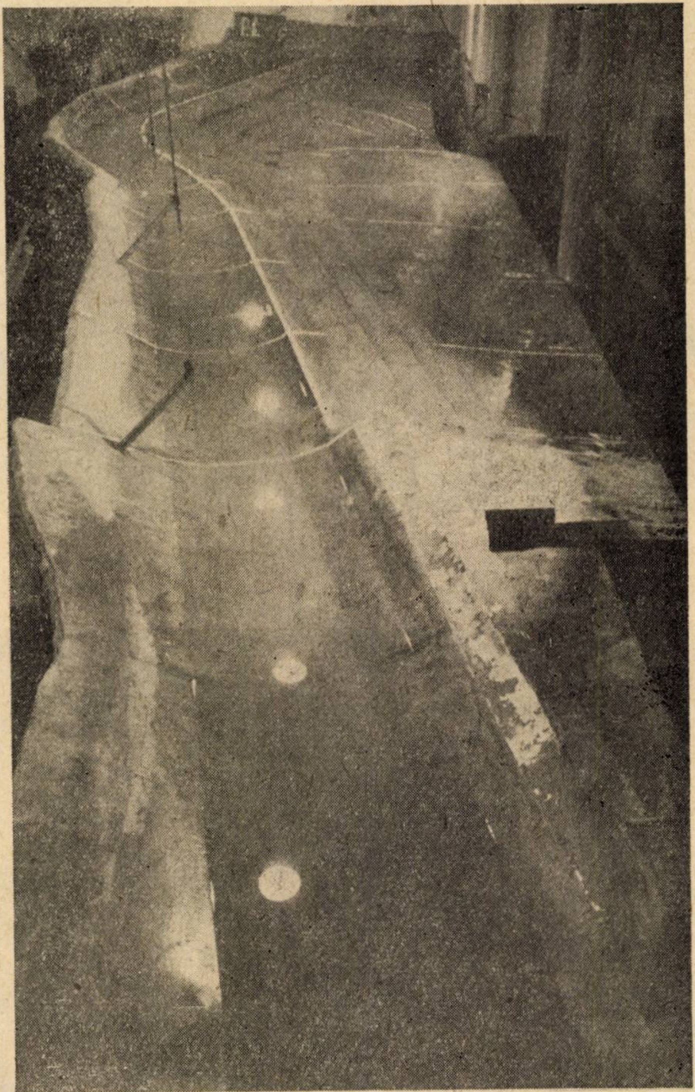


Fig. 6

pe versant prin uniformizarea scurgerii, micşorarea vitezelor şi reducerea fenomenului de colectare a debitului în dreptul profilelor *IV* – *VI*. În această privinţă este concludentă compararea fotografiilor 5 şi 7, corespunzînd aceluiaşi debit $q_3$.

În vederea atenuării fenomenelor locale din canal datorite curbei şi contracurbei, s-a urmărit efectul unui perete vertical longitudinal, de 5—6 cm înălţime, urmărind axa canalului între profilele *IV* şi *VII* (Varianta P.L. — VII). Influenţa acestui perete, deşi pozitivă, era însă destul de redusă, astfel încît construcţia sa, care ar fi complicat execuţia, nu apărea justificată.

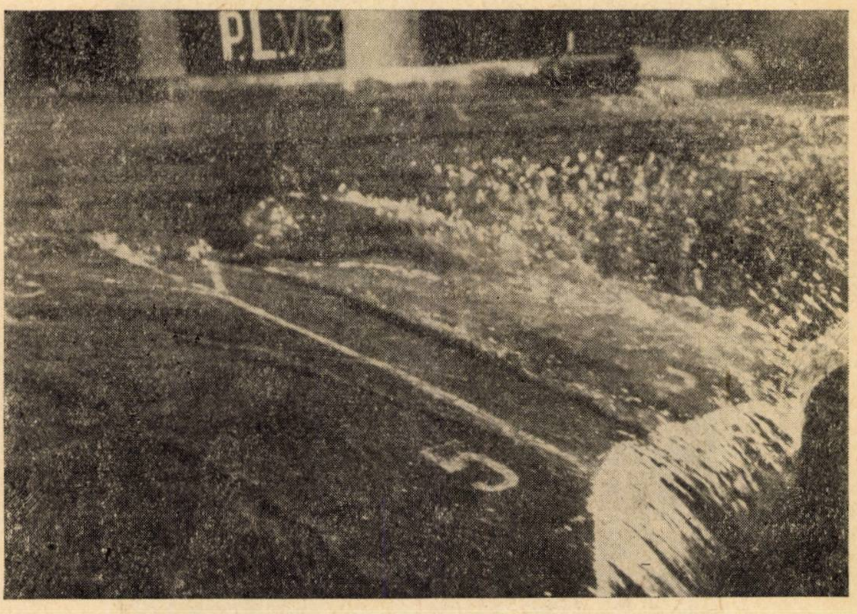


Fig. 7

În schimb, un efect pozitiv a fost obţinut prin crearea unei contrapante a fundului canalului, pe porţiunea sa de capăt, în două variante: începînd de la profilul *V* spre aval, contrapanta fundului fiind de 4% (Varianta P. L. — VIII), şi începînd de la profilul *VI* spre aval, contrapanta fundului fiind de 2,5% (Varianta P. L. — IX, fig. 8). În ambele cazuri s-au obţinut modificări importante ale suprafeţei libere, realizîndu-se, mai ales la varianta P. L. — IX, o uniformizare sensibilă a înălţimii lamei deversante. Micşorarea secţiunii transversale a canalului pe ultima sa porţiune contribuie şi la îmbunătăţirea situaţiei de pe versant, în regiunea profilelor *IV— VI*, după cum rezultă din compararea figurilor 5, 7 şi 9. Prin reducerea zonei de staţionare a apei din canal, în regiunea profilului *VI*, nu mai are loc dezgolirea muchiei deversante.

În acest fel, prin adoptarea schimbărilor prevăzute de variantele P.L. — II, P.L. — V d, P.L. — VI şi P.L. — IX, se elimină principalele inconveniente ale soluţiei proiectate, privind exploatarea canalului cu deversare laterală studiat.

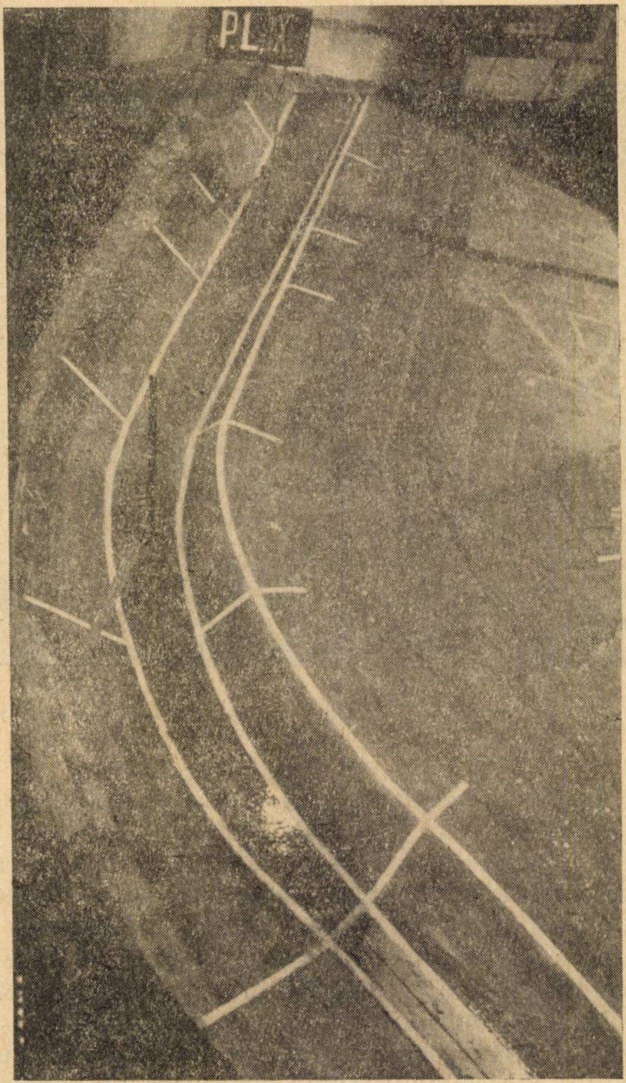


Fig. 8

**Concluzii.** Din analiza diferitelor variante rezultă o serie de concluzii calitative de ordin general, privind canalele cu deversare laterală. Astfel, alegerea unui asemenea tip de descărcător trebuie făcută numai pe baza unor calcule tehnico-economice, prin compararea cu alte tipuri de evacuator. În măsura permisă de condițiile locale, este indicată eliminarea curbelor și contracurbelor de pe traseu, precum și realizarea unei secțiuni transversale variabile, ceea ce contribuie la păstrarea unui raport constant între viteza longitudinală (din canal) și viteza de deversare. Muchia crestei deversante se recomandă a fi orizontală sau cu o contrapantă spre aval, iar la stabilirea lungimii porțiunii deversante trebuie luat în considerație faptul că aproximativ 15 — 20% din lungimea totală de evacuare nu asigură în general o deversare corespunzătoare. În sfîrșit, apar necesare lucrări de apărare ale versantului, întotdeauna cînd viteza apei pe versant are valori în jurul a 2 m/s sau mai mari.

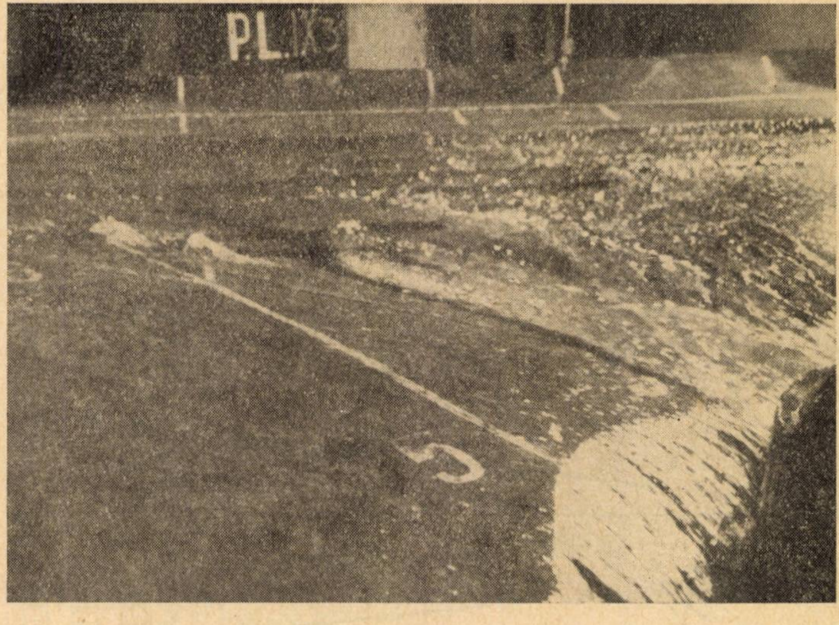


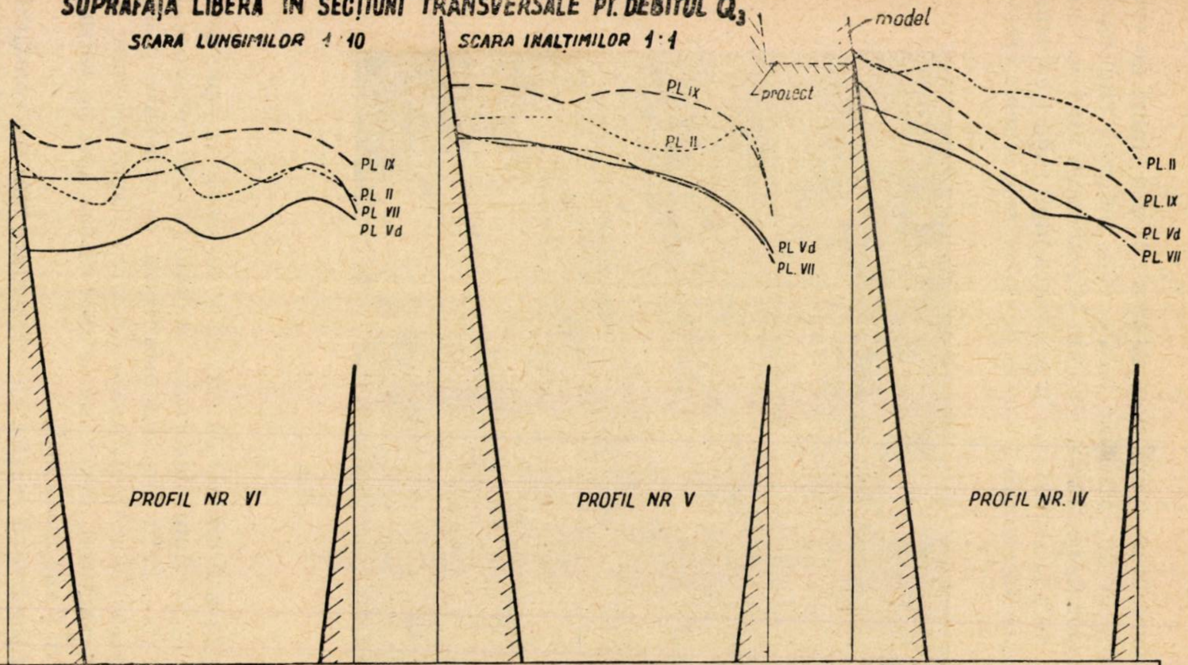
Fig. 9

În încheiere, menționăm că rezultatele prezentate mai sus constituie o primă etapă în cadrul unui studiu sistematic al canalelor cu deversare laterală, efectuat în cadrul Secției de hidromecanică a Institutului de mecanică aplicată „Traian Vuia”. Aceste cercetări vor face obiectul unor lucrări ulterioare.

*Primită la redacție la 27 iulie 1961*

**SUPRAFAȚA LIBERĂ IN SECȚIUNI TRANSVERSALE PT. DEBITUL $Q_3$**

SCARA LUNGIMILOR 1:10 SCARA INALȚIMILOR 1:1


model
proiect
PL IX
PL II
PL VII
PL Vd
PL IX
PL II
PL Vd
PL. VII
PL. II
PL. IX
PL Vd
PL. VII
PROFIL NR VI
PROFIL NR V
PROFIL NR. IV

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| PL IX | Distanța dela creastă (cm) | 60 | 50 | 40 | 30 | 20 | 10 | 0 | | 60 | 50 | 40 | 30 | 20 | 10 | 0 | | 50 | 40 | 30 | 20 | 10 | 0 |
| | Inălțimea peste creastă (cm) | 4,35 | 4,48 | 4,26 | 4,55 | 4,68 | 4,61 | 3,94 | | 5,56 | 5,47 | 5,18 | 5,49 | 5,32 | 4,98 | 2,99 | | 5,90 | 5,39 | 4,63 | 4,41 | 3,96 | 3,22 |
| PL II | Distanța dela creastă (cm) | 58 | 48 | 38 | 28 | 18 | 8 | 0 | 62,5 | 56 | 46 | 36 | 26 | 16 | 6 | 0 | 56 | 50 | 40 | 30 | 20 | 10 | 0 |
| | Inălțimea peste creastă (cm) | 3,71 | 3,71 | 3,82 | 4,06 | 3,63 | 3,99 | 2,99 | 4,85 | 4,95 | 4,92 | 4,88 | 4,34 | 4,25 | 4,70 | 2,97 | 6,25 | 5,85 | 6,00 | 5,45 | 5,34 | 5,00 | 3,98 |
| PL. Vd | Distanța dela creastă (cm) | 58 | 48 | 38 | 28 | 18 | 8 | 0 | | 56 | 46 | 36 | 26 | 16 | 6 | 0 | 53 | 48 | 38 | 28 | 18 | 8 | 0 |
| | Inălțimea peste creastă (cm) | 2,25 | 2,40 | 2,90 | 2,50 | 2,80 | 3,30 | 2,85 | | 4,50 | 4,40 | 4,10 | 3,90 | 1,60 | 3,00 | 2,29 | 5,43 | 4,58 | 4,24 | 3,68 | 2,97 | 2,87 | 2,48 |
| PL. VII | Distanța dela creastă (cm) | 60 | 50 | 40 | 30 | 20 | 10 | 0 | | 60 | 50 | 40 | 30 | 20 | 10 | 0 | | 50 | 40 | 30 | 20 | 10 | 0 |
| | Inălțimea peste creastă (cm) | 3,55 | 3,18 | 4,13 | 3,30 | 3,51 | 3,87 | 3,29 | | 4,55 | 4,33 | 4,33 | 4,12 | 3,64 | 3,24 | 2,13 | | 4,99 | 4,59 | 4,01 | 3,46 | 2,97 | 2,23 |

Fig. 10

# ИССЛЕДОВАНИЕ КАНАЛОВ С БОКОВЫМ ОТВОДОМ

## РЕЗЮМЕ

В работе излагаются результаты исследования, проведенного коллективом секции гидромеханики Института прикладной механики им. Траяна Вуя, в рамках проектирования гидротехнического сооружения. Был исследован канал с боковым отводом, имеющий кривизны пути в плоскости и водосливной профиль в виде широкого порога (рис. 1 и 2).

Описываются девять исследуемых в лаборатории вариантов, исходя из проектированного варианта. Окончательное решение, предложенное лабораторией и принятое инженерами-проектировщиками настоящей работы, предусматривает следующие изменения начального решения:

1°) горизонтальность водосливного гребня;

2°) удлинение отводящего канала на 20%;

3°) устройство водобойных порогов на скате (рис. 6);

4°) устройство обратного уклона дна канала на оконечности вниз по течению (рис. 9).

Настоящее исследование дает возможность получения качественных результатов общего характера, а также значительно облегчает работу проектировщика.

# INVESTIGATIONS ON CHANNELS WITH LATERAL EVACUATION

## ABSTRACT

This paper presents the results of a study carried out within the Hydrodynamics Division of the Institute of Applied Mechanics "Traian Vuia" in view of designing a water management. A channel with lateral evacuation has been examined which presents plane curvatures and has a crest profile in the form of a wide treshold (Fig. 1 and 2).

The nine variants examined in the laboratory are described proceeding from the designed variant. The final solution proposed in laboratory and adopted by designers recommends the following modifications of the initial solution : a) horizontal spillway crest, b) lengthening of the evacuation channel by 20 per cent, c) construction of dissipation steps on the slope

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

(Fig. 6), and d) construction of a slope of opposite sense at the downstream end (Fig. 9).

Besides bringing a substantial contribution to the improvement of the designer's solution, this study has yielded qualitative results of a general character.

## BIBLIOGRAFIE

1. С. И. Агасиева, *Боковые водосливы и траншейные водосбросы*. Госстройиздат, Москва, 1956.
2. И. И. Агроскин, Г. Т. Дмитриев, Ф. И. Пикалов, *Гидравлика*. Госэнергоиздат, Москва-Ленинград, 1950.

# CONTRIBUȚII LA STUDIUL DEVERSOARELOR CU MUCHIE ASCUȚITĂ

DE

D. DUMITRESCU
MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI R.P.R.

și C. M. IANCU

Scurgerea fluidelor peste diverse tipuri de deversoare a constituit datorită importanței sale tehnice, una din primele preocupări ale hidraulicienilor.

Numeroasele încercări de laborator, făcute în vederea aplicațiilor tehnice, au permis acumularea în timp a unui vast material experimental, care, după părerea noastră, nu a fost suficient utilizat pentru stabilirea de relații generale.

Vom încerca, cu ajutorul teoremei Π a lui Bukingham aplicată la scurgerea peste deversoare, să sintetizăm datele experimentale ale mai multor autori și să ajungem în modul acesta, la stabilirea unor relații caracteristice pentru deversoare.

Deoarece s-a constatat teoretic și experimental [1], că influența vîscozității în studiul mișcării peste deversorul cu muchie ascuțită este neglijabilă, vom considera și noi în studiul de față fluidul, ca un fluid ideal cu greutate.

În scurgerea peste deversoare intervin următoarele mărimi caracteristice (fig. 1):

$\rho$ $[ML^{-3}]$ — densitatea fluidului,
$v_m$ $[LT^{-1}]$ — viteza medie în secțiunea $H$,
$g$ $[LT^{-2}]$ — accelerația gravitației,
$P$ $[L]$ — înălțimea deversorului,
$\delta$ $[L]$ — lățimea deversorului,
$H$ $[L]$ — adîncimea apei în amonte,

iar ca unități de bază s-au ales:

$[L]$ — lungimea, $[M]$ — masa și $[T]$ — timpul.

Relația

$$\Phi(\rho, v_m, H, P, \delta, g) = 0,$$

în care s-au ales ca parametri fundamentali $\rho$, $v_m$ şi $H$, în virtutea teoremei $\Pi$ va deveni :

$$\varphi(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$$

unde

$$\begin{aligned} \pi_1 &= P \;\rho^{\alpha_1} v_m^{\beta_1} H^{\gamma_1}, \\ \pi_2 &= \delta \;\rho^{\alpha_2} v_m^{\beta_2} H^{\gamma_2}, \\ \pi_3 &= g \;\rho^{\alpha_3} v_m^{\beta_3} H^{\gamma_3}. \end{aligned} \tag{1}$$

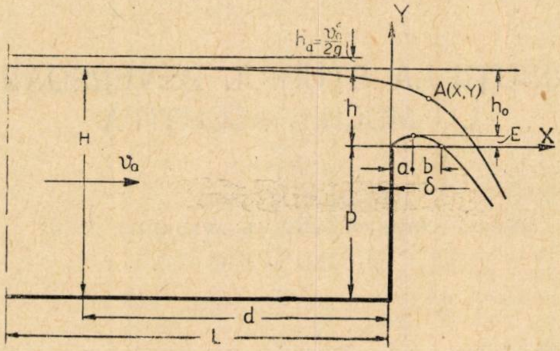


Fig. 1. — Mărimi caracteristice în scurgerea peste deversor.

Punînd condiţia ca ecuaţiile sistemului (1) să fie fără dimensiuni, prin identificarea exponenţilor unităţilor de bază se ajunge la următoarele sisteme de ecuaţii liniare :

$$\begin{cases} 1 - 3\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ -\beta_1 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} 1 - 3\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ -\beta_2 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} 1 - 3\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 0 \\ -3\alpha_3 = 0 \\ -2 - \beta_3 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Prin rezolvarea acestor sisteme, se găsesc valorile necunoscutelor $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$ $(i = 1, 2, 3)$, adică

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \alpha_2 = 0 && \alpha_3 = 0 \\ &\beta_1 = \beta_2 = 0 && \beta_3 = -2 \\ &\gamma_1 = \gamma_2 = 1 && \gamma_3 = 1, \end{aligned} \tag{3}$$

care ne permit să scriem produsele parţiale fără dimensiuni $\pi_i$ :

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{P}{H} \\ \pi_2 &= \frac{\delta}{H} \\ \pi_3 &= \frac{gH}{v_m^2} = \frac{1}{\mathcal{F}r}, \end{aligned} \tag{4}$$

produsul $\pi_3$ fiind inversul numărului Froude aferent mişcării.

Funcția $\Phi$ se mai poate scrie

$$\Phi\left(\frac{P}{H},\ \frac{\delta}{H},\ \frac{gH}{v_m^2}\right) = 0 \tag{5}$$

iar prin explicitare devine

$$\frac{gH}{v_m^2} = \varphi\left(\frac{P}{H},\ \frac{\delta}{H}\right), \tag{6}$$

sau, scrisă sub altă formă,

$$\frac{v_m^2}{gH} = \lambda\left(\frac{P}{H},\ \frac{\delta}{H}\right). \tag{7}$$

În modul acesta, se ajunge la relația finală, care stabilește o legătură între numărul Froude al mișcării și parametrii geometrici ai deversorului.

Această relație poate fi considerată ca o caracteristică generală a deversoarelor, din care se obține pentru diverse valori ale raportului $\frac{\delta}{H}$ o familie de curbe

$$\frac{v_m^2}{gH} = \lambda_n\left(\frac{P}{H}\right), \tag{8}$$

respectiv cîte o curbă caracteristică pentru fiecare tip de deversor, cu muchie ascuțită sau cu prag lat.

Dacă se face $\frac{\delta}{H} = 0$, vom avea la limită, scurgerea peste un deversor cu muchie ascuțită. Relația (8) devine

$$\mathcal{F}_r = \lambda\left(\frac{P}{H}\right), \tag{9}$$

pe care o numim *caracteristica deversorului.*

Pentru o primă determinare a funcțiunii $\lambda\left(\frac{P}{H}\right)$, au fost utilizate rezultatele încercărilor pe model ale barajului Boulder [2]. Aceste rezultate, date sub formă de tabele numerice, cuprind mărimile geometrice ($P$, $h$, $h_0$, $E$, $a$, $b$) și mărimile hidraulice ($v_a$, $h_a = \frac{v_a^2}{2g}$ = căderea cinetică) ale mișcării peste deversor, precum și coordonatele $X$, $Y$ ale punctelor suprafeței libere inferioară și superioară ale lamei deversante în funcție de raportul $\frac{h_a}{h}$.

Rezultatele obținute prin prelucrarea încercărilor Boulder, încercări efectuate asupra unui singur model, cu un domeniu limitat al raportului

$\frac{P}{H}$, nu au fost suficiente pentru determinarea funcţiunii experimentale $\lambda$. De aceea, s-au efectuat în cadrul laboratorului Academiei R.P.R. măsurători asupra deversoarelor cu muchie ascuţită, în trei canale de lăţimi diferite, cuprinzînd un număr de peste 500 experienţe.

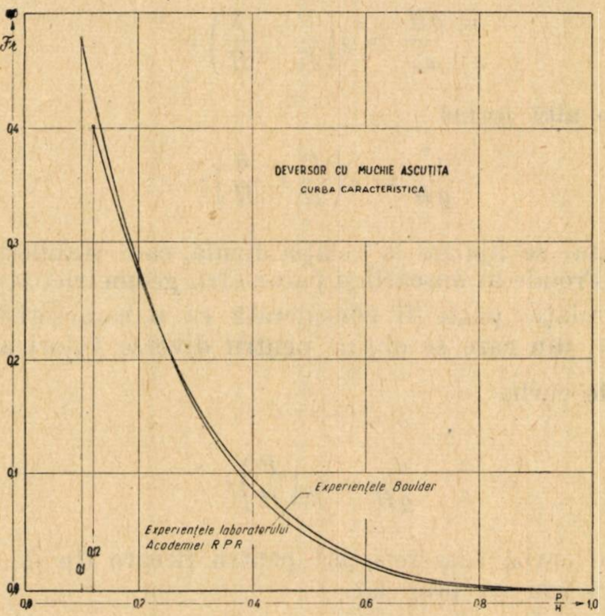


Fig. 2. — Curbele caracteristice obţinute din experienţele Boulder şi din experienţele laboratorului Academiei R.P.R.

S-a căutat ca experienţele să acopere întreaga zonă 0 şi 1 de variaţie a raportului $\frac{P}{H}$, insistînd asupra zonei $0 < \frac{P}{H} < 1,2$ în care nu existau măsurători. Din experienţele efectuate s-a constatat că, pentru valori ale raportului $\frac{P}{H} < 0,1$ fenomenul fizic devine complex, iar caracteristicile mişcării apei peste deversor nu mai pot fi determinate cu ajutorul relaţiei (9). Numărul Froude ia în acest caz valori în funcţie şi de înălţimea apei în canal.

Cu alte cuvinte, pentru acelaşi raport $\frac{P}{H}$, numărul Froude ia diverse valori.

În cazul limită, $\frac{P}{H} = 0$ adică $P = 0$, caz ce reprezintă căderea liberă a apei de pe un prag, rezultă pentru numărul Froude valori cuprinse între 0,1 şi 0,8 în funcţie de înălţimea $H$ a apei în canal.

Din măsurătorile efectuate, s-au calculat mărimile $\frac{P}{H}$ și numărul $\mathcal{F}_r$, cu ajutorul cărora s-a trasat o curbă ce diferă ca alură de curba obținută în lucrarea [3].

Figura 2 redă comparativ reprezentarea grafică a curbei caracteristice a deversorului cu muchie ascuțită, obținută prin prelucrarea experiențelor Boulder și aceea obținută direct, de către laboratorul Academiei R.P.R.

## CURBA CARACTERISTICĂ

Pe baza existenței celor două curbe ale caracteristicii deversorului reprezentate în figura 2, s-a determinat ecuația unei curbe medii de forma unui polinom, a cărei expresie este :

$$\mathcal{F}_r = 0{,}8038 - 4{,}002\,\frac{P}{H} + 8{,}828\left(\frac{P}{H}\right)^2 - 10{,}6933\left(\frac{P}{H}\right)^3 + 6{,}912\left(\frac{P}{H}\right)^4 - 1{,}8485\left(\frac{P}{H}\right)^5, \tag{10}$$

valabilă pentru $\frac{P}{H} > 0{,}1$.

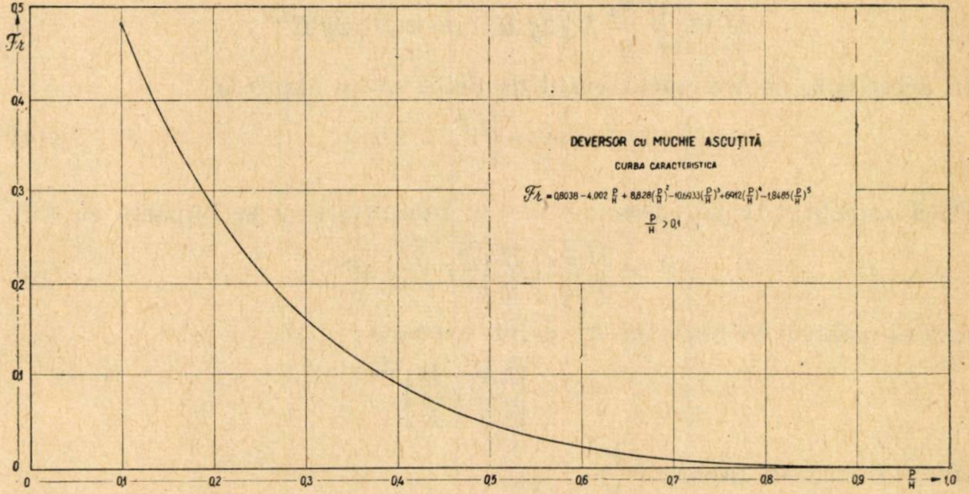


Fig. 3. — Curba caracteristică.

Figura 3 reprezintă curba caracteristică a deversorului dreptunghiular cu muchie ascuțită propusă de noi.

## COEFICIENTUL DE DEBIT

Plecînd de la formula clasică a debitului evacuat de un deversor cu muchie ascuțită

$$Q = m_0 B \sqrt{2g}\, h^{3/2}, \tag{11}$$

s-a căutat să i se dea o nouă exprimare în funcție de mărimile caracteristice ale deversorului, numărul Froude și raportul $\frac{P}{H}$, mărimi ce intervin în expresia (9) a caracteristicii deversorului.

Dacă din expresia numărului Froude

$$\mathcal{F}r = \frac{v_m^2}{gH}$$

se scoate viteza medie

$$v_m = \sqrt{\mathcal{F}r}\,\sqrt{g}\, H^{1/2} \tag{12}$$

și se introduce în ecuația continuității scrisă în secțiunea $H$

$$Q = v_m B H,$$

se obține o nouă formă a formulei debitului evacuat de un deversor cu muchie ascuțită și anume:

$$Q = \sqrt{\mathcal{F}r}\sqrt{g}\, B H^{3/2}$$

sau sub formă convenabilă

$$Q = \sqrt{\frac{\mathcal{F}r}{2}}\, B\sqrt{2g}\, H^{3/2} = m B \sqrt{2g}\, H^{3/2}. \tag{13}$$

În acest caz, pentru coeficientul de debit avem expresia

$$m = \sqrt{\frac{\mathcal{F}r}{2}}. \tag{14}$$

Dacă membrul II al expresiei (13) se înmulțește și se împarte cu $h^{3/2}$,

$$Q = \sqrt{\frac{\mathcal{F}r}{2}}\left(\frac{H}{h}\right)^{3/2} B\sqrt{2g}\, h^{3/2}, \tag{15}$$

rezultă pentru coeficientul de debit expresia:

$$m_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{F}r}{2}}\left(\frac{H}{h}\right)^{3/2}$$

sau în funcție de raportul $\frac{P}{H}$

$$m_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{F}r}{2}}\,\frac{1}{\left(1 - \frac{P}{H}\right)^{3/2}}. \tag{16}$$

Reprezentarea grafică a coeficientului de debit $m_0$ în funcție de numărul Froude, a scos în evidență dispersiunea punctelor experimentale și dependența lor de înălțimea deversorului $P$. Nu același lucru s-a întîmplat cu reprezentarea coeficientului $m$, în care punctele experimentale s-au așezat pe o curbă bine conturată. Din aceste motive am adoptat, în studiul de față, ca formulă a debitului evacuat de un deversor cu muchie ascuțită, expresia (13) iar pentru coeficientul de debit expresia (14).

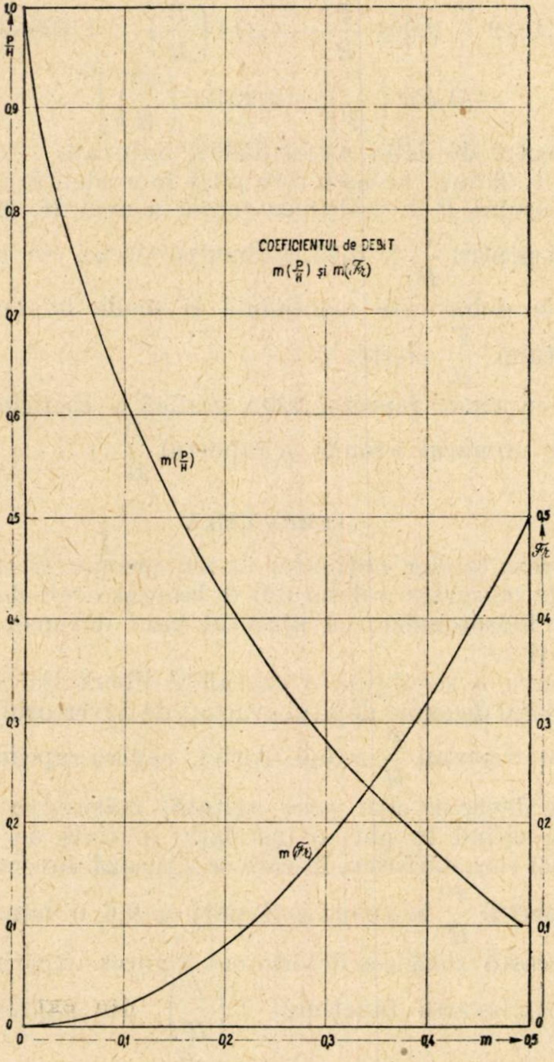


Fig. 4. — Coeficientul de debit.

Determinarea experimentală a funcțiunii $\lambda$, respectiv deducerea ecuației curbei caracteristice (10), ne-a permis să stabilim pentru coeficientul de debit, în funcție de raportul $\frac{P}{H}$, expresia:

$$m = \left[0{,}4019 - 2{,}001\,\frac{P}{H} + 4{,}414\left(\frac{P}{H}\right)^2 - 5{,}34665\left(\frac{P}{H}\right)^3 + \right.$$
$$\left. + 3{,}456\left(\frac{P}{H}\right)^4 - 0{,}92425\left(\frac{P}{H}\right)^5\right]^{1/2}. \qquad (17)$$

În coeficientul de debit astfel dedus, influența vitezei de ajungere nu apare explicit. Totuși, aceasta este pusă în evidență prin introducerea înălțimii deversorului $P$ în înălțimea totală a apei $H$, din formula (13). S-a observat că pentru $\frac{P}{H} > 0{,}65$, influența vitezei de ajungere asupra coeficientului de debit este neglijabilă și scade mereu pe măsură ce valoarea raportului $\frac{P}{H}$ crește.

Figura 4 cuprinde reprezentarea grafică a coeficientului de debit $m$ în funcție de numărul Froude și raportul $\frac{P}{H}$.

### CURBA UTILĂ

În urma rezultatelor obținute, ne-am propus să studiem posibilitatea practică de măsurare a debitului în laboratoarele de studii și încercări pe modele hidrotehnice, cu ajutorul unui deversor dreptunghiular cu muchie ascuțită.

Astfel pentru a se obține o suprafață liberă liniștită și pentru a putea măsura destul de exact debitul evacuat de deversorul dreptunghiular trebuie să avem raportul $\frac{P}{H} > 0{,}6$. Altfel, pentru rapoarte $\frac{P}{H} < 0{,}6$ mișcarea apei peste deversor este prea agitată, măsurarea nivelului fiind imprecisă și necesitînd în plus o instalație specială de liniștire a apei.

Zona curbei caracteristice, în care se situează deversorul de măsură, zonă în care raportul $\frac{P}{H}$ ia valori mai mari ca 0,6 o numim *curba utilă*.

Pentru această zonă s-a determinat riguros experimental expresia funcțiunii $\varphi(\mathcal{F}_r)$, inversa funcțiunii $\lambda\left(\frac{P}{H}\right)$, din expresia (8). Aceasta constituie de fapt și ecuația curbei utile $\frac{P}{H} = \varphi(\mathcal{F}_r)$

$$\frac{P}{H} = 1 - \frac{1}{0{,}7}\sqrt[3]{\mathcal{F}_r}, \qquad (18)$$

valabilă pentru $\frac{P}{H} \geqslant 0{,}65$.

Coeficientul de debit are în acest caz o expresie simplă de forma

$$m = 0{,}41413\left(1 - \frac{P}{H}\right)^{3/2}. \tag{19}$$

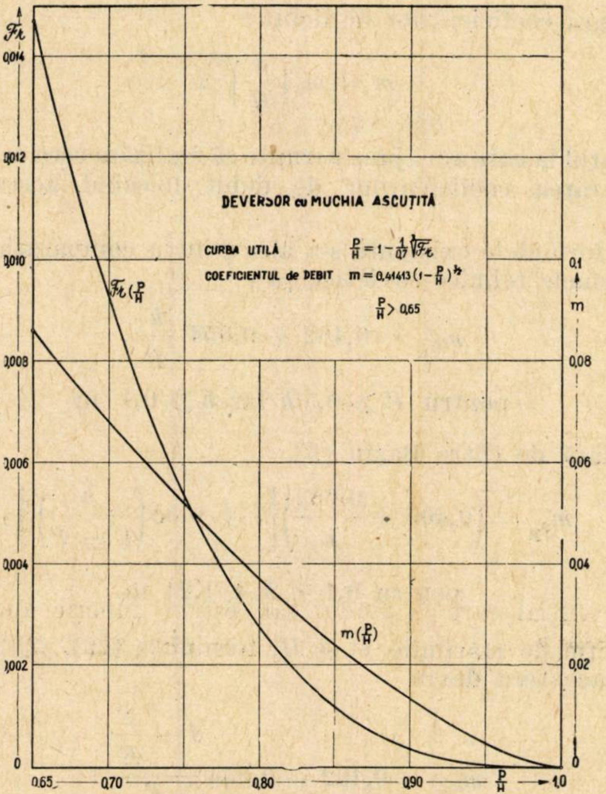


Fig. 5. — Curba utilă.

În figura 5 s-a reprezentat grafic curba utilă $\frac{P}{H} = \varphi(\mathcal{F}_t)$ şi coeficientul de debit $m = f\left(\frac{P}{H}\right)$.

## COMPARAREA REZULTATELOR OBŢINUTE CU CELE EXISTENTE

În cele ce urmează s-a făcut un studiu comparativ între noua formulă a coeficientului de debit (14) propusă de noi, şi formulele clasice existente.

Pentru a putea fi comparaţi coeficienţii de debit, s-a exprimat formula cunoscută (11) a debitului evacuat de un deversor dreptunghiular, într-o formă echivalentă cu formula modificată a debitului (13) propusă de noi. Din egalitatea expresiilor (11) şi (13),

$$Q = m_0 \sqrt{2g}\, B\, h^{3/2} = m \sqrt{2g}\, B\, H^{3/2}\,, \tag{20}$$

rezultă legătura coeficienţilor de debit :

$$m = m_0 \left(\frac{h}{H}\right)^{3/2}. \tag{21}$$

Rezultatul la care am ajuns permite să realizăm ceea ce ne-am propus, adică compararea coeficienţilor de debit folosind aceeaşi formulă a debitului.

Dintre formulele existente s-a ales pentru comparaţie formula dată de către Normele tehnice sovietice [4],

$$m_{0_N} = 0{,}402 + 0{,}054\, \frac{h}{P}\,, \tag{22}$$

$$\text{pentru } P \geqslant 0{,}5\, h \text{ iar } h \geqslant 0{,}1 \text{ m}$$

şi formula dată de către Bazin [5],

$$m_{0_B} = \left(0{,}405 + \frac{0{,}003}{h}\right)\left[1 + 0{,}55\left(\frac{h}{h+P}\right)^2\right], \tag{23}$$

$$\text{pentru } 0{,}1 < h < 1{,}24 \text{ m}.$$

În funcţie de mărimile $P$ şi $H$, formulele (22), (23) şi limitele de aplicare ale acestora devin

$$m_{0_N} = 0{,}402 + 0{,}054\, \frac{1 - \dfrac{P}{H}}{\dfrac{P}{H}}\,, \tag{24}$$

valabilă pentru $\frac{P}{H} > 0{,}33$ şi $h \geqslant 0{,}10$ m ;

$$m_{0_B} = (0{,}4074 \div 0{,}435)\left[1 + 0{,}55\left(1 - \frac{P}{H}\right)^2\right], \tag{25}$$

valabilă pentru $0{,}286 < \frac{P}{H} < 0{,}94$,

dedusă din condiţia ca :

$$P = 0{,}24 \div 0{,}75 \quad \text{şi}$$
$$h = 0{,}05 \div 0{,}60.$$

În funcție de raportul $\frac{P}{H}$, aceste condiții se mai scriu :

$$\frac{P}{H} > \frac{0,24}{0,84} \quad \text{deci} \quad \frac{P}{H} > 0,286 \ \text{și}$$

$$\frac{P}{H} < \frac{0,75}{0,80} \quad \text{deci} \quad \frac{P}{H} < 0,94.$$

Expresia (21) care dă legătura coeficienților de debit, ia forma

$$m = m_0\left(1 - \frac{P}{H}\right)^{3/2}. \tag{26}$$

În sfîrșit se pot scrie formulele finale de comparație :

$$m_{\text{N}} = \left[0,402 + 0,054\frac{1 - \frac{P}{H}}{\frac{P}{H}}\right]\left(1 - \frac{P}{H}\right)^{3/2}, \tag{27}$$

valabilă pentru $\frac{P}{H} > 0,330$ ;

$$m_{\text{B}} = (0,4074 \div 0,435)\left[1 + 0,55\left(1 - \frac{P}{H}\right)^2\right]\left(1 - \frac{P}{H}\right)^{3/2}, \tag{28}$$

valabilă pentru $\frac{P}{H} > 0,286$ ;

și formula propusă de noi (14)

$$m = \sqrt{\frac{\mathcal{F}_v}{2}}.$$

Valorile numărului Froude se iau din curba caracteristică (fig. 3) sau ecuația curbei caracteristice (10), în funcție de raportul $\frac{P}{H}$.

Figura 6 redă imaginea grafică a reprezentării comparative a celor trei coeficienți de debit unde s-a notat cu :

$m_{\text{N}}$ — coeficientul de debit propus de Normele tehnice sovietice,
$m_1$, $m_2$ — domeniul coeficientului de debit propus de Bazin,
$m$ — coeficientul de debit propus de noi.

Analizînd expresiile (19) și (26) se constată că la deversoarele de măsură formula coeficientului de debit ($m$), exprimată sub forma clasică

($m_0$), ia o valoare constantă $m_0 = 0{,}41413$ ceea ce înseamnă că pentru rapoarte $\frac{P}{H} > 0{,}65$ influenţa vitezei de ajungere asupra coeficientului de debit este neglijabilă.

Unii autori iau în consideraţie înălţimea dinamică $(h + h_a)$ în formula (11) a debitului evacuat de un deversor. În cazul analizat mai sus, rezultă că înălţimea cinetică $h_a \simeq 0$, respectiv viteza de ajungere $v_m$ este aproximativ zero, deci calculul debitului trebuie făcut numai cu înălţimea statică $h$ a lamei deversante.

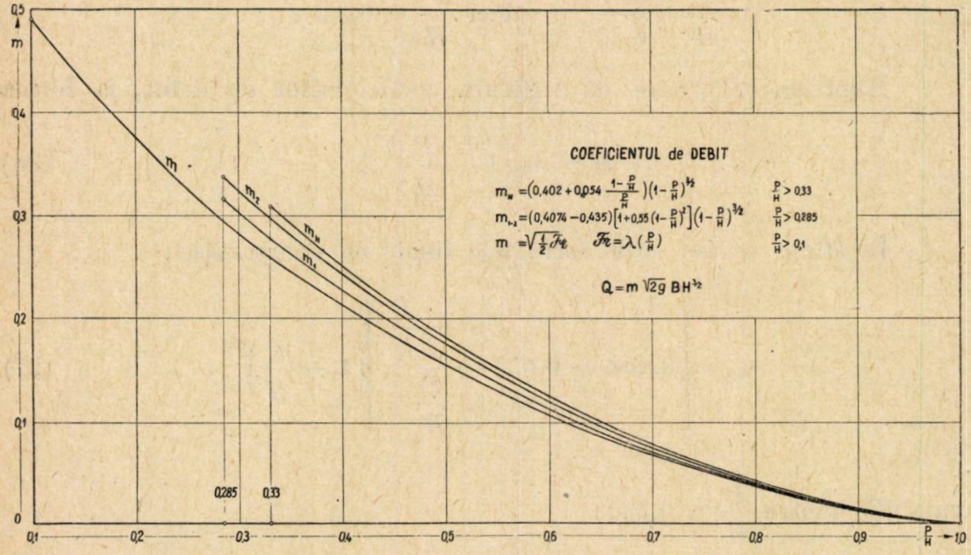


Fig. 6. — Comparaţia coeficienţilor de debit.

## UTILIZAREA FORMULELOR ŞI CURBELOR OBŢINUTE

Pe baza rezultatelor obţinute avem posibilitatea să rezolvăm problemele practice ce se pun la scurgerea peste deversoarele cu muchie ascuţită şi anume :

1. Calculul debitului evacuat de un deversor, cunoscînd datele geometrice (înălţimea deversorului $P$, lăţimea canalului $B$) şi înălţimea apei din canal $H$.

Cu ajutorul raportului $\frac{P}{H}$ cunoscut, se determină din curba caracteristică (fig. 3), sau ecuaţia curbei caracteristice (10), valoarea numărului Froude. Apoi din expresia (14) se calculează coeficientul de debit $m$, care introdus în (13) dă posibilitatea să calculăm debitul $Q$ evacuat de deversor.

2. Determinarea înălțimii deversorului $P$, cunoscînd debitul evacuat de deversor $Q$ și înălțimea apei în canal $H$, lățimea $B$ a deversorului fiind de asemenea cunoscută.

Se calculează coeficientul de debit din formula (13) iar din figura 4 se determină raportul $\frac{P}{H}$. Cunoscînd pe $H$, se calculează imediat înălțimea deversorului $P$.

3. Determinarea înălțimii apei în canal $H$, cînd se cunoaște debitul evacuat de deversor $Q$, înălțimea deversorului $P$ și lățimea acestuia $B$.

Aceasta constituie o problemă mai dificilă, necesitînd un calcul prin tatonare din aproape în aproape.

Se admite raportul $\frac{P}{H}$, din care se calculează $H$, apoi coeficientul de debit $m_1$ din expresia (13) și se verifică cu ajutorul diagramei din figura 4 cunoscînd raportul $\frac{P}{H}$. Dacă cele două valori ale coeficientului de debit corespund, însemnează că raportul $\frac{P}{H}$ a fost bine ales. Dacă nu corespund, se reia calculul de la început luînd pentru $\frac{P}{H}$ o nouă valoare, corespunzătoare coeficientului de debit calculat $m_1$. După două, trei încercări se ajunge ca cele două valori ale coeficientului de debit, cea calculată $m_1$ cu cea dedusă din curbă, să fie egale, deci să se poată calcula din raportul $\frac{P}{H}$ corespunzător, înălțimea apei în canal $H$.

4. Determinarea dimensiunilor unei instalații prevăzută cu deversor dreptunghiular, pentru măsurarea debitului evacuat de un model experimental, cunoscînd debitul maxim evacuat.

Această problemă se rezolvă cu ajutorul rezultatelor obținute la capitolul „Curba utilă", deversorul trebuind să se situeze în zona curbei utile a caracteristicii deversorului.

Se alege ca mărime inițială lățimea canalului $B$ sau înălțimea $h_{\max}$ a apei în canal, în funcție de condițiile de amplasare ale deversorului.

Se calculează coeficientul de debit din relația (19) sau figura 5, admițînd raportul $\frac{P}{H} = 0,65$ sau altă valoare situată în limitele $0,65 \leqslant \frac{P}{H} < 1$. Din relația (13) se calculează înălțimea $H$ a apei din canal, respectiv lățimea $B$ a canalului.

Din valoarea raportului $\frac{P}{H}$ admis, se calculează înălțimea $P$ a deversorului. În cazul că toate datele inițiale au fost bine alese, înălțimea $P$ a deversorului trebuie să respecte condiția $\frac{B}{6} < P < 2B$.

Instalaţia trebuie să îndeplinească anumite condiţii, pentru o folosire judicioasă a rezultatelor obţinute de noi. În acest sens se recomandă :

*a*) platforma de fund a canalului să fie orizontală ;

*b*) lungimea canalului de măsură $L$, de la liniştitor la deversor, să fie aproximativ de opt ori înălţimea maximă a lamei deversante $L = 8\ h_{\max}$ ;

*c*) muchia deversorului să fie teşită la 30°, iar grosimea acesteia $\delta$ să fie mai mică sau egală cu înălţimea minimă a lamei deversante $\delta \leqslant h_{\min}$. Deversorul se mai poate executa şi sub forma din schiţa alăturată (fig. 7) ;

*d*) nivelul $H$ al apei în canal să se măsoare la o distanţă $d$ de deversor, mai mare sau egală cu de 4 ori înălţimea lamei deversante $d \geqslant 4h$ ;

*e*) lăţimea canalului $B$ să fie constantă pe lungimea $L$ şi să se găsească între limitele $\frac{P}{2} < B < 6P$ ;

*f*) raportul $\frac{P}{H}$ trebuie să îndeplinească condiţia $0{,}65 \leqslant \frac{P}{H} < 1{,}0$ pentru a se asigura o viteză de ajungere mică, deci o instalaţie de liniştire simplă cu ajutorul unui grătar.

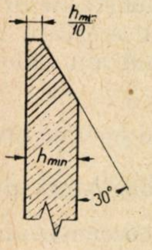


Fig. 7. — Profil de deversor.

Această condiţie rezultă şi din posibilitatea aplicării formulei curbei utile, la calculul debitului evacuat de deversor.

---

Pentru o uşoară utilizare a rezultatelor obţinute s-a întocmit o tabelă care cuprinde valorile directe ale coeficientului de debit $m$, în funcţie de raportul $\frac{P}{H}$. În calculul coeficientului de debit s-a utilizat formula propusă de noi, $m = \sqrt{\frac{\mathcal{F}_r}{2}}$, în care numărul Froude este dat de expresiile de mai jos în funcţie de zona raportului $\frac{P}{H}$ :

— pentru valori ale raportului $0{,}1 \leqslant \frac{P}{H} \leqslant 0{,}64$, numărul Froude este dat de ecuaţia curbei caracteristice

$$\mathcal{F}_r = 0{,}8038 - 4{,}002\frac{P}{H} + 8{,}828\left(\frac{P}{H}\right)^2 - 10{,}6933\left(\frac{P}{H}\right)^3 + $$

$$+ 6{,}912\left(\frac{P}{H}\right)^4 - 1{,}8485\left(\frac{P}{H}\right)^5,$$

— iar pentru valori ale raportului $0{,}64 < \frac{P}{H} < 1$ de formula

$$\mathcal{F}_r = 0{,}343\left(1 - \frac{P}{H}\right)^{3/2}. \tag{29}$$

*Tabelă*

| $\frac{P}{H}$ | $m$ | $\frac{P}{H}$ | $m$ | $\frac{P}{H}$ | $m$ | $\frac{P}{H}$ | $m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,10 | 0,4908 | 0,42 | 0,1987 | 0,69 | 0,07148 | 0,85 | 0,02406 |
| 0,12 | 0,4658 | 0,44 | 0,1866 | 0,70 | 0,06805 | 0,86 | 0,02169 |
| 0.14 | 0,4415 | 0,46 | 0,1754 | 0,71 | 0,06471 | 0,87 | 0,01941 |
| 0,16 | 0,4183 | 0,48 | 0,1644 | 0,72 | 0,06136 | 0,88 | 0,01720 |
| 0,18 | 0,3692 | 0,50 | 0,1539 | 0,73 | 0,05810 | 0,89 | 0,01511 |
| 0,20 | 0,3751 | 0,52 | 0,1446 | 0,74 | 0,05490 | 0,90 | 0,01310 |
| 0,22 | 0,3550 | 0,54 | 0,1349 | 0,75 | 0,05177 | 0,91 | 0,01118 |
| 0,24 | 0,3357 | 0,56 | 0,1249 | 0,76 | 0,04869 | 0,92 | 0,00937 |
| 0,26 | 0,3174 | 0,58 | 0,1159 | 0,77 | 0,04568 | 0,93 | 0,00767 |
| 0,28 | 0,2999 | 0,60 | 0,1072 | 0,78 | 0,04297 | 0,94 | 0,00609 |
| 0,30 | 0,2833 | 0,62 | 0,0988 | 0,79 | 0,03985 | 0,95 | 0,00463 |
| 0,32 | 0,2674 | 0,64 | 0,0907 | 0,80 | 0,03704 | 0,96 | 0,00331 |
| 0,34 | 0,2523 | 0,65 | 0,08575 | 0,81 | 0,03430 | 0,97 | 0,00215 |
| 0,36 | 0,2379 | 0,66 | 0,08210 | 0,82 | 0,03163 | 0,98 | 0,00116 |
| 0.38 | 0,2242 | 0,67 | 0,07851 | 0,83 | 0,02902 | 0,99 | 0,00041 |
| 0,40 | 0,2111 | 0,68 | 0,07496 | 0,84 | 0,02650 | 1,00 | 0,00000 |

## INSTALAȚII FOLOSITE

Pentru efectuarea experiențelor s-au utilizat trei canale deversante de lățime $B_1 = 30$ cm, $B_2 = 60$ cm, $B_3 = 120$ cm. Dispozitivul de deversare cît și metoda de măsurare a debitului au fost pentru fiecare din canale diferite.

*Canalul de 120 cm* (fig. 8), construit din zidărie și sclivisit interior, a fost prevăzut cu două nișe, una pentru liniștitor iar cealaltă pentru deversor.

Deversorul întrebuințat a fost executat din lemn de stejar fiert în ulei și vopsit, prevăzut cu muchie deversantă din metal. Profilul și dimensiunile sînt arătate în schița din figura 9.

Cu acest deversor s-au realizat rapoarte $\frac{P}{H} \geqslant 0{,}25$, înălțimea variabilă $P$ a deversorului realizîndu-se prin tăiere.

Ca sistem de măsură a debitului s-a folosit măsurarea debitului unitar, cu ajutorul unei pîlnii (fig. 10) de secțiune dreptunghiulară cu lățime de 50 mm. S-a măsurat debitul pe 50 mm lungime de lamă deversantă prin cronometrarea timpului în care s-a scurs un anumit volum de apă.

Pîlnia se fixa la muchia deversorului, paralel cu direcția vitezei de scurgere prin intermediul unui cui în așa fel ca să nu influențeze scurgerea. Devierea apei prin pîlnie se făcea cu acces de aer.

Măsurarea debitului s-a făcut în trei puncte ale lățimii lamei, pentru fiecare punct luînd media a patru măsurători. Debitul evacuat pe 5 cm lungime de lamă era dat de media debitelor măsurate în cele trei puncte ale lamei.

În același timp s-a măsurat debitul și cu ajutorul unui deversor triunghiular, tarat volumetric în laborator. Diferența ca valoare a debitelor, măsurate prin cele două sisteme, a fost așa de mică încît am folosit prima metodă de măsurare cu ajutorul pîlniei.

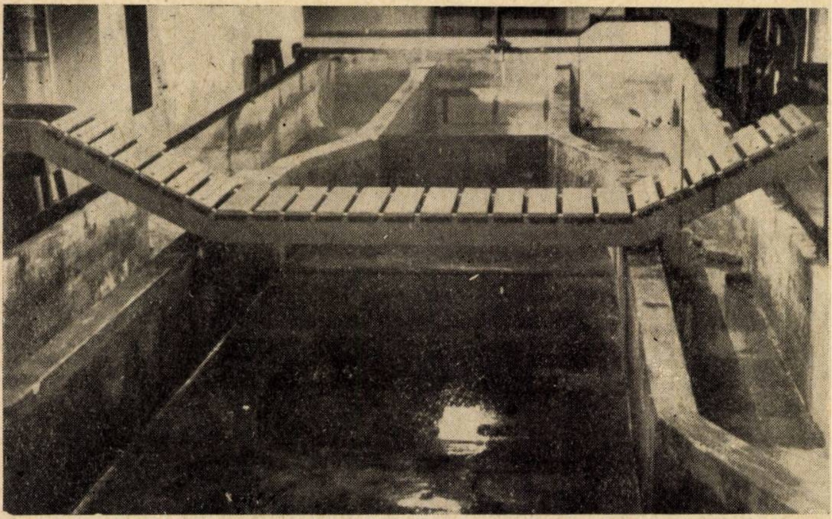


Fig. 8. — Vedere a canalului de 120 cm.

*Canalul de 60 cm* (fig. 11) a fost realizat prin construirea unui perete despărțitor în canalul vitrat de 100 cm lățime, existent în laborator.

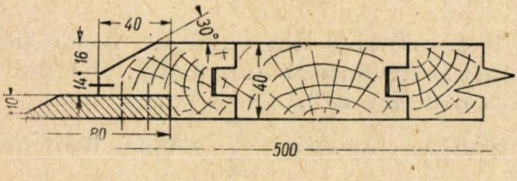


Fig. 9. — Profilul și dimensiunile deversorului folosit.

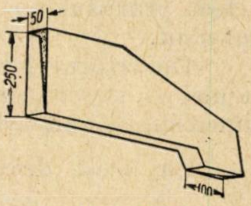


Fig. 10. — Pîlnie.

Deversorul întrebuințat a fost sub formă de placă deversantă, din tablă de 6 mm grosime cu muchia teșită la 30°. Placa s-a montat pe un suport fixat în radierul canalului.

Cu acest deversor s-au realizat rapoarte $\frac{P}{H} > 0,1$ utilizînd un set de 14 plăci deversante cu înălțimi de la 30 la 290 mm.

Ca mijloc de măsurare a debitului, s-a folosit deversorul triunghiular tarat volumetric în laborator.

*Canalul de 30 cm* (fig. 12) s-a realizat prin folosirea canalului cu pantă variabilă existent, de secțiune 30 × 30 cm$^2$, la capătul căruia s-a montat deversorul cu muchie ascuțită.

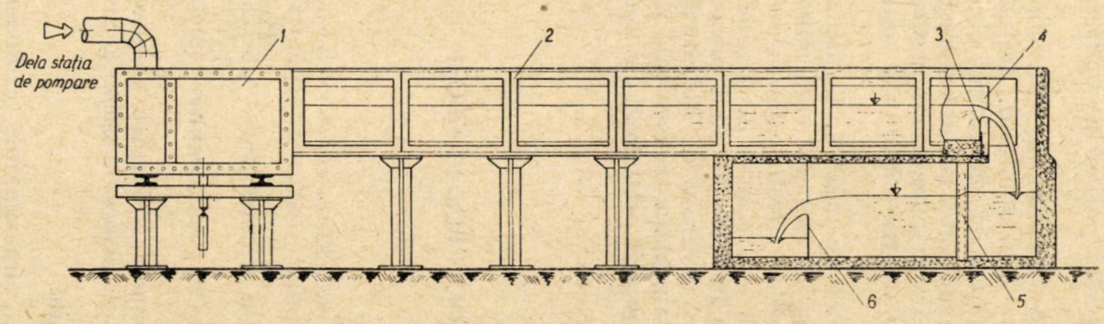

Dela stația de pompare
1
2
3
4
5
6

Fig. 11. — Schița canalului de 60 cm.

*1* — bazin de liniștire; *2* — canal vitrat; *3* — deversor cu muchie ascuțită încercat; *4* — perete despărțitor; *5* — liniștitor; *6* — deversor triunghiular de măsură.

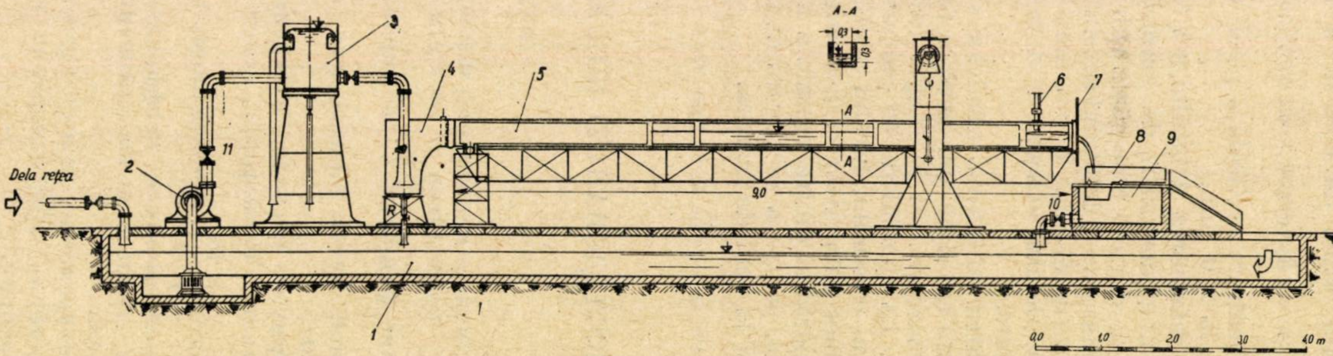

Dela rețea
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
R
A-A
0,3
0,3
A
A
9,0
0,0
1,0
2,0
3,0
4,0 m

Fig. 12. — Schița instalației canalului de 30 cm.

*1* — bazin de aspirație; *2* — pompă centrifugă; *3* — rezervor de nivel constant; *4* — bazin de liniștire; *5* — canal de experimentare; *6* — ac de măsură a nivelelor; *7* — placă deversantă; *8* — jghiab de deviere; *9* — dispozitiv de măsură a debitelor; *10* — vană de golire; 11 — vană de reglaj a debitului.

Deversorul întrebuinţat a fost executat sub formă de placă culisantă, din tablă de oţel de 6 mm grosime cu muchia teşită la 30°.

Cu acest deversor s-au realizat rapoarte $\frac{P}{H} \geqslant 0{,}15$, prin posibilitatea de culisare verticală a plăcii deversante, acesta putînd lua înălţimi de la 20 la 270 mm.

La măsurarea debitului s-a folosit metoda volumetrică prin construirea unui dispozitiv de măsură *9* şi deviere *8* al debitului. Iniţial, jghiabul de deviere *8* se găsea sub lamă ca în figura 12, iar atunci cînd începea măsurarea debitului acesta se trăgea de sub lamă lăsînd să curgă apa în rezervorul tarat *9* un anumit timp, după care se introducea jghiabul sub lamă. Debitul evacuat de deversor s-a calculat prin măsurarea volumului scurs.

Pentru măsurarea nivelelor s-au utilizat ace de măsură. La canalele de 120 cm şi 30 cm acul a fost montat pe un cărucior care putea culisa transversal şi în lungul canalului, măsurînd nivelul apei direct în canal. La canalul de 60 cm acul de măsură era montat în peretele exterior al canalului, nivelul apei măsurîndu-se indirect folosind principiul vaselor comunicante. S-a asigurat valoarea indicată de literatură, 20, a raportului dintre suprafaţa apei la ac şi suprafaţa transversală de aducţiune, pentru a se asigura atenuarea transmiterii perturbaţiilor apei din canal la acul de măsură.

*Primită la redacţie la 27 iulie 1961*

## К ИССЛЕДОВАНИЮ ВОДОСЛИВОВ С ОСТРЫМ РЕБРОМ

### РЕЗЮМЕ

Из экспериментальных исследований, проведенных на нескольких моделях водосливов с острым ребром, можно было определить выражение функции λ по характеристической кривой $\mathcal{F}_r = \lambda\left(\frac{P}{H}\right)$, выведенной путем применения метода подобия к течению через водосливы.

Формула расхода, отведенного водосливом с острым ребром, выраженная в иной форме, ведет к новому выражению коэффициента расхода $m = \sqrt{\frac{\mathcal{F}_r}{2}}$, проверенному в лаборатории.

Новая формула коэффициента расхода справедлива в более широком диапазоне по сравнению с приведенными в литературе формулами.

Одновременно даются практические формулы для применения в лаборатории при измерении расхода, отведенного водосливом с острым ребром.

## ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Характеристические величины при течении через водослив.

Рис. 2. — Характеристические кривые, полученные из опытов Бульдером и лабораторией Академии РНР.

Рис. 3. — Характеристическая кривая.

Рис. 4. — Коэффициент расхода.

Рис. 5. — Полезная кривая.

Рис. 6. — Сопоставление коэффициентов расхода.

Рис. 7. — Профиль водослива.

Рис. 8. — Вид канала в 120 см.

Рис. 9. — Профиль и размеры применяемого водослива.

Рис. 10. — Воронка.

Рис. 11. — Схема канала в 60 см: *1* — успокоительный бассейн; *2* — лоток со стеклянными стенками; *3* — испытуемый водослив с острым ребром; *4* — перегородка; *5* — успокоитель; *6* — измерительный треугольный водослив.

Рис. 12. — Схема установки лотка размером 30 см : *1* — всасывающий бассейн *2* — центробежный насос; *3* — резервуар постоянного уровня; *4* — успокоительный бассейн; *5* — экспериментальный лоток; *6* — игла для измерения уровней; *7* — водосливная пластинка; *8* — отводный желоб; *9* — приспособление для измерения расходов; *10* — сбросный затвор; *11* — затвор для регулирования расхода.

# CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES DÉVERSOIRS EN MINCE PAROI

## RÉSUMÉ

Les essais expérimentaux, entrepris sur plusieurs modèles de déversoirs en mince paroi, ont permis de déterminer l'expression de la fonction λ dans la courbe caractéristique $\mathscr{F}_r = \lambda\left(\frac{P}{H}\right)$, déduite en appliquant la méthode de la similitude à l'écoulement par-dessus les déversoirs.

La formule du débit, évacué par un déversoir en mince paroi, exprimée sous une autre forme, a conduit les auteurs à une nouvelle expression du coefficient de débit, $m = \sqrt{\frac{\mathscr{F}_r}{2}}$, vérifiée en laboratoire.

La validité de la nouvelle formule du coefficient de débit est plus étendue que celle des formules mentionnées par la littérature.

En outre, les auteurs proposent des formules pratiques, applicables en laboratoire, pour la mesure du débit évacué par un déversoir en mince paroi.

## EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Grandeurs caractéristiques de l'écoulement par-dessus le déversoir.

Fig. 2. — Courbes caractéristiques obtenues par les expériences de Boulder, ainsi que dans le laboratoire de l'Académie de la République Populaire Roumaine.

Fig. 3. — Courbe caractéristique.

Fig. 4. — Coefficient de débit.

Fig. 5. — Courbe utile.

Fig. 6. — Comparaison entre les coefficients de débit.

Fig. 7. — Profil d'un déversoir.

Fig. 8. — Vue du canal de 120 cm.

Fig. 9. — Profil et dimensions du déversoir utilisé.

Fig. 10. — Entonnoir.

Fig. 11. — Schéma du canal de 60 cm.

*1* — bassin pour tranquilliser les eaux; *2* — canal vitré; *3* — déversoir en mince paroi soumis aux essais; *4* — paroi séparatrice; *5* — tranquilliseur; *6* — déversoir triangulaire de mesure.

Fig. 12. Schéma de l'installation du canal de 30 cm.

*1* — bassin d'aspiration; *2* — pompe centrifuge; *3* — réservoir à niveau constant; *4* — bassin pour tranquilliser les eaux; *5* — canal d'expériences; *6* — aiguille pour la mesure des niveaux; *7* — plaque déversante; *8* — rigole de déviation; *9* — dispositif pour mesurer les débits; *10* — vanne d'évacuation; *11* — vanne pour le réglage du débit.

## BIBLIOGRAFIE

1. D. DUMITRESCU, V. IONESCU, C. M. IANCU, *Contribuţii teoretice şi experimentale la studiu mişcării peste deversoare*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *3* (1958).
2. * * * *Boulder Canyon Project. Studies of crests for Owerfall dams.* Denver-Colorado, 1948.
3. D. DUMITRESCU, *Courbes caractéristiques des déversoirs*. C. R. de l'Acad. des Sci., **246**, 28 mai 1958.
4. * * * *Технические условия и нормы проектирования гидротехнических сооружений. Гидравлические расчеты водосливов.* Госэнергиздат, Москва-Ленинград, 1952.
5. H. BAZIN, *Annales des Ponts et Chaussées. Mémoires et documents.* 6$^e$ série, **XVI**, 1888.
6. И. И. АГРОСКИН, *Гидравлика.* Госэнергиздат, Москва-Ленинград, 1950.
7. П. Г. КИСЕЛЕВ, *Справочник по гидравлическим расчетам.* Госэнергиздат, Москва Ленинград, 1950.
8. Fr. EISNER, *Überfallversuche in verschiedener Modellgrösse.* Berlin, 1933.
9. J. SMETANA, *Hydraulika.* II. Nakladetelstvi Československé Academie, VĚD, Praha 1957.
10. REHBOCK, *Handbuch der Ingenieur-Wissenschaften.* **III**, Teil 2, 1. Hälfte, 1933.
11. A. LAUCK, *Der Überfall über ein Wehr.* Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, **5**, *1* (1925).

# STUDII

## UNGERE — FRECARE — UZURĂ

# DETERMINAREA DISTRIBUȚIEI PRESIUNILOR ÎN LAGĂRELE ALIMENTATE SUB PRESIUNE, PRIN UTILIZAREA UNEI ANALOGII HIDRODINAMICE

DE

V. N. CONSTANTINESCU

Într-o lucrare anterioară [1] s-a arătat că metodele obșinuite de soluționare a problemei lubrificației, ca de exemplu dezvoltarea presiunilor în serii de produse, nu pot fi aplicate decît pentru unele cazuri de lagăre alimentate sub presiune. De exemplu, în cazul în care alimentarea se efectuează printr-unul sau mai multe orificii de dimensiuni reduse, în jurul fiecăruia apare o singularitate logaritmică pentru presiuni, care face ca seria respectivă să aibă o convergență slabă iar calculele devin laborioase.

În aceste cazuri se obțin informații utile dacă se pleacă de la observația că ecuația presiunilor este omogenă [2] și, mai mult : dacă grosimea stratului de lubrifiant este o constantă, presiunea sau o funcție de aceasta este armonică. Într-adevăr, notînd cu

$$\eta = p^{\frac{1}{\varkappa}+1}, \tag{1}$$

ecuația diferențială a presiunilor se scrie sub forma

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3 \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(h^3 \frac{\partial \eta}{\partial z}\right) = 0, \tag{2}$$

sau în sfîrșit dacă grosimea stratului de lubrifiant $h$ este constantă

$$\Delta \eta = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = 0. \tag{3}$$

În aceste relații $p$ este presiunea, iar $x$, $z$ axele de coordonate considerate ca fiind cuprinse în întregime pe una din suprafețe. Deși scrise pentru lubrificația cu gaze, ecuațiile de mai sus sînt valabile și pentru lubrificația cu lichide. Astfel în relația (1), s-a notat cu $\varkappa$ exponentul politropic al evoluției; dacă lubrifiantul este incompresibil $\varkappa = \infty$ rezultînd în acest caz $\eta = p$. În sfîrșit, cum de obicei la gaze evoluția este apropiată de o izotermă, $\varkappa = 1$ iar $\eta = p^2$.

În condițiile de valabilitate ale ecuației (3), faptul că funcția $\eta$ este armonică permite utilizarea metodelor hidrodinamicii mișcărilor plane potențiale, așa după cum am remarcat într-o lucrare anterioară [2] și după cum remarcă și I. M. Kotliar [3] și S. Raynor și A. Charnes [4]. De altfel, pusă în acest mod, problema constituie o variantă a problemei Helle-Shaw [5].

În particular, se poate asocia funcției $\eta\,(x, z)$ o altă funcție $\eta'\,(x, z)$ care să îndeplinească condițiile Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\partial\eta'}{\partial z}\,; \quad \frac{\partial\eta}{\partial z} = -\,\frac{\partial\eta'}{\partial x}\,. \tag{4}$$

În aceste condiții, definind o variabilă complexă de forma

$$y = x + iz, \tag{5}$$

funcția $\eta$ va fi partea reală a unui potențial complex [6],

$$\Phi = \Phi\,(y) = \eta + i\eta', \tag{6}$$

potențial care la rîndul său este o funcție analitică de variabila complexă $y$.

Funcția $\eta$ joacă deci rolul potențialului de viteze iar funcția $\eta'$ rolul funcției de curent. Într-adevăr, notînd cu $\mathcal{M}_x$ și $\mathcal{M}_z$ debitele masice pe direcțiile $x$, $z$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\eta}{\partial x} &= -\,\frac{\varkappa+1}{\varkappa}\,\frac{12\mu p_1^{\frac{1}{\varkappa}}}{\rho_1 h^3}\,\frac{\partial\mathcal{M}_\varkappa}{\partial z} = -\,k\,\frac{\partial\mathcal{M}_\varkappa}{\partial z}\\ \frac{\partial\eta}{\partial z} &= -\,\frac{\varkappa+1}{\varkappa}\,\frac{12\mu p_1^{\frac{1}{\varkappa}}}{\rho_1 h^3}\,\frac{\partial\mathcal{M}_z}{\partial x} = -\,k\,\frac{\partial\mathcal{M}_z}{\partial x}\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

unde cu $p_1$ și $\rho_1$ s-au notat presiunea și densitatea gazului în dreptul orificiului de alimentare, cu $\mu$ viscozitatea lubrifiantului și cu

$$k = \frac{\varkappa+1}{\varkappa}\,\frac{12\mu p_1^{\frac{1}{\varkappa}}}{\rho_1 h^3}\,. \tag{8}$$

Cum debitul la rîndul său este direct proporțional cu viteza medie din stratul de lubrifiant, rezultă cu adevărat că $\eta$ joacă și rolul unui potențial de viteze.

Pe de altă parte, debitul masic între două puncte $AB$ situate pe două curbe $\eta' = \text{const.}$, $\eta'_A$ şi $\eta'_B$ este egal cu

$$\mathcal{M}_{AB} = \int_{AB}\left(\frac{\partial \mathcal{M}_x}{\partial z}dz + \frac{\partial \mathcal{M}_z}{\partial x}dx\right) = -\frac{1}{k}\mathcal{I}m\left[\int_{AB}\frac{d\Phi}{dy}dy\right] = -\frac{1}{k}\left(\eta'_B - \eta'_A\right). \quad (9)$$

Rezultă deci că funcția $\eta'$ joacă rolul unei funcții de curent. Concluzia de mai sus apare ca evidentă dacă se scrie ecuația diferențială a liniei de curent sub forma

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial \mathcal{M}_x}{\partial z}} = \frac{dz}{\dfrac{\partial \mathcal{M}_z}{\partial x}}. \quad (10)$$

Curbele $\eta' = \text{const.}$ se vor suprapune cu liniile de curent şi vor fi ortogonale față de curbele de egală presiune $\eta = \text{const.}$

Analogia hidrodinamică a problemei puse constă deci în faptul că ea este echivalentă cu o mişcare potențială plană, avînd spectrul liniilor de curent identic, iar spectrul liniilor de egal potențial identic cu spectrul liniilor de presiune constantă. În general, se cunoaşte presiunea pe conturul exterior al lagărului; fie $p_0$ această presiune iar $\eta_0$, valoarea $\eta$ corespunzătoare. În plus, se cunoaşte fie debitul total $\mathcal{M}$, fie presiunea $p_1$ pe conturul orificiilor de alimentare. În consecință, prin analogia hidrodinamică menționată trebuie să se determine o mişcare potențială plană pentru care se dau anumite linii de egal potențial sau o linie de egal potențial (conturul exterior) şi anumite singularități.

Cel mai simplu exemplu este cel a două discuri circulare alimentate printr-un orificiu central, considerat şi în lucrările [3], [4]. Pentru acesta potențialul complex corespunzător este cel al unei surse

$$\Phi = \Phi_0^* - \frac{k\mathcal{M}}{2\pi}\ln y \quad (11)$$

unde $\mathcal{M}$ este debitul masic care se scurge prin orificiu, iar $\Phi_0^*$ o constantă complexă oarecare. Rezultă astfel formulele cunoscute

$$\eta = \eta_0^* - \frac{k\mathcal{M}}{2\pi}\ln r; \qquad \eta' = \eta_0'^* - \frac{k\mathcal{M}}{2\pi}\,\theta. \quad (12)$$

Dacă se cunoaşte debitul, constanta $\eta_0^*$ se determină din condiția ca $\eta = \eta_0$ pentru conturul exterior ($r = r_0$). Dacă şi debitul este necunoscut se poate pune în plus condiția $\eta = \eta_1$ pe conturul orificiului de alimentare ($r = r_1$).

Analogia hidrodinamică stabilită în modul de mai sus permite ca prin mijloace simple să se regăsească toate cazurile studiate în lucrările [3], [4], şi în plus să fie extinsă şi la alte configurații mai complexe care intervin în aplicații. Dăm mai jos o serie de exemple.

*Suprafețe circulare alimentate excentric* (fig. 1). Mișcarea care admite ca linii de egal potențial un cerc de rază $r_0$ cu centrul în $O$ și un altul de rază $r_1$ plasat excentric în plunctul $O_1 (\overline{OO_1} = e)$, este mișcarea a două surse de semn contrar. Liniile de egal potențial sînt atunci cercurile lui Appolonius cu polurile în punctele $A$ și $B$ [6]. Notînd cu $r_c$ raza unui

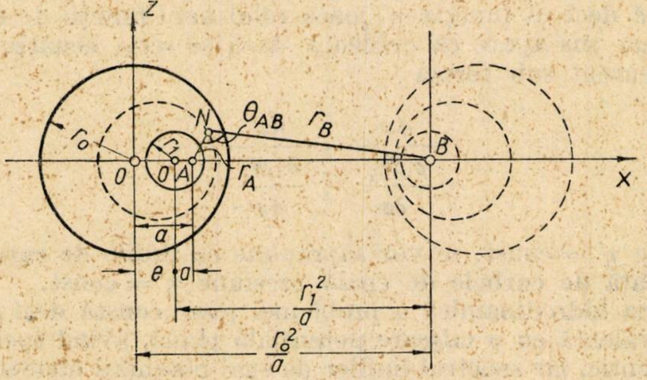


Fig. 1

cerc Appolonius din această familie și cu $O_c$ centrul său, există relația geometrică

$$\overline{O_cA} \times \overline{O_cB} = r_c^2. \tag{13}$$

Sursa de debit $\mathscr{M}$ trebuie deci plasată în polul $A$ iar în polul $B$ trebuie plasată o sursă de semn contrar. Cunoscînd $r_0$, $r_1$ și $e$, mărimile $\overline{O_1A} = a$, $\overline{O_2A} = a'$ și $AB = l$ rezultă din sistemul

$$a - a' = e\,; \; a' = \frac{-l + \sqrt{l^2 + 4r_1^2}}{2}; \quad l = \frac{r_0^2}{a} - a \tag{14}$$

iar potențialul complex de serie [6],

$$\Phi = \Phi_0^* - \frac{k\mathscr{M}}{2\pi} \ln \frac{y - a}{y - \frac{r_0^2}{a}}\,. \tag{15}$$

Dacă raza $r_1$ este redusă ($r_1 \to 0$) atunci $a' \to 0$ și $a \cong e$; elementele care determină formula (15) sînt cunoscute însăși din datele inițiale ale problemei, fără a se mai recurge la sistemul (14).

Este de menționat că la același rezultat se ajunge dacă se pleacă de la potențialul unei surse (11) și se utilizează o transformare conformă de tipul

$$y = C_1 \frac{Y - C_2}{Y - C_3}, \tag{16}$$

care transformă două cercuri concentrice în două cercuri excentrice, după cum se poate ușor verifica.

În coordonatele bipolare, din formula (15) se deduce

$$\eta = \eta_0^* - \frac{k\mathcal{M}}{2\pi} \ln \frac{r_A}{r_B} ; \quad \eta' = \eta_0'^* - \frac{k\mathcal{M}}{2\pi} \theta_{AB} \tag{17}$$

iar constantele $\eta_0^*$ și $\mathcal{M}$ se determină ca și pentru relațiile (12).

*Suprafețe circulare alimentate printr-unul sau mai multe șiruri de orificii.* Dacă alimentarea se efectuează printr-un șir de orificii plasate la o anumită rază $a$ făcînd între ele un unghi $\sigma$ (fig. 2), soluția se obține însumînd un număr corespunzător de soluții de tipul (15).

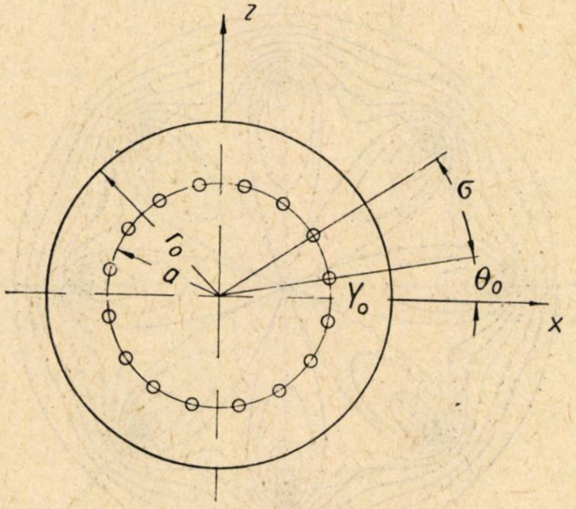


Fig. 2

Dacă se notează afixul unuia dintre orificii cu $Y_0 = ae^{i\theta_0}$ se va putea scrie

$$\Phi = \Phi_0^* - \frac{k\mathcal{M}}{2\pi} \sum_{n=0}^{n=\frac{2\pi}{\sigma}-1} \ln \left[ \frac{y - ae^{i(\theta_0+n\sigma)}}{y - \frac{r_0^2}{a} e^{i(\theta_0+n\sigma)}} \right] =$$

$$= \Phi_0^* - \frac{k\mathcal{M}}{2\pi} \ln \frac{y^{\frac{2\pi}{\sigma}} - a^{\frac{2\pi}{\sigma}}}{y^{\frac{2\pi}{\sigma}} - \left(\frac{r_0^2}{a}\right)^{\frac{2\pi}{\sigma}}} . \tag{18}$$

Dacă există mai multe șiruri de orificii, se vor însuma mai multe soluții de tipul (18). Cînd numărul orificiilor crește, influența surselor exterioare scade, deoarece crește valoarea exponentului $\frac{2\pi}{\sigma}$, de asemenea, cînd distanța $a$ scade față de $r_0$, influența termenului de la numitor scade, astfel încît într-o primă aproximaţie se poate scrie în locul formulei (18) [6]

$$\Phi \cong \Phi_0^* - \frac{k\mathcal{M}}{2\pi} \ln \left(y^{\frac{2\pi}{\sigma}} - a^{\frac{2\pi}{\sigma}}\right), \qquad (19)$$

a cărei parte reală este reprezentată în figura 3.

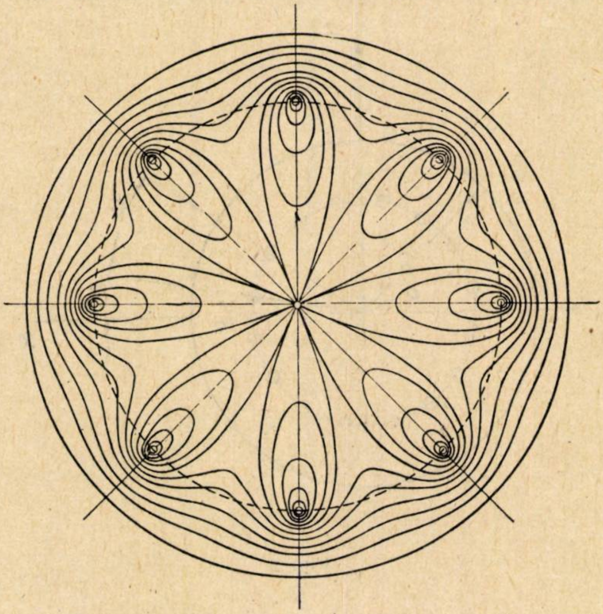


Fig. 3

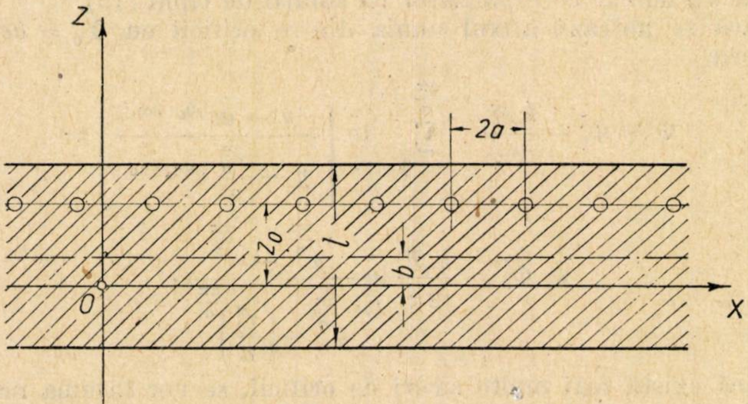


Fig. 4

***Fîşie paralelă alimentată printr-un şir de orificii*** (fig. 4). Acest caz, examinat şi de Kotliar [3] se deduce prin metoda imaginilor [6] însumînd seriile care rezultă. Se obţine în cele din urmă

$$\Phi = \Phi_0^* - i\,\Phi_0^{**}\,y - \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{k\mathcal{M}}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{sh} \pi \dfrac{y - y_0 + 2an}{2l}}{\operatorname{sh} \pi \dfrac{y - y_0^* + 2an}{2l}}, \qquad (20)$$

unde

$$y_0^* = y_0 + i\,(2l - 2b - 2z_0) = y_0 + i\,(l - 2z_0), \qquad (21)$$

sau, observînd că avem de-a face cu o funcţie dublu periodică, cu perioada $2na + i2nl$

$$\Phi = \Phi_0^* - i\,\Phi_0^{**}\,y - \frac{k\mathcal{M}}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{sn} \dfrac{K\,(y - y_0)}{a}}{\operatorname{sn} \dfrac{K\,(y - y_0^*)}{a}}, \qquad (22)$$

unde parametrul $k$ care intră în definiţia funcţiei sinus amplitudine este egal cu $\frac{a}{l}$, iar $K$ este integrala eliptică completă de specia întîia corespunzătoare

$$K = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)\left(1 - \dfrac{a^2}{l^2}\,y^2\right)}}. \qquad (23)$$

Este interesant de remarcat faptul că dacă lăţimea fîşiei este relativ mare, influenţa surselor plasate în exteriorul fîşiei este redusă astfel încît

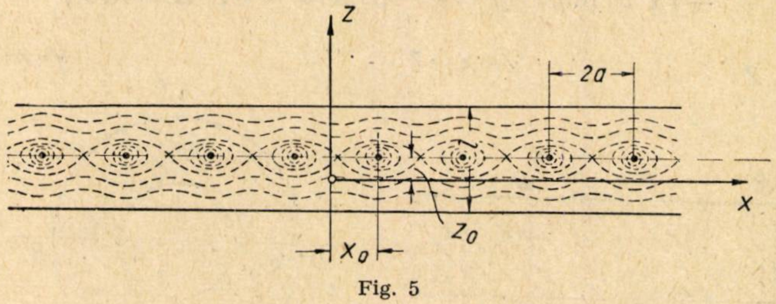


Fig. 5

potenţialul este dat în primă aproximaţie de potenţialul unui singur şir infinit de surse (fig. 5) [6]

$$\Phi \cong \Phi_0^* - i\,\Phi_0^{**}\,y + \frac{k\mathcal{M}}{2\pi} \ln \sin \pi \frac{y - y_{0s}}{2a_s} \qquad (24)$$

evitîndu-se astfel introducerea funcţiilor eliptice. În formulele (20), (22) şi (24) s-a introdus pentru generalitate şi funcţia $i\,\Phi_0^{**}\,y$ care nu alterează mişcarea, după cum se poate uşor verifica.

*Coroană circulară alimentată printr-un șir de orificii.* Cazul precedent al fîșiei infinite nu este util numai pentru că reprezintă de exemplu suprafața desfășurată a unui lagăr circular, dar și pentru că servește drept punct de plecare pentru alte cazuri complexe. Astfel pentru modelul de lagăr axial din figura 6, soluția poate fi găsită plecînd de la formula (22) cu ajutorul unei transformări conforme care să transforme domeniul din interiorul fîșiei paralele pe o coroană circulară. O asemenea transformare are forma [6]

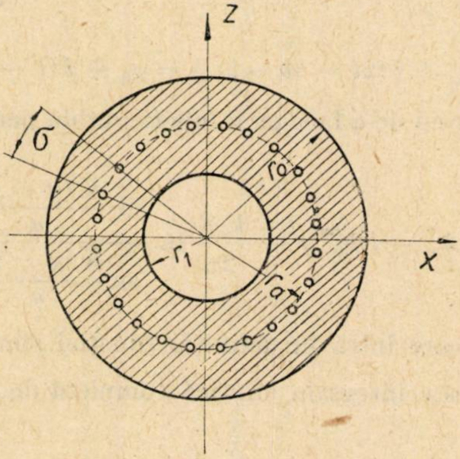


Fig. 6

$$-iY = \ln y\,; \quad y = e^{-iY}\,; \quad X = -\,\theta\,; \quad Z = \ln x\,, \tag{25}$$

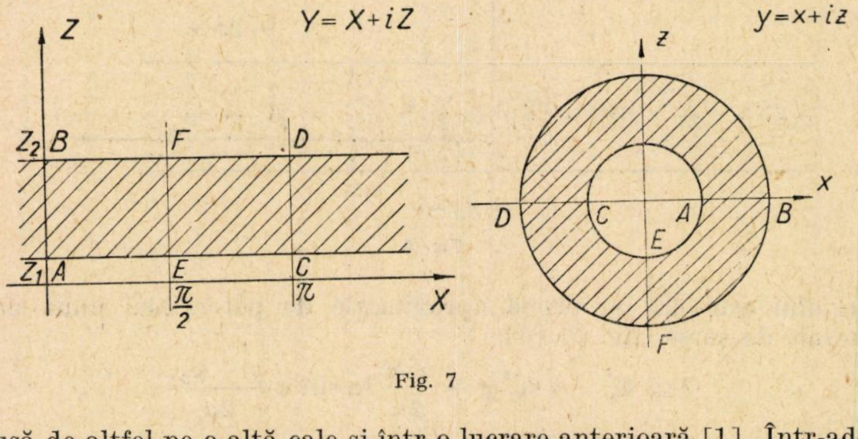


Fig. 7

dedusă de altfel pe o altă cale și într-o lucrare anterioară [1]. Într-adevăr (fig. 7), o dreaptă $Z = \text{const.}$ din planul $Y$ se transformă într-un cerc cu centrul în origine în planul $y$. Axa reală $Z = 0$ se transformă în cercul de rază unitate, iar $Z = -\infty$ corespunde originii din planul $y$. În consecință, mișcarea corespunzătoare figurii 4 corespunde unei mișcări ca în figura 6 cu

$$\sigma = 2a\,; \quad \ln r_1 = -\frac{l}{2}\,; \quad \ln r_0 = \frac{l}{2}\,; \quad \ln r_a = Z_0\,. \tag{26}$$

Potențialul complex se scrie

$$\Phi = \Phi_0^{*} + \Phi_0^{**} \ln y - \frac{k\mathcal{M}}{2\pi} \ln \left[ \frac{\operatorname{sn}\left(\frac{iK}{a} \ln \frac{y}{y_0}\right)}{\operatorname{sn}\left(\frac{iK}{a} \ln \frac{y}{y_0^{*}}\right)} \right] \tag{27}$$

iar operînd o translație în planul $Y$

$$Y = Y' - ib\,; \quad -iY' = \ln y \tag{28}$$

se poate apoi obține orice corespondență între $l$, $b$ și $r_0$, $r_1$, $r_a$.

Dacă alimentarea se face prin mai multe șiruri de orificii, soluția se obține însumînd un număr corespunzător de relații de tipul (27).

*Suprafețe de formă oarecare.* Plecînd de la problema pusă pentru un contur circular, se poate trece apoi la un contur de formă oarecare, utilizînd direct rezultatele din mecanica fluidelor [6] privind mișcarea plană în jurul unui contur de formă generală, cu ajutorul unor transformări conforme corespunzătoare. Transformarea conformă poate fi dedusă plecînd de la dezvoltarea în serie a acesteia.

Cazul cel mai simplu îl constituie transformarea

$$y = Y + \frac{a^2}{Y} \tag{29}$$

prin care un cerc de rază $r_0$ din planul $Y$ se transformă în planul $y$ într-o *elipsă* de ecuație

$$\frac{x^2}{\left(r_0 + \frac{a^2}{r_0}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(r_0 - \frac{a^2}{r_0}\right)} = 1\,. \tag{30}$$

*Suprafețe dreptunghiulare.* Un caz special, util pentru calculul lagărelor axiale formate din sectoare îl constituie cazul suprafețelor dreptunghiulare. Problema poate fi rezolvată simplu sub o formă închisă cu ajutorul funcțiilor eliptice [6].

Astfel un dreptunghi $ABCD$ (fig. 8) se transformă pe un cerc cu ajutorul transformării conforme

$$Y = \frac{\operatorname{sn}\frac{\lambda}{2} y \operatorname{dn}\frac{\lambda}{2} y}{\operatorname{cn}\frac{\lambda}{2} y} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cn} \lambda y}{1 + \operatorname{cn} \lambda y}} \tag{31}$$

unde constantele $K$ şi $K'$ care determină perioadele $4nK + i2n\,K'$ sînt astfel alese încît

$$\frac{K}{l} = \frac{K'}{b} = \frac{\lambda}{2}\,. \qquad (32)$$

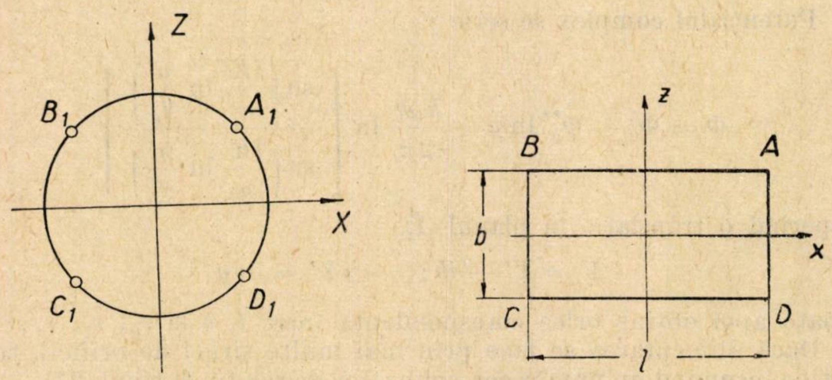


Fig. 8

De exemplu un dreptunghi alimentat central pe un contur cvasicircular corespunde în planul $Y$ mişcării datorite unei surse. În consecinţă

$$\Phi = \Phi_0^* - \frac{k\mathcal{M}}{2\pi} \ln Y = \Phi_0^* - \frac{k\mathcal{M}}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{sn}\frac{\lambda}{2} y \operatorname{dn}\frac{\lambda}{2} y}{\operatorname{cn}\frac{\lambda}{2} y}\,. \qquad (33)$$

Dacă orificiul este deplasat faţă de origine cu distanţa $e$ în lungul axei reale, atunci

$$\Phi = \Phi_0^* - \frac{k\mathcal{M}}{2\pi} \ln \frac{\dfrac{\operatorname{sn}\frac{\lambda}{2} y \operatorname{dn}\frac{\lambda}{2} y}{\operatorname{cn}\frac{\lambda}{2} y} - a_1}{\dfrac{\operatorname{sn}\frac{\lambda}{2} y \operatorname{dn}\frac{\lambda}{2} y}{\operatorname{cn}\frac{\lambda}{2} y} - \dfrac{r_0^2}{a_1}}\,, \qquad (34)$$

unde

$$a_1 = \frac{\operatorname{sn}\frac{\lambda e}{2} \operatorname{dn}\frac{\lambda e}{2}}{\operatorname{cn}\frac{\lambda e}{2}}\,; \qquad r_0 = \frac{\operatorname{sn}\frac{\lambda l}{4} \operatorname{dn}\frac{\lambda l}{4}}{\operatorname{cn}\frac{\lambda l}{4}}\,. \qquad (35)$$

De o manieră asemănătoare se pot trata şi celelalte probleme examinate pentru suprafeţe circulare.

*Suprafeţe în formă de sector circular.* Aşa după cum s-a mai arătat problema poate fi rezolvată cu ajutorul transformării conforme (25) plecînd de data aceasta de la o suprafaţă dreptunghiulară. Într-adevăr

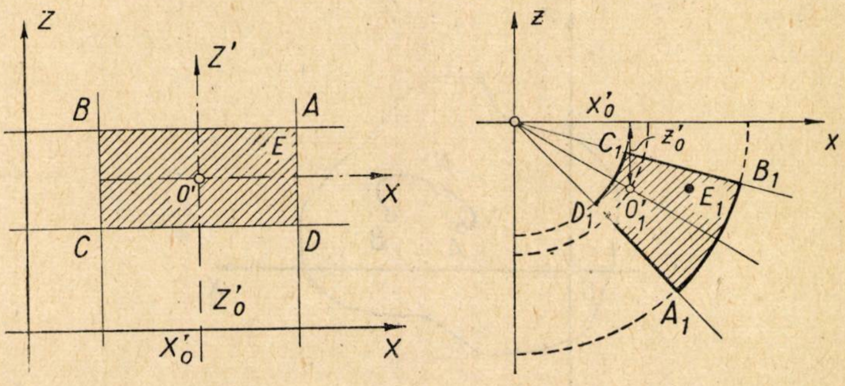


Fig. 9

în acest mod dreptunghiul $ABCD$ (fig. 9) se transformă în sectorul circular $A_1B_1C_1D_1$.

De exemplu, un sector circular alimentat într-un punct oarecare $E_1$ pe un contur circular de rază redusă, poate fi studiat plecînd de la un dreptunghi alimentat într-un punct $E$. Ţinînd seama de formulele (34), (35), potenţialul complex se scrie

$$\Phi = \Phi_0^* - \frac{k\mathcal{M}}{2\pi} \ln f(y) \tag{36}$$

unde

$$f(y) = \frac{\dfrac{\operatorname{sn}\left(\dfrac{i\lambda}{2}\ln\dfrac{y}{y'_0}\right)\operatorname{dn}\left(\dfrac{i\lambda}{2}\ln\dfrac{y}{y'_0}\right)}{\operatorname{cn}\left(\dfrac{i\lambda}{2}\ln\dfrac{y}{y'_0}\right)} - a_1}{\dfrac{\operatorname{sn}\left(\dfrac{i\lambda}{2}\ln\dfrac{y}{y'_0}\right)\operatorname{dn}\left(\dfrac{i\lambda}{2}\ln\dfrac{y}{y'_0}\right)}{\operatorname{cn}\left(\dfrac{i\lambda}{2}\ln\dfrac{y}{y'_0}\right)} - \dfrac{r_0^2}{a_1}}, \tag{37}$$

în care

$$y'_0 = i \ln Y'_0 . \tag{38}$$

*Suprafeţe alimentate printr-o fantă.* Acest caz se deduce imediat dacă se cunoaşte problema similară corespunzătoare alimentării printr-un singur orificiu. Într-adevăr fie un contur oarecare $C$ (fig. 10) alimentat printr-o fantă $AB$.

Să presupunem că cunoaştem soluţia problemei în cazul cînd conturul $C$ este alimentat printr-un singur orificiu, plasat într-un punct oarecare $N$. În cazul fantei putem considera că există suprapuse o infinitate de cazuri de mai sus, pe fiecare element $ds$ al fantei $AB$ existînd deci o sursă de debit

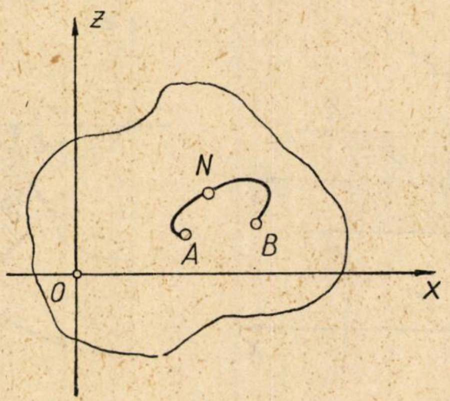


Fig. 10

$$d\mathcal{M} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial s} ds = m\, ds, \tag{39}$$

unde $m$ poate fi constant sau variabil.

Dacă potenţialul corespunzător este $d\,\Phi(y, y_0)$ unde $y_0$ este afixul punctului $N$, atunci cînd potenţialul $\Phi$ datorit sursei liniforme $AB$ va fi dat de formula

$$\Phi = \int_A^B d\,\Phi(y, y_0) = \iint_A^B d\left(\frac{d\Phi}{dy}\right) dy\,, \tag{40}$$

unde variabila de integrare pe linia $AB$ este $y_0$. În ultima formă integrarea în raport cu $y_0$ se efectuează asupra vitezei complexe $\frac{d\Phi}{dy}$, eliminîndu-se astfel o serie de constante care produc dificultăţi la integrare.

Fie de exemplu o suprafaţă circulară alimentată simetric printr-o fantă $AB$ (fig. 11) de debit $m(x)$. Plecînd de la formula (15) se deduce

$$\Phi = \Phi_0^* - \frac{k}{2\pi}\int_{-a}^{+a} m(x_0) \ln \frac{y - x_0}{y - \frac{r_0^2}{x_0}}\, dx_0 =$$

$$= \Phi_0^* - \frac{k}{2\pi}\int dy \int_{-a}^{+a} m(x_0) \left(\frac{1}{y - x_0} - \frac{1}{y - \frac{r_0^2}{x_0}}\right) dx_0\,, \tag{41}$$

sau, dacă $m(x_0) = \text{const.}$

$$\Phi = \Phi_0^{\star} - \frac{k\mathcal{M}}{2\pi}\left\{ y \ln \frac{y+a}{y-a} + \frac{r_0^2}{y} \ln \frac{\dfrac{r_0^2}{a} + y}{\dfrac{r_0^2}{a} - y} + \right.$$

$$\left. + a \ln (y^2 - a^2)\left(y^2 - \frac{r_0^4}{a^2}\right)\right\}. \tag{42}$$

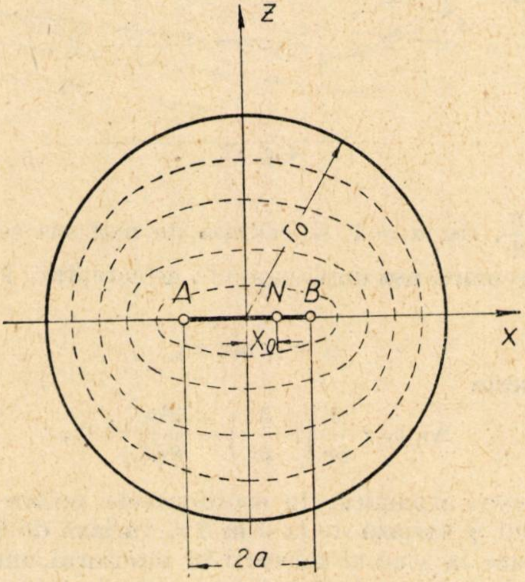


Fig. 11

Dacă lungimea $2a$ este mică faţă de $2r_0$ contribuţia surselor exterioare este neglijabilă şi formula de mai sus se scrie aproximativ

$$\Phi \cong \Phi_0^{\star} - \frac{k\mathcal{M}}{2\pi a}\left[(y+a)\ln(y+a) - (y-a)\ln(y-a)\right], \tag{43}$$

unde cu $\mathcal{M} = 2am$ s-a notat debitul total.

Oricare din liniile $\eta = \text{const.}$ obţinute în acest mod poate fi considerată drept conţinutul unui eventual buzunar de alimentare. Invers alegînd $m(x)$ şi $a$ convenabil putem obţine orice contur dorim pentru buzunarul de alimentare. Probleme asemănătoare se pot pune pentru suprafeţe de formă dreptunghiulară, coroane sau sectoare circulare, fîşii infinite etc.

*Suprafeţe conice.* În cazul lagărelor conice, alegînd un sistem de coordonate $r_2$ $\theta_1$ $\varphi$ sferic avînd raza $r$ în lungul generatoarei, iar unghiul

$\theta$ însuşi semiunghiul la vîrf al conului ($\theta = \alpha$) ecuaţia diferenţială pentru $\eta$ se deduce sub forma

$$r \frac{\partial}{\partial r}\left(r h^3 \frac{\partial \eta}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(h^3 \frac{\partial \eta}{\partial \varphi}\right) = 0 . \tag{44}$$

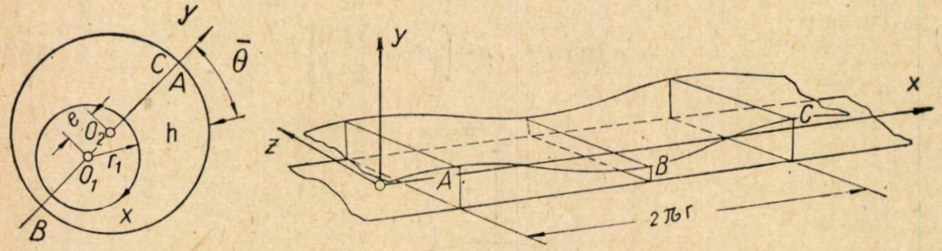


Fig. 12

Dacă $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\sin \alpha = 1$ şi ecuaţia de mai sus se reduce la cazul a două discuri circulare, aşa după cum era de aşteptat. Pentru $h$ = const. şi notînd cu

$$\bar{\varphi} = \varphi \sin \alpha , \tag{45}$$

ecuaţia (44) se scrie

$$\Delta \eta = r \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \eta}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \bar{\varphi}^2} = 0 , \tag{46}$$

deci funcţia $\eta$ este armonică, în coordonatele polare modificate $r, \bar{\varphi}$.

Cînd unghiul $\varphi$ variază de la 0 la $2\pi$, variază de la 0 la $2\pi \sin \alpha$. Problema se reduce la studiul mişcării în interiorul unui sector circular sau coroană circulară alimentată printr-o serie de orificii, şi pentru care se pot utiliza direct formulele deduse, cu observaţia că distanţa dintre orificii se modifică prin introducerea substituţiei (46).

*Cazul grosimii h variabile.* Cazul $h$ = const. examinat în consideraţiile precedente are aplicaţii directe la calculul lagărelor axiale. Pentru lagărele radiale (suprafeţe cilindrice circulare) lagărul capătă în sarcină o excentricitate (fig. 12) iar grosimea stratului de lubrifiant nu mai rămîne constantă ci este dată de relaţia

$$h = c + e \cos \bar{\theta} = c\,(1 + \varepsilon \cos \bar{\theta}) , \tag{47}$$

unde $c$ este jocul radial, $e$ excentricitatea iar $\varepsilon = \frac{e}{c}$ excentricitatea relativă ; $\bar{\theta} = \frac{x}{r_1}$ unde $r_1$ este raza fusului.

Efectul existenţei excentricităţii asupra caracteristicilor scurgerii se manifestă prin două căi : pe de o parte se modifică însăşi forma ecuaţiei diferenţiale a presiunilor prin introducerea factorului $h^3$ (2), iar pe de alta debitul care se scurge prin fiecare orificiu nu mai este acelaşi la toate orificiile, ci depinde de grosimea locală $h$ a stratului de lubrifiant. Ultimul efect este cel predominant deoarece de acesta depinde disimetria curbei presiunilor datorită căreia apare capacitatea portantă a lagărului.

Rezolvarea ecuației presiunilor sub forma (2) se poate face aproximînd grosimea $h$ cu o lege care să reducă în cele din urmă ecuația (2) tot la un laplacian (de exemplu alegînd $h$ astfel încît $h^{3/2}$ să fie o funcție armonică [7]). Pentru a simplifica calculele se poate însă extinde direct analogia hidrodinamică, cel puțin pentru excentricități reduse, modificînd însă condițiile la limită în mod corespunzător.

Astfel deoarece întotdeauna $\varepsilon < 1$ putem dezvolta $\eta$ după puterile lui $\varepsilon$

$$\eta = (\eta)_0 + \varepsilon(\eta)_1 + \varepsilon^2(\eta)_2 + \dots \tag{48}$$

rezultînd din ecuația (2) următorul şir de ecuații diferențiale pentru funcțiile $(\eta)_n$

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta(\eta)_0 = 0\,,\\
&\Delta(\eta)_1 = 3\sin\bar\theta\,\frac{\partial(\eta)_0}{\partial\bar\theta}\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\Delta(\eta)_n = 3\sin\bar\theta\,\frac{\partial(\eta)_{n-1}}{\partial\bar\theta} + 3\cos\bar\theta\left[2\sin\theta\,\frac{\partial(\eta)_{n-2}}{\partial\bar\theta} - \Delta(\eta)_{n-1}\right] +\\
&\qquad + 3\cos^2\bar\theta\left[\sin\bar\theta\,\frac{\partial(\eta)_{n-3}}{\partial\bar\theta} - \Delta(\eta)_{n-2}\right] - \cos^3\bar\theta\,\Delta(\eta)_{n-3}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Dacă se consideră numai primii doi termeni ai dezvoltării în serie (experimental se constată o dependență cvasiliniară a încărcării funcție de excentricitate), rezultă că funcția $\eta$ rămîne în continuare armonică dacă $\frac{\partial(\eta)_0}{\partial\bar\theta} = 0$ respectiv dacă pentru $\varepsilon = 0$ distribuția presiunilor nu depinde de $x = r_1\bar\theta$. Acesta este cazul lagărelor alimentate printr-o fantă centrală [1]. În cazul alimentării prin orificii $\frac{\partial(\eta)_0}{\partial\bar\theta} \neq 0$ ; totuși, dacă orificiile sînt în număr relativ mare, variația în funcție de $\bar\theta$ este destul de redusă, începînd de la o mică distanță față de planul în care sînt plasate orificiile de alimentare.

În asemenea condiții se pot utiliza direct formulele (20) -- (22) relative la cazul unei fîşii infinite. Vom avea însă un șir de surse de debite diferite. Deoarece mişcarea este periodică cu perioada $\bar\theta = 2k\pi$, potențialul complex se scrie însumînd o serie de soluții de tipul (22). Astfel pentru fiecare orificiu $A_{s,0}$ ($1 \leqslant s \leqslant N$, fig. 13) vom avea o asemenea soluție corespunzătoare unui șir de surse distanțate între ele cu $2\pi r_1$. Luînd drept coordonate $\overline{\theta} = \frac{x}{r_1}$ și $\frac{z}{r_1}$ în loc de $x$ și $z$ vom putea scrie

$$\Phi = \Phi_0^{*} - i\,\Phi_0^{**}\frac{y}{r_1} - \sum_{s=1}^{N}\frac{k_s\,\mathcal{M}_s}{2\pi}\ln\frac{\operatorname{sn}\dfrac{k\,(y-y_{0s})}{r_1\,\pi}}{\operatorname{sn}\dfrac{K\,(y-\dot{y}_{0\,s})}{r_1\pi}}, \tag{50}$$

unde acum $a = \pi$, iar lățimea fîșiei $2\lambda = \frac{b}{r_1}$ · Constanta $K$ este aceeași pentru toate șirurile, iar $y_{0s}$ este afixul orificiului $A_{s.0}$.

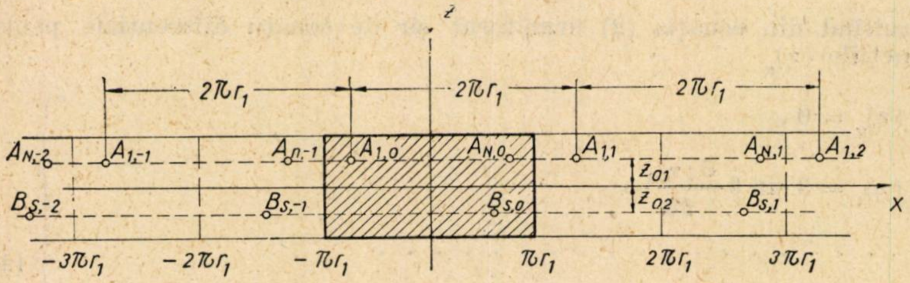


Fig. 13

Constantele $k_s, \mathcal{M}_s$ depind de presiunea de alimentare și de grosimea locală $h$ a stratului de lubrifiant și sînt considerate drept mărimi cunoscute în formulele de mai sus. În realitate, ele vor rezulta din condiții de echilibru între debitul de alimentare și debitul ce trece prin lagăr.

În sfîrșit, constantele $\Phi_0^{*}$ și $\Phi_0^{**}$ se determină din condiția ca $\eta$ să ia valorile prescrise pe frontierele $z = \pm\frac{b}{2}\left(\frac{z}{r_1} = \pm\lambda\right)$. În particular, dacă pe ambele frontiere $\eta = \eta_0$, atunci $\Phi_0^{**} = 0$ și $\mathcal{Re}\,(\Phi_0^{*}) = \eta_0$.

O simplificare se poate efectua în cazul lagărelor de alungiri mai mari pentru care, în locul formulei (22) se poate considera formula (24)

$$\Phi = \Phi_0^{*} - i\,\Phi_0^{**}\frac{y}{r_1} + \sum_{s=1}^{N}\frac{k_s\,\mathcal{M}_s}{2\pi}\ln\sin\frac{y-y_{0s}}{2r_1}. \tag{51}$$

În plus, dacă lagărul este alimentat prin două sau mai multe rînduri de orificii, de exemplu $A_{s,0}$, $B_{s,0}$ (fig. 13), formulele de mai sus păstrează aceeași formă cu observația că însumarea se extinde la toate orificiile.

În cazul unui lagăr circular alimentat printr-o fantă continuă pe circumferință [1], problema se reduce la cazul unei fîșii infinite alimentată printr-o sursă liniformă, de lungime infinită, avînd debitul $m\,(x)$ variind periodic cu perioada $2\pi r_1$.

Ținînd seama de formula (40) vom putea scrie

$$\Phi = \Phi_0^{*} - i\,\Phi_0^{**}\frac{y}{r_1} - \int_{-\pi r_1}^{\pi r_1}\frac{k(x_0)\,m(x_0)}{2\pi r_1}\ln\frac{\operatorname{sn}\dfrac{K(y-y_0)}{\pi r_1}}{\ln\dfrac{K(y-y_0^{*})}{\pi r_1}}\,dx_0, \tag{52}$$

sau în cazul alungirilor mai mari (51)

$$\Phi = \Phi_0^{*} - i\,\Phi_0^{**}\frac{y}{r_1} + \int_{-\pi r_1}^{\pi r_1}\frac{k(x_0)\,m(x_0)}{2\pi r_1}\ln\sin\frac{y-y_0}{2r_1}\,dx_0. \tag{53}$$

De exemplu să considerăm cazul simplu cînd $k$ și $m$ sînt constante și să plecăm de la a doua formulă (40) respectiv de la viteza complexă. Din (53), dacă în plus sursa liniformă este plasată simetric ($z_0 = 0$) se deduce imediat

$$\Phi = \Phi_0^{*} - i\,\Phi_0^{**}\frac{y}{r_1} + \int dy\int_{-\pi}^{\pi}\frac{km}{4\pi}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\left(\frac{y}{r_1}-\overline{\theta}\right)d\overline{\theta} = \tag{54}$$

$$= \Phi_0^{*} - i\,\Phi_0^{**}\frac{y}{r_1} + \int i\frac{km}{2}\,dy = \Phi_0^{*} - i\,\Phi_0^{**}\frac{y}{r_1},$$

deoarece constanta $km$ poate fi inclusă în $\Phi_0^{**}$. Separînd partea reală se regăsește concluzia că în acest caz ($\varepsilon = 0$) funcția $\eta$ variază liniar cu $z$ și este constantă în raport cu $\overline{\theta}$, dedusă și anterior [1].

*

Din cele de mai sus rezultă că utilizarea analogiei cu mișcarea potențială plană a unui fluid perfect incompresibil permite, cel puțin teoretic, soluționarea tuturor problemelor care se pot pune în legătură cu scurgerea unui gaz alimentat sub presiune între două suprafețe paralele ($h$ = const.), și aproximativ poate fi extinsă și pentru unele cazuri în care grosimea $h$ este variabilă. Metoda se pretează în deosebi la calculul suprafețelor alimentate printr-unul sau mai multe orificii de dimensiuni reduse. În restul cazurilor calculele devin destul de laborioase. Remarcăm totuși avantajul metodei de a obține în mod simplu și intuitiv soluția analitică chiar pentru cazuri complexe. Astfel problema alimentării unor suprafețe de formă în plan oarecare printr-un buzunar de alimentare de formă de asemenea oarecare, poate fi soluționată introducînd o sursă liniformă de debit $m(x)$ ales convenabil, așa după cum s-a arătat. Mai mult, dacă suprafețele sînt multiplu conexe se pot obține rezultate utile plecînd de la analogie cu problema torsiunii barelor cu mai multe goluri interioare pentru care atît ecuația diferențială cît și condițiile la limită sînt analoge problemei de lubrificație considerate.

*Primită la redacție la 3 august 1961*

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЙ В ПОДШИПНИКАХ, ПИТАЕМЫХ ПОД ДАВЛЕНИЕМ, ПУТЕМ ПРИМЕНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ АНАЛОГИИ

## РЕЗЮМЕ

Исходя из замечания, что подходящим образом выбранная функция давления является при этом гармонической, устанавливается аналогия с потенциальным плоским движением идеальных жидкостей. В продолжении приводится ряд примеров движений, для которых пишется соответствующий комплексный потенциал, которые находят свое применение при расчете подшипников с жидкостной или газовой смазкой под давлением.

# DETERMINATION OF THE PRESSURE DISTRIBUTION IN HYDROSTATIC BEARINGS BY USING A HYDRODYNAMIC ANALOGY

## ABSTRACT

Proceeding form the remark that a conveniently chosen pressure function is, in this case, a harmonic function, an analogy with the potential plane motion of ideal fluids is established in this paper. Further, a series of examples are presented of motion for which the corresponding complex potential is written; these examples find their application in the computation of liquid or gas hydrostatic bearings.

## BIBLIOGRAFIE

1. V. N. Constantinescu, *Consideraţii asupra determinării distribuţiei presiunilor în lagărele alimentate sub presiune.* SCMA, *5* (1961).
2. — *Scurgerea laminară a gazelor în straturi subţiri.* Comunicările Acad. R.P.R., **VI**, *2*, 281—284 (1956).
3. Я. М. Котляр, *Течение вязкого газа в зазоре между двумя коаксиальными цилиндрами.* Известия Академии Наук СССР, Отделение Технических Наук, *10*, 12—18 (1957).
4. S. Raynor, A. Charnes, *Flow Parameters in Hydrostatic Lubrication for Several Bearing Shapes.* Transactions of the ASME, Series D, Journal of Basic Engineers, **82**, *2*, June, 257—264 (1960).
5. H. I. Helle-Shaw, *Investigation of the Nature of the Surface Resistance of Water and of Stream.* Live Motion under Certain Experimental Conditions — Trans. of the Institution of Naval Architects, **40** (1898).
6. E. Carafoli, T. Oroveanu, *Mecanica fluidelor.* **II**, Editura Acad. R.P.R., Bucureşti, 1955.
7. Я. М. Котляр, *Некоторые примеры движения вязкого газа в узком зазоре переменной толщины.* Известия Академии Наук СССР, Отделение Технических Наук, *5*, 34—39 (1958).

# STUDIUL CINEMATIC AL MECANISMELOR SPAȚIALE CU PATRU ORGANE PRIN METODA MATRICIALĂ-TENSORIALĂ

DE

D. MANGERON şi C. DRĂGAN

1. Apariţia recentă a unui număr de studii de sinteză ştiinţifică în domeniul teoriei mecanismelor şi maşinilor [1] — [7] favorizată în bună parte de un şir de conferinţe cu largă participare internaţională interesînd această disciplină de importanţă din ce în ce mai mare în rezolvarea problemelor de automatizare a proceselor de producţie, a fost promovată îndeosebi ca urmare a desfăşurării de anvergură a lucrărilor celei de-a doua Conferinţe Unionale consacrată problemelor fundamentale de teoria maşinilor şi mecanismelor [8], [9].

Acad. I. I. Artobolevski în memoriul său fundamental consacrat problemelor actuale de dinamica maşinilor, expus la plenara celei de-a treia Conferinţe generale poloneze de teoria mecanismelor şi maşinilor [10] a subliniat, dezvoltînd şi adîncind [2], formularea şi abordarea procedeelor de rezolvare a problemelor de dinamica maşinilor, pe cînd N. I. Levitski [11], F. Freudenstein [5], G. Kalitzin [12] şi alţii au scos în evidenţă în lucrările lor de sinteză ştiinţifică trăsăturile caracteristice ale dezvoltării viitoare a teoriei mecanismelor şi maşinilor în ceea ce priveşte latura lor cinematică.

Din rezultatele analizei acestor din urmă autori precum şi dintr-o serie de lucrări de cercetare ştiinţifică datorite lui Iu. F. Moroşkin [13], G. S. Kisliţîn [14], L. P. Riftin [15], G. Kalitzin [16], R. S. Hartenberg şi J. Denavit [17], D. Mangeron şi C. Drăgan [18] — [20] şi alţii, decurge faptul că dezvoltarea teoriei mecanismelor şi maşinilor va fi caracterizată în anii imediat următori, în afară de aplicarea puternicului aparat de investigaţie ştiinţifică cristalizat în teoria ecuaţiilor diferenţiale, integrale şi integro-diferenţiale, sprijinit esenţial prin metodele calculului numeric şi prin folosirea maşinilor matematice de calcul, prin utilizarea metodelor de algebră liniară, a numerelor duale şi mai general a corpurilor hipercomplexe, a calculului matricial şi tensorial, acest din urmă calcul corespunzînd prin natura sa la rezolvarea numeroaselor probleme de analiză şi în parte şi de sinteza mecanismelor plane şi spaţiale.

Autorii, urmînd ordinea de idei a noii metode matriciale-tensoriale de studiu a mecanismelor, jalonată recent într-o lucrare a lor apărută sub auspiciile Institutului de matematică al Academiei de Ştiinţe a R. P. Bulgaria [18], studiază prin metoda elaborată şi expusă succint în cele ce urmează, cinematica mecanismelor spaţiale cu patru organe. Mecanismul spaţial cu patru organe luat ca bază în această lucrare şi reprezentat în figura 1 s-a ales din seria de mecanisme folosite de V. A. Zinoviev în documentatele sale lucrări de aplicare a metodei vectoriale în studiul structural şi cinematic al mecanismelor [22].

2. Fie relaţiile

$$x_{\nu-1, j} = x_j^{\nu} + \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ij}^{(\nu, \nu-1)} x_{\nu i}, \; (j = 1, 2, 3), \tag{1}$$

ce stabilesc corespondenţă biunivocă între punctele domeniilor tridimensionale $D^3_{\nu-1}$ şi $D^3_{\nu}$, legate respectiv de două organe consecutive $I_{\nu-1}$ şi $I_{\nu}$ ale unui lanţ cinematic şi care formează o cuplă cinematică, $\alpha_{ij}^{(\nu, \nu-1)}$ etc. fiind definite prin notaţiile clasice

$$\begin{aligned} &\alpha_{ij}^{(\nu, \nu-1)} = \cos(\tau_i^{\nu}, \tau_j^{\nu}), 0_{\nu-1}\, x_{\nu-1, 1}\, x_{\nu-1, 2}\, x_{\nu-1, 3} \in I_{\nu-1} \subset D^3_{\nu-1}, \\ &0_{\nu}\, x_{\nu 1}\, x_{\nu 2}\, x_{\nu 3} \in I_{\nu} \subset D^3_{\nu}, \; 0_{\nu}(x_1^{\nu}, x_2^{\nu}, x_3^{\nu}) \in I_{\nu-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Introducînd noile variabile $X_{\lambda\mu}$ definite prin

$$X_{\nu-1, i+1} = x_{\nu-1, i} X_{\nu-1, 1}, \; X_{\nu, i-1} = x_{\nu i} X_{\nu i}, \; X_{\nu-1, 1} = X_{\nu 1}, \; (i = 1, 2, 3,) \tag{3}$$

cupla cinematică considerată este caracterizată prin matricea tensor

$$F^{(\nu, \nu-1)} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^{\nu} & \alpha_{11}^{(\nu, \nu-1)} & \alpha_{21}^{(\nu, \nu-1)} & \alpha_{31}^{(\nu, \nu-1)} \\ x_2^{\nu} & \alpha_{12}^{(\nu, \nu-1)} & \alpha_{22}^{(\nu, \nu-1)} & \alpha_{32}^{(\nu, \nu-1)} \\ x_3^{\nu} & \alpha_{13}^{(\nu, \nu-1)} & \alpha_{23}^{(\nu, \nu-1)} & \alpha_{33}^{(\nu, \nu-1)} \end{matrix} \right\|, \tag{4}$$

numită tensor de poziţie al organului $I_{\nu}$ faţă de organul $I_{\nu-1}$.

Lăsînd la o parte aici variate interpretări posibile ale transformării (3), (3 a) din punctul de vedere al coordonatelor proiective [23] sau ca tensor ortogonal-afin de ordinul 2 [18]

$$X_{\nu-1, 1} = X_{\nu 1}, \; X_{\nu-1, i+1} = x_i^{\nu} X_{\nu 1} + \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ji}^{(\nu, \nu-1)} X_{\nu, j+1}, (i = 1, 2, 3) \tag{3a}$$

şi renunţînd la a scrie tensorii de poziţie ce caracterizează cuple elicoidale, rotoide, de translaţie ce intervin în studiul lanţurilor cinematice cu cuple inferioare, menţionăm că un lanţ cinematic simplu deschis, extras dintr-un lanț cinematic oarecare, este caracterizat prin *tensorul* specific *lanțului* sau *ciclului*

$$T^{(n,\,0)} = \prod_{\nu=1}^{n} T^{(\nu,\,\nu-1)}, \tag{5}$$

pe cînd ecuația

$$T^{(n^{\star},\,0)} = E, \ (n^{\star} \equiv 0), \tag{6}$$

în care $E$ este tensorul unitate, constituie *ecuația de închidere* a unui lanț sau ciclu cinematic [19], [24], [25]. Subliniem totodată că ecuația (5) este cea mai concentrată formă a ecuațiilor fundamentale ale geometriei mecanismelor, comparabilă doar cu unica ecuație de transformare (9), transcrisă în coordonate plückeriene duale de Iu. F. Moroșkin [26] ca o consecință a ecuațiilor lui A. P. Kotelnikov [27].

Tensorul de poziție (4) conține toate caracteristicile mișcării relative a organului $I_\nu$ față de organul $I_{\nu-1}$ întrucît cu ajutorul *tensorului viteză* definit prin

$$T_{\text{vit}}^{(\nu,\,\nu-1)} = \frac{d\,T^{(\nu,\,\nu-1)}}{dt} = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dot{x}_1^{\nu} & \dot{\alpha}_{11}^{(\nu,\,\nu-1)} & \dot{\alpha}_{21}^{(\nu,\,\nu-1)} & \dot{\alpha}_{31}^{(\nu,\,\nu-1)} \\ \dot{x}_2^{\nu} & \dot{\alpha}_{12}^{(\nu,\,\nu-1)} & \dot{\alpha}_{22}^{(\nu,\,\nu-1)} & \dot{\alpha}_{32}^{(\nu,\,\nu-1)} \\ \dot{x}_3^{\nu} & \dot{\alpha}_{13}^{(\nu,\,\nu-1)} & \dot{\alpha}_{23}^{(\nu,\,\nu-1)} & \dot{\alpha}_{33}^{(\nu,\,\nu-1)} \end{matrix} \right\| , \left( \dot{} \equiv \frac{d}{dt} \right) \tag{7}$$

definit și obținut prin derivare în raport cu timpul a tensorului (4), se obțin — de asemenea sub formă matricială-tensorială — așa cum s-a arătat în [18], vector viteză unghiulară instantanee $\vec{\omega}^{(\nu,\,\nu-1)}$ și viteza $\vec{v}_{0_\nu}^{(\nu,\,\nu-1)}$ a punctului $O_\nu$ în mișcarea organului $I_\nu$ față de organul $I_{\nu-1}$, raportat la triedrul $O_{\nu-1}\, x_{\nu-1,\,1}\, x_{\nu-1,\,2}\, x_{\nu-1,\,3}$.

### 3. *Studiul cinematic al unui mecanism spațial cu patru organe la care organul final este asociat la batiu printr-o cuplă elicoidală.*

A. *Problema configurațiilor.* Fie mecanismul spațial reprezentat în figura 1. El constituie un lanț cinematic spațial simplu închis cu un singur grad de mobilitate, organul fix (batiul) fiind notat prin $I_0$. Toate organele lanțului cinematic și toate cuplele cinematice care asociază organele între ele sînt cuprinse într-un singur circuit simplu închis. Cazul cel mai general este acela în care axa $O_3\, x_{33}$ a articulației ce asociază organul inițial $I_3$ la batiu și axa $O_0\, x_{03}$ a cuplei elicoidale ce asociază organul final $I_1$ la batiu sînt două drepte neparalele și neconcurente, perpendiculara lor comună fiind dreapta $N_0\, O_0$. Sensul ales pentru parcurgerea circuitului este indicat prin numerotarea organelor.

Asocierea dintre organul $I_1$ și organul $I_2$ se face printr-o articulație sferică cu deget, echivalentă cu două articulații ce se succed avînd axele perpendiculare. Articulația sferică ce asociază organele $I_2$ și $I_3$ este echivalentă cu trei articulații avînd axele perpendiculare între ele.

Pentru ca trei articulații ce se succed să fie echivalente cu o articulație sferică, nu este suficient numai ca axa celei de-a doua articulații să fie perpendiculară pe axa primei şi a celei de-a treia pe axa celei de-a doua, ci este impusă, din însăşi construcţia articulaţiei sferice, condiţia suplimentară ca axa celei de-a treia articulaţii să fie perpendiculară pe axa primei articulaţii. Existenţa acestei condiţii suplimentare produce modificarea orientării axei a cel puţin unei articulaţii în organul fictiv limitat de două articulaţii succesive.

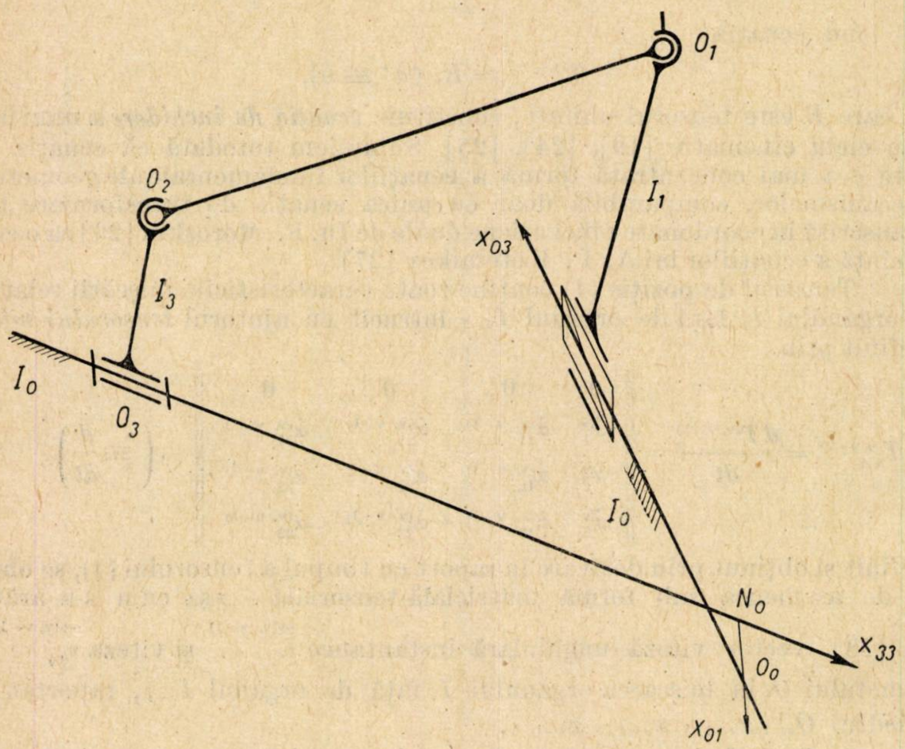


Fig. 1

Pentru a evita această modificare a orientării, se procedează astfel :

Se consideră planul fix $Q$ definit de dreapta $O_0\, x_{03}$ (axa cuplei elicoidale ce asociază organul $I_1$ la batiul $I_0$) şi de paralela $O_0\, \alpha$ la dreapta $O_3\, x_{33}$ (axa articulaţiei ce asociază organul iniţial $I_3$ la batiul $I_0$). Se proiectează punctul $O_1$ (centrul comun a sferelor ce alcătuiesc articulaţia sferică cu deget) pe planul $Q$, notîndu-se cu $O_1'$ acest punct. Dreapta $O_1\, O_1'$ este paralelă cu dreapta $N_0\, O_0$ (fig. 2). Se introduc organele fictive de lungime variabilă $I_1'$ şi $I_2'$. Organul $I_1'$ este asociat la organul fix $I_0$ prin cupla de translaţie $P^{(1',0)}_{(s_1')}$, axa acesteia fiind tocmai axa cuplei elicoidale ce asociază organul $I_1$ la organul $I_0$. Variabila $s_1'$ a cuplei de translaţie este şi variabila cuplei elicoidale, aşa cum se vede uşor din figură. Asocierea organului $I'_1$ de organul $I'_2$ se face cu ajutorul articulației $R^{(2',1')}_{(\theta'_2)}$ a cărei axă este dreapta $O_1 O'_1$. Poziția organului $I_1$ față de organul fictiv $I'_1$ este dată de unghiul $\theta_1$. Axele solidare cu organul $I'_1$ sînt : axa $O'_1 x'_{13}$ este dreapta $O'_1 O_1$, axa $O'_1 x'_{11}$ este perpendiculara comună între $O_0 x_{03}$ și $O'_1 x'_{13}$, iar axa $O'_1 x'_{12}$ este luată astfel încît împreună cu primele două să formeze un triedru drept.

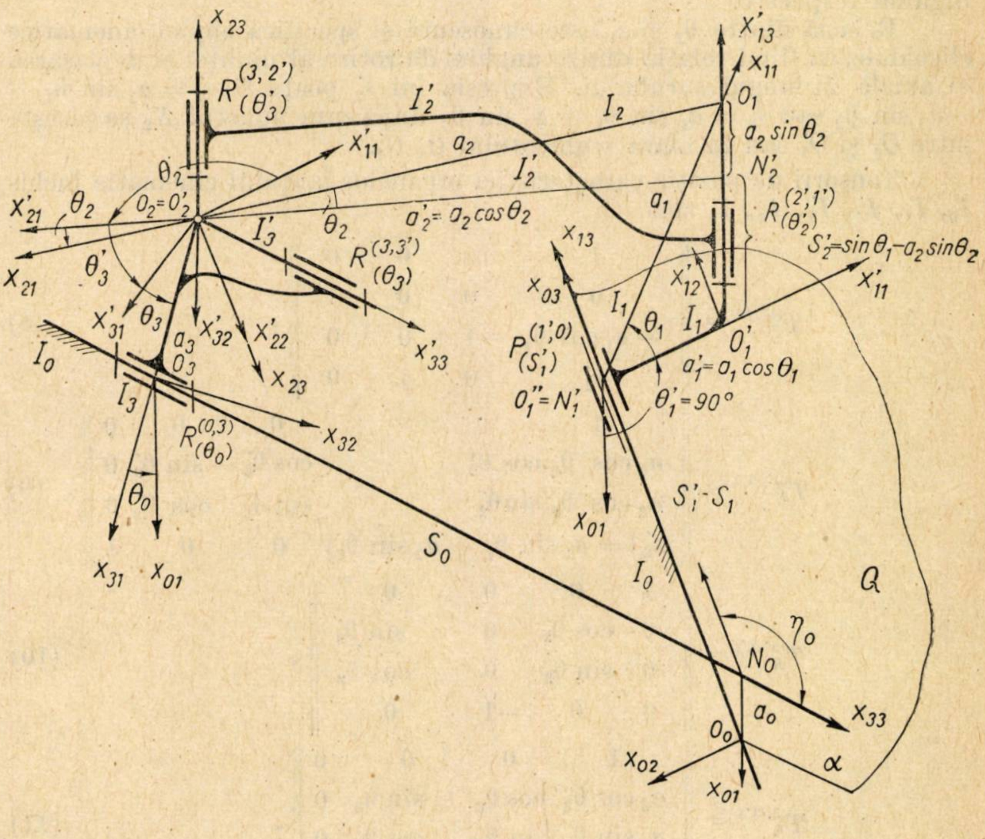

$x_{23}$
$R^{(3',2')}_{(\theta'_3)}$
$I'_2$
$I_2$
$x'_{13}$
$x_{11}$
$O_1$
$a_2 \sin\theta_2$
$N'_2$
$x'_{11}$
$a_2$
$I'_2$
$\theta'_2$
$O_2=O'_2$
$x'_{21}$
$\theta_2$
$x_{21}$
$\theta'_3$
$I'_3$
$\theta_2$
$a'_2=a_2\cos\theta_2$
$R^{(3,3')}_{(\theta_3)}$
$a_1$
$R^{(2',1')}_{(\theta'_2)}$
$S'_2=\sin\theta_1-a_2\sin\theta_2$
$x'_{11}$
$x_{13}$
$x_{03}$
$x'_{12}$
$I_1$
$\theta_1$
$I_1$
$O'_1$
$a'_1=a_1\cos\theta_1$
$\theta'_1=90°$
$P^{(1',0)}_{(S'_1)}$
$O''_1=N'_1$
$x'_{31}$
$\theta_3$
$a_3$
$x'_{32}$
$x'_{22}$
$O_3$
$x_{23}$
$x'_{33}$
$I_0$
$I_3$
$R^{(0,3)}_{(\theta_0)}$
$x_{32}$
$\theta_0$
$x_{31}$
$x_{01}$
$S_0$
$S'_1-S_1$
$x_{01}$
$I_0$
$Q$
$\eta_0$
$N_0$
$a_0$
$x_{33}$
$O_0$
$x_{02}$
$\alpha$
$x_{01}$

Fig. 2

drept. Organul fictiv $I'_2$ este asociat organului fictiv $I'_3$ prin articulația $R^{(3',2')}_{(\theta'_3)}$ a cărei axă $O'_2 x'_{23}$ este paralelă cu $O'_1 O_1$. Axa $O'_2 x'_{21}$ este situată după perpendiculara comună la axele articulațiilor ce limitează organul $I'_2$, iar axa $O'_2 x'_{22}$ este luată astfel încît împreună cu axele $O'_2 x'_{21}$ și $O'_2 x'_{23}$ să formeze un triedru drept. Poziția organului $I_2$ față de organul $I'_2$ este dată de unghiul $\theta_2$. Axa articulației $R^{(3,3')}_{(\theta_3)}$ care leagă organele $I'_2$ și $I'$ este paralelă cu axa articulației $R^{(0,3)}_{(\theta_0)}$ ce asociază organele $I_3$ și $I_0$.

Unghiul dintre axa $O_3 x_{33}$ și paralela la axa $O_0 x_{03}$ dusă prin punctul $N_0$ se notează prin $\eta_0$. El este unul din parametrii constanți și cunoscuți ai mecanismului. Dînd diferite valori lui $\eta_0$, $\theta_0$ şi $s_0$ se obţin cazuri particulare.

Lanţul cinematic fictiv $I_0$, $I'_1$, $I'_2$, $I'_3$, $I_3$ $I_0$ avînd unele organe de lungime variabilă este astfel încît axele a două cuple cinematice fundamentale (articulaţii sau cuple de translaţie), care asociază un organ al lanţului la organul precedent şi la cel următor în lanţ, nu-şi schimbă orientarea în organul respectiv.

Relaţia dintre $\theta_1$ şi $s'_1$ este cunoscută şi specifică cuplei cinematice elicoidale, ea fiind relaţia dintre unghiul de rotire al piuliţei şi deplasarea ei axială în lungul şurubului. Expresia lui $s'_2$ poate fi $s'_2 = a_1 \sin\theta_1 - a_2 \sin\theta_2$ sau $s'_2 = a_1 \sin\theta_1 + a_2 \sin\theta_2$ după cum punctul $N'_2$ se găseşte între $O_1$ şi $O'_1$ sau în afara segmentului $O_1$ $O'_1$.

Tensorii de poziţie caracteristici organelor lanţului cinematie închis $I_0$, $I'_1$, $I'_2$, $I'_3$, $I_3$, $I_0$ sînt

$$T_P^{(1',0)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -a_1\cos\theta_1 & -1 & 0 & 0 \\ s'_1 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{8}$$

$$T_R^{(2',1')} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2\cos\theta_2\cos\theta_2^1 & \cos\theta'_2 & -\sin\theta'_2 & 0 \\ a_2\cos\theta_2\sin\theta'_2 & \sin\theta'_2 & \cos\theta'_2 & 0 \\ s'_2\,(=a_1\sin\theta_1 - a_2\sin\theta_2) & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \tag{9}$$

$$T_R^{(3',2')} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta'_3 & 0 & -\sin\theta'_3 \\ 0 & \sin\theta'_3 & 0 & \cos\theta'_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{10}$$

$$T_R^{(3,3')} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_3\cos\theta_3 & \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ a_3\sin\theta_3 & \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \tag{11}$$

$$T_R^{(0,3)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_0\cos\theta_0 & \cos\theta_0 & -\sin\theta_0\cos\eta_0 & -\sin\theta_0\sin\eta_0 \\ a_0\sin\theta_0 & \sin\theta_0 & \cos\theta_0\cos\eta_0 & \cos\theta_0\sin\eta_0 \\ s_0 & 0 & -\sin\eta_0 & \cos\eta_0 \end{Vmatrix} \tag{12}$$

Tensorul $T^{(0,0)}$, ce caracterizează configuraţia aceluiaşi lanţ cinematic, fictiv, cu organe de lungime variabilă este

$$T^{(0,0)} = T^{(1',0)}\,T^{(2',1')}\,T^{(3',2')}\,T^{(3,3')}\,T^{(0,3)}, \tag{13}$$

adică

$$T^{(0,0)} = \left\| \begin{array}{cccc}
\text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
-a_1 \sin\theta_1 + a_2 \sin\theta_2 + a_3 \sin\theta_3 + a_0 \sin(\theta_0 + \theta_3) & \sin(\theta_2+\theta_3) & \cos(\theta_0 + \theta_3)\cos\eta_0 & \sin\eta_0 \cos(\theta_0+\theta_3) \\
\begin{array}{l} -a_1 \cos\theta_1 - a_2 \cos\theta_2 \cos\theta_2' - a_3 \cos\theta_3 \cos(\theta_2' + \theta_3') - a_0 \cos(\theta_2' + \\ + \theta_3')\cos(\theta_0 + \theta_3) + s_0 \sin(\theta_2' + \theta_3') \end{array} & -\cos(\theta_2' + \theta_3')\cos(\theta_0 + \theta_3) & \begin{array}{l} \cos(\theta_2' + \theta_3')\cos\eta_0 \sin(\theta_0 + \theta_3) - \\ \sin\eta_0 \sin(\theta_2' + \theta_3') \end{array} & \sin\eta_0 \cos(\theta_1' + \theta_3') \sin(\theta_0 + \theta_3) + \cos\eta_0 \sin(\theta_2' + \theta_3') \\
\begin{array}{l} s_1' + a_2 \cos\theta_2 \sin\theta_2' + a_3 \cos\theta_3 \sin(\theta_2' + \theta_3') + a_0 \sin(\theta_2' + \\ + \theta_3')\cos(\theta_0 + \theta_3) + s_0 \cos(\theta_2' + \theta_3') \end{array} & \sin(\theta_2' + \theta_3')\cos(\theta_0 + \theta_3) & \begin{array}{l} \sin(\theta_2' + \theta_3')\cos\eta_0 \sin(\theta_0 + \theta_3) - \\ \sin\eta_0 \cos(\theta_2' + \theta_3') \end{array} & -\sin\eta_0 \sin(\theta_2' + \theta_3') \sin(\theta_0 + \theta_3) + \cos\eta_0 \cos(\theta_2' + \theta_3')
\end{array} \right\| . \qquad (14)$$

Scriind ecuaţia tensorială

$$T^{(0,0)} = E,$$

în care $E$ este tensorul unitar şi egalînd elementele corespunzătoare ale tensorilor din ambii membri ai ecuaţiei, se obţine

$$\left\{ \begin{array}{l}
\theta_3 = 90^\circ - \theta_0, \\
\theta_2' + \theta_3' = 360^\circ - \eta_0, \\
\theta_2 = \arcsin\{[a_1 \sin\theta_1 - (a_3 \cos\theta_0 + a_0)]/a_2\} \\
\theta_2' = \arcsin(A/B),
\end{array} \right. \qquad (15)$$

în care prin $A$, $B$ s-a notat respectiv

$$A = \sqrt{a_2^2 - [a_1 \sin\theta_1 - (a_3 \cos\theta_0 + a_0)]^2 - [a_1 \cos\theta_1 + a_3 \sin\theta_0 \cos\eta_0 + s_0 \sin\eta_0]^2},$$

$$B = \sqrt{a_2^2 - [a_1 \sin\theta_1 - (a_3 \cos\theta_0 + a_0)]^2}.$$

Deplasarea axială $k(\Delta\theta_1)$ a piuliței $I_1$ depinde de parametrul $k$ specific cuplei elicoidale și de rotația $\Delta\theta_1$, exprimată în radiani, a unghiului $\theta_1$ de rotire a piuliței, deci

$$s_1' = s_1^{(0)} + k(\Delta\theta_1),$$

în care $s_1^{(0)}$ este valoarea inițială, constantă, a lui $s_1'$.

Dependența dintre unghiul $\theta_1$ și unica coordonată lagrangiană $\theta_0$ a mecanismului este dată de următoarea ecuație :

$$\begin{aligned}&[s_1^{(0)} + k(\Delta\theta_1)]^2 + f_4(\theta_0)\cdot[s_1^{(0)} + k(\Delta\theta_1)] + m = \\ &= f_1(\theta_0)\cdot\sin\theta_1 + f_2(\theta_0)\cdot\cos\theta_1 + f_3(\theta_0),\end{aligned} \tag{16}$$

în care

$$\begin{aligned}m &= s_0^2 + a_3^2 + a_1^2 - a_2^2,\\ f_1(\theta_0) &= 2\,a_1(a_3\cos\theta_0 + a_0),\\ f_2(\theta_0) &= -\,2\,a_1(a_3\sin\theta_0\cos\eta_0 + s_0\sin\eta_0),\\ f_3(\theta_0) &= -\,(a_3\cos\theta_0 + a_0)^2,\\ f_4(\theta_0) &= 2\,(s_0\cos\eta_0 - a_3\sin\theta_0\sin\eta_0).\end{aligned}$$

Ecuația de mai sus poate fi rezolvată trasînd, pentru valori destul de apropiate ale lui $\theta_0$, curbele reprezentative ale funcțiilor

$$X(\theta_1) = [s_1^{(0)} + k(\Delta\theta_1)]^2 + f_4(\theta_0)\cdot[s_1^{(0)} + k(\Delta\theta_1)] + m$$

și

$$Y(\theta_1) = f_1(\theta_0)\sin\theta_1 + f_2(\theta_0)\cos\theta_1 + f_3(\theta_0)$$

și considerînd punctele lor de intersecție.

Tensorul de poziție al organului $I_1$ față de batiul $I_0$ este

$$T^{(1.0)} = \left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos(90^\circ + \theta_1) & \cos(180^\circ + \theta_1) & 0\\ 0 & \cos(180^\circ - \theta_1) & \cos(180^\circ - 90^\circ - \theta_1) & 0\\ s_1' & 0 & 0 & 1\end{matrix}\right|,$$

$O_1''\,x_{11}\,x_{12}\,x_{13}$ fiind axele de coordonate solidare cu piulița $I_1$ a cuplei elicoidale, deci

$$T^{(1,0)} = \begin{Vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\sin\theta_1 & -\cos\theta_1 & 0\\ 0 & -\cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0\\ s_1' & 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}, \tag{17}$$

în care $\theta_1$ și $s_1'$ se exprimă, așa cum s-a arătat, în funcție de $\theta_0$.

Pentru a scrie expresia tensorului de poziție al organului $I_2$ față de organul $I_2'$, se consideră că asocierea dintre aceste organe se face cu ajutorul unei articulaţii a cărei axă $O_2\, x_{23}$ coincide cu $O_2\, x'_{22}$; axa $O_2\, x_{21}$ fiind dreapta $O_1 O_2 = O_1 O'_2$, iar axa $O_2\, x_{22}$ este luată astfel încît împreună cu celelalte două să formeze un triedru drept, deci

$$T^{(2,\,2')} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 & \cos(90^\circ+\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cos(90^\circ+\theta_2) & \cos(180^\circ+\theta_2) & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\sin\theta_2 & -\cos\theta_2 & 0 \end{Vmatrix}. \quad (18)$$

Tensorul de poziţie ce defineşte poziţia organului $I_2$ faţă de organul fix $I_0$ este

$$T^{(2,\,0)} = T^{(1',\,0)} \cdot T^{(2',\,1')} \cdot T^{(2,\,2')} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -a_1\cos\theta_1 & -1 & 0 & 0 \\ s'_1 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2\cos\theta_2\cos\theta'_2 & \cos\theta'_2 & -\sin\theta'_2 & 0 \\ a_2\cos\theta_2\sin\theta'_2 & \sin\theta'_2 & \cos\theta'_2 & 0 \\ s'_2\,(=a_2\sin\theta_1 - a_2\sin\theta_2) & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\sin\theta_2 & -\cos\theta_2 & 0 \end{Vmatrix},$$

adică

$$T^{(2,\,0)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_1\sin\theta_1 + a_2\sin\theta_2 & \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ -a_1\cos\theta_1 - a_2\cos\theta_2\cos\theta'_2 & -\cos\theta_2\cos\theta'_2 & \sin\theta_2\cos\theta'_2 & \sin\theta'_2 \\ s'_1 + a_2\cos\theta_2\sin\theta'_2 & \cos\theta_2\sin\theta'_2 & -\sin\theta_2\sin\theta'_2 & \cos\theta'_2 \end{Vmatrix}. \quad (19)$$

Exprimînd parametrii $s'_1$, $\theta_2$ şi $\theta'_2$ în funcţie de unica coordonată lagrangiană $\theta_0$, poziţia organului $I_2$ (biela mecanismului) este complet determinată pentru fiecare valoare a lui $\theta_0$ cu ajutorul matricei-tensor $T^{(2,0)}$.

Pentru manivela $I_3$, tensorul de poziţie ce defineşte poziţia acestui organ faţă de batiul $I_0$, este

$$T^{(3,0)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_0 & \cos\theta_0 & \sin\theta_0 & 0 \\ s_0\sin\eta_0 & -\sin\theta_0\cos\eta_0 & \cos\theta_0\cos\eta_0 & -\sin\eta_0 \\ -s_0\cos\eta_0 & -\sin\theta_0\sin\eta_0 & \cos\theta_0\sin\eta_0 & \cos\eta_0 \end{Vmatrix}. \quad (20)$$

B. *Problema vitezelor*. Tensorul viteză în mişcarea organului $I_1$ faţă de batiul $I_0$ este

$$\frac{dT^{(1,0)}}{dt} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 & -\sin\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 & 0 \\ 0 & \sin\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 & \cos\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 & 0 \\ \dot{s}_1' & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Se vede imediat că mişcarea organului $I_1$ faţă de batiul $I_0$ este o mişcare elicoidală ce se compune dintr-o mişcare de translaţie de-a lungul axei $O_0x_{03}$ a cuplei elicoidale şi o mişcare de rotaţie în jurul acestei axe, ambele mişcări depinzînd de acelaşi parametru, unghiul $\theta_1$. Componentele vitezei $\vec{V}_{0_1'}^{(1,0)}$ în mişcarea de translaţie, pe axele solidare cu batiul $I_0$, sînt :

$$V_{0_1', x_{01}}^{(1,0)} = 0, \quad V_{0_1', x_{02}}^{(1,0)} = 0, \quad V_{0_1', x_{03}}^{(1,0)} = \dot{s}_1'.$$

Lăsînd la o parte elementele primei linii şi primei coloane din matricea tensorului $\frac{dT^{(1,0)}}{dt}$, se obţine matricea

$$M^{\star(1,0)} = \begin{Vmatrix} -\cos\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 & \sin\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 & 0 \\ \sin\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 & \cos\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

În mod analog, pornind de la matricea tensorului $T^{(1,0)}$, se obţine matricea

$$M^{(1,0)} = \begin{Vmatrix} -\sin\theta_1 & -\cos\theta_1 & 0 \\ -\cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Viteza unghiulară instantanee, în mişcarea organului $I_1$ faţă de batiul $I_0$, definită ca un tensor antisimetric de ordinul doi în spaţiul euclidian cu trei dimensiuni, obţinîndu-se cu ajutorul matricelor $M^{\star(1,0)}$, $M^{(1,0)}$ [18], este

$$\vec{\omega}^{(1,0)} = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_{x_{03}}^{(1,0)} & \omega_{x_{02}}^{(1,0)} \\ \omega_{x_{03}}^{(1,0)} & 0 & -\omega_{x_{01}}^{(1,0)} \\ -\omega_{x_{02}}^{(1,0)} & \omega_{x_{01}}^{(1,0)} & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & \dot{\theta}_1 & 0 \\ -\dot{\theta}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Tensorul viteză în mişcarea organului $I_2$ faţă de organul $I_0$ este

$$\begin{array}{cc} & \mathrm{I} \\ \dfrac{dT^{(2,0)}}{dt} = & \begin{Vmatrix} 0 \\ -a_1\cos\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 + a_2\cos\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2 \\ a_1\sin\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 + a_2\sin\theta_2\cos\theta_2' \cdot \dot{\theta}_2' + \cos\theta_2\sin\theta_2' \cdot \dot{\theta}_2' \\ \dot{s}_1' - a_2\sin\theta_2\sin\theta_2'\dot{\theta}_2 + a_2\cos\theta_2\cos\theta_2' \cdot \dot{\theta}_2' \end{Vmatrix} \end{array} \tag{21}$$

$$\begin{array}{cc}
\mathrm{II} & \mathrm{III} \\
0 & 0 \\
\cos\theta_2\cdot\dot\theta_2 & -\sin\theta_2\cdot\dot\theta_2 \\
\sin\theta_2\cos\theta_2'\cdot\dot\theta_2+\cos\theta_2\sin\theta_2'\cdot\dot\theta_2' & \cos\theta_2\cos\theta_2'\cdot\dot\theta_2-\sin\theta_2\sin\theta_2'\cdot\dot\theta_2' \\
-\sin\theta_2\sin\theta_2'\cdot\dot\theta_2+\cos\theta_2\cos\theta_2'\cdot\dot\theta_2' & -\cos\theta_2\sin\theta_2'\cdot\dot\theta_2-\sin\theta_2\cos\theta'_2\cdot\dot\theta_2'
\end{array} \tag{22}$$

$$\left.\begin{array}{c}
\mathrm{IV} \\
0 \\
0 \\
\cos\theta'_2\cdot\dot\theta_2' \\
-\sin\theta'_2\cdot\dot\theta_2'
\end{array}\right\| . \tag{23}$$

Formînd matricele $M^{\star(2,0)}$ și $M^{(2,0)}$, se obține analog

$$\vec{\omega}^{(2,0)}=\left\|\begin{matrix} 0 & -\omega^{(2,0)}_{x_{03}} & \omega^{(2,0)}_{x_{02}} \\ \omega^{(2,0)}_{x_{03}} & 0 & -\omega^{(2,0)}_{x_{01}} \\ -\omega^{(2,0)}_{x_{02}} & \omega^{(2,0)}_{x_{01}} & 0 \end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix} 0 & -\cos\theta_2'\cdot\dot\theta_2 & \sin\theta_2'\cdot\dot\theta_2 \\ \cos\theta_2'\cdot\dot\theta_2 & 0 & \dot\theta_2' \\ -\sin\theta_2'\cdot\dot\theta_2 & -\dot\theta_2' & 0 \end{matrix}\right\|. \tag{24}$$

Tensorul viteză pentru organul $I_3$ în mișcarea sa față de batiul $I_0$ este

$$\frac{dT^{(3,0)}}{dt}=\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta_0\cdot\dot\theta_0 & \cos\theta_0\cdot\dot\theta_0 & 0 \\ 0 & -\cos\theta_0\cdot\dot\theta_0\cos\eta_0 & -\sin\theta_0\cdot\dot\theta_0\cos\eta_0 & 0 \\ 0 & -\cos\theta_0\cdot\dot\theta_0\sin\eta_0 & -\sin\theta_0\cdot\dot\theta_0\sin\eta_0 & 0 \end{matrix}\right\|. \tag{25}$$

Formînd, în conformitate cu procedeul general indicat în [18] și deja folosit mai sus, matricele $M^{(3,0)}$ și $M^{\star(3,0)}$, se obține

$$\vec{\omega}^{(3,0)}=\left\|\begin{matrix} 0 & -\omega^{(3,0)}_{x_{03}} & \omega^{(3,0)}_{x_{02}} \\ \omega^{(3,0)}_{x_{03}} & 0 & -\omega^{(3,0)}_{x_{01}} \\ -\omega^{(3,0)}_{x_{02}} & \omega^{(3,0)}_{x_{01}} & 0 \end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix} 0 & \cos\eta_0\cdot\dot\theta_0 & \sin\eta_0\cdot\dot\theta_0 \\ -\cos\eta_0\cdot\dot\theta_0 & 0 & 0 \\ -\sin\eta_0\cdot\dot\theta_0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|. \tag{26}$$

Mișcarea de rotație a manivelei $I_3$ în jurul axei $O_3x_{33}$ poate fi considerată ca fiind compusă dintr-o mișcare de rotație în jurul axei $O_0x_{02}$ de viteză unghiulară $\omega^{(3,0)}_{x_{02}}$ și una în jurul axei $O_0x_{03}$ de viteză unghiulară $\omega^{(3,0)}_{x_{03}}$.

Verificarea rezultatelor se poate face ușor scriind condițiile diferențiale de închidere, adică

$$\omega^{(0,0)}_{(0,0)}=0,$$

și

$$\vec{V}^{(0,0)}_{0_0}=0.$$

Dînd diferite valori parametrilor $a_0$, $s_0$ și $\eta_0$ se obțin mecanisme particulare.

4. *Observaţii finale.* Rezultatele de mai sus, încadrîndu-se în noile forme tensoriale ale cinematicii lanţurilor şi mecanismelor [18] care conduc la caracterizarea succintă, cu ajutorul elementelor cinematice univoc determinate, a poziţiilor organelor sau a ciclurilor extrase dintr-un lanţ cinematic compus din mişcările relative ale acestora faţă de alte organe sau cicluri şi care au şi fost utilizate de alţi autori [28], întregesc rezultatele deja obţinute relative la analiza şi sinteza mecanismelor spaţiale cu cuple cinematice inferioare sau superioare [20], [25] şi constituie punctul de plecare pentru folosirea sistematică a mecanicii analitice obişnuite sau generalizate [29], [30] şi în studiul dinamic al mecanismelor spaţiale cu patru organe, ce se introduc din ce în ce mai frecvent [31]—[33] în rezolvarea problemei fundamentale a tehnicii noi — automatizarea proceselor de producţie, a transporturilor etc.

*Primită la redacţie la 20 iulie 1961*

## КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НОВЫМ МАТРИЧНО-ТЕНЗОРНЫМ МЕТОДОМ ЧЕТЫРЕХЗВЕННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ

### РЕЗЮМЕ

Авторы исходят из ряда определений, представляющих собою остов нового матрично-тензорного метода, разработанного в некоторых предыдущих заметках и относящегося к теории машин и механизмов [18]—[20], как например:

— понятие тензора положения звена $I_\nu$ по отношению к другому звену $I_{\nu-1}$ некоторой кинематической цепи;

— понятие тензора скорости звена $I_\nu$ по отношению к звену $I_{\nu-1}$;

— понятие специфического тензора цепи или же кинематического цикла;

— уравнение замкнутости цепи или же кинематического цикла, изъятого из сложной кинематической цепи и др.;

— исследуют кинематику пространственных четырехзвенных механизмов.

Полученные результаты, относящиеся к определению положений и скоростей, касающихся относительных движений звеньев, составляющих таковые механизмы, даны с подробностями, выраженными на матрично-тензорном языке матриц в декартовых координатах вышеуказанного метода для механизма (рис. 1), имеющего конечное звено, присоединенное к стойке при помощи винтовой пары.

# ÉTUDE CINÉMATIQUE DES MÉCANISMES DANS L'ESPACE À QUATRE ORGANES, PAR UNE NOUVELLE MÉTHODE MATRICIELLE-TENSORIELLE

## RÉSUMÉ

Les auteurs, en s'appuyant sur l'introduction d'un nombre de notions prises comme point de départ d'une nouvelle méthode matricielle-tensorielle concernant la théorie des mécanismes et des machines [18]—[20], à savoir :

la notion du *tenseur de position* (4) d'un organe $I_\nu$ relatif à un autre organe $I_{\nu-1}$ d'une chaîne cinématique ;

la notion du *tenseur vitesse* d'un organe $I_\nu$ relatif à $I_{\nu-1}$ ;

la notion du *tenseur spécifique d'une chaîne* ou bien d'un cycle cinématique (5) ;

*l'équation de clôture* (6) et d'autres encore,

étudient la cinématique des mécanismes dans l'espace à quatre organes. Les résultats acquis quant aux positions ou bien aux vitesses relatives des organes constituant ces mécanismes, exprimés dans le langage matriciel-tensoriel de la méthode élaborée, sont donnés pour un mécanisme (fig. 1) dont l'organe final est associé au bâti par un couple hélicoïdal.

## BIBLIOGRAFIE

1. I. I. ARTOBOLEWSKI, *Grundlegende Probleme einer modernen Dynamik der Maschinen*, Maschinenbautechnik, **9**, *11*, 575—589 (1960).
2. — *Современное состояние теории машин и механизмов.* În volumul ,,Труды Второго Всесоюзного Совещания по основным проблемам теории машин и механизмов". *Анализ и синтез механизмов*, Машгиз, Москва, 7—23: 196—206 (1960).
3. K. HAIN, *Mechanism Design in Germany.* Transactions of the Fourth Conference on Mechanisms, Purdue University, 1957, 84—104.
4. GOODMAN T. P., HAIN K., *Der Stand der Getriebe-Synthese im Schrifttum des englischen Sprachgebietes.* Konstruktion, **10**, *11*, 451—454 (1958).
5. F. FREUDENSTEIN, *Trends in the Kinematics of Mechanisms.* Applied Mechanics Reviews, **12**, *9*, 1—4 (1959).
6. Z. TERPLAN, *Lehre und Forschung auf dem Gebiet der Getriebetechnik in Ungarn.* Maschinenbautechnik, **8**, *2*, 107—110 (1959).
7. D. MANGERON, R. BOGDAN, *Research in the Field of Machines and Mechanisms carried out in the Rumanian People's Republic. Future Outcome.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **9**, *4*, 1093—1098 (1958).
8. ⁂ Труды Второго Совещания по основным проблемам теории машин и механизмов. *Анализ и синтез механизмов*, 212; *Динамика машин*, 240; *Теория передач в машинах*, 174; *Теория машин автоматического действия и теория точности в машиностроении и приборостроении*, 220. Машгиз, М., 1960.
9. ⁂ Итоги Второго Всесоюзного Совещания по основным проблемам теории машин и механизмов. Институт Машиноведения. Академия Наук СССР, М., 1958.
10. I. I. ARTOBOLEWSKIJ, *Einige Gegenwartsprobleme der Maschinendynamik.* III. Gesamtpolnische Konferenz über Theorie von Maschinen und Getrieben, Rogów, **5**, 8—10/VI (1961).

11. Н. И. ЛЕВИЦКИЙ, *Итоги работы секции анализа и синтеза механизмов.* În volumul Итоги Всесоюзного Совещании по основным проблемам теории машин и механизмов. Институт Машиноведения Академии Наук СССР, М., 1958, 24—29.
12. Г. ШТ. КАЛИТЗИН, *Теория на механизмите и машините.* Државно Издательство ,,Техника", София, 1960, **9**.
13. Г. Ф. МОРОШКИН, *Вопросы геометрии сложных кинематических цепей.* ДАН СССР, **119**, *1*, 38—41 (1958).
14. С. Г. КИСЛИЦИН, *Тензорный метод в теории пространственных механизмов.* Труды семинара по теории машин и механизмов, АН СССР, **14**, *54*, 51—75 (1954).
15. Л. П. РИФТИН, *Матричный метод в задачах анализа и синтеза механизмов.* Изв. высших учебн. заведений. Приборостроение, *5*, 124—133 (1958).
16. Г. Ш. КАЛИТЗИН, *О некоторых применениях матричного исчисления в теории механизмов.* În volumul Труды ТММ, 1960.
17. J. DENAVIT, R. S. HARTENBERG, *Approximate Synthesis of Spacial Lincages.* ASME, Paper No. 59—A—24, 1—6 (1959).
18. Д. МАНГЕРОН, К. ДРЭГАН, *Тензорные формы основных уравнений кинематики цепей и механизмов.* Известия на Математическия Институт. Българска Академия на Науките, **4**, *2*, 57—65 (1960).
19. — *Asupra unei noi metode tensoriale de studiu a mecanismelor.* Bul. Inst. Polit. Iaşi, **3** (**7**), *1—2*, 153—164 (1957).
20. — *Sinteza unei clase de came spaţiale cu două grade de mobilitate,* Bul. Inst. Polit. Iaşi, **5** (**9**), *1—2*, 331—338 (1959).
21. В. А. ЗИНОВЬЕВ, *Пространственные механизмы с низшими парами.* Гостехиздат, М.- Л., 1952, 260.
22. — *Векторный метод в структурном и кинематическом исследовании механизмов.* Изв. высших учебных заведений, Машиностроение, *6*, 3—9 (1958).
23. D. MANGERON, C. DRĂGAN, *Aplicarea coordonatelor proiective la studiul mecanismelor.* Programul sesiunii jubiliare a Institutului de mecanică aplicată ,,Traian Vuia", Bucureşti, iulie 1960.
24. — *Aplicarea unei noi metode tensoriale la studiul cinematic al mecanismului bielă-manivelă spaţial.* Bul. Inst. Polit. Iaşi, **4** (**8**), *1—2*, 327—338 (1958).
25. — *Metodă tensorială în sinteza mecanismelor cu came plane.* Bul. Inst. Polit. Iaşi, **4** (**8**), *3—4*, 275—286 (1958).
26. Ю. Ф. МОРОШКИН, *О формах основных уравнений геометрии механизмов.* ДАН СССР, **91**, *4*, 745—748 (1953).
27. А. П. КОТЕЛЬНИКОВ, *Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике,* Казань, 1895.
28. J. S. BEGGS, *The screw Matrix.* Bul. Inst. Polit., Iaşi, **6** (**10**), *3 — 4*, 315 — 322, 1960.
29. И. ТЗЕНОФФ, *Новые уравнения аналитической динамики.* Bul. Inst. Polit. Iaşi, **5** (**9**), *1—2*, 119—121 (1959).
30. H. PAILLOUX, *Un aspect du calcul tensoriel.* Mém. sci. math. Acad. sci. Paris, Gauthier-Villars, 1955.
31. R. BEYER, *Statics and Dynamics in 3-D Mechanisms.* Transactions of the Sixth Conference on Mechanisms. Purdue University, 1960, 94—112.
32. Л. Н. РЕШЕТОВ, *Применение механизмов без пассивных связей.* În volumul Анализ и синтез механизмов 1960, 143—152.
33. D. MANGERON, R. BOGDAN, *A doua Conferinţă Unională asupra problemelor fundamentale ale teoriei mecanismelor şi maşinilor.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **10**, *2*, 615—624 (1959).

# REPREZENTAREA FUNCȚIILOR CU AJUTORUL ARCELOR DE CAME DE ROTAȚIE ȘI TACHET DE TRANSLAȚIE

DE

CHR. PELECUDI

În cercetarea experimentală, mecano-electronică, [1], [2], [3], [4] a mecanismelor este necesară obținerea unei mărimi electrice, de preferință tensiunea, proporționată cu valorile date de funcțiile sin θ sau cos θ, unde θ este unghiul de rotație al culisei oscilante (fig. 1). În lucrarea [2] s-a întrebuințat pentru aceasta un mecanism elipsograf, variațiile de tensiune electrice fiind culese după firele rezistive întinse de-a lungul celor două axe perpendiculare de coordonate.

Dar din cauza acestor două mecanisme, culisă oscilantă combinată cu mecanismul elipsograf, traductorul polar pentru coordonatele unui punct *M* al unui mecanism de cercetat, nu permite decît explorarea unor traiectorii situate într-un singur cadran al axelor, prezentînd erorile studiate în susmenționata lucrare ca urmare a imperfecțiunilor de prelucrare a pieselor, a jocurilor în cuplele cinematice etc. erori care devin neadmisibile pentru valori ale lui θ apropiate de capetele intervalului 0 — π/2, ceea ce necesită restrîngerea domeniului de utilizare între 10° și 80°. Deși traductorul polar poate fi oricînd așezat în condiții optime, totuși pentru mai multă ușurință în manipulare, pentru reducerea erorilor și pentru mărirea domeniului de utilizare eventual la un cerc complet, în care caz există avantajul schimbării ușor a direcțiilor axelor de coordonate, se preconizează întrebuințarea unor came profilate legate direct de culisa oscilantă.

Astfel problema constă în a găsi forma camei $\rho(\theta)$ în așa fel ca lungimea arcului său să fie dată de funcția sin θ, valabilă în primul rînd pe intervalul 0 — π/2. În această situație schema electrică ar consta din fire rezistive întinse pe conturul camei și alimentate ca în figura 2, cu legătoarele de tensiune *A* și *B* obținînd variațiile funcțiilor sin θ și cos θ.

Sub forma mai generală, în locul funcțiilor sin θ și cos θ se va lucra cu o funcție oarecare $F(\theta)$. Din realizarea practică și pentru o bună funcționare a camei reies condițiile restrictive ale funcției $F(\theta)$.

Deoarece arcul camei

$$l(\theta) = LF(\theta) \qquad (1)$$

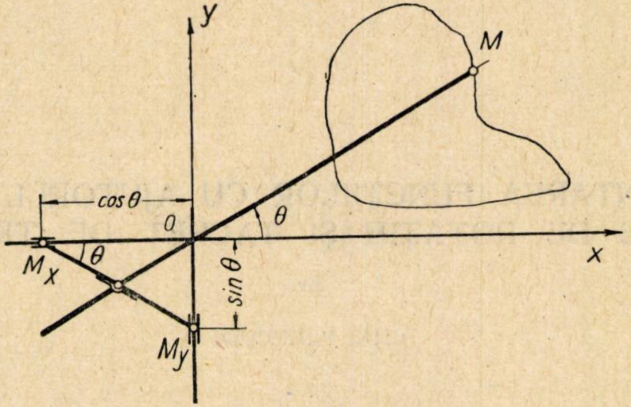


Fig. 1

este proporțional, $L$ avînd dimensiunile unei lungimi, cu $F(\theta)$ adimensional, rezultă că $F(\theta)$ este o funcție pozitivă monoton crescătoare.

$$F(0) = 0, \quad F(\theta) > 0, \quad F'(\theta) > 0. \qquad (2)$$

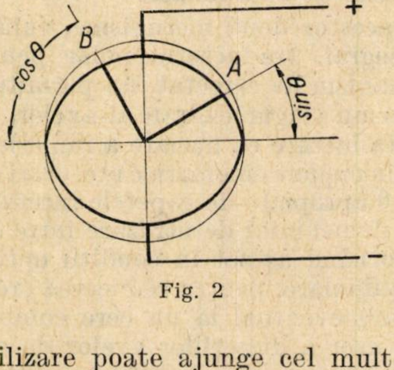


Fig. 2

Domeniul de utilizare poate ajunge cel mult la $F'(\theta_M) = 0$, cînd funcția $F(\theta_M) = M$ prezintă un maxim. În cazul funcțiilor monoton descrescătoare, se pot inversa legăturile electrice.

Tensiunea culeasă de pe firul rezistiv întins la periferia camei este proporțională cu $F(\theta)$ astfel:

$$V = \frac{U}{R} r = KF(\theta), \qquad (3)$$

unde

$$r = Rf(\theta), \tag{4}$$

reiese

$$f(\theta) = mF(\theta), \tag{5}$$

cu

$$m = \frac{K}{U} \quad \text{şi} \quad 0 \leqslant f(\theta) \leqslant 1. \tag{6}$$

Deoarece

$$R = \frac{\rho L_t}{s}, \quad \mathcal{R} = \frac{\rho L}{s},$$

$$r(\theta) = \frac{\rho\, l(\theta)}{s} = \mathcal{R} F(\theta), \tag{7}$$

rezultă

$$l(\theta) = L_t f(\theta) = LF(\theta), \tag{8}$$

şi

$$m = \frac{K}{U} = \frac{L}{L_t} = \frac{\mathcal{R}}{R}, \tag{9}$$

unde $L_t$ este lungimea totală a firului rezistiv.

Pentru rezistivitatea $\rho$ şi densitatea de curent $\delta$ avem

$$U = \rho \delta L_t \quad \text{şi} \quad K = \rho \delta L. \tag{10}$$

În cazul considerării legăturilor electrice inverse se obțin funcții monoton descrescătoare

$$V' = \frac{U}{R} r' \quad \text{şi} \quad r' = Rf'(\theta), \tag{11}$$

astfel că

$$0 \leqslant f'(\theta) = 1 - f(\theta) \leqslant 1. \tag{12}$$

Rezolvarea problemei (1) se face grafic după relația

$$l(\theta_{k+1}) - l(\theta_k) = L[F(\theta_{k+1}) - F(\theta_k)], \tag{13}$$

luîndu-se în intervalul $0 - \theta_M$, $n$ puncte de diviziune.

Ecuația de determinare a razei vectoare $\rho(\theta)$ este

$$l(\theta) = \int_0^{\theta} \sqrt{\rho^2(\alpha) + \rho'^2(\alpha)}\, d\alpha = LF(\theta), \tag{14}$$

care derivată dă ecuația diferențială neliniară de ordinul I

$$\sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} = LF'(\theta) \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_M, \tag{15}$$

sau

$$\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta) = L^2 F'^2(\theta), \tag{16}$$

cu condiția $\rho(0) = R > 0$, raza inițială a camei.

Din condițiile ca $\rho$ și $\rho'$ să fie reali, reiese limitarea lor la

$$-LF'(\theta) \leqslant \rho(\theta) \leqslant LF'(\theta)\,, \tag{17}$$

$$-LF'(\theta) \leqslant \rho'(\theta) \leqslant LF'(\theta)\,, \tag{18}$$

și ecuația diferențială (16) are soluții numai pînă în momentul cînd una din limite este atinsă.

Pentru o bună funcționare a camei $\rho$ trebuie să aibă variații mici

$$R(1-\varepsilon) \leqslant \rho(\theta) \leqslant R(1+\varepsilon)\,, \tag{19}$$

ceea ce conduce la

$$F'(\theta) > \frac{R}{L}(1-\varepsilon)\,. \tag{20}$$

De asemenea, prin integrarea relației (18) între 0 și $\theta$ se obține condiția necesară dar insuficientă

$$-L[F(\theta)-F(0)] \leqslant \rho(\theta)-\rho(0) \leqslant L[F(\theta)-F(0)] \tag{21}$$

și prin comparare cu (17), avem

$$F'(\theta) \geqslant \frac{R}{L} - [F(\theta)-F(0)]\,. \tag{22}$$

Analitic soluția ecuației diferențiale (16) se obține prin serie Taylor, căci din condiția inițială și prin derivări succesive, avem

$$\rho(0) = R,\quad \rho'(0) = \sqrt{L^2F'^2(\theta) - R^2}\,,\ F'(0) \geqslant \frac{R}{L}$$

$$\rho''(0) = \frac{L^2F'(0)\,F''(0)}{\sqrt{L^2F'^2(0) - R^2}} - R \tag{23}$$

și

$$\rho(\theta) = R + \frac{\rho'(0)}{1}\,\theta + \frac{\rho''(0)}{2\,!}\,\theta^2 + \frac{\rho'''(0)}{3\,!}\,\theta^3 + \dots \tag{24}$$

Întrebuințarea diferențelor finite, ne conduce la ecuațiile

$$\rho_{k+1} = \rho_k \pm h\sqrt{L^2F'^2(\theta_k) - \rho_k^2}\,, \tag{25}$$

unde se începe cu $\rho_0 = R$ și rezultă $\rho$ monoton crescător sau descrescător pînă la $\rho_k = LF'(\theta_k)$. Graficul din figura 3 urmărește relația (25) pentru un interval de diviziune $h = 5°$ cu $L = 200$ mm și $R = 170$ ; $180$ ; $190$ mm iar $F(\theta) = \sin\theta$.

Soluția ecuației (16) este unică dacă se consideră, fie determinarea pozitivă, fie determinarea negativă a derivatei $\rho'(\theta)$. Soluțiile obținute pentru diferite valori $R$ și $L$ nu rezolvă problema, mai ales cînd $F'(\theta)$

tinde către 0, căci din punct de vedere practic sau valorile lui $\varepsilon$ sînt prea mari, sau domeniul de variație al unghiului $\theta$ este prea mic (fig. 3).

S-ar putea încerca atunci alegerea soluțiilor optime din punct de vedere practic din infinitatea de soluții corespunzătoare schimbării convenabile de semn în (25), dar și în această situație, pe lîngă schimbarea curburii camei, necorespunzătoare practic, în cazul cînd funcția $F(\theta)$ prezintă un maxim $F'(\theta_M) = 0$ și deci $\rho(\theta_M) = \rho'(\theta_M) = 0$ cama devenind cu raza nulă.

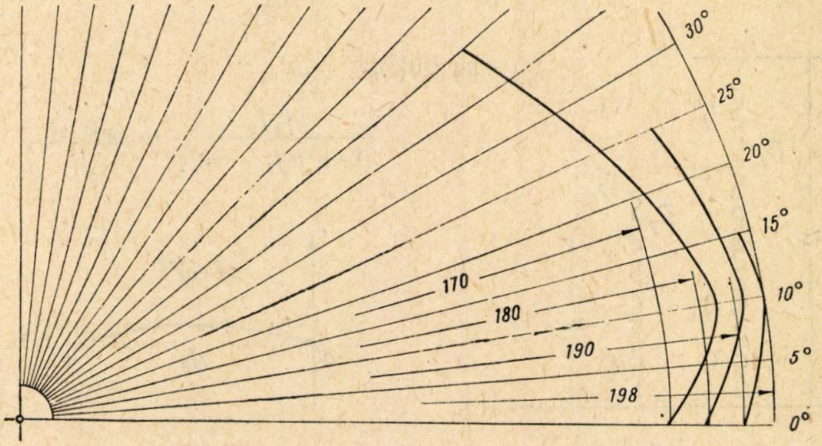


Fig. 3

Este necesar deci, din cele semnalate mai sus, ca schema electrică să permită ca tensiunea să scadă pe măsură ce culegătorul se deplasează spre unghiul limită $\theta_M$, urmărindu-se o îmbunătățire a sistemului printr-o compensare electrică. În acest sens întrebuințarea a două came cu sîrme rezistive periferice, astfel încît una să fie alimentată sub tensiune constantă iar cealaltă sub tensiunea culeasă de pe prima, ameliorează mult obținerea tensiunii culeasă de pe a doua camă proporțională cu $F(\theta)$. Ambele came sînt solidare și montajul electric corespunde înmulțirii potențiometrice (fig. 4).

Tensiunea obținută este

$$V = U\frac{r_1 r_2}{R_1 R_2 + R_1 r_1 - r_1^2} = KF(\theta), \tag{26}$$

unde

$$r_1 = R_1 f_1(\theta), \qquad r_1' = R_1 f_1'(\theta), \tag{27}$$

$$r_2 = R_2 f_2(\theta), \qquad r_2' = R_2 f_2'(\theta), \tag{28}$$

cu

$$\begin{aligned} f_1(\theta) + f_1'(\theta) &= 1, \\ f_2(\theta) + f_2'(\theta) &= 1, \end{aligned} \tag{29}$$

în care $f_1$; $f_2$; $f'_1$; $f'_2$ variază între 0—1 şi sînt monoton crescătoare sau descrescătoare.

Pentru

$$m = \frac{K}{U} \quad \text{şi} \quad n = \frac{R_1}{R_2}, \tag{30}$$

se obţine

$$\frac{f_1 f_2}{1 + n f_1 - n f_1^2} = mF(\theta), \tag{31}$$

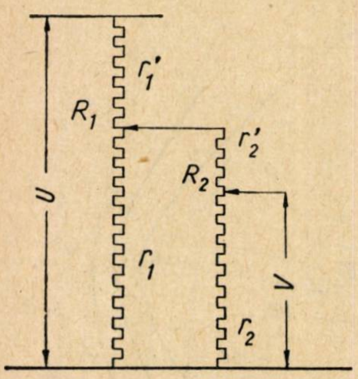


Fig. 4

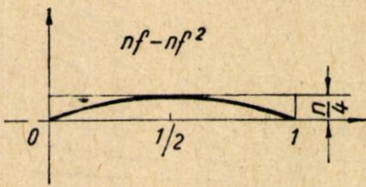


Fig. 5

în care $m$ (respectiv $K$) va fi luat astfel ca într-un interval $0 - \theta_M$ să se obţină $f_1$ şi $f_2$ cuprinşi între 0 — 1.

Dacă $n \to 0$ rămîne

$$f_1(\theta) \cdot f_2(\theta) = mF(\theta). \tag{32}$$

De fapt maximul funcţiunii de la numitor are loc pentru $f_1 = \frac{1}{2}$ şi este $\left(1 + \frac{n}{4}\right)$ ceea ce duce numai pentru această poziţie, în cazul $n = \frac{1}{25}$, la o eroare maximă prin lipsă de 1% (fig. 5).

Vor trebui determinate funcţiile $f_1(\theta)$ şi $f_2(\theta)$ astfel ca pe porţiunea $0 - \theta_M$ să difere cît mai puţin de o linie dreaptă, în care caz camele sînt aproape circulare. În consecinţă, funcţia $F(\theta)$ se va aproxima pe intervalul $0 - \theta_M$ printr-un trinom de gradul II

$$F(\theta) \simeq a\theta^2 + b\theta + c. \tag{33}$$

Întrebuinţînd metoda Gauss, a abaterii medii pătratice minime, condiţiile de extremum pentru integrala

$$\Delta = \int_0^{\theta_M} [F(\theta) - a\theta^2 - b\theta - c]^2 \, d\theta, \tag{34}$$

conduc la ecuațiile

$$\begin{aligned} A &= c\theta_M + \frac{b}{2}\,\theta_M^2 + \frac{a}{3}\,\theta_M^3 ,\\ B &= \frac{c}{2}\,\theta_M^2 + \frac{b}{3}\,\theta_M^3 + \frac{a}{4}\,\theta_M^4 , \\ C &= \frac{c}{3}\,\theta_M^3 + \frac{b}{4}\,\theta_M^4 + \frac{a}{5}\,\theta_M^5 , \end{aligned} \tag{35}$$

în care

$$A = \int_0^{\theta_M} F(\theta)\,d\theta ; \quad B = \int_0^{\theta_M} \theta F(\theta)\,d\theta ; \quad C = \int_0^{\theta_M} \theta^2 F(\theta)\,d\theta . \tag{36}$$

Se obțin pentru coeficienții $a$, $b$, $c$ valorile

$$\begin{aligned} a &= \frac{30\,(6C - 6B\theta_M + A\theta_M^2)}{\theta_M^5} , \\ b &= \frac{12\,(-15C + 16\,B\theta_M - 3A\theta_M^2)}{\theta_M^4} , \\ c &= \frac{3\,(10C - 12B\theta_M + 3A\theta_M^2)}{\theta_M^3} . \end{aligned} \tag{37}$$

Eroarea este

$$\varepsilon(\theta) = F(\theta) - (a\theta^2 + b\theta + c) . \tag{38}$$

Dacă eroarea este admisibilă, sistemul prezintă avantajul camelor circulare neprofilate. În caz contrar determinarea profilului camelor se va face ținînd seama de valorile funcției $\varepsilon(\theta)$. Astfel

$$F(\theta) = a\theta^2 + b\theta + c + \varepsilon(\theta) , \tag{39}$$

$$F(\theta) = a\,[\theta - \theta_1 + \varepsilon_1(\theta)]\,[\theta - \theta_2 + \varepsilon_2(\theta)] , \tag{40}$$

$$\begin{aligned} F(\theta) = {} & a(\theta - \theta_1)(\theta - \theta_2) + a(\theta - \theta_2)\,\varepsilon_1(\theta) + \\ & + a(\theta - \theta_1)\,\varepsilon_2(\theta) + a\varepsilon_1(\theta)\,\varepsilon_2(\theta) , \end{aligned} \tag{41}$$

unde $\theta_1$ și $\theta_2$ sînt rădăcinile trinomului $a\theta^2 + b\theta + c = 0$.

Sînt de deosebit cazurile :

1) $$\varepsilon_1(\theta) = 0 . \tag{42}$$

Rezultă

$$\varepsilon_2(\theta) = \bar{\varepsilon}(\theta) = \frac{\varepsilon(\theta)}{a(\theta - \theta_1)} , \tag{43}$$

iar

$$f_1(\theta) = m_1(\theta - \theta_1) ; \tag{44}$$

$$f_2(\theta) = m_2\,[\theta - \theta_2 + \bar{\varepsilon}(\theta)] . \tag{45}$$

Acest caz prezintă avantajul că una din came este circulară şi poate fi întrebuinţat pentru $\theta \gg \theta_1$ sau $\theta \ll \theta_1$.

2) $$\varepsilon_1(\theta) = \varepsilon_2(\theta) = \bar{\varepsilon}(\theta) \quad \text{cu} \quad \bar{\varepsilon}^2(\theta) \simeq 0\,. \tag{46}$$

Rezultă

$$\bar{\varepsilon}(\theta) = \frac{\varepsilon(\theta)}{b + 2\,a\theta}\,, \tag{47}$$

iar

$$f_1(\theta) = m_1\,[\theta - \theta_1 + \bar{\varepsilon}(\theta)]\,, \tag{48}$$

$$f_2(\theta) = m_2\,[\theta - \theta_2 + \bar{\varepsilon}(\theta)]\,. \tag{49}$$

Prin acest procedeu se obţin două came asemănătoare dar este necesar ca $b + 2a\theta \gg 0$ sau $b + 2a\theta \ll 0$, iar compensarea nu este perfectă, rămînînd o eroare mult mai mică

$$\Delta = a\,\bar{\varepsilon}^2(\theta) = \frac{a}{(b + 2a\theta)^2}\,\varepsilon^2(\theta)\,. \tag{50}$$

3) $$\varepsilon_1(\theta) = \bar{\varepsilon}(\theta), \quad \varepsilon_2(\theta) = -\bar{\varepsilon}(\theta), \quad \text{cu} \quad \bar{\varepsilon}^2(\theta) \simeq 0\,, \tag{51}$$

Rezultă

$$\bar{\varepsilon}(\theta) = \frac{\varepsilon(\theta)}{a\,(\theta_1 - \theta_2)}\,, \tag{52}$$

iar

$$f_1(\theta) = m_1\,[\theta - \theta_1 + \bar{\varepsilon}(\theta)]\,, \tag{53}$$

$$f_2(\theta) = m_2\,[\theta - \theta_2 - \bar{\varepsilon}(\theta)]\,. \tag{54}$$

Rămîne o eroare

$$\Delta = -\,a\,\bar{\varepsilon}^2(\theta) = -\,\frac{\varepsilon^2(\theta)}{a\,(\theta_1 - \theta_2)^2} \tag{55}$$

şi este necesar ca $\theta_1 \ll \theta_2$ sau $\theta_1 \gg \theta_2$.

Desigur că în ultimele două cazuri se poate să nu se neglijeze $\bar{\varepsilon}^2(\theta)$ şi atunci compensarea este completă.

În toate cazurile valorile $m_1$ şi $m_2$ se aleg astfel ca funcţiile $f_1$ şi $f_2$ să varieze între $0 - 1$, ambele trebuind să fie pozitive crescătoare. Dacă una din ele este descrescătoare se înlocuieşte cu funcţia $f' = 1 - f$. Valoarea coeficientului $m$ este

$$m = \frac{m_1\,m_2}{a}\,. \tag{56}$$

Pentru cantităţile adiţionale $\varepsilon_1(\theta)$ şi $\varepsilon_2(\theta)$ cu valori prea mari, se poate multiplica în continuare montajul electric, obţinînd polinoame de ordine superioare. Astfel dacă

$$R_n \gg R_{n-1} \gg \ldots \gg R_2 \gg R_1\,, \tag{57}$$

avem

$$V \simeq U \frac{r_1 r_2 \ldots r_n}{R_1 R_2 \ldots R_n} = KF(\theta), \tag{58}$$

sau cu

$$r_i = R_i f_i(\theta), \qquad 0 \leqslant f_i(\theta) \leqslant 1, \tag{59}$$

se obţine

$$mF(\theta) = \prod_{1}^{n} f_i(\theta). \tag{60}$$

Urmînd aceeaşi metodă va trebui să se aproximeze funcţia $F(\theta)$ printr-un polinom de ordinul $n$ după care eroarea $\varepsilon(\theta)$ se va repartiza fiecărui binom de gradul I.

*Exemplu.* Fie de reprezentat funcţia $\sin\theta$ în intervalul $0 - \pi/2$. Din formulele (36) şi (37) obţinem

$$A = \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta = 1, \quad B = \int_0^{\pi/2} \theta\sin\theta d\theta = 1, \quad C = \int_0^{\pi/2} \theta^2 \sin\theta d\theta = \pi - 2$$

$$a = -0{,}3382, \qquad b = 1{,}1954, \qquad c = -0{,}0243,$$

adică

$$\sin\theta \simeq -0{,}3382\,\theta^2 + 1{,}1954\,\theta - 0{,}0243,$$

şi

$$\theta_1 = 3{,}5200; \qquad \theta_2 = 0{,}0206,$$

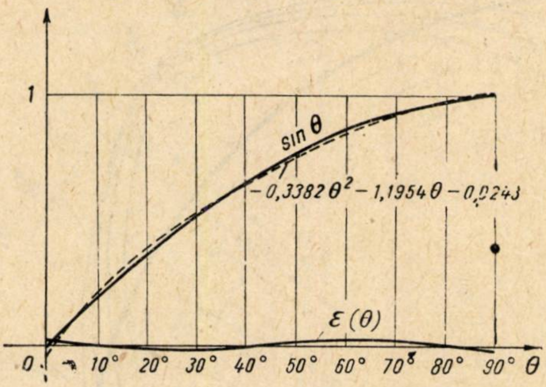


Fig. 6

iar

$$\varepsilon(\theta) = \sin\theta - [-0{,}3382\,\theta^2 + 1{,}1954\,\theta - 0{,}0243].$$

Eroarea variază între −2% şi +2,5% (fig. 6).

*Pentru cazul 1.* $\bar{\varepsilon}(\theta) = \dfrac{\varepsilon(\theta)}{-0{,}3382(\theta - 3{,}52)}$.

$$f_1 = -0{,}28(\theta - 3{,}5200), \qquad m_1 = -0{,}28,$$

$$f_2 = 0{,}65[\theta - 0{,}0206 + \bar{\varepsilon}(\theta)], \quad m_2 = 0{,}65,$$

$$f_1' = 1 + 0{,}28(\theta - 3{,}5200), \qquad m = 0{,}53818.$$

Diagramele şi camele sînt redate în figurile 7 şi 8 pentru $L_{t_1} = 500$ mm şi $L_{t_2} = 250$ mm.

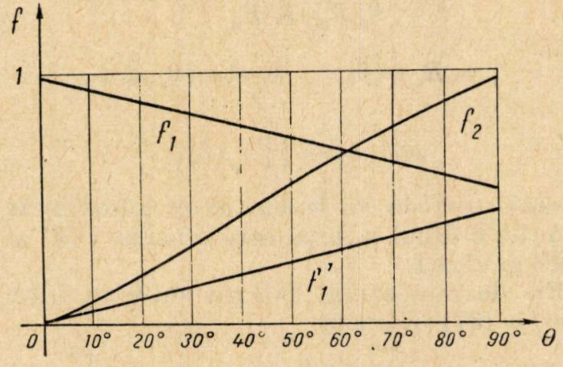


Fig. 7

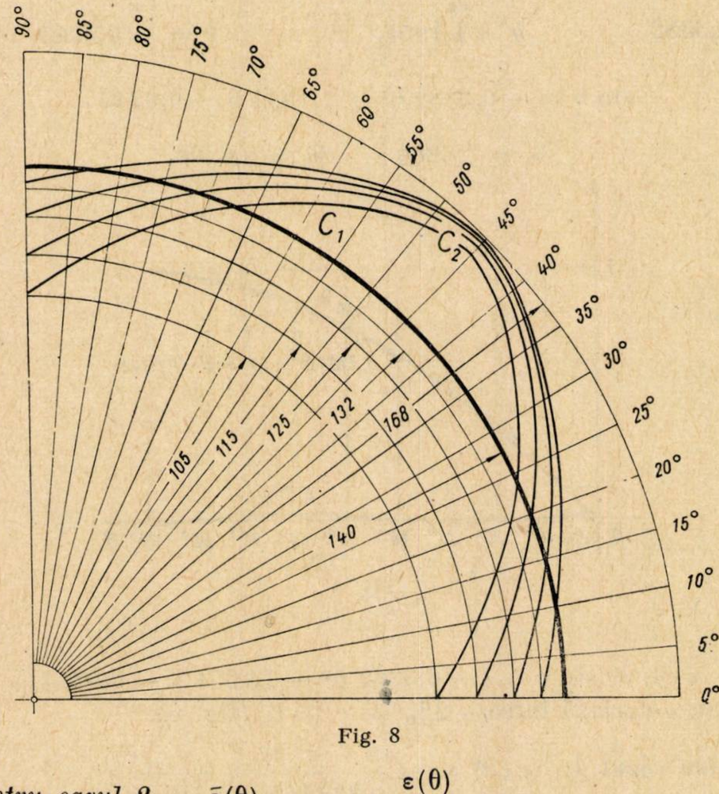

90°
85°
80°
75°
70°
65°
60°
55°
50°
45°
40°
35°
30°
25°
20°
15°
10°
5°
0°
C1
C2
105
115
125
132
168
140

Fig. 8

*Pentru cazul 2.* $\bar{\varepsilon}(\theta) = \dfrac{\varepsilon(\theta)}{1,1954 - 0,6764\,\theta}$.

$f_1 = -\,0,28\,[\theta - 3,5200 + \bar{\varepsilon}(\theta)],\qquad m_1 = -\,0,28,$
$f_2 = \phantom{-}\,0,65\,[\theta - 0,0206 + \bar{\varepsilon}(\theta)],\qquad m_2 = 0,65,$
$f_1' = 1 + 0,28\,[\theta - 3,5200 + \bar{\varepsilon}(\theta)],\qquad m = 0,53818.$

Diagramele şi camele sînt redate în figurile 9, 10 şi 11 pentru $L_{t1} = 500$ mm şi $L_{t2} = 250$ mm.

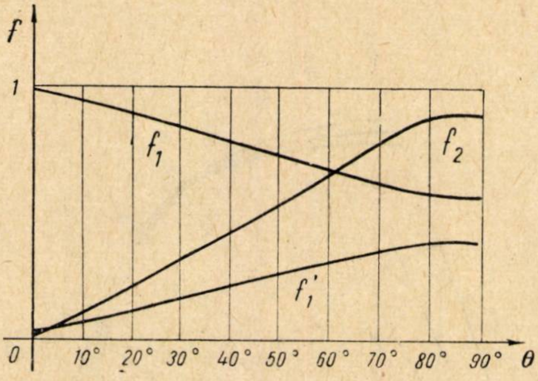


Fig. 9

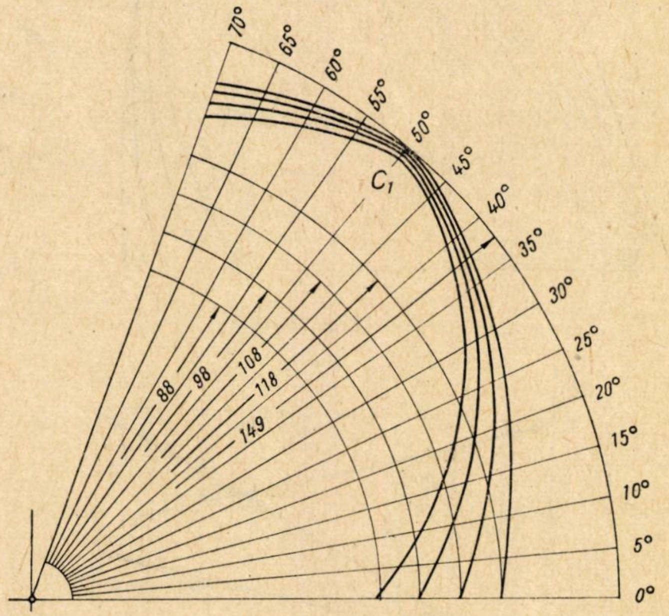

70°
65°
60°
55°
50°
45°
40°
35°
30°
25°
20°
15°
10°
5°
0°
$C_1$
88
98
108
118
149

Fig. 10

*Pentru cazul 3.* $\bar{\varepsilon}(\theta) = -\frac{\varepsilon(\theta)}{1,1815}$.

$$f_1 = -0,28\,[\theta - 3,5200 + \bar{\varepsilon}(\theta)], \qquad m_1 = -0,28,$$

$$f_2 = 0,65\,[\theta - 0,0206 - \bar{\varepsilon}(\theta)], \qquad m_2 = 0,65,$$

$$f'_1 = 1 + 0,28\,[\theta - 3,5200 + \bar{\varepsilon}(\theta)], \qquad m = 0,53818.$$

Diagramele şi camele sînt redate în figurile 12, 13, 14 pentru $L_{t1} = 500$ mm şi $L_{t2} = 250$ mm.

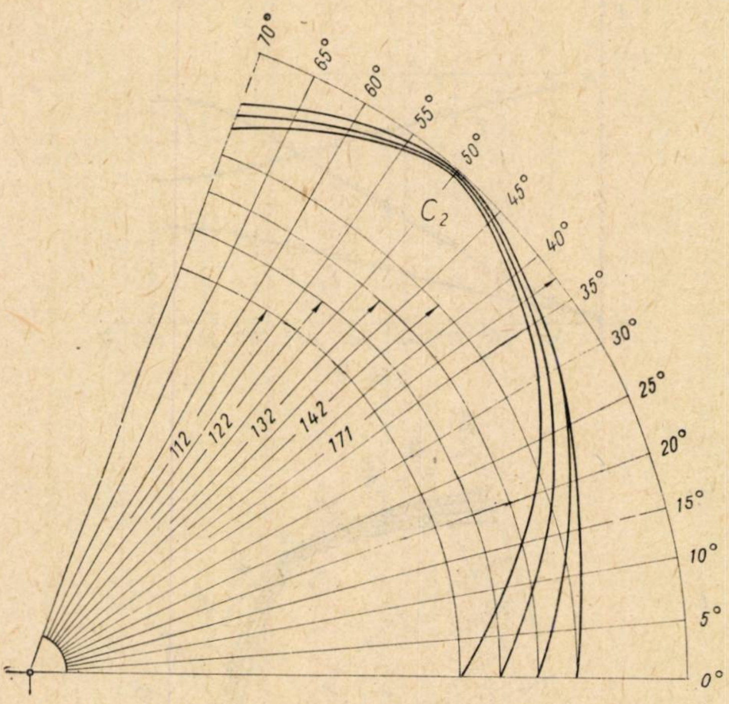

70°
65°
60°
55°
50°
45°
40°
35°
30°
25°
20°
15°
10°
5°
0°
$C_2$
112
122
132
142
171

Fig. 11

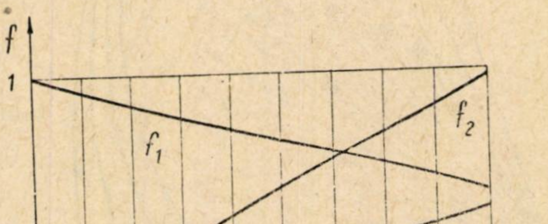


Fig. 12

În figurile respective au fost trasate mai multe came, corespunzătoare diverselor raze iniţiale. Pentru funcţiunea sin θ se vede avantajul cazurilor 1 şi 3, cama în cazul 2 neputînd să fie construită pe întreg intervalul 0 — $\pi/2$ şi prezentînd şi inconvenientul unei curse mari a tachetului.

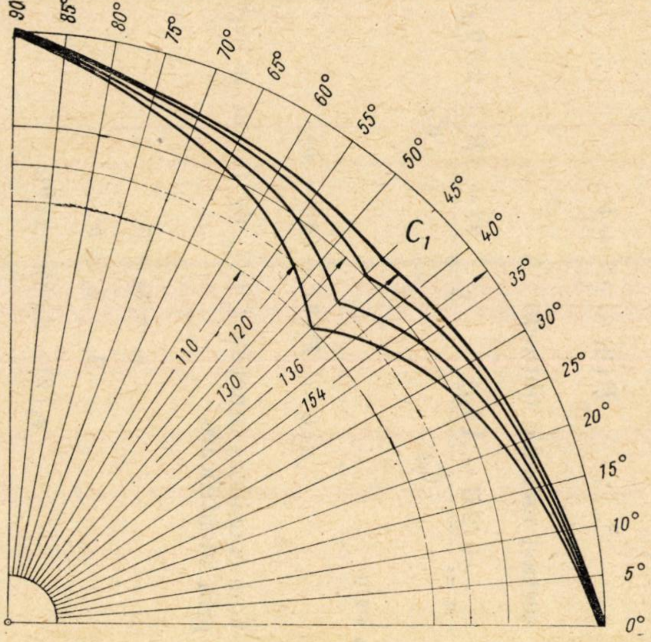

90°
85°
80°
75°
70°
65°
60°
55°
50°
45°
40°
35°
30°
25°
20°
15°
10°
5°
0°
$C_1$
110
120
130
136
154

Fig. 13

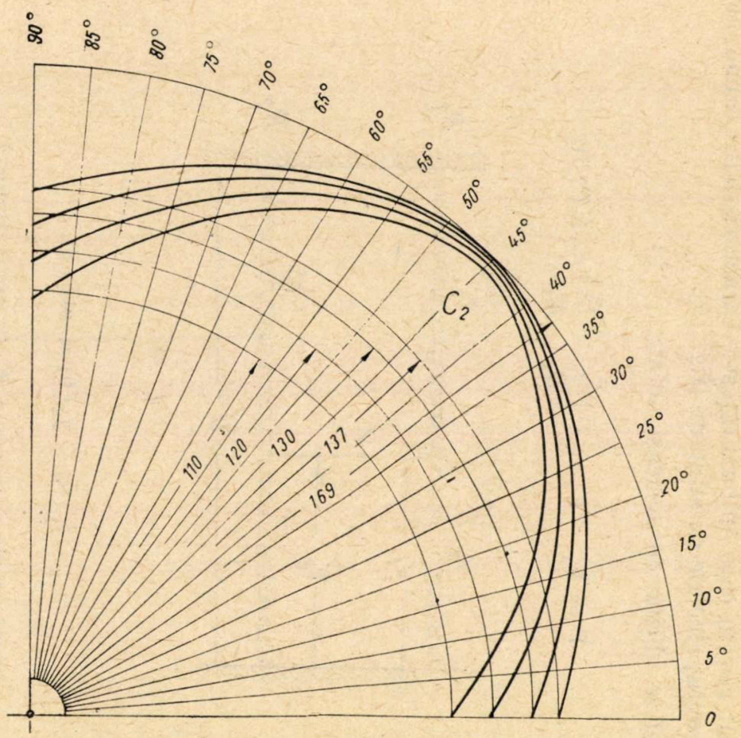

90°
85°
80°
75°
70°
65°
60°
55°
50°
45°
40°
35°
30°
25°
20°
15°
10°
5°
0
$C_2$
110
120
130
137
169

Fig. 14

Un alt sistem care îmbunătăţeşte caracteristicile camei ar consta dintr-un montaj electric de adunare (fig. 15).

Astfel se obţine cu aceleaşi notaţii :

$$V = V_1 - V_2 = U\left(\frac{r_1}{R_1} - \frac{r_2}{R_2}\right) = KF(\theta), \tag{61}$$

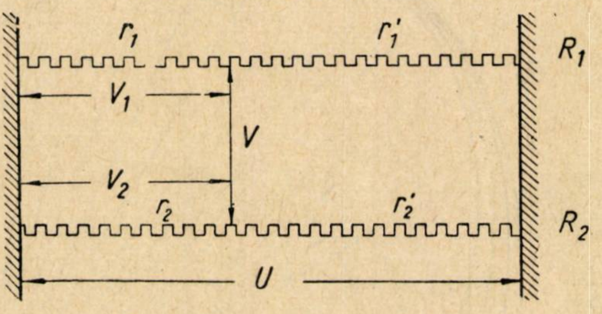


Fig. 15

sau

$$f_1(\theta) - f_2(\theta) = mF(\theta). \tag{62}$$

În consecinţă se va aproxima $F(\theta)$ cu o dreaptă

$$F(\theta) \simeq a\theta + b \tag{63}$$

şi utilizînd aceeaşi metodă, obţinem :

$$a = \frac{6(2B - A\theta_M)}{\theta_M^3} \qquad b = \frac{2(-3B + 2A\theta_M)}{\theta_M^2}, \tag{64}$$

iar eroarea este

$$\varepsilon(\theta) = F(\theta) - (a\theta + b). \tag{65}$$

Dacă vom considera funcţiile $f_1$ şi $f_2$ de forma $m[\alpha_i\theta + \beta_i + \varepsilon_i(\theta)]$ vom avea prin identificare

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 &= a \\ \beta_1 - \beta_2 &= b \\ \varepsilon_1(\theta) - \varepsilon_2(\theta) &= \varepsilon(\theta), \end{aligned} \tag{66}$$

unde $\varepsilon_i(\theta)$ sînt abaterile funcţiilor $f_i(\theta)$ de la linia dreaptă. Pentru ca acestea să fie cît mai reduse şi totodată în corespondenţă cu mărimea camei respective, trebuie să se considere

$$\varepsilon_1(\theta) = |\alpha_1|\,\bar{\varepsilon}(\theta),$$

$$\varepsilon_2(\theta) = -|\alpha_2|\,\bar{\varepsilon}(\theta), \tag{67}$$

ceea ce duce la

$$\varepsilon_1(\theta) = \frac{|\alpha_1|\,\varepsilon(\theta)}{|\alpha_1| + |\alpha_2|}, \qquad \varepsilon_2(\theta) = \frac{|\alpha_2|\,\varepsilon(\theta)}{|\alpha_1| + |\alpha_2|}, \tag{68}$$

adică minimul se obţine pentru $|\alpha_1| = |\alpha_2|$ şi deci

$$\varepsilon_1(\theta) = \frac{\varepsilon(\theta)}{2}; \qquad \varepsilon_2 = -\frac{\varepsilon(\theta)}{2}. \tag{69}$$

Compensarea se reduce numai la jumătate, dar este posibilă alegerea unor coeficienţi $\alpha_i$ cu valori mari ceea ce ameliorează considerabil caracteristicile practice ale camei. Se poate lua astfel

$$\alpha_1 = (k+1)\,a \quad \text{şi} \quad \alpha_2 = k\,a \tag{70}$$

şi deci

$$\varepsilon_1(\theta) = \frac{k+1}{2k+1}\varepsilon(\theta) \qquad \varepsilon_2(\theta) = -\frac{k}{2k+1}\varepsilon(\theta) \tag{71}$$

sau

$$f_1(\theta) = m(k+1)\left[a\theta + \frac{\varepsilon(\theta)}{2k+1}\right] + mb, \tag{72}$$

$$f_2(\theta) = mk\left[a\theta - \frac{\varepsilon(\theta)}{2k+1}\right]. \tag{73}$$

*Exemplu.* Pentru aceeaşi funcţie $\sin\theta$ în intervalul $0 - \pi/2$ cu formulele (64), avem :

$$a = 0{,}66444\,; \; b = 0{,}11478$$

adică

$$\sin \theta \simeq 0{,}66444\ \theta + 0{,}11478,$$

iar

$$\varepsilon(\theta) = \sin \theta - [0{,}66444\ \theta + 0{,}11478].$$

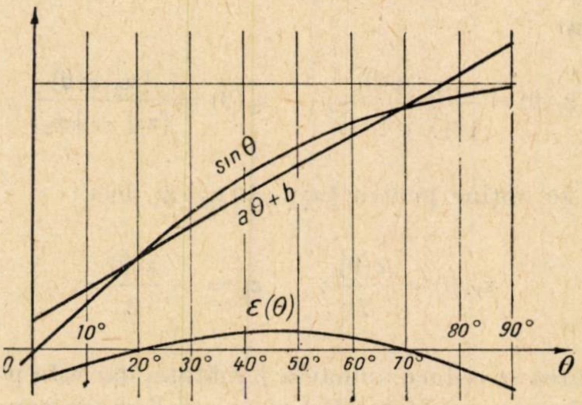


Fig. 16

Eroarea variază între $-15\%$ și $+7\%$ (fig. 16).

Pentru $k = 5$,

$$\alpha_1 = 3{,}98664, \qquad \alpha_2 = 3{,}32220,$$

$$\varepsilon_1(\theta) = 0{,}54545\ \varepsilon(\theta), \qquad \varepsilon_2(\theta) = -\ 0{,}45454\ \varepsilon(\theta),$$

$$f_1(\theta) = \frac{1}{6{,}5}[3{,}98664\ \theta + 0{,}54545\ \varepsilon(\theta) + 0{,}11478],$$

$$f_2(\theta) = \frac{1}{6{,}5}[3{,}32220\ \theta - 0{,}45454\ \varepsilon(\theta)],$$

$$m = 1/6{,}5.$$

Diagramele și camele sînt redate în figurile 17, 18, 19 pentru $L_{t1} = L_{t2} = 325$ mm.

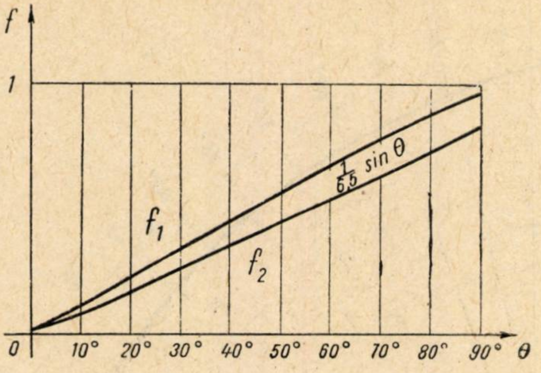

f
1
$\frac{1}{6.5}\sin\theta$
$f_1$
$f_2$
0
10°
20°
30°
40°
50°
60°
70°
80°
90°
θ

Fig. 17

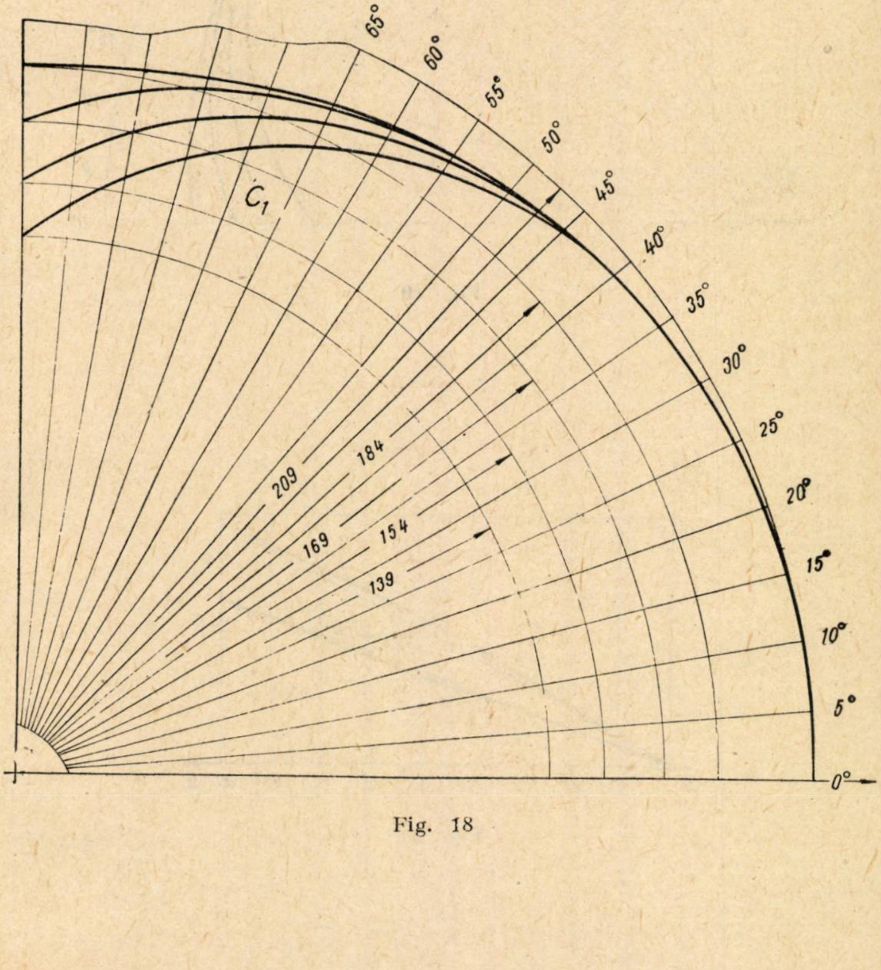

65°
60°
55°
50°
45°
40°
35°
30°
25°
20°
15°
10°
5°
0°
$C_1$
209
184
169
154
139

Fig. 18

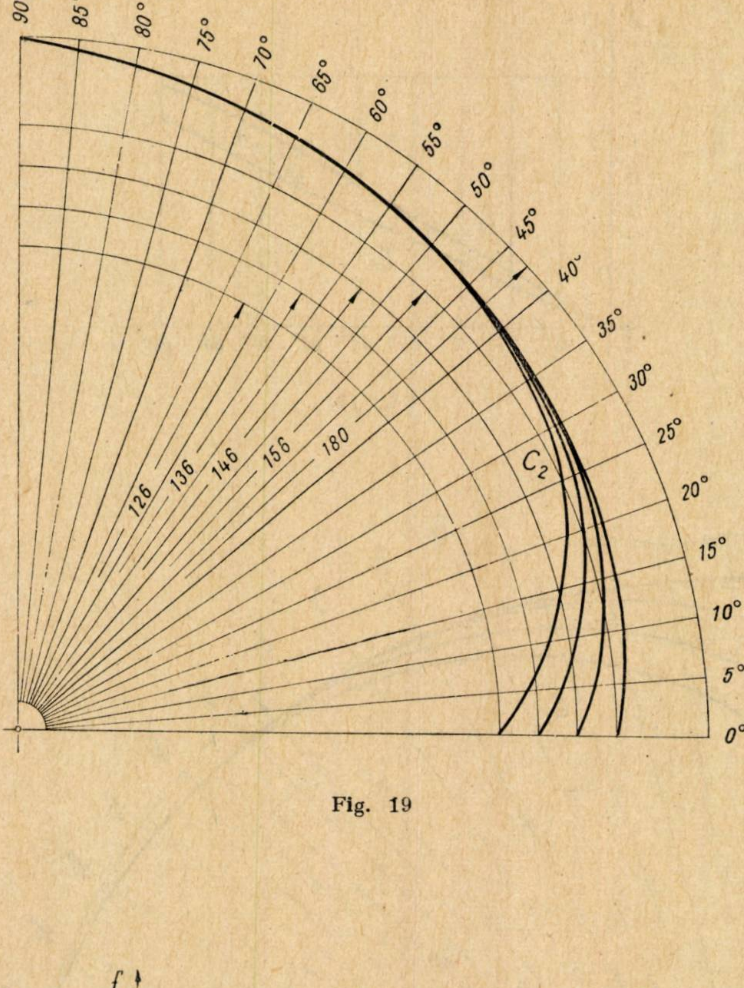

90°
85°
80°
75°
70°
65°
60°
55°
50°
45°
40°
35°
30°
25°
20°
15°
10°
5°
0°
126
136
146
156
180
$C_2$

Fig. 19

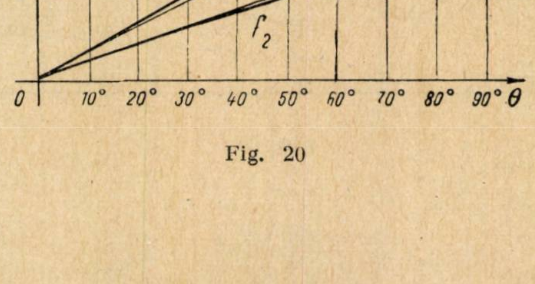

f
$f_1$
$\frac{1}{3,25}\sin\theta$
$f_2$
0
10°
20°
30°
40°
50°
60°
70°
80°
90°
θ

Fig. 20

Pentru $k = 2$,

$$\alpha_1 = 1{,}99332, \qquad \alpha_2 = 1{,}32888,$$

$$\varepsilon_1(\theta) = 0{,}6\ \varepsilon(\theta), \qquad \varepsilon_2(\theta) = -\ 0{,}4\ \varepsilon(\theta),$$

$$f_1(\theta) = \frac{1}{3{,}25}\left[1{,}99332\ \theta + 0{,}6\ \varepsilon(\theta) + 0{,}11478\right],$$

$$f_2(\theta) = \frac{1}{3{,}25}\left[1{,}32888\ \theta - 0{,}4\ \varepsilon(\theta)\right],$$

$$m = 1/3{,}25.$$

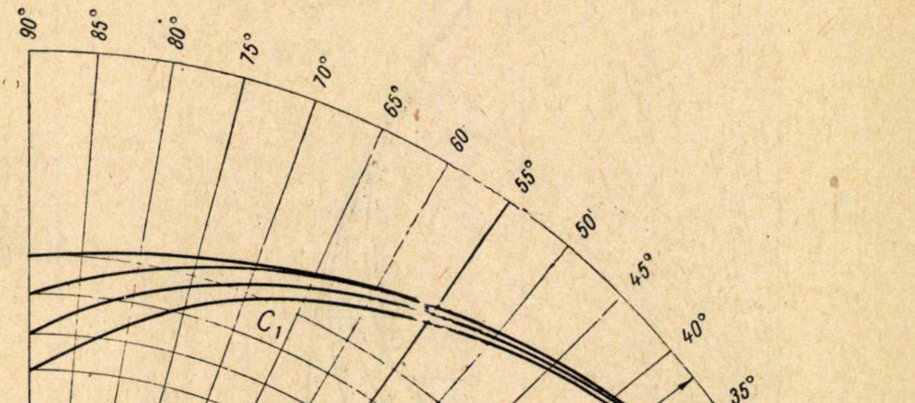

90°
85°
80°
75°
70°
65°
60
55°
50
45°
40°
35°
30°
25°
20°
15°
10°
5°
0°
$C_1$
137
147
157
167
220

Fig. 21

Diagramele şi camele sînt redate în figurile 20, 21, 22, pentru $L_{t1} = L_{t2} = 325$ mm.

Observăm că din punct de vedere al camei este avantajos luarea unui coeficient $k$ mare, dar este necesară în acest caz o amplificare mare deoarece $m$ este mic.

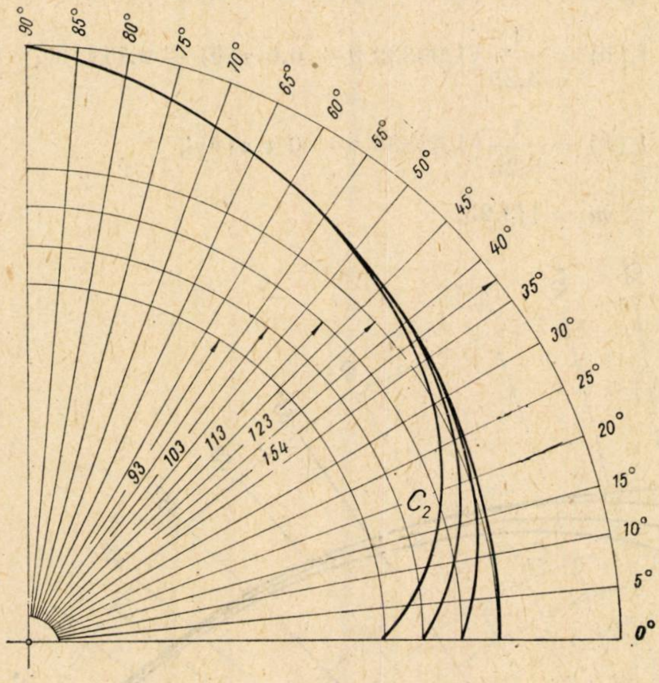


Fig. 22

*Primită la redacţie la 26 iulie 1961*

# ИЗОБРАЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПРИ ПОМОЩИ ДУГ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ КУЛАЧКОВ С ТОЛКАТЕЛЕМ, ИСПОЛНЯЮЩИМ ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

## РЕЗЮМЕ

Исходя из необходимости электрического изображения функций при экспериментальном исследовании механизмов, настоящая работа занимается определением формы кулачков $\rho(\theta)$ при условии, чтобы длина дуги изображала функцию $F(\theta)$ на определенном интервале, где $\theta$ — угол вращения кулачка. В этом случае проволока сопротивления, натянутая по периферии кулачка и питаемая при постоянном напряжении, будет давать напряжение, пропорциональное искомой функции.

Невозможность изображения при этих условиях большого класса функций из-за сложных характеристик кулачка, ведет к применению двух кулачков, смонтированных в потенциометрическом соединении умножения или сложения.

Таким образом, описываются методы точного изображения функций и даются примеры при sin θ.

## REPRESENTATION OF FUNCTIONS WITH THE AID OF ARCS OF ROTATION CAMS AND TRANSLATION TAPPETS

### ABSTRACT

Proceeding from the necessity of electrical function representation in mechanism testing, this paper deals with the determination of the cam form $\rho(\theta)$ by setting the condition that the arc length should represent the function $F(\theta)$ within a certain interval, $\theta$ being the cam rotation angle. In this case, a resistive wire stretched on the cam contour and supplied by constant tension will give a tension proportional to the function looked for.

The impossibility of representing under such conditions a large class of functions, due to the particular cam characteristics, leads to the use of two cams mounted in a multiplication or summation potentiometer connexion.

The methods of accurate function representation are thus described. An example is given for sin θ.

### BIBLIOGRAFIE

1. И. И. Артоболевский, Н. И. Левицкий, К. А. Черкудинов, *Синтез плоских механизмов*, Физматгиз, 1959.
2. R. C. Bogdan, Chr. Pelecudi, L. Calamaciuc, G. Antonescu, *Ein polarer Übertrager zur Untersuchung von Getrieben.* Revue de Mécanique Appliquée, *1* (1960).
3. R. C. Bogdan, Chr. Pelecudi, E. Bugaievski, L. Calmaciuc, *Studii asupra determinării pe cale experimentală a deplasărilor în mecanismele plane.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, 3 (1957).
4. Н. П. Раевский, *Методы экспериментальных исследований механических параметров машин.* Издат. Акад. Наук СССР, Москва, 1952.
5. G. Korn, Th. Korn, *Electronic Analog Computer.* Ed. Mc. Graw-Hill, New York, 1952.
6. — *Problemele modelării electrice.* Ed. Academiei R.P.R., Bucureşti, 1953.

# DETERMINAREA DIMENSIUNILOR PRINCIPALE ALE UNUI MECANISM BIELĂ-MANIVELĂ GENERAL

DE

GEORGE BĂRĂNESCU

## 1. INTRODUCERE

În construcția motoarelor cu ardere internă se folosesc diverse tipuri de mecanisme bielă-manivelă. Din punct de vedere cinematic, cel mai general este mecanismul bielă-manivelă cu biele articulate dezaxat, la care axele cilindrilor cu biele secundare întîlnesc axa cilindrului cu bielă principală (fig. 1); toate celelalte mecanisme bielă-manivelă sînt cazuri particulare ale acestui mecanism.

La dimensionarea unui mecanism bielă-manivelă cu biele articulate se urmărește îndeplinirea unor condiții de ordin constructiv și funcțional, în vederea simplificării fabricației și montajului și pentru realizarea unei funcționări identice a cilindrilor motorului. Din punct de vedere constructiv este necesar ca cilindrii, pistoanele, bielele principale și bielele secundare să fie identice; de asemenea, chiulasele trebuie să fie identice și montate la aceeași distanță de axa de rotație. Din punct de vedere funcțional este avantajos să existe aceleași raporturi de comprimare, curse egale, repartiția uniformă a pozițiilor moarte în perioada funcțională a motorului, precum și diferențe minime între cinematica mecanismelor.

În timp ce condițiile de ordin constructiv sînt îndeplinite în întregime, condițiile de ordin funcțional sînt îndeplinite numai în parte, deoarece numărul variabilelor este mai mic decît numărul condițiilor enumerate. În problema cercetată variabilele sînt parametri geometrici ai mecanismului. Deoarece lungimea $R$ a manivelei se determină o dată cu dimensiunile fundamentale ale cilindrului cu bielă principală, iar lungimea $L$ a bielei principale rezultă prin alegerea valorii raportului $\lambda = \frac{R}{L}$, există următoarele variabile: unghiurile $\gamma$ dintre axa cilindrului cu bielă principală și axele cilindrilor cu biele secundare, unghiurile $\psi = \delta - \gamma$ care precizează calajul brațelor bielelor secundare față de biela principală (fig. 1), lungimile $r$ ale brațelor bielelor secundare, lungimea $l$ a bielelor secundare (un singur parametru întrucît bielele secundare au aceeași lungime), coeficientul de dezaxare $h = \dfrac{H}{R}$ al cilindrului cu bielă principală, şi coeficienţii de dezaxare $h_l = \dfrac{H_l}{R}$ ai cilindrilor cu biele secundare. Fiindcă lungimile $r$ trebuie să fie cît mai mici (pentru ca cinematica bielelor

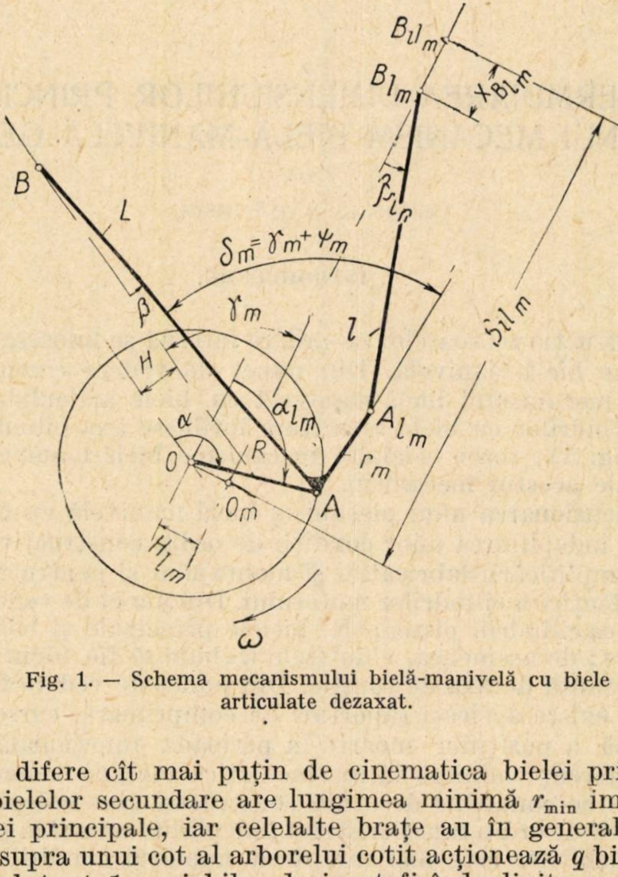


Fig. 1. — Schema mecanismului bielă-manivelă cu biele articulate dezaxat.

secundare să difere cît mai puţin de cinematica bielei principale) unul din braţele bielelor secundare are lungimea minimă $r_{\min}$ impusă de construcţia bielei principale, iar celelalte braţe au în general lungimi mai mari. Dacă asupra unui cot al arborelui cotit acţionează $q$ biele secundare, există în total $4q + 1$ variabile, deci pot fi îndeplinite maximum patru din cerinţele funcţionale enumerate, deoarece fiecare cerinţă introduce $q$ condiţii (cîte una pentru fiecare mecanism cu bielă secundară), valoarea uneia din variabile putînd fi aleasă. La motoarele în $V$, unde fiecare cerinţă funcţională introduce o singură condiţie, pot fi îndeplinite cinci cerinţe funcţionale.

Posibilităţile practice sînt însă mai mici, deoarece intervin cerinţe suplimentare, datorită cărora parametrii geometrici ai mecanismului au fie anumite valori, fie un domeniu de variaţie restrîns. Astfel, valorile coeficienţilor de dezaxare sînt de obicei determinate de condiţia micşorării forţelor dintre pistoane şi cilindri, sau de plasarea unor organe în carterul motorului. Unghiurile $\gamma$ sînt de multe ori impuse de condiţii de simetrie. De asemenea, se pot alege în prealabil valorile unghiurilor $\psi$ sau lungimile $r$.

În articol se cercetează problema determinării dimensiunilor principale ale unui mecanism bielă-manivelă general, în diversele cazuri care prezintă interes practic. Valorile coeficienţilor de dezaxare $h$ şi $h_l$ sînt presupuse alese în prealabil. Se consideră drept condiţii funcţionale principale egalitatea raporturilor de comprimare, egalitatea curselor pistoanelor şi repartiţia uniformă a punctelor moarte interioare, prima condiţie fiind obligatorie.

## 2. DETERMINAREA DIMENSIUNILOR PRINCIPALE ALE MECANISMULUI ÎN CAZUL GENERAL

Dacă valorile coeficienţilor de dezaxare au fost alese în prealabil, mai rămîn $3q$ variabile, deci pot fi îndeplinite cele trei condiţii funcţionale de mai sus.

Deoarece mecanismul cu bielă principală este dimensionat şi punctele moarte interioare sînt uniform repartizate în perioada funcţională a motorului, se cunosc poziţiile manivelei cînd trebuie să se realizeze punctele moarte interioare în cilindrii aferenţi mecanismului considerat. Notînd cu $\alpha_{im}$ valoarea unghiului $\alpha$ (fig. 1) în punctul mort interior al cilindrului cu numărul de ordine $m$, prevăzut cu bielă secundară, condiţia repartiţiei uniforme a punctelor moarte interioare este exprimată de egalităţile

$$\alpha_{l_{im}} + \gamma_m = \alpha_{im} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots q), \tag{1}$$

unde $\alpha_{l_{im}}$ este valoarea unghiului $\alpha_{l_m}$ (fig. 1) în punctul mort interior al cilindrului $m$.

Pentru exprimarea celorlalte condiţii funcţionale se notează cu $S$ distanţa de la punctul mort al piciorului bielei la planul dus prin axa de rotaţie a arborelui cotit, normal pe axa cilindrului respectiv. Indicii $i$ şi $e$ arată respectiv punctul mort interior şi punctul mort exterior, indicele $l_m$ arată că mărimea se referă la mecanismul cu bielă secundară a cilindrului $m$, iar indicele $L$ arată mecanismul cu bielă principală.

Chiulasele fiind identice şi montate la aceeaşi distanţă de axa de rotaţie, condiţia egalităţii raporturilor de comprimare şi condiţia egalităţii curselor pistoanelor sînt îndeplinite dacă

$$\left.\begin{aligned} S_{il_m} &= S_{iL}, \\ S_{el_m} &= S_{eL}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

În vederea explicitării acestor condiţii se stabilesc mai întîi unele formule auxiliare.

Proiectînd conturul OAB pe direcţia perpendiculară la $O_mB$ se obţine

$$L \sin \beta \pm H = R \sin \alpha,$$

din care rezultă

$$\sin \beta = \lambda \,[\sin (\alpha_{l_m} + \gamma_m) \mp h]. \tag{3}$$

În această formulă s-au considerat două semne înaintea coeficientului de dezaxare $h$, deoarece axa $O_mB$ poate fi situată la dreapta sau la stînga punctului $O$; primul semn corespunde dezaxării ca în figura 1.

Proiectînd conturul $OAA_{l_m}B_{l_m}$ pe direcția perpendiculară la axa $O_mB_{l_m}$ se obține

$$\sin \beta_{l_m} = \frac{R}{l} \sin \alpha_{l_m} - \frac{r_m}{l} \sin (\beta - \psi_m) \mp \frac{R}{l} h_{l_m}. \tag{4}$$

Deplasarea pistonului acționat de biela secundară, măsurată față de punctul său mort interior are expresia

$$x_{B_{l_m}} = S_{i_{l_m}} - O_mB_{l_m} = S_{il_m} - [R \cos \alpha_{l_m} + r_m \cos (\beta - \psi_m) + \\ + l \cos \beta_{l_m}]. \tag{5}$$

Dezvoltînd această expresie în serie Fourier și limitînd dezvoltarea la primii doi termeni se obține

$$x_{B_{l_m}} = C_0 - R\,[E_m \cos (\alpha_{l_m} + \varphi_{1m}) + \frac{1}{4} F_m \cos (2\alpha_{l_m} + \varphi_{2m})], \tag{6}$$

în care constantele $E_m$ și $F_m$ au expresiile

$$E_m = \frac{1 - \frac{l}{R}\lambda_{l_m}^2 \cdot f_{l_m} \sin \zeta_m + \frac{r_m}{L}(\pm \lambda h \cos \psi_m + \sin \psi_m) \sin \gamma_m}{\cos \varphi_{1m}}, \tag{7}$$

$$F_m = \frac{\frac{l}{R}\lambda_{l_m}^2 \cos 2\zeta_m + \frac{r_m}{L} \lambda \cos \psi_m \cos 2\gamma_m}{\cos \varphi_{2m}}, \tag{8}$$

unghiurile $\varphi_{1m}$ și $\varphi_{2m}$ fiind definite de formulele

$$\operatorname{tg} \varphi_{1m} = - \frac{\frac{l}{R} \lambda_{l_m}^2 f_{l_m} \cos \zeta_m + \frac{r_m}{L}(\pm \lambda h \cos \psi_m + \sin \psi_m) \cos \gamma_m}{1 - \frac{l}{R}\lambda_{l_m}^2 f_{l_m} \sin \zeta_m + \frac{r_m}{L}(\pm \lambda h \cos \psi_m + \sin \psi_m) \sin \gamma_m}, \tag{9}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{2m} = - \frac{\frac{l}{R} \lambda_{l_m}^2 \sin 2\zeta_m - \frac{r_m}{L} \lambda \cos \psi_m \sin 2\gamma_m}{\frac{l}{R} \lambda_{l_m}^2 \cos 2\zeta_m + \frac{r_m}{L} \lambda \cos \psi_m \cos 2\gamma_m}. \tag{10}$$

$C_0$ este de asemenea o constantă, a cărei expresie nu prezintă interes pentru problema cercetată. În formulele precedente s-a notat

$$\lambda_{l_m} = \frac{R}{l}\sqrt{\left(1-\frac{r_m}{L}\cos\psi_m\cos\gamma_m\right)^2+\left(\frac{r_m}{L}\cos\psi_m\sin\gamma_m\right)^2},$$

$$\zeta_m = \operatorname{arc\,tg}\frac{r_m}{l}\,\frac{\cos\psi_m\sin\gamma_m}{1-\dfrac{r_m}{L}\cos\psi_m\cos\gamma_m},$$

$$f_{l_m} = \frac{1}{\lambda_{l_m}}\,\frac{r_m}{l}\left(\pm\frac{h_{l_m}R}{r_m}-\sin\psi_m\cos\beta\mp\lambda h\cos\psi_m\right).$$

Prin derivarea formulei (6) în raport cu timpul se obţine următoarea expresie a vitezei pistonului cilindrului $m$

$$v_{B_{l_m}} = R\omega\left[E_m\sin(\alpha_{l_m}+\varphi_{1_m})+\frac{1}{2}F_m\sin(2\alpha_{l_m}+\varphi_{2m})\right], \tag{11}$$

unde $\omega$ este viteza unghiulară a manivelei.

Expresiile distanţelor $S_{il_m}$ şi $S_{el_m}$ se obţin aplicînd formula (5) pentru cele două puncte moarte

$$S_{il_m} = R\cos\alpha_{l_{im}}+r_m\cos(\beta_{im}-\psi_m)+l\cos\beta_{l_{im}}, \tag{12}$$

$$S_{el_m} = R\cos\alpha_{l_{em}}+r_m\cos(\beta_{em}-\psi_m)+l\cos\beta_{l_{em}}, \tag{13}$$

unde $\alpha_{l_{em}}$ este valoarea unghiului $\alpha_{l_m}$ în punctul mort exterior al cilindrului cu bielă secundară considerat, $\beta_{im}$ şi $\beta_{em}$ valorile unghiului $\beta$ în punctele moarte ale cilindrului $m$, iar $\beta_{l_{im}}$ şi $\beta_{l_{em}}$ valorile unghiului $\beta_{l_m}$ în aceleaşi puncte moarte. Din formulele (3) şi (4) se deduce

$$\sin\beta_{im} = \lambda[\sin(\alpha_{l_{im}}+\gamma_m)\mp h], \tag{14}$$

$$\sin\beta_{em} = \lambda[\sin(\alpha_{l_{em}}+\gamma_m)\mp h], \tag{15}$$

$$\sin\beta_{l_{im}} = \frac{R}{l}\sin\alpha_{l_{im}}-\frac{r_m}{l}\sin(\beta_{im}-\psi_m)\mp\frac{R}{l}h_{l_m}, \tag{16}$$

$$\sin\beta_{l_{em}} = \frac{R}{l}\sin\alpha_{l_{em}}-\frac{r_m}{l}\sin(\beta_{em}-\psi_m)\mp\frac{R}{l}h_{l_m}. \tag{17}$$

Unghiurile $\alpha_{l_{im}}$ şi $\alpha_{l_{em}}$ se obţin scriind că în punctele moarte viteza pistonului este nulă. Folosind formula (11) rezultă

$$E_m\sin(\alpha_{l_{im}}+\varphi_{1m})+\frac{1}{2}F_m\sin(2\,\alpha_{l_{im}}+\varphi_{2m}) = 0, \tag{18}$$

$$E_m\sin(\alpha_{l_{em}}+\varphi_{1m})+\frac{1}{2}F_m\sin(2\,\alpha_{l_{em}}+\varphi_{2m}) = 0. \tag{19}$$

Distanțele $S_{iL}$ și $S_{eL}$ sînt cunoscute, deoarece mecanismul cilindrului cu bielă principală este dimensionat în prealabil. Expresiile acestor distanțe se obțin din formulele (12) și (13), în care se înlocuiesc condițiile cilindrului cu bielă principală : $\alpha_{l_m} = \alpha$, $\beta_{l_m} = \beta$, $r = 0$ și $l = L$ :

$$S_{iL} = R \cos \alpha_i + L \cos \beta_i, \tag{20}$$

$$S_{eL} = R \cos \alpha_e + L \cos \beta_e, \tag{21}$$

unde $\alpha_i$ și $\alpha_e$ sînt valorile unghiului $\alpha$ în punctele moarte ale mecanismului cu bielă principală ; aceste valori sînt date de formulele

$$\alpha_i = \pm \arcsin \frac{h}{\frac{1}{\lambda} + 1},$$

$$\alpha_e = 180^\circ \pm \arcsin \frac{h}{\frac{1}{\lambda} - 1}.$$

Unghiurile $\beta_i$ și $\beta_e$ se obțin din formula (3)

$$\sin \beta_i = \lambda \sin (\alpha_i \mp h),$$

$$\sin \beta_e = \lambda \sin (\alpha_e \mp h).$$

Prin înlocuirea expresiilor (12), (13), în egalitățile (2) se obțin condițiile

$$R \cos \alpha_{l_{im}} + r_m \cos (\beta_{im} - \psi_m) + l \cos \beta_{l_{im}} = S_{iL}, \tag{22}$$

$$R \cos \alpha_{l_{em}} + r_m \cos (\beta_{em} - \psi_m) + l \cos \beta_{l_{em}} = S_{eL}, \tag{23}$$

distanțele $S_{iL}$ și $S_{eL}$ fiind date de formulele (20) și (21).

Rezolvarea ecuațiilor precedente se face prin aproximații succesive. Aplicînd formulele (22) și (23) tuturor cilindrilor cu biele secundare rezultă

$$\left.\begin{aligned} r_1 \cos (\beta_{i1} - \psi_1) + l \cos \beta_{l_{i1}} &= S_{iL} - R \cos \alpha_{l_{i1}}, \\ r_2 \cos (\beta_{i2} - \psi_2) + l \cos \beta_{l_{i2}} &= S_{iL} - R \cos \alpha_{l_{i2}}, \\ &\vdots \\ r_q \cos (\beta_{iq} - \psi_q) + l \cos \beta_{l_{iq}} &= S_{iL} - R \cos \alpha_{l_{iq}}, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned} r_1 \cos (\beta_{e1} - \psi_1) + l \cos \beta_{l_{e1}} &= S_{eL} - R \cos \alpha_{l_{e1}}, \\ r_2 \cos (\beta_{e2} - \psi_2) + l \cos \beta_{l_{e2}} &= S_{eL} - R \cos \alpha_{l_{e2}}, \\ &\vdots \\ r_q \cos (\beta_{eq} - \psi_q) + l \cos \beta_{l_{eq}} &= S_{eL} - R \cos \alpha_{l_{eq}}. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Inițial se aleg valorile $\alpha_{l_{im}} = 0^\circ$, $\alpha_{l_{em}} = 180^\circ$, $\beta_{l_{im}} = 0^\circ$, $\beta_{l_{em}} = 0^\circ$, cu care se calculează unghiurile $\gamma_m$, $\beta_{im}$, $\beta_{em}$ respectiv din formulele (1), (14) și (15). Se ia de exemplu $r_1 = r_{\min}$ și se determină valorile $l$ și $\psi_1$ din primele ecuații ale sistemelor (24) și (25), iar cu valoarea $l$ obținută se determină valorile $r_2 \ldots r_q$ și $\psi_2 \ldots \psi_q$ din restul ecuațiilor ; dacă una sau mai multe din valorile $r_2 \ldots r_q$ sînt mai mici decît $r_{\min}$, se repetă rezolvarea ecuațiilor (24) și (25) plecînd de la condiția $r_2 = r_{\min}$ sau $r_3 = r_{\min}$ etc., pînă cînd nici una din valorile $r_m$ nu este mai mică decît $r_{\min}$. Cu valorile $r_m$, $l$ și $\psi_m$ obținute, se calculează valorile mărimilor $E_m$, $F_m$, $\varphi_{1m}$, $\varphi_{2m}$ respectiv din formulele (7)...(10), după care se determină unghiurile $\alpha_{l_{im}}$, $\alpha_{l_{em}}$ din ecuațiile (18), (19), și unghiurile $\beta_{l_{im}}$, $\beta_{l_{em}}$ din formulele (16), (17), cu care se recalculează valorile mărimilor $\gamma_m$, $l$, $r_m$ și $\psi_m$. Plecînd de la noile valori, se repetă calculul pînă cînd diferențele între valorile inițiale și finale ale mărimilor $\gamma_m$, $l$, $r_m$ și $\psi_m$ sînt neglijabile.

Deoarece $\alpha_{l_{im}} + \varphi_{lm} \sim 0$ și $\alpha_{l_{em}} + \varphi_{1m} \sim 180^\circ$, în formulele (18) și (19) se poate înlocui dublul sinusului cu sinusul dublului arcului

$$E_m \sin 2\,(\alpha_{l_{im}} + \varphi_{1m}) + F_m \sin (2\,\alpha_{l_{im}} + \varphi_{2m}) = 0,$$

$$-E_m \sin 2\,(\alpha_{l_{em}} + \varphi_{1m}) + F_m \sin (2\,\alpha_{l_{em}} + \varphi_{2m}) = 0\,;$$

în a doua formulă s-a schimbat semnul, întrucît dacă $\alpha_{l_{em}} + \varphi_{1m} < 180^\circ$ $\sin\,(\alpha_{l_{em}} + \varphi_{1m}) > 0$ și $\sin 2\,(\alpha_{l_{em}} + \varphi_{2m}) < 0$, iar dacă

$$\alpha_{l_{em}} + \varphi_{1m} > 180^\circ,\ \sin\,(\alpha_{l_{em}} + \varphi_{1m}) < 0 \ \text{ și } \ \sin 2\,(\alpha_{l_{em}} + \varphi_{2m}) > 0.$$

Din aceste formule se obține

$$\operatorname{tg} 2\,\alpha_{l_{im}} = -\frac{F_m \sin \varphi_{2m} + E_m \sin 2\varphi_{1m}}{F_m \cos \varphi_{2m} + E_m \cos 2\varphi_{1m}}, \tag{26}$$

$$\operatorname{tg} 2\,\alpha_{l_{em}} = -\frac{F_m \sin \varphi_{2m} - E_m \sin 2\varphi_{1m}}{F_m \cos \varphi_{2m} - E_m \cos 2\varphi_{1m}}. \tag{27}$$

Diferențele între valorile unghiurilor $\alpha_{l_{im}}$, $\alpha_{l_{em}}$ calculate cu formulele (26) și (27) și valorile acelorași unghiuri calculate din formulele (18) și (19) sînt în general neglijabile.

## 3. DETERMINAREA DIMENSIUNILOR PRINCIPALE ALE MECANISMULUI CÎND SE STABILESC ÎN PREALABIL VALORILE MĂRIMILOR $h$, $h_{l_m}$ ȘI $\gamma_m$

În acest caz există $2q$ variabile, deci pot fi îndeplinite două din condițiile funcționale enumerate.

Dacă se aleg condiția egalității raporturilor de comprimare și condiția egalității curselor pistoanelor, calculul se efectuează ca în cazul precedent, suprimînd însă ecuația (1).

Dacă se aleg condiția egalității raporturilor de comprimare și condiția repartiției uniforme a punctelor moarte interioare, se folosește ecuația (1), și o nouă ecuație care exprimă egalitatea raporturilor de comprimare. Notînd cu $\varepsilon$ raportul de comprimare și cu $d$ distanța de la chiulase la axa de rotație (aceeași pentru toți cilindri), expresia raportului de comprimare pentru un cilindru oarecare cu bielă secundară este

$$\varepsilon = \frac{d - S_{el_m}}{d - S_{il_m}},$$

iar pentru cilindrul cu bielă principală

$$\varepsilon = \frac{d - S_{eL}}{d - S_{iL}}.$$

Prin eliminarea distanței $d$ rezultă

$$\varepsilon \cdot S_{il_m} - S_{el_m} = \varepsilon \cdot S_{iL} - S_{eL}.$$

Înlocuind în această condiție mărimile $S_{il_m}$ și $S_{el_m}$ din (12) și (13) se obține

$$R(\varepsilon \cos \alpha_{l_{im}} - \cos \alpha_{l_{em}}) + r_m[\varepsilon \cos (\beta_{im} - \psi_m) - \cos (\beta_{em} - \psi_m)] +$$
$$+ l(\varepsilon \cos \beta_{l_{im}} - \cos \beta_{l_{em}}) = \varepsilon S_{iL} - S_{eL}. \qquad (28)$$

Prin explicitarea unghiului $\psi_m$ rezultă după o serie de transformări

$$\sin (\psi_m + \eta_m) = \frac{\cos \eta_m}{\varepsilon \sin \beta_{im} - \sin \beta_{em}} \times$$
$$\times \left[ \frac{\varepsilon S_{iL} - S_{eL}}{r_m} - (\varepsilon \cos \beta_{l_{im}} - \cos \beta_{l_{em}}) \frac{l}{r_m} - (\varepsilon \cos \alpha_{l_{im}} - \cos \alpha_{l_{em}}) \frac{R}{r_m} \right], \qquad (29)$$

unghiul $\eta_m$ fiind dat de formula

$$\operatorname{tg} \eta_m = \frac{\varepsilon \cos \beta_{im} - \cos \beta_{em}}{\varepsilon \sin \beta_{im} - \sin \beta_{em}}.$$

În cazul cercetat trebuie determinate valorile unghiurilor $\psi_1 \ldots \psi_q$, lungimea bielelor secundare, și lungimile brațelor pentru $q - 1$ biele secundare, unul din brațele bielelor secundare avînd lungimea minimă $r_{\min}$ impusă de construcția bielei principale. Aceste valori se obțin din ecuațiile (1), (14)...(19) și (29), care se rezolvă prin aproximații succesive după metoda următoare :

1) Se determină unghiurile $\alpha_{l_{im}}$ din ecuația (1).

2) Pentru unul din cilindri cu bielă secundară, de exemplu cilindrul numărul 1, se ia $r_1 = r_{\min}$. Alegînd inițial $\beta_{l_{i1}} = 0°$, $\beta_{l_{e1}} = 0°$, $\alpha_{l_{e1}} = 180°$, se determină unghiurile $\beta_{i1}$, $\beta_{e1}$ din relațiile (14) și (15), după care se calculează din formula (29) o serie de valori ale unghiului $\psi_1$, pentru diverse

valori ale lungimii bielei secundare, reținîndu-se perechea de valori $\psi_1'$ și $l'$ pentru care este satisfăcută ecuația (18). Cu valorile $\psi_1'$ și $l'$ se determină unghiurile $\alpha_{l_{e1}}$, $\beta_{l_{i1}}$, $\beta_{l_{e1}}$ din formulele (19), (16) și (17), cu care se recalculează mărimile $\psi_1$ și $l$ din formulele (18) și (29). Plecînd de la noile valori, se repetă calculul pînă cînd diferențele între valorile inițiale și valorile finale ale mărimilor $\psi_1$ și $l$ sînt neglijabile.

3) Cu lungimea bielei secundare stabilită la punctul 2, se determină valorile mărimilor $\psi$ și $r$ și pentru ceilalți cilindri cu biele secundare, folosind metoda de la punctul 2, cu deosebirea că în ecuația (29) se variază $r_m$, pînă se găsește perechea de valori $\psi_m$, $r_m$ pentru care este satisfăcută ecuația (18).

4) Dacă una sau mai multe din valorile $r_2 \ldots r_q$ determinate la punctul 3 sînt mai mici decît $r_{\min}$, se repetă întregul calcul plecînd de la condiția $r_2 = r_{\min}$, sau $r_3 = r_{\min}$ etc., pînă cînd nici una din valorile $r_m$ nu este mai mică decît $r_{\min}$.

## 4. DETERMINAREA DIMENSIUNILOR PRINCIPALE ALE MECANISMULUI CÎND SE STABILESC ÎN PREALABIL VALORILE MĂRIMILOR $h$, $h_{l_m}$, $\gamma_m$, $r_m$

În acest caz există $q+1$ variabile: $l$ și $\psi_1 \ldots \psi_q$. Lungimea bielei secundare se determină din condiția arbitrară

$$l = L - r, \tag{30}$$

aplicată pentru unul din cilindri cu bielă secundară, iar unghiurile $\psi_1 \ldots \psi_q$ din condiția egalității raporturilor de comprimare exprimată de formula (29). Calculul unghiurilor $\psi_1 \ldots \psi_q$ cu formula (29) se face prin aproximații succesive, alegînd inițial valorile $\alpha_{l_{im}} = 0°$, $\alpha_{l_{em}} = 180°$, $\beta_{l_{im}} = 0°$, $\beta_{l_{em}} = 0°$.

La motoarele în $V$ se pot îndeplini două condiții funcționale, dacă se renunță la condiția arbitrară (30); calculul se efectuează după metoda arătată la punctul 3.

## 5. DETERMINAREA DIMENSIUNILOR PRINCIPALE ALE MECANISMULUI CÎND SE STABILESC ÎN PREALABIL VALORILE MĂRIMILOR $h$, $h_{l_m}$, $\gamma_m$, $\psi_m$

În acest caz necunoscutele sînt lungimea bielelor secundare și lungimile brațelor pentru $q-1$ biele secundare; ele se determină din condiția egalității raporturilor de comprimare. Prin explicitarea ecuației (28) în raport cu $l$ și cu $r_m$ se obține

$$l = \frac{\varepsilon S_{iL} - S_{eL} - (\varepsilon \cos \alpha_{l_{im}} - \cos \alpha_{l_{em}}) R - [\varepsilon \cos(\beta_{im} - \psi_m) - \cos(\beta_{em} - \psi_m)] r_m}{\varepsilon \cos \beta_{l_{im}} - \cos \beta_{l_{em}}},$$

$$r_m = \frac{\varepsilon S_{iL} - S_{eL} - (\varepsilon \cos \alpha_{l_{im}} - \cos \alpha_{l_{em}}) R - (\varepsilon \cos \beta_{l_{im}} - \cos \beta_{l_{em}}) l}{\varepsilon \cos(\beta_{im} - \psi_m) - \cos(\beta_{em} - \psi_m)}. \tag{31}$$

Mai întîi se determină lungimile bielelor secundare din formula (30), considerînd lungimile braţelor bielelor secundare egale cu lungimea minimă impusă de construcţia bielei principale. Calculul se efectuează prin aproximaţii succesive plecînd de la valorile $\alpha_{l_{im}} = 0°$, $\alpha_{l_{em}} = 180°$, $\beta_{l_{im}} = 0°$, $\beta_{l_{em}} = 0°$. Cea mai mică din lungimile $l_1 \ldots l_q$ se alege drept lungime a bielelor secundare, după care se determină lungimile braţelor bielelor secundare cu formula (31), procedînd tot prin aproximaţii succesive.

## 6. CONCLUZII

Formulele stabilite permit determinarea dimensiunilor principale ale mecanismului bielă-manivelă general, în cazurile care prezintă interes practic. Pentru alte tipuri de mecanisme bielă-manivelă formulele de calcul se obţin prin particularizarea formulelor precedente.

*Primită la redacţie la 10 iulie 1961*

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ РАЗМЕРОВ ОБЩЕГО ШАТУННО-КРИВОШИПНОГО МЕХАНИЗМА

### РЕЗЮМЕ

В статье устанавливаются формулы, необходимые для определения основных размеров шатунно-кривошипного механизма с внецентреннъм шарнирным соединением шатунов. Рассматриваются следующие функциональные условия, которым должен удовлетворять механизм: равенство отношений сжатия, равенство ходов и равномерное распределение внутренних мертвых точек. Рассматривается общий случай и три частные случая, представляющие практический интерес.

### ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Схема шатунно-кривошипного механизма с внецентренным шарнирным соединением шатунов.

## DÉTERMINATION DES DIMENSIONS PRINCIPALES D'UN MÉCANISME BIELLE-MANIVELLE GÉNÉRAL

### RÉSUMÉ

Dans cet article, l'auteur établit les formules nécessaires pour calculer les dimensions principales d'un embiellage articulé, désaxé. On a pris en considération les conditions de fonctionnement suivantes, auxquelles doit

satisfaire le mécanisme: l'égalité des rapports de compression, l'égalité des courses et la répartition uniforme des points morts intérieurs. L'auteur procède à l'analyse du cas général, ainsi que de trois cas particuliers, intéressant la pratique courante.

## EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Schéma du mécanisme bielle-manivelle à bielles à articulation désaxée.

## BIBLIOGRAFIE

1. V. A. VANȘEIDT ș.a., *Motoare Diesel*. Ed. tehnică, București, 1959.
2. * * * *Авиационные поршневые двигатели. Кинематика, динамика и расчет на прочность*. Пособие для инженеров. МАП СССР, Москва, 1950.

# CONTRIBUŢII PRIVIND CALCULUL DE REZISTENŢĂ A SAPELOR CU LAME

DE

FLORIAN VIRGILIU *)

Deşi utilizarea sapelor cu role, la forarea sondelor de ţiţei şi gaze, se extinde din ce în ce mai mult, chiar în cazul terenurilor mai slab consolidate (sape cu role de tip M), totuşi sapele cu lame se folosesc incă la străbaterea rocilor de tărie mijlocie şi slabă, mai ales cînd acestea se găsesc la adîncime mică (pînă la 1 000—1 200 m).

Sapele cu lame folosite sînt de diferite tipuri, însă în lucrarea de faţă se are în vedere în special cunoscuta sapă cu lamă *în coadă de peşte*.

Solicitarea la care este supusă lama acestei sape este de răsucire şi compresiune axială.

Din cauza neomogenităţii rocilor, a înclinării diferite a straturilor, a marii elasticităţi la torsiune a instrumentului de foraj (sapă şi prăjini), precum şi a rotaţiei sapei, solicitarea sapei este dinamică (prin şoc şi variabilă), fapt de care trebuie să se ţină seama la alegerea rezistenţei admisibile de calcul sau a coeficientului de siguranţă.

Datorită faptului că lama (sau lamele) sapei se îngroaşă mult la partea superioară, formînd umerii sapei, lama (sau lamele) sapei apare ca încastrată în gîtul sapei şi deci deformaţiile din torsiune ale sapei, adică deplanarea secţiunii acesteia, care se produce în dreptul lamei, este împiedicată în regiunea de încastrare.

În consecinţă, solicitarea de răsucire a lamei (sau a lamelor) sapei este o răsucire împiedicată.

În prezent, un calcul de rezistenţă a sapelor cu lame nu se face, astfel că dimensiunile şi profilul lamelor sapei se stabilesc constructiv sau se adoptă prin tradiţie.

Deşi considerente de altă natură, ca de exemplu reducerea la maximum a uzurii tăişului sapei, primează la elaborarea proiectului unei astfel de sape, un calcul de rezistență a lamei sapei poate răspunde la alte probleme de seamă, puse de construcția rațională a sapelor cu lame, cum este :

---

*) Institutul de petrol, gaze şi geologie, Bucureşti.

*A*) dimensionarea lamei sapei, adică adoptarea unei proporții juste între cele trei dimensiuni ale acesteia (lungimea, lățimea și grosimea lamei), precum și

*B*) alegerea profilului optim al sapei, în așa fel încît lama sapei să reprezinte un solid de egală rezistență, în sensul de a nu prezenta regiuni mai solicitate, unde să poată surveni o rupere prematură a sapei.

În literatura de specialitate se întîlnește preocuparea unor cercetători, privind a doua latură a problemei enunțate mai sus și anume a determinării profilului optim al lamei sapelor în coadă de pește [1], [5].

Oricum s-ar pune problema, calculul revine la determinarea stării de eforturi în lama (sau în lamele) sapelor.

Asupra acestei stări de eforturi urmează apoi să se pună fie condiția de rezistență, în baza celei mai adecvate ipoteze de rupere pentru cazul de față, în punctul cel mai solicitat, fie respectarea acestei condițiuni în toate punctele critice din cuprinsul sapei.

Determinarea exactă a stării de eforturi în lama (sau în lamele) sapelor cu lame se poate face numai prin teoria elasticității.

Luarea în considerație a formei exacte a lamelor sapelor cu lame, precum și a condițiilor pe contur, implică dificultăți de ordin matematic, a căror înfruntare nu este justificată de importanța practică a rezultatelor ce se pot obține.

În consecință, în cele ce urmează vom încerca să prezentăm rezolvarea acestei probleme printr-o soluție aproximativă din teoria elasticității, avînd la bază lucrările [2], [3] și [4] și anume pentru cazul lamei sapelor în coadă de pește.

Vom considera astfel lama sapei de formă prismatică, cu secțiunea dreptunghiulară, avînd o latură mult mai mare decît cealaltă ($a \gg b$).

Lama este încastrată în planul secțiunii *ABCD* și este solicitată de un cuplu exterior de moment *M*, aplicat în planul secțiunii de capăt *EFGH*, neglijînd efectul forței axiale de compresiune [5], (fig. 1).

Secțiunea din încastrare este împiedicată să se deformeze, în timp ce toate celelalte secțiuni drepte prin lamă, paralele cu planul secțiunii din încastrare, se deformează prin deplanare.

Vom considera (după [3]) că deplanarea unei secțiuni drepte oarecare prin lama sapei, la distanța $x$ de planul secțiunii din încastrare, se face în așa fel, încît suprafața secțiunii respective, după deformare, ia forma unui hiperboloid parabolic.

Matematic aceasta se exprimă prin :

$$u = Kyz .$$

În această expresie $u$ se măsoară de la planul secțiunii înainte de deformare, așadar reprezintă alungirile diferitelor fibre de lungime inițială $x$.

Coeficientul $K$, în cazul răsucirii împiedicate, trebuie să varieze cu poziția secțiunii :

$$K = K(x).$$

Această variație trebuie să se facă în așa fel, încît pentru $x = 0$ să avem $K = 0$, ceea ce exprimă faptul că secțiunea din încastrare rămîne plană.

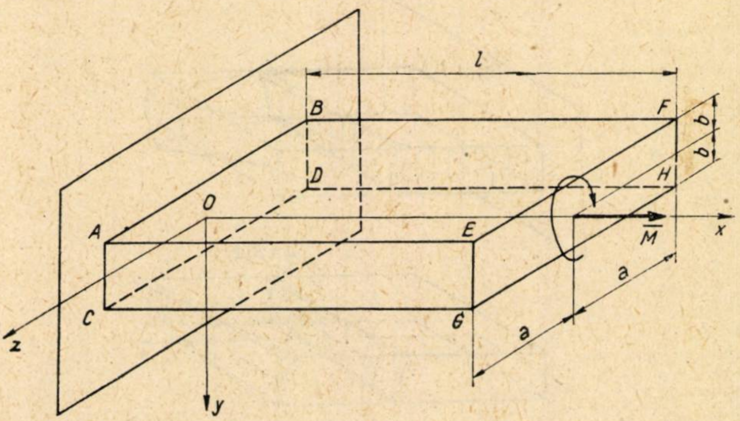


Fig. 1

Valoarea maximă a lui $K$ se produce în secțiunea din capătul liber al lamei.

Variația lui $K$, între valoarea zero și valoarea maximă, așa cum se constată experimental și cum rezultă și pe baza principiului lui Saint Vénant, trebuie să se facă foarte repede, așa că vom adopta, după [4], o lege exponențială de variație a lui $K$ :

$$K = \theta(1 - e^{-nx})$$

unde $\theta$ este răsucirea specifică medie, adică răsucirea specifică a unei bare cu aceeași secțiune, care prezintă aceeași rigiditate la torsiune pură, ca bara din cazul de față la răsucire împiedicată. Factorul $n$ este un coeficient ce urmează să fie determinat.

Așadar, deplanarea unei secțiuni drepte, la depărtarea $x$ de planul de încastrare, este dată de :

$$u = \theta(1 - e^{-nx})\, yz\,. \qquad (1)$$

Deplasările în lungul axelor $y$ și $z$ (adică deplanările secțiunilor longitudinale, paralele respectiv cu axele $x$ și $y$), sînt, după [3] :

$$v = -\,\theta xz \quad \text{și} \quad w = \theta xy$$

unde $\theta$ are aceeași semnificație ca mai sus.

Deși nu influențează calculul ce urmează, credem că deplanarea secțiunilor longitudinale, paralele cu axul $z$ și $y$, se pot exprima mai corect prin relațiile :

$$v = -\,\theta' x^2 z \quad \text{și} \quad w = \theta' x^2 y$$

în care $\theta'$ este un coeficient ce ar urma să fie determinat (fig. 2).

Opunerea elastică împotriva deplanării, variabile în lungul axului $x$, a secțiunii drepte, caracterizată prin deplasările $u$, se manifestă printr-o stare de tensiuni, diferită de cea care se dezvoltă în cazul deplanării neîmpiedicate (răsucire pură).

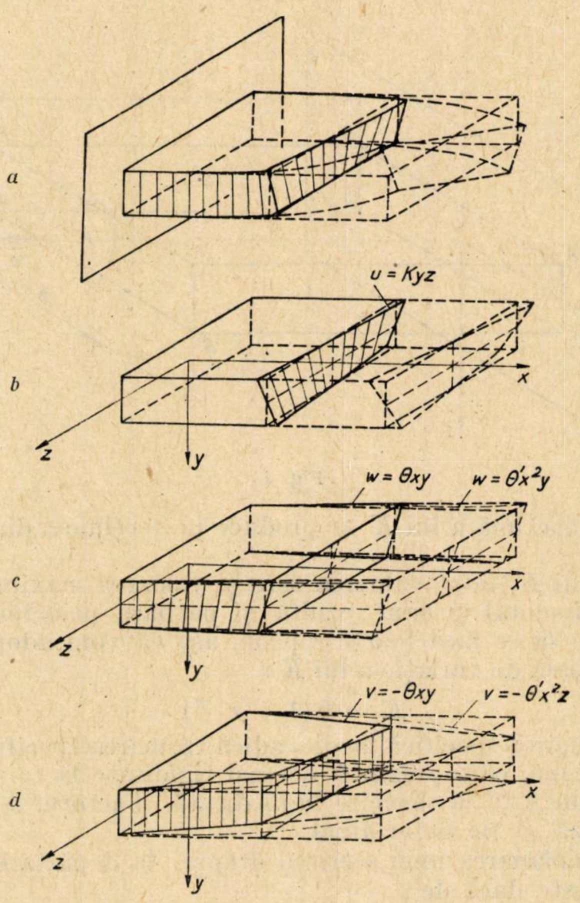


Fig. 2

Astfel, vor apare tensiuni $\sigma_x$, care se vor distribui pe secțiune după legea

$$\sigma_x = E\,\varepsilon_x\,,$$

unde

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \theta n e^{-nx} \cdot yz$$

și deci

$$\sigma_x = E\theta n e^{-nx} \cdot yz\,. \tag{2}$$

Păstrînd ipotezele obișnuite din teoria răsucirii pure a barei drepte, vom avea, după [3]:

$$\sigma_y = \sigma_z = 0\,. \tag{3}$$

Celelalte tensiuni (fig. 3) urmează să fie determinate pe considerentul că ele trebuie să satisfacă ecuațiile diferențiale de echilibru (Navier) și condițiile de pe contur din teoria elasticității.

Observînd că tensiunile tangențiale $\tau_{yz}$ apar tot datorită deplanării variabile a secțiunii drepte, ele fiind nule în cazul răsucirii pure, legea de variație a acestor tensiuni trebuie să fie legată tot de legea deplanării secțiunii drepte.

Pentru a satisface condițiile pe contur (lipsit de sarcini), adică pentru a se anula pentru $y = \pm b$ și pentru $z = \pm a$, legea de variație a tensiunilor $\tau_{yz}$ poate fi luată de forma

$$\tau_{yz} = n^3 A e^{-nx} (a^2 - z^2)(b^2 - y^2)\,. \tag{4}$$

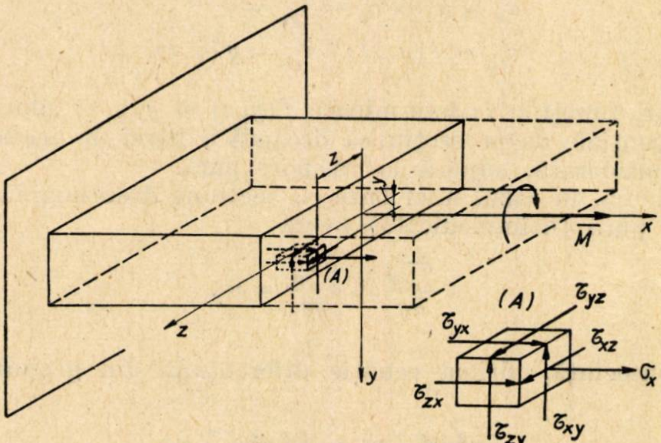


Fig. 3

Neglijînd forțele masice, care provin din greutăți, ca fiind infiniți mici de ordin superior, din ecuațiile de echilibru, după introducerea expresiilor (2), (3) și (4), se obțin următoarele ecuații diferențiale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 2n^3 A e^{-nx} z (b^2 - y^2) \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} &= 2n^3 A e^{-nx} y (a^2 - z^2) \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= E\theta n^2 e^{-nx} yz\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Prin integrarea primelor două ecuații diferențiale de mai sus se obțin tensiunile tangențiale de pe secțiunea dreaptă (precum și corespondentele acestora, conform principiului dualității tensiunilor tangențiale):

$$\begin{aligned} \tau_{yx} &= \tau_{xy} = -2n^2Ae^{-nx}z(b^2-y^2)+f(y,z)+C_1 \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} = -2n^2Ae^{-nx}y(a^2-z^2)+g(y,z)+C_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Pentru a satisface condițiile de pe conturul (lipsit de sarcini) al secțiunii drepte, trebuie ca $C_1 = C_2 = 0$.

Funcțiile omogene de mai sus: $f(y,z)$ și $g(y,z)$, ale căror valori nu depind de poziția secțiunii drepte, pot fi determinate dacă se observă că, pentru $n=0$, adică pentru o deplanare constantă în lungul axului $x$ al secțiunii drepte, se obține tocmai starea de tensiuni din cazul răsucirii pure (neîmpiedicate) a unei bare dreptunghiulare, cu aceeași secțiune și aceeași rigiditate la torsiune ca bara considerată.

Din relațiile (2), (3), (4) și (6), în acest caz, vom obține:

$$\begin{aligned} &\sigma'_x = \sigma'_y = \sigma'_z = \tau'_{yz} = 0 \\ &\tau'_{xy} = f(y,z);\quad \tau'_{xz} = g(y,z). \end{aligned} \tag{7}$$

Așadar, funcțiile nedeterminate $f(y,z)$ și $g(y,z)$ sînt tocmai tensiunile tangențiale de pe secțiunea dreaptă a barei de aceeași rigiditate cu bara considerată, supusă la răsucire pură.

Se știe că, în cazul unei bare cu secțiune dreptunghiulară, supusă la răsucire pură (neîmpiedicată) avem

$$\frac{\partial\tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau'_{xz}}{\partial z} = 0.$$

În consecință, ultima ecuație diferențială din grupul de ecuații (5) devine

$$8n^2Ae^{-nx}zy = E\theta n^2e^{-nx}yz, \tag{8}$$

din care rezultă

$$A = \frac{E\theta}{8}. \tag{9}$$

Avînd în vedere că, în cazul răsucirii pure a barei drepte, cu secțiunea dreptunghiulară foarte subțire ($a \gg b$), tensiunile tangențiale (din analogie cu membrana, care are o formă aproape cilindrică în acest caz) sînt date de expresiile:

$$\begin{aligned} &\tau'_{xy} = 0 \\ &\tau'_{xz} = 2G\theta y = \frac{E}{1+\mu}\,\theta y \end{aligned} \tag{10}$$

şi, folosind expresia (9), starea de tensiuni, în cazul răsucirii împiedicate a lamei subțiri de secțiune dreptunghiulară, va fi dată de următoarele relații :

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= E\theta n e^{-nx} yz ,\\
\sigma_y &= 0 ,\\
\sigma_z &= 0 ,\\
\tau_{xy} &= -\frac{E\theta n^2}{4} e^{-nx} z(b^2 - y^2) ,\\
\tau_{yz} &= \frac{E\theta n^3}{8} e^{-nx} (a^2 - z^2)(b^2 - y^2) ,\\
\tau_{xz} &= -\frac{E\theta n^2}{4} e^{-nx} y(a^2 - z^2) + \frac{E}{1+\mu}\theta y .
\end{aligned} \tag{11}$$

Determinarea coeficientului $n$ se poate face printr-un calcul bazat pe principii variaționale şi anume, considerînd că acesta va fi dat de acea expresie, pentru care lucrul mecanic acumulat prin deformație elastică de către lamă este minim.

Se ştie că expresia lucrului mecanic acumulat prin deformație elastică de o bară de lungime $l$, avînd secțiunea de formă dreptunghiulară cu laturile $2a$ şi $2b$, este

$$L = \int_c \mathcal{L}\, dV = \int_0^l \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} \mathcal{L}\, dx\, dy\, dz , \tag{11'}$$

unde $\mathcal{L}$ (lucrul mecanic specific acumulat prin deformație elastică în unitatea de volum) are în cazul de față ($\sigma_y = \sigma_z = 0$) expresia :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + 2(1+\mu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] . \tag{11''}$$

Folosind din (11) expresiile tensiunilor, se obține :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = \frac{E\theta^2 n^2}{2} e^{-2nx} y^2 z^2 + \frac{1+\mu}{E}\Bigg[ & \frac{E^2\theta^2 n^4}{16} e^{-2nx} z^2 (b^2 - y^2) + \\
& + \frac{E^2\theta^2 n^6}{64} e^{-2nx} (a^2 - z^2)^2 (b^2 - y^2)^2 + \\
& + \frac{E^2\theta^2 n^4}{16} e^{-2nx} y^2 (a^2 - z^2)^2 + \frac{E^2\theta^2}{(1+\mu)^2} y^2 - \\
& - \frac{E^2\theta^2 n^2}{2(1+\mu)} e^{-nx} y^2 (a^2 - z^2)\Bigg] .
\end{aligned} \tag{12}$$

Observînd că

$$\int_0^l e^{-nx} dx = \frac{1 - e^{-nl}}{n} \simeq \frac{1}{n}$$

şi

$$\int_0^l e^{-2nx}\,dx = \frac{1-e^{-2nl}}{2n} \simeq \frac{1}{2n},$$

dacă se consideră că

$$e^{-nl} = \frac{1}{e^{nl}} \simeq 0$$

eroarea care se face fiind în jur de 2% (calculată pentru o bară cu $l=2a$, pe baza valorii ce rezultă pentru $n$ din consideraţia de mai sus — a se vedea formula (16) — şi pentru $\mu = 0{,}3$), după efectuarea integralelor specificate în (11′) se poate obţine o expresie simplificată, aproximativă, a lucrului mecanic total, acumulat prin deformaţie elastică şi anume:

$$L = \frac{2E(1+\mu)\theta^2 a^5 b^5}{225} n^5 + \frac{E(1+\mu)\,\theta^2 a^3 b^3 (a^2+b^2)}{45} n^3 - \\ - \frac{E\,\theta^2 a^3 b^3}{3} n + \frac{4E\theta^2 ab^3 l}{3(1+\mu)}. \qquad (13)$$

Aplicînd principiul variaţional arătat mai sus, vom avea:

$$\frac{\partial L}{\partial n} = \frac{10\,E(1+\mu)\,\theta^2 a^5 b^5}{225} n^4 + \frac{E(1+\mu)\,a^3 b^3 \theta^2 (a^2+b^2)}{15} n^2 - \\ - \frac{E\,\theta^2 a^3 b^3}{3} = 0.$$

După simplificări se obţine:

$$\frac{10(1+\mu)\,a^2 b^2}{75} n^4 + \frac{(1+\mu)\,(a^2+b^2)}{5} n^2 - 1 = 0 \qquad (14)$$

sau, neglijînd pe $b$ faţă de $a$, întrucît secţiunea este foarte subţire:

$$(1+\mu)\,a^2 n^2 = 5, \qquad (15)$$

de unde

$$\boxed{n = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{5}{1+\mu}}}. \qquad (16)$$

Calculul răsucirii specifice medii $\theta$ se poate face egalînd lucrul mecanic total, acumulat prin deformaţie elastică, cu lucrul mecanic efectuat de cuplul exterior de moment $M$:

$$L = \frac{M\theta l}{2}. \qquad (17)$$

Expresia simplificată (13) a lucrului mecanic total acumulat prin deformație elastică, după înlocuirea lui $n$ cu expresia sa din (16), devine :

$$L = \frac{2(1+\mu)E\theta^2 b^5}{225}\sqrt{\left(\frac{5}{1+\mu}\right)^5} + \frac{E(1+\mu)\theta^2 b^3(a^2+b^2)}{45}\sqrt{\left(\frac{5}{1+\mu}\right)^3} - $$

$$- \frac{E\theta^2 a^2 b^3}{3}\sqrt{\frac{5}{1+\mu}} + \frac{4E\theta^2 ab^3 l}{3(1+\mu)}$$

sau, neglijind termenii în $b^5$ față de cei în $b^3$,

$$L = \frac{4E\theta^2 ab^3 l}{3(1+\mu)} - \frac{2E\theta^2 a^3 b^3}{9}\sqrt{\frac{5}{1+\mu}}. \tag{18}$$

Folosind relația de izotropie obținem :

$$L = \frac{8G\theta^2 ab^3 l}{3} - \frac{4G\theta^2 a^3 b^3\sqrt{5(1+\mu)}}{9} =$$

$$= \frac{8G\theta^2 ab^3 l}{3}\left[1 - \frac{a\sqrt{5(1+\mu)}}{6l}\right]. \tag{19}$$

Egalînd această expresie cu cea din (17) se obține :

$$\boxed{\theta = \frac{3M}{16Gab^3}\left[1 - \frac{a\sqrt{5(1+\mu)}}{6l}\right]}. \tag{20}$$

La distanța $x$ de planul de încastrare, tensiunile maxime și punctele în care acestea se dezvoltă sînt (fig. 4) :

$\sigma_{x\,\max} = E\theta n e^{-nx} ab$ — în colțurile secțiunii drepte,

$\tau_{yz\,\max} = \frac{E\theta n^3}{8} e^{-nx} a^2 b^2$ — în planele longitudinale, paralele cu fețele lamei, care trec prin axul lamei, în dreptul acestuia,

$\tau_{xy\,\max} = \frac{E\theta n^2}{4} e^{-nx} ab^2$ — în mijlocul laturii mici a secțiunii drepte,

$\tau'_{xz\,\max} = -\frac{E\theta n^2}{4} e^{-nx} a^2 b + 2G\theta b$ — în mijlocul laturii mari a secțiunii drepte,

$\tau''_{xz\,\max} = 2G\theta b$ — aproape de colțurile secțiunii drepte.

Folosind relația de izotropie, precum și relația (16), expresiile de mai sus devin:

$$\begin{aligned}
\sigma_{x\,\max} &= 2G\theta b\sqrt{5(1+\mu)}\,e^{-nx}\\
\tau_{yz\,\max} &= \frac{5G\theta b^2}{4a}\sqrt{\frac{5}{1+\mu}}\,e^{-nx}\\
\tau_{xy\,\max} &= \frac{5G\theta b^2}{2a}\,e^{-nx} \qquad\qquad (21)\\
\tau'_{xz\,\max} &= 2G\theta b\left(1-\frac{5}{4}\,e^{-nx}\right)\\
\tau''_{xz\,\max} &= 2G\theta b\,,
\end{aligned}$$

de unde se vede că

$$\tau''_{xz\,\max} > \tau'_{xz\,\max}\,,$$

Considerînd un element de volum, aproape de unul din colțurile secțiunii drepte (fig. 5), tensiunile pe fețele lui sînt aproximativ

$$\sigma = \sigma_{x\,\max} \quad \text{și} \quad \tau = \tau''_{xz\,\max}\,.$$

Punînd condiția de rezistență într-un astfel de punct, conform ipotezei a 5-a de rupere (a lucrului mecanic specific de modificarea formei)

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leqslant \sigma_a \qquad (22)$$

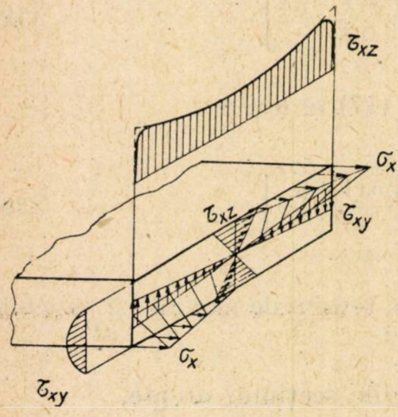


Fig. 4

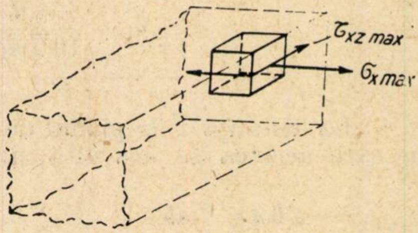


Fig. 5

și, înlocuind expresiile din (21), se obține:

$$2G\theta b\sqrt{5(1+\mu)\,e^{-2nx}+3} \leqslant \sigma_a\,.$$

Folosind expresiile (16) și (20), vom căpăta:

$$\frac{3M}{8ab^2}\left[1-\frac{a\sqrt{5(1+\mu)}}{6l}\right]\sqrt{5\,(1+\mu)\,e^{-\frac{2x}{a}\sqrt{\frac{5}{1+\mu}}}+3} \leqslant \sigma_a\,. \qquad (23)$$

Pentru $\mu = 0{,}3$ relația de mai sus devine :

$$\frac{3M}{8ab^2}\left(1 - 0{,}425\,\frac{a}{l}\right)\sqrt{6{,}5\,e^{-3{,}92\frac{x}{a}} + 3} \leqslant \sigma_a . \tag{24}$$

A. *Dimensionarea lamei sapei* constă în găsirea unei proporții juste, pe baza criteriului de rezistență, între cele trei dimensiuni ale lamei. Se observă că maximul membrului din stînga, în relația de mai sus (24), se produce pentru $x = 0$, adică în secțiunea din încastrare.

În această secțiune vom avea deci, după efectuarea calculelor numerice respective :

$$1{,}157\,\frac{M}{ab^2}\left(1 - 0{,}425\,\frac{a}{l}\right) \leqslant \sigma_a$$

sau

$$\frac{ab^2}{1 - 0{,}425\,\dfrac{a}{l}} \geqslant 1{,}157\,\frac{M}{\sigma_a}, \tag{25}$$

expresie din care rezultă relația care trebuie să existe între cele trei dimensiuni ale lamei în secțiunea de încastrare.

În secțiunea din capătul liber al lamei, adică pentru $x = l$, relația (24) devine :

$$0{,}65\,\frac{M}{ab^2}\left(1 - 0{,}425\,\frac{a}{l}\right) \leqslant \sigma_a$$

sau

$$\frac{ab^2}{1 - 0{,}425\,\dfrac{a}{l}} \geqslant 0{,}65\,\frac{M}{\sigma_a}, \tag{26}$$

expresie care de asemenea dă relația justă dintre cele trei dimensiuni ale lamei în această secțiune.

În expresiile (25) și (26), $a$ reprezintă jumătate din lățimea sapei și deci coincide cu raza puțului de sondă. În consecință este o dată a problemei. De asemenea $M$ și $\sigma_a$ sînt tot date ale problemei, acestea reprezentînd respectiv o caracteristică a regimului de foraj și o caracteristică calitativă a materialului din care este alcătuită sapa.

Așadar, la limită, cele două expresii de mai sus pot fi puse sub forma :

$$\boxed{\beta^2 = 1 - \frac{0{,}2125}{\lambda}} \tag{27}$$

în care

$$\lambda = \frac{l}{2a} = \frac{l}{D} \tag{28}$$

reprezintă de cîte ori lungimea sapei este mai mare decît diametrul sondei $D$ şi

$$\beta = \frac{\delta_1}{C_1} = \frac{\delta_2}{C_2}$$

unde $\delta$ este grosimea lamei sapei ($\delta = 2b$), iar

$$C_1 = 3{,}04 \sqrt{\frac{M}{D\sigma_a}} \tag{29}$$

$$C_2 = 2{,}28 \sqrt{\frac{M}{D\sigma_a}} \cdot$$

Indicele *1* se referă la secţiunea din încastrare, iar indicele *2*, la secţiunea din capătul liber al lamei.

Puse sub forma (27), relaţiile (25) şi (26) pot fi reprezentate printr-o diagramă (fig. 6), unde în abscisă se ia $\lambda$, sau, ceea ce este tot una, lungimea lamei sapei, $l$, la scara $\frac{1}{D}$, iar în ordonată $\beta$, sau $\delta$ (grosimea lamei) la scara $\frac{1}{C_1}$, respectiv $\frac{1}{C_2}$ ·

Folosind această diagramă, dîndu-se, sau alegîndu-se lungimea lamei sapei, pentru o anumită sondă (un anumit diametru al acesteia),

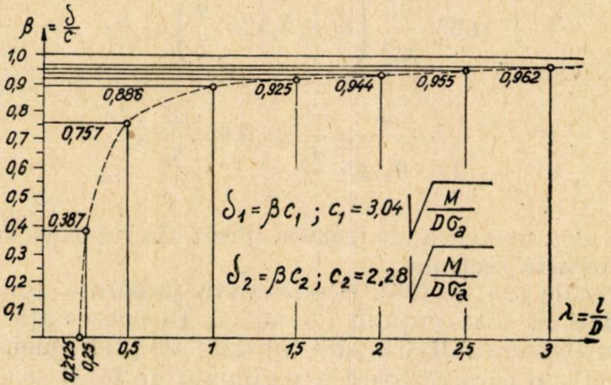


Fig. 6

se poate determina grosimea lamei sapei cunoscînd regimul de foraj ($M$), calitatea materialului ($\sigma_a$), precum şi diametrul puţului de sondă ($D$).

Astfel, dîndu-se lăţimea sapei (diametrul sondei) şi alegînd lungimea lamei sapei, se calculează valoarea coeficientului $\lambda$ cu ajutorul formulei (28).

Corespunzător acestei valori, se stabileşte valoarea coeficientului $\beta$, folosind diagrama din figura 6.

Cu ajutorul formulelor (29) se calculează parametrii $C_1$ și $C_2$ și se determină apoi grosimile lamei sapei, respectiv în secțiunea din încastrare și la capătul liber al lamei, cu formulele :

$$\boxed{\begin{aligned}\delta_1 &= \beta C_1\\ \delta_2 &= \beta C_2.\end{aligned}} \tag{30}$$

*Observație*. Planul din încastrare trebuie considerat în ultima secțiune în care lățimea lamei rămîne constantă (înainte de racordarea acesteia la gîtul sapei, prin intermediul părții care formează umerii sapei).

*Exemplu de calcul*. Fie o sapă în coadă de pește, cu lamă subțire, ce trebuie introdusă printr-o coloană de 9 5/8" diametru.

După STAS 910—50 avem :

$$D = 193 \text{ mm}$$

$$l = 340 \text{ ,,}$$

și deci

$$\lambda = \frac{340}{193} = 1{,}76\,.$$

Acestei valori îi corespunde în diagrama din figura 6 o valoare

$$\beta = 0{,}935\,.$$

Admitem un cuplu rezistent la talpa sondei de moment

$$M = 300 \text{ kgm}$$

și o rezistență admisibilă

$$\sigma_a = 400 \text{ kg/cm}^2$$

avînd în vedere condițiile grele în care lucrează sapa și corespunzătoare oțelului OLC 45 din care este alcătuită sapa (STAS 880—60).

Cu aceste date rezultă :

$$C_1 = 3{,}04\sqrt{\frac{300\,.\,10^2}{19{,}3\,.\,400}} = 6{,}0\,,$$

$$C_2 = 2{,}28\sqrt{\frac{300\,.\,10^2}{19{,}3\,.\,400}} = 4{,}5\,.$$

În consecință :

$$\delta_1 = 0{,}935 \cdot 6{,}0 = 5{,}6 \text{ cm}\,,$$

$$\delta_2 = 0{,}935 \cdot 4{,}5 = 4{,}2 \text{ cm}\,.$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Comparînd aceste valori, cu cele corespunzătoare din STAS 910—50 pentru sapa respectivă, se observă că, în timp ce secțiunea din încastrare este supradimensionată (6 cm față de 5,6 cm cît este necesar), secțiunea de la capătul liber este subdimensionată (2,5 cm față de 4,2 cm cît este necesar). Aceasta poate explica faptul că, de obicei se rup tocmai colțurile din capătul liber al sapelor de acest tip.

Atît din diagrama din figura 6, cît și din exemplul numeric de mai sus, se observă că, pentru valori ale coeficientului $\lambda \geqslant 1$ se poate lua aproximativ $\beta = 1$ și deci lama sapei poate fi dimensionată cu formulele aproximative :

$$\boxed{\begin{aligned} \delta_1 &= 3{,}04\sqrt{\frac{M}{D\sigma_a}} \\ \delta_2 &= 2{,}28\sqrt{\frac{M}{D\sigma_a}}. \end{aligned}} \qquad (30')$$

În formulele (28), (29), (30) și (30′) :
$\delta_1$ este grosimea lamei sapei în secțiunea din încastrare ;
$\delta_2$ este grosimea lamei sapei în secțiunea din capătul liber ;
$M$ este momentul cuplului rezistent la nivelul tălpii sondei ;
$D$ este diametrul puțului de sondă ;
$l$ este lungimea lamei sapei între capătul liber și planul de încastrare ;
$\sigma_a$ este rezistența admisibilă a oțelului din care este alcătuită sapa, la solicitări variabile și în condițiile grele în care lucrează aceasta.

B. *Alegerea profilului optim al sapei* s-a arătat că face obiectul și al altor preocupări [1], [5]. În lucrarea de față, după cum s-a specificat la începutul calculului, s-a considerat că secțiunea dreaptă prin lama sapei rămîne constantă în lungul lamei.

Dacă grosimea lamei variază însă în lungul axului sapei, secțiunea dreaptă prin lamă rămînînd de formă dreptunghiulară, desigur că starea de eforturi se schimbă. Dacă se adoptă însă aceeași stare de tensiuni, erorile ce se fac nu pot fi mai mari decît cele ce rezultă datorită aproximărilor deja făcute.

În consecință, pe baza criteriului de rezistență adoptat, relația (24), care la limită poate fi pusă sub forma

$$\boxed{\delta^2 = \frac{3M}{D\sigma_a}\left(1 - 0{,}2125\,\frac{D}{l}\right)\sqrt{6{,}5\,e^{-7{,}84\frac{x}{D}} + 3}} \qquad (31)$$

ne dă variația grosimii $\delta = 2b$ a lamei, în lungul axului sapei.

După cum se vede, această variație este de formă exponențială. În figura 7 este reprezentată alura profilului unei sape,

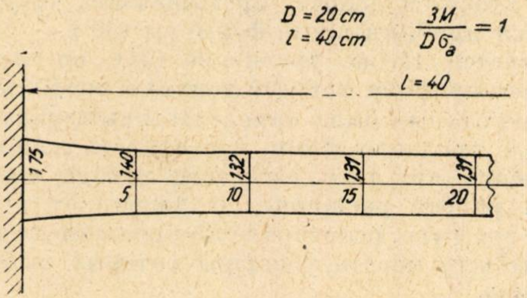


Fig. 7

după această lege de variație, în care s-au considerat următoarele valori indicative :

$$D = 20 \text{ cm}, \quad l = 40 \text{ cm}, \frac{3M}{D\sigma_a} = 1.$$

## CONCLUZII

Formulele de calcul (30) și (30′), precum și ecuația (31) a profilului lamei sapei, sînt determinate prin metodele cunoscute a așa-numitelor soluții aproximative din teoria elasticității.

Așadar, aceste formule, deși aproximative, sînt totuși suficient de exacte pentru a servi scopului propus, și anume, de a contribui într-o cît mai largă măsură la înlăturarea accidentelor de fund, provocate de lipsa de rezistență a lamei sapelor de acest tip.

Lucrarea de față, folosind metodele teoriei elasticității, dezvoltă și completează cu elemente noi problemele care fac obiectul studiului nostru apărut în [5] și oferă un mijloc rațional, bazat pe criterii de rezistență, de dimensionare a lamelor sapelor *în coadă de pește*.

*Primită la redacție la 17 iulie 1961*

## К РАСЧЕТУ НА ПРОЧНОСТЬ ЛОПАСТНЫХ ДОЛОТ

### РЕЗЮМЕ

В настоящей работе устанавливаются формулы (30) для расчета толщины лопасти долот в виде рыбьего хвоста в сечении заделки (там, где начинается сопряжение лопасти с шейкой долота), а также в сечении свободного конца лопасти.

Коэффициенты этих формул вычисляются при помощи соотношений (2 ) и (29) и диаграммы рис. 7.

Для длин лопастей долота, превышающих ширину последнего $(\gamma \geqslant 1)$, приводятся приближенные формулы (30’).

Устанавливается также уравнение (31), по которому должна изменяться кривая профиля лопасти долота в продольном ее сечении.

Расчеты, по которым были определены вышеуказанные формулы, были проведены в предположении, что лопасть долота подвергается стеснению, применяя при этом известные методы теории упругости.

Настоящая работа расширяет и дополняет исследование [5], давая расчетное средство, основанное на критерии прочности лопасти долот в виде рыбьего хвоста, размеры которых выбирались до сих пор конструктивно.

## CONTRIBUTIONS AU CALCUL DE LA RÉSISTANCE DES TRÉPANS À LAMES

### RÉSUMÉ

Dans ce travail, l’auteur établit les formules (30) permettant de calculer l’épaisseur des lames des trépans en «queue de poisson» dans la section d’encastrement (à l’endroit où commence le raccord entre la lame et l’œil du trépan), aussi bien que dans la section du bout libre de la lame.

Les calculs des coefficients de ces formules sont faits au moyen des relations (28) et (29) et du diagramme de la figure 7.

Dans les cas où la longueur de la lame dépasse sa largeur $(\lambda \geqslant 1)$, on utilisera les formules approximatives (30 bis).

L’auteur établit, en outre, l’équation (31) montrant la façon dont doit varier la courbe du profil de la lame du trépan, dans une section longitudinale à travers de celle-ci.

Les calculs, ayant servi à déterminer les formules ci-dessus, ont été établis par les méthodes connues de la théorie de l’élasticité, dans l’hypothèse que la lame du trépan est sollicitée à une torsion entravée.

Le présent travail étend et complète l’étude [5], en offrant un moyen de calcul, fondé sur des critères de résistance, des lames des trépans en « queue de poisson », dont les dimensions n’étaient choisies, jusqu’à présent, que par des raisons constructives.

### BIBLIOGRAFIE

1. V. S. FEODOROV, *Bazele științifice ale regimului de foraj*. Editura Tehnică, București, 1953.
2. A. FÖPPL, *Vorlesung über technische Mechanik*. **5**. Ed. 4. G. B. Teubner, Leipzig— Berlin, 1922.
3. S. TIMOSHENKO, *Théorie de l’Elasticité*. Libr. Polyt. Ch. Béranger, Paris, 1948.
4. N. I. BEZUHOV, *Culegere de probleme din teoria elasticității și plasticității*. Editura Tehnică București, 1960.
5. V. FLORIAN, *Asupra determinării profilului optim al sapelor cu lame*. Petrol și Gaze, **7** (1961).

# CALCULUL GRINZILOR CONTINUE DE BETON ARMAT ÎN DOMENIUL PLASTIC

DE

VALERIU PETCU *)

În prezent, scopul principal al studiilor referitoare la calculul structurilor de beton armat în domeniul plastic îl constituie stabilirea unor metode de calcul care să ţină seama de limitările impuse atît de condiţiile de rupere (dintre care capacitatea de rotire a articulaţiei plastice în betonul armat este cea mai importantă), cît şi de condiţiile normale de exploatare (absenţa articulaţiilor plastice, limitarea deschiderii fisurilor, limitarea mărimii eforturilor unitare de compresiune în beton). Aceste limitări depind în esenţă de coeficientul de redistribuţie, care este, prin definiţie, raportul dintre sarcina de rupere (sarcina de apariţie a ultimei articulaţii plastice care transformă structura în mecanism) şi sarcina de apariţie a primei articulaţii plastice.

Într-un studiu anterior [1] s-a enunţat *principiul redistribuţiei optime*, care stă la baza metodei de determinare a distribuţiei valorilor momentelor de plastificare în proiectarea structurilor de beton armat în domeniul plastic.

Potrivit acestui principiu, distribuţia optimă a momentelor de plastificare se obţine prin *realizarea egalităţii unui anumit număr de coeficienţi de redistribuţie, funcţie de numărul condiţiilor suplimentare necesare pentru determinarea valorilor tuturor momentelor de plastificare, astfel încît restul coeficienţilor de redistribuţie să aibă valori mai mici decît valoarea comună a primilor coeficienţi.*

În cele ce urmează se prezintă rezultatele obţinute prin aplicarea acestui principiu la cazul grinzilor continue de beton armat, cu deschideri egale, avînd secţiunea constantă, solicitate de tipuri de sarcini curent întîlnite în proiectarea acestei categorii de structuri.

---

*) Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor (INCERC), Bucureşti.

Tratarea problemei se face pe baza metodei stării limită de rezistență. În conformitate cu această metodă, sarcina permanentă de calcul ($g$) este constantă iar sarcina utilă poate varia de la zero la valoarea sa de calcul ($p_u$).

NOTAȚII

$M_{p1}$, $M_{p2}$, $M_{p3}$ — momentele de plastificare din cîmpurile *1*, *2* și *3*;
$M_{pb}$, $M_{pc}$ — momentele de plastificare de pe reazemele *B* și *C*;
$T_a$ — forța tăietoare corespunzătoare reazemului *A*;
$T_{b1}$, $T_{b2}$ — forțele tăietoare la stînga și la dreapta reazemului *B*;
$T_{c2}$, $T_{c3}$ — forțele tăietoare la stînga și la dreapta reazemului *C*;
$g$ — sarcina permanentă de calcul, uniform distribuită pe m.l;
$G$ — sarcina permanentă de calcul, aplicată concentrat;
$p$ — sarcina utilă, uniform distribuită pe m.l ($0 \leqslant p \leqslant p_u$);
$P$ — sarcina utilă, aplicată concentrat ($0 \leqslant P \leqslant P_u$);
$p_1$ — sarcina utilă, uniform distribuită pe m.l, corespunzătoare apariției primei articulații plastice;
$P_1$ — sarcina utilă, aplicată concentrat, corespunzătoare apariției primei articulații plastice;
$p_u$ — sarcina utilă de calcul (corespunzătoare apariției ultimei articulații plastice care transformă structura în mecanism), uniform distribuită pe m.l;
$P_u$ — sarcina utilă de calcul (corespunzătoare apariției ultimei articulații plastice care transformă structura în mecanism), aplicată concentrat;

$$k_1 = \frac{p_1}{g}; \quad K_1 = \frac{P_1}{G}; \quad k_u = \frac{p_u}{g}; \quad K_u = \frac{P_u}{G};$$

$$q = g + p; \quad Q = G + P;$$

$$q_u = g + p_u = (1 + k_u) \cdot g; \quad Q_u = G + P_u = (1 + K_u) \cdot G;$$

$r_1$, $r_2$, $r_3$ — coeficienți de redistribuție maximi, corespunzători apariției primei articulații plastice în secțiunile critice din deschiderile *1*, *2* respectiv *3* (fig. 5, *b* și *c*);
$r_b$, $r_c$ — coeficienți de redistribuție maximi, corespunzători apariției primei articulații plastice în secțiunile critice de pe reazemele *B* respectiv *C* (fig. 5, *d* și *e*);
$l$ — mărimea deschiderilor grinzii;

$$m_{p1} = \frac{M_{p1}}{G \cdot l}; \quad m_{p2} = \frac{M_{p2}}{G \cdot l}; \quad m_{p3} = \frac{M_{p3}}{G \cdot l}; \quad m_{pb} = \frac{M_{pb}}{G \cdot l}; \quad m_{pc} = \frac{M_{pc}}{G \cdot l}.$$

Atît în cele de mai sus cît și în cele ce urmează, prin secțiune critică se înțelege secțiunea în care apare o articulație plastică.

## TIPUL I DE ÎNCĂRCARE : SARCINĂ CONCENTRATĂ LA MIJLOCUL DESCHIDERII (fig. 1)

### a) Grinda continuă cu 2 deschideri

Schemele posibile de încărcare sînt reprezentate în figura 2.

Momentele de plastificare în secțiunile critice din cîmpul *1* și de pe reazemul *B*, corespunzătoare schemelor de încărcare care produc prima articulație plastică în aceste secțiuni critice (fig. 2, *b* și *c*), sînt date de relațiile :

$$m_{p1} = 0{,}156 + 0{,}203\ K_1,$$
$$m_{pb} = 0{,}188\ (1 + K_1). \tag{1}$$

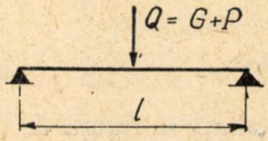


Fig. 1

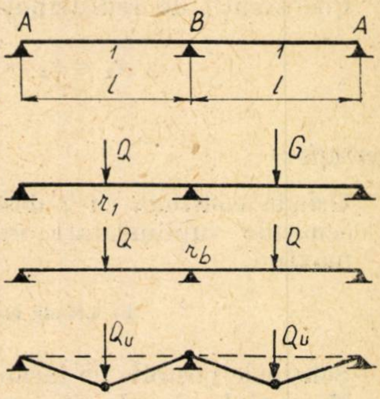


Fig. 2

*Observații* :

1. coeficientul $K_1$ este diferit în cele două relații (1), ca și în relațiile similare corespunzătoare celorlalte cazuri tratate mai jos, fiind funcție de schema de încărcare ;
2. în toate cazurile tratate, valoarea momentului de plastificare în secțiunea critică în care apare prima articulație plastică, în momentul formării acesteia, s-a determinat folosindu-se coeficienții pentru grinzi cu deschideri egale dați în *Manualul pentru beton armat* — Editura Tehnică, București și în *Beton — Kalender 1956* — Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin.

Ecuația de echilibru a grinzii în stadiul de mecanism (fig. 2, *d*) este :

$$m_{p1} + 0{,}5\ m_{pb} = 0{,}250\ (1 + K_u). \tag{2}$$

Aplicarea principiului redistribuției optime conduce la ecuația suplimentară

$$r_1 = r_b. \tag{3}$$

Valorile coeficienților de redistribuție $r_1$ și $r_b$ se obțin cu ajutorul relațiilor (1) :

$$r_1 = \frac{1 + K_u}{1 + K_1} = \frac{1 + K_u}{4{,}93\ m_{p1} + 0{,}231},$$
$$r_b = \frac{1 + K_u}{1 + K_1} = \frac{1 + K_u}{5{,}32\ m_{pb}}. \tag{4}$$

Ecuaţia suplimentară (3) devine:

$$4{,}93\ m_{p1} + 0{,}231 = 5{,}32\ m_{pb}. \tag{3a}$$

Sistemul format de ecuaţiile (2) şi (3 a) are soluţia:

$$\begin{aligned} m_{p1} &= 0{,}156 + 0{,}171 \cdot K_u \\ m_{pb} &= 0{,}188 + 0{,}158\ K_u. \end{aligned} \tag{5}$$

Coeficienţii de redistribuţie maximi au valoarea

$$r_1 = r_b = \frac{1}{0{,}84 + \dfrac{0{,}16}{1 + K_u}}. \tag{6}$$

*Observaţie*:

Grinda continuă cu 2 deschideri este unul din cazurile în care în ecuaţiile suplimentare intervin *toţi* coeficienţii de redistribuţie maximi.

### b) Grinda continuă cu 3 deschideri

Schemele posibile de încărcare sînt reprezentate în figura 3.

Momentele de plastificare în secţiunile critice din cîmpurile *1* şi *2* şi de pe reazemul *B*, corespunzătoare schemelor de încărcare care produc prima articulaţie plastică în aceste secţiuni critice (fig. 3, *b*, *c* şi *d*), sînt date de relaţiile:

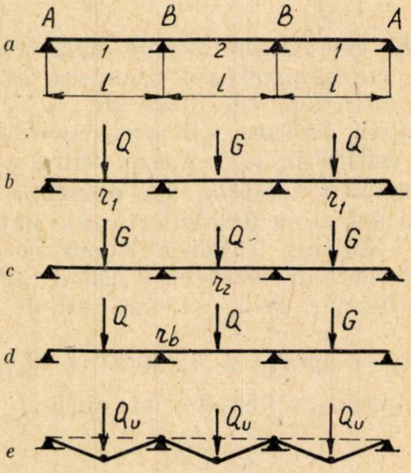


Fig. 3

$$\begin{aligned} m_{p1} &= 0{,}175 + 0{,}213\ K_1, \\ m_{r2} &= 0{,}100 + 0{,}175\ K_1, \\ m_{pb} &= 0{,}150 + 0{,}175\ K_1. \end{aligned} \tag{7}$$

Ecuațiile de echilibru ale grinzii în stadiul de mecanism (fig. 3, *e*) sînt :

$$\begin{aligned} m_{p1} + 0{,}5\, m_{pb} &= 0{,}250\,(1 + K_u), \\ m_{p2} + m_{pb} &= 0{,}250\,(1 + K_u). \end{aligned} \tag{8}$$

Valorile coeficienților de redistribuție maximi $r_1$, $r_2$ și $r_b$ se obțin cu ajutorul relațiilor (7) :

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1 + K_u}{4{,}70\, m_{p1} + 0{,}178}, \\ r_2 &= \frac{1 + K_u}{5{,}72\, m_{p2} + 0{,}428}, \\ r_b &= \frac{1 + K_u}{5{,}72\, m_{pb} + 0{,}143}. \end{aligned} \tag{9}$$

Pentru stabilirea valorilor momentelor de plastificare este necesară o singură ecuație suplimentară și anume

$$r_2 = r_b. \tag{10}$$

Această ecuație asigură totodată condiția $r_1 < r_2 = r_b$.

După înlocuiri, ecuația (10) devine :

$$5{,}72\, m_{p2} + 0{,}285 = 5{,}72\, m_{pb}. \tag{10 a}$$

Sistemul format de ecuațiile (8) și (10 a) are soluția :

$$\begin{aligned} m_{p1} &= 0{,}175 + 0{,}188\, K_u \\ m_{p2} &= 0{,}100 + 0{,}125\, K_u \\ m_{pb} &= 0{,}150 + 0{,}125\, K_u. \end{aligned} \tag{11}$$

Coeficienții de redistribuție maximi au valorile :

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{0{,}88 + \dfrac{0{,}12}{1 + K_u}}, \\ r_2 = r_b &= \frac{1}{0{,}72 + \dfrac{0{,}28}{1 + K_u}}. \end{aligned} \tag{12}$$

### c) Grinda continuă cu 4 deschideri

Schemele posibile de încărcare sînt reprezentate în figura 4.

Momentele de plastificare în secțiunile critice din cîmpurile *1* și *2* și de pe reazemele *B* și *C*, corespunzătoare schemelor de încărcare care produc prima articulaţie plastică în aceste secţiuni critice (fig. 4, *b*, *c* şi *d*), sînt date de relaţiile :

$$
\begin{aligned}
m_{p1} &= 0{,}170 + 0{,}210\,K_1,\\
m_{p2} &= 0{,}116 + 0{,}183\,K_1,\\
m_{pb} &= 0{,}161 + 0{,}181\,K_1,\\
m_{pc} &= 0{,}107 + 0{,}161\,K_1.
\end{aligned}
\qquad (13)
$$

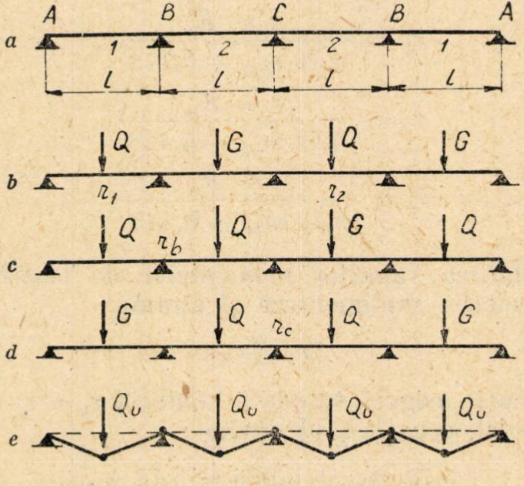


Fig. 4

Ecuaţiile de echilibru ale grinzii în stadiul de mecanism (fig. 4, *e*) sînt :

$$
\begin{aligned}
m_{p1} + 0{,}5\ m_{pb} &= 0{,}250\,(1 + K_u),\\
2\,m_{p2} + m_{pb} + m_{pc} &= 0{,}500\,(1 + K_u).
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

Valorile coeficienţilor de redistribuţie maximi $r_1$, $r_2$, $r_b$ şi $r_c$ se obţin cu ajutorul relaţiilor (13) :

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \frac{1 + K_u}{4{,}77\,m_{p1} + 0{,}191},\\
r_2 &= \frac{1 + K_u}{5{,}47\,m_{p2} + 0{,}366},\\
r_b &= \frac{1 + K_u}{5{,}52\,m_{pb} + 0{,}110},\\
r_c &= \frac{1 + K_u}{6{,}22\,m_{pc} + 0{,}335}.
\end{aligned}
\qquad (15)
$$

Pentru stabilirea valorilor momentelor de plastificare sînt necesare două ecuaţii suplimentare şi anume :

$$r_2 = r_b = r_c. \qquad (16)$$

Aceste ecuații asigură totodată condiția $r_1 < r_2 = r_b = r_c$. După înlocuiri, ecuațiile (16) devin:

$$\begin{aligned} 5{,}47\ m_{p2} + 0{,}256 &= 5{,}52\ m_{pb} \\ 5{,}47\ m_{p2} + 0{,}031 &= 6{,}22\ m_{pc}. \end{aligned} \tag{16 a}$$

Sistemul format de ecuațiile (14) și (16 a) are soluția:

$$\begin{aligned} m_{p1} &= 0{,}170 + 0{,}186\ K_u \\ m_{p2} &= 0{,}116 + 0{,}128\ K_u \\ m_{pb} &= 0{,}161 + 0{,}128\ K_u \\ m_{pc} &= 0{,}107 + 0{,}116\ K_u. \end{aligned} \tag{17}$$

Coeficienții de redistribuție maximi au valorile:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{0{,}89 + \dfrac{0{,}11}{1 + K_u}}, \\ r_2 = r_b = r_c &= \frac{1}{0{,}71 + \dfrac{0{,}29}{1 + K_u}}. \end{aligned} \tag{18}$$

### d) Grinda continuă cu 5 deschideri

Schemele posibile de încărcare sînt reprezentate în figura 5.

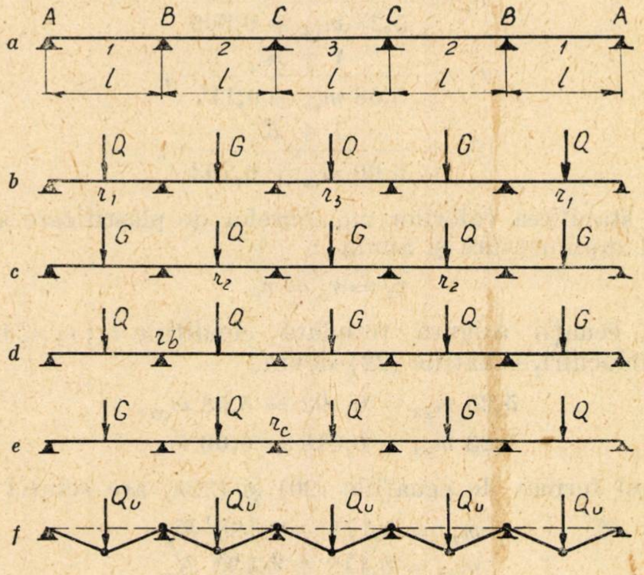


Fig. 5

Momentele de plastificare în secțiunile critice din cîmpurile *1*, *2* și *3* și de pe reazemele *B* și *C*, corespunzătoare schemelor de încărcare

care produc prima articulaţie plastică în aceste secţiuni critice (fig. 5’ *b*, *c*, *d* şi *e*), sînt date de relaţiile :

$$\begin{aligned} m_{p1} &= 0{,}171 + 0{,}211\,K_1, \\ m_{p2} &= 0{,}112 + 0{,}181\,K_1, \\ m_{p3} &= 0{,}132 + 0{,}191\,K_1, \\ m_{pb} &= 0{,}158 + 0{,}179\,K_1, \\ m_{pc} &= 0{,}118 + 0{,}167\,K_1. \end{aligned} \tag{19}$$

Ecuaţiile de echilibru ale grinzii în stadiul de mecanism (fig. 5, *f*) sînt :

$$\begin{aligned} m_{p1} + 0{,}5\,m_{pb} &= 0{,}250\,(1 + K_u), \\ 2\,m_{p2} + m_{pb} + m_{pc} &= 0{,}500\,(1 + K_u), \\ m_{p3} + m_{pc} &= 0{,}250\,(1 + K_u). \end{aligned} \tag{20}$$

Valorile coeficienţilor de redistribuţie maximi $r_1$, $r_2$, $r_3$, $r_b$ şi $r_c$ se obţin cu ajutorul relaţiilor (19) :

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1 + K_u}{4{,}73\,m_{p1} + 0{,}190}, \\ r_2 &= \frac{1 + K_u}{5{,}52\,m_{p2} + 0{,}337}, \\ r_3 &= \frac{1 + K_u}{5{,}23\,m_{p3} + 0{,}309}, \\ r_b &= \frac{1 + K_u}{5{,}58\,m_{pb} + 0{,}117}, \\ r_c &= \frac{1 + K_u}{6{,}00\,m_{pc} + 0{,}293}. \end{aligned} \tag{21}$$

Pentru stabilirea valorilor momentelor de plastificare sînt necesare două ecuaţii suplimentare şi anume :

$$r_3 = r_b = r_c. \tag{22}$$

Aceste ecuaţii asigură totodată condiţiile $r_1; r_2 < r_3 = r_b = r_c$. După înlocuiri, ecuaţiile (22) devin :

$$\begin{aligned} 5{,}23\,m_{p3} + 0{,}192 &= 5{,}58\,m_{pb}, \\ 5{,}23\,m_{p3} + 0{,}016 &= 6{,}00\,m_{pc}. \end{aligned} \tag{22 a}$$

Sistemul format de ecuaţiile (20) şi (22a) are soluţia :

$$\begin{aligned} m_{p1} &= 0{,}171 + 0{,}188\,K_u \\ m_{p2} &= 0{,}112 + 0{,}130\,K_u \\ m_{p3} &= 0{,}132 + 0{,}133\,K_u \\ m_{pb} &= 0{,}158 + 0{,}125\,K_u \\ m_{pc} &= 0{,}118 + 0{,}116\,K_u. \end{aligned} \tag{23}$$

Coeficienţii de redistribuţie maximi au valorile:

$$r_1 = \frac{1}{0{,}89 + \dfrac{0{,}11}{1 + K_u}},$$

$$r_2 = \frac{1}{0{,}72 + \dfrac{0{,}28}{1 + K_u}}, \qquad (24)$$

$$r_3 = r_b = r_c = \frac{1}{0{,}70 + \dfrac{0{,}30}{1 + K_u}}.$$

★

Procedeul descris mai sus este general, putîndu-se aplica grinzilor continue solicitate de orice tip de sarcină.

Studiul distribuţiei valorilor momentelor de plastificare s-a extins la următoarele tipuri de sarcini, curent întîlnite în practică:

— două sarcini concentrate, aplicate la treimile deschiderii;
— trei sarcini concentrate, aplicate la sferturile deschiderii;
— sarcină uniform repartizată;
— sarcină trapezoidală cu baza mică egală cu 0,4 $l$;
— sarcină trapezoidală cu baza mică egală cu 0,2 $l$;
— sarcină triunghiulară.

Rezultatele obţinute sînt centralizate în tabelele 1 şi 2.

În aceleaşi tabele sînt date valorile forţelor tăietoare corespunzătoare stadiului de rupere.

## CONCLUZII

În lucrare s-a stabilit distribuţia valorilor momentelor de plastificare şi a forţelor tăietoare, la grinzile continue de beton armat cu deschideri egale şi secţiune constantă, pe baza principiului redistribuţiei optime a eforturilor.

Pentru orice tip de sarcină, valoarea maximă a coeficientului de redistribuţie este

$$r_{\max} = \frac{1}{0{,}80 + \dfrac{0{,}20}{1 + K_u}},$$

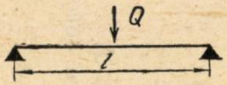
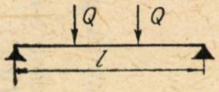
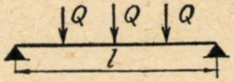
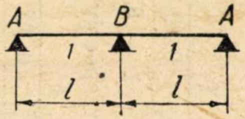
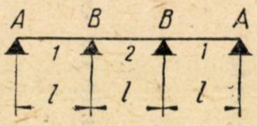
pentru grinzile cu două deschideri, respectiv

$$r_{\max} = \frac{1}{0{,}65 + \dfrac{0{,}35}{1 + K_u}},$$

pentru grinzile cu mai mult de două deschideri.

*Tabela 1*

**Sarcini concentrate**

| Schema grinzii | Mărimi statice |  <br>$Q = G + P$; $K_u = \frac{P_u}{G}$ |  <br>$Q = G + P$; $K_u = \frac{P_u}{G}$ |  <br>$Q = G + P$; $K_u = \frac{P_u}{G}$ |
|---|---|---|---|---|
|  | $M_{p1}$ | $(0{,}156 + 0{,}171\, K_u)\, Gl$ | $(0{,}222 + 0{,}238\, K_u)\, Gl$ | $(0{,}266 + 0{,}311\, K_u)\, Gl$ |
|  | $M_{pb}$ | $(0{,}188 + 0{,}158\, K_u)\, Gl$ | $(0{,}333 + 0{,}285\, K_u)\, Gl$ | $(0{,}469 + 0{,}378\, K_u)\, Gl$ |
|  | $T_a$ | $(0{,}312 + 0{,}342\, K_u)\, G$ | $(0{,}667 + 0{,}715\, K_u)\, G$ | $(1{,}031 + 1{,}122\, K_u)\, G$ |
|  | $T_{b1}$ | $(0{,}688 + 0{,}658\, K_u)\, G$ | $(1{,}333 + 1{,}285\, K_u)\, G$ | $(1{,}969 + 1{,}878\, K_u)\, G$ |
|  | $r_1 = r_b$ | $\dfrac{1}{0{,}84 + \dfrac{0{,}16}{1 + K_u}}$ | $\dfrac{1}{0{,}85 + \dfrac{0{,}15}{1 + K_u}}$ | $\dfrac{1}{0{,}81 + \dfrac{0{,}19}{1 + K_u}}$ |
|  | $M_{p1}$ | $(0{,}175 + 0{,}188\, K_u)\, Gl$ | $(0{,}244 + 0{,}265\, K_u)\, Gl$ | $(0{,}313 + 0{,}354\, K_u)\, Gl$ |
|  | $M_{p2}$ | $(0{,}100 + 0{,}125\, K_u)\, Gl$ | $(0{,}067 + 0{,}130\, K_u)\, Gl$ | $(0{,}125 + 0{,}208\, K_u)\, Gl$ |
|  | $M_{pb}$ | $(0{,}150 + 0{,}125\, K_u)\, Gl$ | $(0{,}267 + 0{,}203\, K_u)\, Gl$ | $(0{,}375 + 0{,}292\, K_u)\, Gl$ |
|  | $T_a$ | $(0{,}350 + 0{,}375\, K_u)\, G$ | $(0{,}733 + 0{,}797\, K_u)\, G$ | $(1{,}125 + 1{,}208\, K_u)\, G$ |
|  | $T_{b1}$ | $(0{,}650 + 0{,}625\, K_u)\, G$ | $(1{,}267 + 1{,}203\, K_u)\, G$ | $(1{,}875 + 1{,}792\, K_u)\, G$ |
|  | $T_{b2}$ | $0{,}5\,(1 + K_u)\, G$ | $(1 + K_u)\, G$ | $1{,}5\,(1 + K_u)\, G$ |
|  | $r_1$ | $\dfrac{1}{0{,}88 + \dfrac{0{,}12}{1 + K_u}}$ | $\dfrac{1}{0{,}92 + \dfrac{0{,}08}{1 + K_u}}$ | $\dfrac{1}{0{,}87 + \dfrac{0{,}13}{1 + K_u}}$ |
|  | $r_2 = r_b$ | $\dfrac{1}{0{,}71 + \dfrac{0{,}29}{1 + K_u}}$ | $\dfrac{1}{0{,}65 + \dfrac{0{,}35}{1 + K_u}}$ | $\dfrac{1}{0{,}66 + \dfrac{0{,}34}{1 + K_u}}$ |

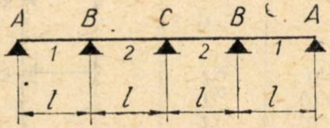
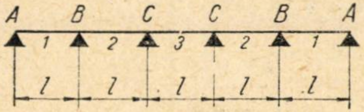
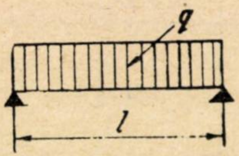
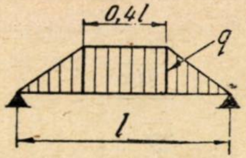
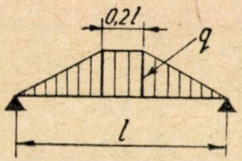
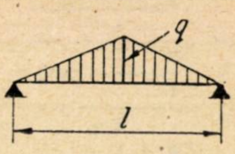
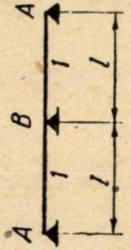
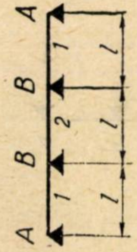
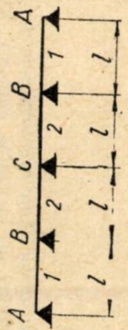
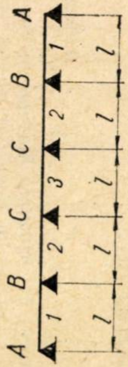
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
|  A<br>B<br>C<br>B<br>A<br>1<br>2<br>2<br>1<br>l<br>l<br>l<br>l | $M_{p1}$ | $(0,170 + 0,186\,K_u)\,Gl$ | $(0,238 + 0,265\,K_u)\,Gl$ | $(0,299 + 0,350\,K_u)\,Gl$ |
| | $M_{p2}$ | $(0,116 + 0,128\,K_u)\,Gl$ | $(0,111 + 0,143\,K_u)\,Gl$ | $(0,165 + 0,216\,K_u)\,Gl$ |
| | $M_{pb}$ | $(0,161 + 0,128\,K_u)\,Gl$ | $(0,286 + 0,205\,K_u)\,Gl$ | $(0,402 + 0,301\,K_u)\,Gl$ |
| | $M_{pc}$ | $(0,107 + 0,116\,K_u)\,Gl$ | $(0,190 + 0,182\,K_u)\,Gl$ | $(0,268 + 0,268\,K_u)\,Gl$ |
| | $T_a$ | $(0,339 + 0,372\,K_u)\,G$ | $(0,714 + 0,795\,K_u)\,G$ | $(1,098 + 1,199\,K_u)\,G$ |
| | $T_{b1}$ | $(0,661 + 0,628\,K_u)\,G$ | $(1,286 + 1,205\,K_u)\,G$ | $(1,902 + 1,801\,K_u)\,G$ |
| | $T_{b2}$ | $(0,554 + 0,512\,K_u)\,G$ | $(1,096 + 1,023\,K_u)\,G$ | $(1,634 + 1,533\,K_u)\,G$ |
| | $T_{c2}$ | $(0,446 + 0,488\,K_u)\,G$ | $(0,904 + 0,977\,K_u)\,G$ | $(1,366 + 1,467\,K_u)\,G$ |
| | $r_1$ | $\dfrac{1}{0,89 + \dfrac{0,11}{1 + K_u}}$ | $\dfrac{1}{0,92 + \dfrac{0,08}{1 + K_u}}$ | $\dfrac{1}{0,87 + \dfrac{0,13}{1 + K_u}}$ |
| | $r_2 = r_b = r_c$ | $\dfrac{1}{0,71 + \dfrac{0,29}{1 + K_u}}$ | $\dfrac{1}{0,64 + \dfrac{0,36}{1 + K_u}}$ | $\dfrac{1}{0,65 + \dfrac{0,35}{1 + K_u}}$ |
|  A<br>B<br>C<br>C<br>B<br>A<br>1<br>2<br>3<br>2<br>1<br>l<br>l<br>l<br>l<br>l | $M_{p1}$ | $(0,171 + 0,188\,K_u)\,Gl$ | $(0,240 + 0,265\,K_u)\,Gl$ | $(0,303 + 0,355\,K_u)\,Gl$ |
| | $M_{p2}$ | $(0,112 + 0,130\,K_u)\,Gl$ | $(0,099 + 0,140\,K_u)\,Gl$ | $(0,155 + 0,219\,K_u)\,Gl$ |
| | $M_{p3}$ | $(0,132 + 0,133\,K_u)\,Gl$ | $(0,123 + 0,147\,K_u)\,Gl$ | $(0,204 + 0,229\,K_u)\,Gl$ |
| | $M_{pb}$ | $(0,158 + 0,125\,K_u)\,Gl$ | $(0,281 + 0,204\,K_u)\,Gl$ | $(0,395 + 0,291\,K_u)\,Gl$ |
| | $M_{pc}$ | $(0,118 + 0,116\,K_u)\,Gl$ | $(0,211 + 0,188\,K_u)\,Gl$ | $(0,296 + 0,270\,K_u)\,Gl$ |
| | $T_a$ | $(0,342 + 0,375\,K_u)\,G$ | $(0,719 + 0,800\,K_u)\,G$ | $(1,105 + 1,209\,K_u)\,G$ |
| | $T_{b1}$ | $(0,658 + 0,625\,K_u)\,G$ | $(1,281 + 1,200\,K_u)\,G$ | $(1,895 + 1,791\,K_u)\,G$ |
| | $T_{b2}$ | $(0,540 + 0,509\,K_u)\,G$ | $(1,070 + 1,014\,K_u)\,G$ | $(1,599 + 1,521\,K_u)\,G$ |
| | $T_{c2}$ | $(0,460 + 0,491\,K_u)\,G$ | $(0,930 + 0,986\,K_u)\,G$ | $(1,401 + 1,479\,K_u)\,G$ |
| | $T_{c3}$ | $0,5\,(1 + K_u)\,G$ | $(1 + K_u)\,G$ | $1,5\,(1 + K_u)\,G$ |
| | $r_1$ | $\dfrac{1}{0,89 + \dfrac{0,11}{1 + K_u}}$ | $\dfrac{1}{0,92 + \dfrac{0,08}{1 + K_u}}$ | $\dfrac{1}{0,89 + \dfrac{0,11}{1 + K_u}}$ |
| | $r_2$ | $\dfrac{1}{0,72 + \dfrac{0,28}{1 + K_u}}$ | $\dfrac{1}{0,65 + \dfrac{0,35}{1 + K_u}}$ | $\dfrac{1}{0,67 + \dfrac{0,33}{1 + K_u}}$ |
| | $r_3 = r_b = r_c$ | $\dfrac{1}{0,70 + \dfrac{0,30}{1 + K_u}}$ | $\dfrac{1}{0,64 + \dfrac{0,36}{1 + K_u}}$ | $\dfrac{1}{0,65 + \dfrac{0,35}{1 + K_u}}$ |

*Tabela 2*

**Sarcini repartizate**

| Schema grinzii | Mărimi statice |  <br>$q = g + p\,;\ k_u = \frac{p_u}{g}$ |  <br>$q = g + p$<br>$k_u = \frac{p_u}{g}\,;\ W = 0{,}7\,gl$ |  <br>$q = g + p$<br>$k_u = \frac{p_u}{g}\,;\ W = 0{,}6\,gl$ |  <br>$q = g + p$<br>$k_u = \frac{p_u}{g}\,;\ W = 0{,}5\,gl$ |
|---|---|---|---|---|---|
|  | $M_{p1}$<br>$M_{pb}$<br>$T_a$<br>$T_{b1}$<br>$r_1 = r_b$ | $(0{,}070 + 0{,}079\,k_u)\,gl^2$<br>$(0{,}125 + 0{,}100\,k_u)\,gl^2$<br>$(0{,}375 + 0{,}400\,k_u)\,gl$<br>$(0{,}625 + 0{,}600\,k_u)\,gl$<br>$\frac{1}{0{,}80 + \frac{0{,}20}{1 + k_u}}$ | $(0{,}089 + 0{,}101\,k_u)\,Wl$<br>$(0{,}151 + 0{,}120\,k_u)\,Wl$<br>$(0{,}349 + 0{,}380\,k_u)\,W$<br>$(0{,}651 + 0{,}620\,k_u)\,W$<br>$\frac{1}{0{,}80 + \frac{0{,}20}{1 + k_u}}$ | $(0{,}094 + 0{,}105\,k_u)\,Wl$<br>$(0{,}155 + 0{,}127\,k_u)\,Wl$<br>$(0{,}345 + 0{,}373\,k_u)\,W$<br>$(0{,}655 + 0{,}627\,k_u)\,W$<br>$\frac{1}{0{,}82 + \frac{0{,}18}{1 + k_u}}$ | $(0{,}095 + 0{,}107\,k_u)\,Wl$<br>$(0{,}156 + 0{,}129\,k_u)\,Wl$<br>$(0{,}344 + 0{,}371\,k_u)\,W$<br>$(0{,}656 + 0{,}629\,k_u)\,W$<br>$\frac{1}{0{,}82 + \frac{0{,}18}{1 + k_u}}$ |
|  | $M_{p1}$<br>$M_{p2}$<br>$M_{pb}$<br>$T_a$<br>$T_{b1}$<br>$T_{b2}$<br>$r_1$<br>$r_2 = r_b$ | $(0{,}080 + 0{,}089\,k_u)\,gl^2$<br>$(0{,}025 + 0{,}049\,k_u)\,gl^2$<br>$(0{,}100 + 0{,}076\,k_u)\,gl^2$<br>$(0{,}400 + 0{,}424\,k_u)\,gl$<br>$(0{,}600 + 0{,}576\,k_u)\,gl$<br>$0{,}500\,(1 + k_u)\,gl$<br>$\frac{1}{0{,}88 + \frac{0{,}12}{1 + k_u}}$<br>$\frac{1}{0{,}65 + \frac{0{,}35}{1 + k_u}}$ | $(0{,}102 + 0{,}113\,k_u)\,Wl$<br>$(0{,}036 + 0{,}063\,k_u)\,Wl$<br>$(0{,}121 + 0{,}094\,k_u)\,Wl$<br>$(0{,}379 + 0{,}406\,k_u)\,W$<br>$(0{,}621 + 0{,}594\,k_u)\,W$<br>$0{,}500\,(1 + k_u)\,W$<br>$\frac{1}{0{,}88 + \frac{0{,}12}{1 + k_u}}$<br>$\frac{1}{0{,}66 + \frac{0{,}34}{1 + k_u}}$ | $(0{,}107 + 0{,}120\,k_u)\,Wl$<br>$(0{,}040 + 0{,}069\,k_u)\,Wl$<br>$(0{,}124 + 0{,}095\,k_u)\,Wl$<br>$(0{,}376 + 0{,}405\,k_u)\,W$<br>$(0{,}624 + 0{,}595\,k_u)\,W$<br>$0{,}500\,(1 + k_u)\,W$<br>$\frac{1}{0{,}84 + \frac{0{,}16}{1 + k_u}}$<br>$\frac{1}{0{,}66 + \frac{0{,}34}{1 + k_u}}$ | $(0{,}108 + 0{,}122\,k_u)\,Wl$<br>$(0{,}042 + 0{,}070\,k_u)\,Wl$<br>$(0{,}125 + 0{,}097\,k_u)\,Wl$<br>$(0{,}375 + 0{,}403\,k_u)\,W$<br>$(0{,}625 + 0{,}597\,k_u)\,W$<br>$0{,}500\,(1 + k_u)\,W$<br>$\frac{1}{0{,}84 + \frac{0{,}16}{1 + k_u}}$<br>$\frac{1}{0{,}66 + \frac{0{,}34}{1 + k_u}}$ |

|  |  |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|---|
|  | $M_{p1}$ | $(0{,}077 + 0{,}089\,k_u)\,gl^2$ | $(0{,}098 + 0{,}112\,k_u)\,Wl$ | $(0{,}103 + 0{,}118\,k_u)\,Wl$ | $(0{,}104 + 0{,}120\,k_u)\,Wl$ |
|  | $M_{p2}$ | $(0{,}037 + 0{,}052\,k_u)\,gl^2$ | $(0{,}049 + 0{,}067\,k_u)\,Wl$ | $(0{,}053 + 0{,}073\,k_u)\,Wl$ | $(0{,}056 + 0{,}074\,k_u)\,Wl$ |
|  | $M_{pb}$ | $(0{,}107 + 0{,}078\,k_u)\,gl^2$ | $(0{,}130 + 0{,}097\,k_u)\,Wl$ | $(0{,}133 + 0{,}098\,k_u)\,Wl$ | $(0{,}134 + 0{,}099\,k_u)\,Wl$ |
|  | $M_{pc}$ | $(0{,}071 + 0{,}068\,k_u)\,gl^2$ | $(0{,}086 + 0{,}084\,k_u)\,Wl$ | $(0{,}088 + 0{,}087\,k_u)\,Wl$ | $(0{,}089 + 0{,}088\,k_u)\,Wl$ |
|  | $T_a$ | $(0{,}393 + 0{,}422\,k_u)\,gl$ | $(0{,}370 + 0{,}403\,k_u)\,W$ | $(0{,}367 + 0{,}402\,k_u)\,W$ | $(0{,}366 + 0{,}401\,k_u)\,W$ |
|  | $T_{b1}$ | $(0{,}607 + 0{,}578\,k_u)\,gl$ | $(0{,}630 + 0{,}597\,k_u)\,W$ | $(0{,}633 + 0{,}598\,k_u)\,W$ | $(0{,}634 + 0{,}599\,k_u)\,W$ |
|  | $T_{b2}$ | $(0{,}536 + 0{,}510\,k_u)\,gl$ | $(0{,}544 + 0{,}513\,k_u)\,W$ | $(0{,}545 + 0{,}511\,k_u)\,W$ | $(0{,}545 + 0{,}511\,k_u)\,W$ |
|  | $T_{c2}$ | $(0{,}464 + 0{,}490\,k_u)\,gl$ | $(0{,}456 + 0{,}487\,k_u)\,W$ | $(0{,}455 + 0{,}489\,k_u)\,W$ | $(0{,}455 + 0{,}489\,k_u)\,W$ |
|  | $r_1$ | $\dfrac{1}{0{,}89 + \dfrac{0{,}11}{1 + k_u}}$ | $\dfrac{1}{0{,}89 + \dfrac{0{,}11}{1 + k_u}}$ | $\dfrac{1}{0{,}89 + \dfrac{0{,}11}{1 + k_u}}$ | $\dfrac{1}{0{,}89 + \dfrac{0{,}11}{1 + k_u}}$ |
|  | $r_2 = r_b = r_c$ | $\dfrac{1}{0{,}65 + \dfrac{0{,}35}{1 + k_u}}$ | $\dfrac{1}{0{,}65 + \dfrac{0{,}35}{1 + k_u}}$ | $\dfrac{1}{0{,}66 + \dfrac{0{,}34}{1 + k_u}}$ | $\dfrac{1}{0{,}66 + \dfrac{0{,}34}{1 + k_u}}$ |
|  | $M_{p1}$ | $(0{,}078 + 0{,}089\,k_u)\,gl^2$ | $(0{,}099 + 0{,}113\,k_u)\,Wl$ | $(0{,}104 + 0{,}120\,k_u)\,Wl$ | $(0{,}106 + 0{,}121\,k_u)\,Wl$ |
|  | $M_{p2}$ | $(0{,}033 + 0{,}051\,k_u)\,gl^2$ | $(0{,}046 + 0{,}067\,k_u)\,Wl$ | $(0{,}050 + 0{,}073\,k_u)\,Wl$ | $(0{,}052 + 0{,}074\,k_u)\,Wl$ |
|  | $M_{p3}$ | $(0{,}046 + 0{,}055\,k_u)\,gl^2$ | $(0{,}061 + 0{,}071\,k_u)\,Wl$ | $(0{,}066 + 0{,}075\,k_u)\,Wl$ | $(0{,}068 + 0{,}076\,k_u)\,Wl$ |
|  | $M_{pb}$ | $(0{,}105 + 0{,}078\,k_u)\,gl^2$ | $(0{,}127 + 0{,}094\,k_u)\,Wl$ | $(0{,}130 + 0{,}095\,k_u)\,Wl$ | $(0{,}131 + 0{,}097\,k_u)\,Wl$ |
|  | $M_{pc}$ | $(0{,}079 + 0{,}070\,k_u)\,gl^2$ | $(0{,}096 + 0{,}087\,k_u)\,Wl$ | $(0{,}098 + 0{,}089\,k_u)\,Wl$ | $(0{,}099 + 0{,}091\,k_u)\,Wl$ |
|  | $T_a$ | $(0{,}395 + 0{,}422\,k_u)\,gl$ | $(0{,}373 + 0{,}406\,k_u)\,W$ | $(0{,}370 + 0{,}405\,k_u)\,W$ | $(0{,}369 + 0{,}403\,k_u)\,W$ |
|  | $T_{b1}$ | $(0{,}605 + 0{,}578\,k_u)\,gl$ | $(0{,}627 + 0{,}594\,k_u)\,W$ | $(0{,}630 + 0{,}595\,k_u)\,W$ | $(0{,}631 + 0{,}597\,k_u)\,W$ |
|  | $T_{b2}$ | $(0{,}526 + 0{,}508\,k_u)\,gl$ | $(0{,}531 + 0{,}507\,k_u)\,W$ | $(0{,}532 + 0{,}506\,k_u)\,W$ | $(0{,}532 + 0{,}506\,k_u)\,W$ |
|  | $T_{c2}$ | $(0{,}474 + 0{,}492\,k_u)\,gl$ | $(0{,}469 + 0{,}493\,k_u)\,W$ | $(0{,}468 + 0{,}494\,k_u)\,W$ | $(0{,}468 + 0{,}494\,k_u)\,W$ |
|  | $T_{c3}$ | $0{,}500\,(1 + k_u)\,gl$ | $0{,}500\,(1 + k_u)\,W$ | $0{,}500\,(1 + k_u)\,W$ | $0{,}500\,(1 + k_u)\,W$ |
|  | $r_1$ | $\dfrac{1}{0{,}89 + \dfrac{0{,}11}{1 + k_u}}$ | $\dfrac{1}{0{,}89 + \dfrac{0{,}11}{1 + k_u}}$ | $\dfrac{1}{0{,}89 + \dfrac{0{,}11}{1 + k_u}}$ | $\dfrac{1}{0{,}89 + \dfrac{0{,}11}{1 + k_u}}$ |
|  | $r_2$ | $\dfrac{1}{0{,}65 + \dfrac{0{,}35}{1 + k_u}}$ | $\dfrac{1}{0{,}66 + \dfrac{0{,}34}{1 + k_u}}$ | $\dfrac{1}{0{,}68 + \dfrac{0{,}32}{1 + k_u}}$ | $\dfrac{1}{0{,}68 + \dfrac{0{,}32}{1 + k_u}}$ |
|  | $r_3 = r_b = r_c$ | $\dfrac{1}{0{,}65 + \dfrac{0{,}35}{1 + k_u}}$ | $\dfrac{1}{0{,}65 + \dfrac{0{,}35}{1 + k_u}}$ | $\dfrac{1}{0{,}65 + \dfrac{0{,}35}{1 + k_u}}$ | $\dfrac{1}{0{,}65 + \dfrac{0{,}35}{1 + k_u}}$ |

Aceste valori sînt suficient de reduse în cazurile curente de încărcare ($K_u < 3$), fapt care permite ca valorile momentelor de plastificare şi a forţelor tăietoare de rupere obţinute în studiul de mai sus să fie aplicate fără restricţii în calculul grinzilor de beton armat în domeniul plastic, ele îndeplinind atît condiţiile de rupere cît şi condiţiile normale de exploatare.

*Primită la redacţie la 18 aprilie 1961*

## РАСЧЕТ НЕРАЗРЕЗНЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК В ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

### РЕЗЮМЕ

В работе устанавливаются оптимальные значения пластических моментов железобетонных неразрезных балок с равными между собой пролетами и постоянным сечением.

В основе принятого метода расчета лежит принцип оптимального перераспределения, согласно которому оптимальное распределение значений пластических моментов получается путем осуществления равенства определенного числа коэффициентов перераспределения, в зависимости от числа дополнительных условий, необходимых для определения значений всех пластических моментов таким образом, чтобы остальные коэффициенты перераспределения имели значения меньшие, чем общее значение первых коэффициентов.

## PLASTIC ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE CONTINUOUS BEAMS

### ABSTRACT

In this paper the optimum values of plastic moments for reinforced concrete continuous beams with equal spans and constant cross-section are established.

The method used is based on *the optimum redistribution principle*, acoording to which optimum distribution of the values of plastic moments is obtained by equalizing a certain number of redistribution coefficients, function of the number of supplementary conditions required to determine the values of all plastic moments such that the remaining redistribution coefficients have smaller values than the common values of the first coefficients.

### BIBLIOGRAFIE

1. V. PETCU, *Un principiu fundamental în proiectarea structurilor static nedeterminate de beton armat în domeniul plastic.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, XII, 5 (1961).

# CONSIDERAȚII ASUPRA PROBLEMEI OSCILAȚIILOR AUTOVEHICULELOR ÎN MERS RECTILINIU CU VITEZA CONSTANTĂ

DE

V. MANEA

## 1. INTRODUCERE

În articolul de față ne propunem să studiem problema vibrațiilor ce apar la autovehicule în mers rectiliniu și uniform. În cursurile clasice de teoria vibrațiilor [1], [2] automobilul este prezentat ca exemplu tipic de sistem oscilant cu două grade de libertate. Mai exact, este prezentat ca un sistem cu trei grade de libertate care datorită simetriei construcției se reduce la studiul a două sisteme oscilante, unul cu două grade de libertate și celălalt cu un singur grad. Acestor trei grade de libertate le corespunde o mișcare pe verticală (pompaj), o rotație în jurul unei axe transversale (tangaj) și respectiv o rotație în jurul axei longitudinale (ruliu). Se pot considera evident și restul gradelor de libertate de mișcare ale corpului autovehiculului, complicîndu-se însă studiul ca atare [3].

În cele ce urmează ne vom ocupa de oscilațiile autovehiculului, considerat ca un sistem cu șapte grade de libertate, reprezentat schematic în figura 1.

Trei grade de libertate corespund mișcării de pompaj, tangaj și ruliu a corpului autovehiculului, iar restul de patru, mișcării pe verticală și rotației în jurul axei longitudinale a autovehiculului, a celor două punți (vehiculul este presupus cu două punți, generalizarea pentru mai multe punți făcîndu-se imediat).

Datorită simetriei construcției, amintită mai sus, după cum se va vedea în cele ce urmează, și în acest caz mai general problema se reduce la studiul a două sisteme oscilante echivalente, unul cu patru grade de libertate și celălalt cu trei. Această generalizare este determinată de necesitatea cunoașterii mai exacte a mișcării autovehiculului, a cărui structură este presupusă absolut rigidă, în timpul mersului rectiliniu uniform pe un drum cu neregularități ce produc excitații mecanice la trecerea roților peste ele. Cunoscînd mișcarea de rigid și deci accelerațiile, putem proceda la calculul de vibrații ale elementelor elastice (acoperiș, pereți, diverse bare etc.) ce intră în structura carcasei autovehiculului. După cum vom vedea mai jos, mișcarea de rigid a oricărui element al structurii carcasei apare ca o sumă de mișcări oscilatorii, în care cele cu amplitudini mari și frecvențe mici se datoresc corpului autovehiculului iar cele cu amplitudini mici și frecvențe mari se datoresc punților. Această deosebire este cu atît mai netă cu cît greutatea autovehiculului este mai mare față de cea a punților. În caz contrar deosebirea este mai puțin netă. Acesta este cazul autocamioanelor goale. Pentru un calcul de vibrații al elementelor elastice, este necesar să ținem seamă de toate forțele excitatoare, indiferent de mărimea amplitudinii.

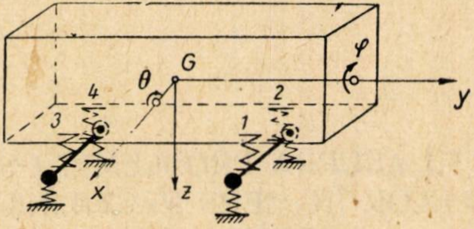


Fig. 1

## 2. OSCILAȚII LIBERE NEAMORTIZATE

Pentru scrierea ecuațiilor de echilibru dinamic ce descriu mișcarea sistemului oscilant fără amortizare, reprezentat în figura 1, vom presupune că deplasările și unghiurile de rotație au valori mici. În acest caz, ecuațiile de echilibru dinamic al corpului vehiculului au forma

$$\begin{aligned} M\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2} &= \sum_{i=1}^{4} R_i, \\ I_x\frac{\mathrm{d}^2 \theta}{\mathrm{d}t^2} &= \sum_{i=1}^{4} y_i R_i, \\ I_y\frac{\mathrm{d}^2 \varphi}{\mathrm{d}t^2} &= -\sum_{i=1}^{4} x_i R_i, \end{aligned} \tag{1}$$

unde am notat prin

$M$ — masa corpului vehiculului,

$I_x$, $I_y$ — momentul de inerție al corpului vehiculului față de axele $Ox$ și $Oy$ ,

$w$, $\theta$, $\varphi$ — deplasarea pe verticală a centrului de greutate respectiv unghiurile de rotație față de $Ox$ și $Oy$,

$R_i$ — reacțiunile arcurilor,

$x_i$ , $y_i$ — coordonatele punctelor de fixare a arcurilor de punți.

Similar, pentru punți, se pot scrie ecuațiile de echilibru dinamic :

$$\begin{aligned} m_{12} \frac{\mathrm{d}^2 w_{12}}{\mathrm{d}t^2} &= \sum_{i=1}^{2} (-R_i + r_i), \\ i_{12y} \frac{\mathrm{d}^2 \varphi_{12}}{\mathrm{d}t^2} &= \sum_{i=1}^{2} (x_i R_i - x'_i r_i), \end{aligned} \qquad (2)$$

respectiv

$$\begin{aligned} m_{34} \frac{\mathrm{d}^2 w_{34}}{\mathrm{d}t^2} &= \sum_{i=3}^{4} (-R_i + r_i), \\ i_{34y} \frac{\mathrm{d}^2 \varphi_{34}}{\mathrm{d}t^2} &= \sum_{i=3}^{4} (x_i R_i - x'_i r_i), \end{aligned} \qquad (3)$$

unde s-au întrebuințat notațiile

$m_{12}, m_{34}$ — masa punții din față, respectiv spate, împreună cu roțile ;
$i_{12y}, i_{34y}$ — momentul de inerție al punților, cu roțile respective, față de axa $Oy$ ;
$w_{12}$, $\varphi_{12}$ — deplasarea pe verticală a centrului de greutate, respectiv rotația față de axa $Oy$, a punții din față ;
$w_{34}$, $\varphi_{34}$ — deplasarea pe verticală, respectiv rotația punții din spate ;
$r_i$ — reacțiunea solului asupra roților.

Reacțiunile $R_i$ și $r_i$ pot fi exprimate în funcție de deformația arcurilor, respectiv cauciucurilor. Astfel, vom pune

$$R_i = - k_i \delta_i , \qquad (4)$$

unde

$$\delta_i = w + \theta y_i - \varphi x_i - w_{12} + \varphi_{12} x_i , \qquad (5)$$

pentru $i = 1,2$, respectiv

$$\delta_i = w + \theta y_i - \varphi x_i - w_{34} + \varphi_{34} x_i . \qquad (6)$$

Pentru reacțiunea solului vom pune în mod analog

$$r_i = - k'_i \delta'_i , \qquad (4')$$

unde

$$\begin{aligned} \delta'_i &= w_{12} - \varphi_{12} x'_i \qquad \text{pentru } i = 1,2 ; \\ \delta'_i &= w_{34} - \varphi_{34} x'_i \qquad \text{pentru } i = 3,4 . \end{aligned} \qquad (7)$$

Înlocuind în (1) conform cu (4) şi ţinînd seama de (5) şi (6) obţinem:

$$\begin{aligned} M\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2} &= -\sum_{i=1}^{4} k_i\,(w+\theta y_i-\varphi x_i)+\sum_{i=1}^{2} k_i(w_{12}-\varphi_{12}x_i)+\sum_{i=3}^{4} k_i(w_{34}-\varphi_{34}x_i),\\ I_x\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} &= -\sum_{i=1}^{4} k_i y_i(w+\theta y_i-\varphi x_i)+\sum_{i=1}^{2} k_i y_i(w_{12}-\varphi_{12}x_i)+\sum_{i=3}^{4} k_i y_i(w_{34}-\varphi_{34}x_i),\\ I_y\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} &= \sum_{i=1}^{4} k_i x_i(w+\theta y_i-\varphi x_i)-\sum_{i=1}^{2} k_i x_i(w_{12}-\varphi_{12}x_i)-\sum_{i=3}^{4} k_i x_i(w_{34}-\varphi_{34}x_i). \end{aligned} \tag{8}$$

Este indicată introducerea în sistemul (8) a următoarelor notaţii:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{4} k_i = k\ ; && \sum_{i=1}^{4} k_i x_i^2 = c\ ;\\ &\sum_{i=1}^{4} k_i x_i = a\ ; && \sum_{i=1}^{4} k_i y_i^2 = d\ ;\\ &\sum_{i=1}^{4} k_i y_i = b\ ; && \sum_{i=1}^{4} k_i x_i y_i = e\ ;\\ &\sum_{i=1}^{2} k_i = k_{12}\ ; && \sum_{i=1}^{2} k_i x_i^2 = c_{12}\ ;\\ &\sum_{i=3}^{4} k_i = k_{34}\ ; && \sum_{i=3}^{4} k_i x_i^2 = c_{34}\ ;\\ &\sum_{i=1}^{2} k_i x_i = a_{12}\ ; && \sum_{i=1}^{2} k_i x_i y_i = e_{12}\ ;\\ &\sum_{i=3}^{4} k_i x_i = a_{34}\ ; && \sum_{i=3}^{4} k_i x_i y_i = e_{34}\ ;\\ &\sum_{i=1}^{2} k_i y_i = b_{12}\ ; && \\ &\sum_{i=3}^{4} k_i y_i = b_{34}. && \end{aligned} \tag{9}$$

În urma înlocuirilor corespunzătoare rezultă sistemul

$$\begin{aligned} M\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2} &= -kw-b\theta+a\varphi+k_{12}w_{12}+k_{34}w_{34}-a_{12}\varphi_{12}-a_{34}\varphi_{34}\\ I_x\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} &= -bw-d\theta+e\varphi+b_{12}w_{12}+b_{34}w_{34}-e_{12}\varphi_{12}-e_{34}\varphi_{34}\\ I_y\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} &= aw+e\theta-c\varphi-a_{12}w_{12}-a_{34}w_{34}+c_{12}\varphi_{12}+c_{34}\varphi_{34}. \end{aligned} \tag{8'}$$

Efectuînd înlocuirile corespunzătoare în (2) și (3) conform cu (4) și (4') și ținînd seamă de (5), (6) și (7) rezultă :

$$\begin{aligned} m_{12}\frac{\mathrm{d}^2 w_{12}}{\mathrm{d}t^2} &= \sum_{i=1}^{2}\{k_i(w+\theta y_i-\varphi x_i)-(k_i+k_i')\,w_{12}+(k_ix_i+k_i'x_i')\,\varphi_{12}\},\\ i_{12v}\frac{\mathrm{d}^2\varphi_{12}}{\mathrm{d}t^2} &= \sum_{i=1}^{2}\{-k_ix_i(w+\theta y_i-\varphi x_i)+(k_ix_i+k_i'x_i')\,w_{12}-(k_ix_i^2+\\ &\quad +k_i'x_i'^2)\,\varphi_{12}\}, \end{aligned} \tag{10}$$

respectiv

$$\begin{aligned} m_{34}\frac{\mathrm{d}^2 w_{34}}{\mathrm{d}t^2} &= \sum_{i=3}^{4}\{k_i(w+\theta y_i-\varphi x_i)-(k_i+k_i')\,w_{34}+(k_ix_i+\\ &\quad +k_i'x_i')\,\varphi_{34}\},\\ i_{34v}\frac{\mathrm{d}^2\varphi_{34}}{\mathrm{d}t^2} &= \sum_{i=3}^{4}\{-k_ix_i(w+\theta y_i-\varphi x_i)+(k_ix_i+k_i'x_i')\,w_{34}-\\ &\quad -(k_ix_i^2+k_i'x_i'^2)\,\varphi_{34}\}, \end{aligned} \tag{11}$$

în care de asemenea pot fi introduse notațiile (9) împreună cu

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2}(k_i+k_i') &= k_{12}',\\ \sum_{i=3}^{4}(k_i+k_i') &= k_{34}',\\ \sum_{i=1}^{2}(k_ix_i+k_i'x_i') &= a_{12}',\\ \sum_{i=3}^{4}(k_ix_i+k_i'x_i') &= a_{34}',\\ \sum_{i=1}^{2}(k_ix_i^2+k_i'x_i'^2) &= c_{12}',\\ \sum_{i=3}^{4}(k_ix_i^2+k_i'x_i'^2) &= c_{34}'. \end{aligned} \tag{12}$$

Rezultă în final sistemul de patru ecuații

$$\begin{aligned} m_{12}\frac{\mathrm{d}^2 w_{12}}{\mathrm{d}t^2} &= k_{12}\,w+b_{12}\,\theta-a_{12}\,\varphi-k_{12}'\,w_{12}+a_{12}'\,\varphi_{12}\\ i_{12v}\frac{\mathrm{d}^2\varphi_{12}}{\mathrm{d}t^2} &= -a_{12}\,w-e_{12}\,\theta+c_{12}\,\varphi+a_{12}'\,w_{12}-c_{12}'\,\varphi_{12}\\ m_{34}\frac{\mathrm{d}^2 w_{34}}{\mathrm{d}t^2} &= k_{34}\,w+b_{34}\,\theta-a_{34}\,\varphi-k_{34}'\,w_{34}+a_{34}'\,\varphi_{34}\\ i_{34v}\frac{\mathrm{d}^2\varphi_{34}}{\mathrm{d}t^2} &= -a_{34}w-e_{34}\,\theta+c_{34}\,\varphi+a_{34}'\,w_{34}-c_{34}'\,\varphi_{34}. \end{aligned} \tag{13}$$

Am obţinut în definitiv un sistem de şapte ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul doi (8′) şi (13), ce corespund oscilaţiilor libere ale unui vehicul cu două punţi.

După cum se ştie, soluţiile acestor ecuaţii sînt utile pentru determinarea completă a mişcării dacă se dau şi condiţiile iniţiale corespunzătoare. Calculele necesare în cazul general sînt însă laborioase, datorită apariţiei unor determinanţi de ordinul şapte. Vom face însă o observaţie în scopul simplificării acestor calcule. De obicei vehiculele posedă o simetrie prin construcţie faţă de un plan vertical-longitudinal, astfel încît coeficienţii

$$a = a_{12} = a_{34} = e = e_{12} = e_{34} = a'_{12} = a'_{34} = 0, \tag{14}$$

deoarece

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_2; & k_1 &= k_2; \\ x_3 &= -x_4; & k_3 &= k_4; \\ x'_1 &= -x'_2; & k'_1 &= k'_2; \\ x'_3 &= -x'_4; & k'_3 &= k'_4. \end{aligned} \tag{15}$$

Ca urmare, sistemul de şapte ecuaţii constituit de (8′) şi (13) se separă în două sisteme de ecuaţii independente :

$$\begin{aligned} M \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2} &= -kw - b\theta + k_{12} w_{12} + k_{34} w_{34} \\ I_x \frac{\mathrm{d}^2 \theta}{\mathrm{d}t^2} &= -bw - d\theta + b_{12} w_{12} + b_{34} w_{34} \\ m_{12} \frac{\mathrm{d}^2 w_{12}}{\mathrm{d}t^2} &= k_{12} w + b_{12}\theta - k'_{12} w_{12} \\ m_{34} \frac{\mathrm{d}^2 w_{34}}{\mathrm{d}t^2} &= k_{34} w + b_{34} \theta - k'_{34} w_{34} \end{aligned} \tag{16}$$

respectiv

$$\begin{aligned} I_y \frac{\mathrm{d}^2 \varphi}{\mathrm{d}t^2} &= -c\varphi + c_{12} \varphi_{12} + c_{34} \varphi_{34} \\ i_{12y} \frac{\mathrm{d}^2 \varphi_{12}}{\mathrm{d}t^2} &= c_{12} \varphi - c'_{12} \varphi_{12} \\ i_{34y} \frac{\mathrm{d}^2 \varphi_{34}}{\mathrm{d}t^2} &= c_{34} \varphi - c'_{34} \varphi_{34}. \end{aligned} \tag{17}$$

Vom lua pentru sistemul (16) soluţii de forma

$$\begin{aligned} w &= A_1 \operatorname{Cos} pt + B_1 \operatorname{Sin} pt, \\ \theta &= A_2 \operatorname{Cos} pt + B_2 \operatorname{Sin} pt, \\ w_{12} &= A_3 \operatorname{Cos} pt + B_3 \operatorname{Sin} pt, \\ w_{34} &= A_4 \operatorname{Cos} pt + B_4 \operatorname{Sin} pt, \end{aligned} \tag{18}$$

iar pentru sistemul (17)

$$\begin{aligned} \varphi &= C_1 \operatorname{Cos} \omega t + D_1 \operatorname{Sin} \omega t, \\ \varphi_{12} &= C_2 \operatorname{Cos} \omega t + D_2 \operatorname{Sin} \omega t, \\ \varphi_{34} &= C_3 \operatorname{Cos} \omega t + D_3 \operatorname{Sin} \omega t, \end{aligned} \tag{19}$$

care introduse în (17), respectiv (18), conduc la două sisteme de ecuații algebrice :

$$\begin{aligned} (k - p^2 M) A_1 + bA_2 - k_{12} A_3 - k_{34} A_4 &= 0 \\ bA_1 + (d - p^2 I_x) A_2 - b_{12} A_3 - b_{34} A_4 &= 0 \\ - k_{12} A_1 - b_{12} A_2 + (k'_{12} - p^2 m_{12}) A_3 &= 0 \\ - k_{34} A_1 - b_{34} A_2 + (k'_{34} - p^2 m_{34}) A_4 &= 0, \end{aligned} \tag{20}$$

respectiv

$$\begin{aligned} (c - \omega^2 I_y) C_1 - c_{12} C_2 - c_{34} C_3 &= 0 \\ - c_{12} C_1 + (c'_{12} - \omega^2 i_{12y}) C_2 &= 0 \\ - c_{34} C_1 + (c'_{34} - \omega^2 i_{34y}) C_3 &= 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Din condiția de compatibilitate a fiecăruia din cele două sisteme de ecuații omogene, rezultă două ecuații caracteristice de gradul patru, respectiv trei, ale căror rădăcini sînt frecvențele proprii ale sistemului oscilant reprezentat de vehicul. Condiția de compatibilitate pentru sistemul (20) este echivalentă cu condiția ca determinantul

$$\begin{vmatrix} \frac{k}{M} - \lambda & \frac{b}{M} & -\frac{k_{12}}{M} & -\frac{k_{34}}{M} \\ \frac{b}{I_x} & \frac{d}{I_x} - \lambda & -\frac{b_{12}}{I_x} & -\frac{b_{34}}{I_x} \\ -\frac{k_{12}}{m_{12}} & -\frac{b_{12}}{m_{12}} & \frac{k'_{12}}{m_{12}} - \lambda & 0 \\ -\frac{k_{34}}{m_{34}} & -\frac{b_{34}}{m_{34}} & 0 & \frac{k'_{34}}{m_{34}} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{22}$$

unde am notat $p^2 = \lambda$, iar pentru (21) cu condiția similară ca

$$\begin{vmatrix} \frac{c}{I_y} - \gamma & -\frac{c_{12}}{I_y} & -\frac{c_{34}}{I_y} \\ -\frac{c_{12}}{i_{12y}} & \frac{c'_{12}}{i_{12y}} - \gamma & 0 \\ -\frac{c_{34}}{i_{34y}} & 0 & \frac{c'_{34}}{i_{34y}} - \gamma \end{vmatrix} = 0 \tag{23}$$

unde $\omega^2 = \gamma$. Dezvoltînd cei doi determinanţi obţinem cele două ecuaţii caracteristice, de care am amintit mai sus. Găsirea rădăcinilor se poate face printr-un procedeu oarecare convenabil. Determinate fiind aceste frecvenţe, ale căror valori le vom nota cu $p_1$, $p_2$, $p_3$, $p_4$, respectiv cu $\omega_1$ $\omega_2$, $\omega_3$, se poate proceda la calculul aşa-zişilor coeficienţi de distribuţie corespunzători fiecăreia dintre cele patru, respectiv trei, frecvenţe proprii.

Soluţiile (18), respectiv (19), se vor scrie sub forma :

$$
\begin{aligned}
w &= \sum_{j=1}^{4} (A_{1j} \operatorname{Cos} p_j t + B_{1j} \operatorname{Sin} p_j t),\\
\theta &= \sum_{j=1}^{4} (A_{2j} \operatorname{Cos} p_j t + B_{2j} \operatorname{Sin} p_j t),\\
w_{12} &= \sum_{j=1}^{4} (A_{3j} \operatorname{Cos} p_j t + B_{3j} \operatorname{Sin} p_j t),\\
w_{34} &= \sum_{j=1}^{4} (A_{4j} \operatorname{Cos} p_j t + B_{4j} \operatorname{Sin} p_j t),
\end{aligned}
\tag{24}
$$

respectiv

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \sum_{k=1}^{3} (C_{1k} \operatorname{Cos} \omega_k t + D_{1k} \operatorname{Sin} \omega_k t),\\
\varphi_{12} &= \sum_{k=1}^{3} (C_{2k} \operatorname{Cos} \omega_k t + D_{2k} \operatorname{Sin} \omega_k t),\\
\varphi_{34} &= \sum_{k=1}^{3} (C_{3k} \operatorname{Cos} \omega_k t + D_{3k} \operatorname{Sin} \omega_k t).
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Prin coeficienţi de distribuţie se înţeleg rapoartele :

$$
q_{2j} = \frac{A_{2j}}{A_{1j}} = \frac{B_{2j}}{B_{1j}}, \quad q_{3j} = \frac{A_{3j}}{A_{1j}} = \frac{B_{3j}}{B_{1j}}, \quad q_{4j} = \frac{A_{4j}}{A_{1j}} = \frac{B_{4j}}{B_{1j}}, \tag{26}
$$

respectiv

$$
s_{2k} = \frac{C_{2k}}{C_{1k}} = \frac{D_{2k}}{D_{1k}}, \quad s_{3k} = \frac{C_{3k}}{C_{1k}} = \frac{D_{3k}}{D_{1k}}, \tag{27}
$$

ce se determină cu ajutorul sistemelor (20) şi (21) în care se înlocuieşte $p$ cu $p_j$, respectiv $\omega$ cu $\omega_k$, iar amplitudinile $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ cu $A_{1j}$, $A_{2j}$, $A_{3j}$, $A_{4j}$, respectiv $C_1$, $C_2$, $C_3$ cu $C_{1k}$, $C_{2k}$, $C_{3k}$. Se împarte apoi fiecare ecuaţie a sistemului (20) cu $A_{1j}$ şi se consideră oricare trei din cele patru ecuaţii cu necunoscutele $q_{2j}$, $q_{3j}$ şi $q_{4j}$. În mod analog se procedează cu sistemul (21) din care se consideră oricare două din cele trei ecuaţii cu necunoscutele $s_{2k}$ şi $s_{3k}$.

Au mai rămas de determinat amplitudinile $A_{1j}$, $B_{1j}$, respectiv $C_{1k}$ şi $D_{1k}$, care se face cu ajutorul condiţiilor iniţiale pe care trebuie să le satisface $w$, $\theta$, $w_{12}$, $w_{34}$, respectiv $\varphi$, $\varphi_{12}$ şi $\varphi_{34}$, cît şi prima derivată a acestora în raport cu timpul. Cu aceasta problema oscilaţiilor libere ale vehiculelor este complet rezolvată.

## 3. OSCILAŢIILE LIBERE AMORTIZATE ALE VEHICULELOR

La punctul precedent am considerat că frecarea lipseşte. În realitate însă oscilaţiile vehiculelor sînt puternic amortizate datorită frecărilor mari ce apar în elementele suspensiei. Cauzele care provoacă apariţia acestor frecări sînt multiple, prezentînd interes numai prin efectul de atenuare în timp a oscilaţiilor pe care îl produc.

Pentru evaluarea acestui efect vom înlocui resortul elastic cu un model reprezentat în figura 2. Pe baza acestui model, reacţiunea arcurilor asupra şasiului, spre deosebire de (4), va fi dată de expresia

$$R_i = -k_i\,\delta_i - h_i\,\dot{\delta}_i, \tag{28}$$

unde $\delta_i$ este dat de (5), respectiv (6), $\dot{\delta}_i = \dfrac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}t}$, $h_i$ reprezentînd coeficientul de frecare.

Reacţiunea solului asupra roţii va fi dată de o expresie analogă cu (28)

$$r_i = -k_i'\,\delta_i' - h_i'\,\dot{\delta}_i' \tag{29}$$

unde $\delta_i'$ este dat de (7), $\dot{\delta}_i' = \dfrac{\mathrm{d}\delta_i'}{\mathrm{d}t}$ iar $h_i'$ coeficientul de frecare respectiv.

Introducînd reacţiunile $R_i$ şi $r_i$ în ecuaţiile de echilibru dinamic (1), (2) şi (3) se ajunge, după o serie de transformări, la două sisteme de ecuaţii analoge cu (8′) şi (13). Vom scrie direct sistemele (16) şi (17) completate cu termenii datoriţi frecării :

$$M\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2} = -h\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} - \bar{b}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + h_{12}\frac{\mathrm{d}w_{12}}{\mathrm{d}t} + h_{34}\frac{\mathrm{d}w_{34}}{\mathrm{d}t} - $$

$$- kw - b\theta + k_{12}w_{12} + k_{34}w_{34},$$

$$I_x\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\bar{b}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} - \bar{d}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \bar{b}_{12}\frac{\mathrm{d}w_{12}}{\mathrm{d}t} + \bar{b}_{34}\frac{\mathrm{d}w_{34}}{\mathrm{d}t} -$$

$$- bw - d\theta + b_{12}w_{12} + b_{34}w_{34}, \tag{30}$$

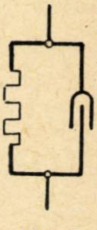


Fig. 2

$$m_{12}\frac{\mathrm{d}^2 w_{12}}{\mathrm{d}t^2} = h_{12}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + \bar{b}_{12}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} - h_{12}'\frac{\mathrm{d}w_{12}}{\mathrm{d}t} + k_{12}w + b_{12}\theta - k_{12}'w_{12},$$

$$m_{34}\frac{\mathrm{d}^2 w_{34}}{\mathrm{d}t^2} = h_{34}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + \bar{b}_{34}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} - h_{34}'\frac{\mathrm{d}w_{34}}{\mathrm{d}t} + k_{34}w + b_{34}\theta - k_{34}'\omega_{34},$$

respectiv

$$\begin{aligned} I_y \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} &= -\bar{c}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + \bar{c}_{12}\frac{\mathrm{d}\varphi_{12}}{\mathrm{d}t} + \bar{c}_{34}\frac{\mathrm{d}\varphi_{34}}{\mathrm{d}t} - c\varphi + c_{12}\varphi_{12} + c_{34}\varphi_{34}, \\ i_{12y}\frac{\mathrm{d}^2\varphi_{12}}{\mathrm{d}t^2} &= \bar{c}_{12}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} - \bar{c}'_{12}\frac{\mathrm{d}\varphi_{12}}{\mathrm{d}t} + c_{12}\varphi - c'_{12}\varphi_{12}, \\ i_{34y}\frac{\mathrm{d}^2\varphi_{34}}{\mathrm{d}t^2} &= \bar{c}_{34}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} - \bar{c}'_{34}\frac{\mathrm{d}\varphi_{34}}{\mathrm{d}t} + c_{34}\varphi - c'_{34}\varphi_{34}, \end{aligned} \tag{31}$$

unde în plus față de notațiile (9) și (12) am mai întrebuințat următoarele notații :

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{4} h_i = h\,; && \sum_{i=1}^{4} h_i x_i^2 = \bar{c}\,; \\ &\sum_{i=1}^{4} h_i y_i = \bar{b}\,; && \sum_{i=1}^{4} h_i y_i^2 = \bar{d}\,; \\ &\sum_{i=1}^{2} h_i = h_{12}\,; && \sum_{i=1}^{2} h_i x_i^2 = \bar{c}_{12}\,; \\ &\sum_{i=3}^{4} h_i = h_{34}\,; && \sum_{i=3}^{4} h_i x_i^2 = \bar{c}_{34}\,; \\ &\sum_{i=1}^{2} h_i y_i = \bar{b}_{12}\,; && \\ &\sum_{i=3}^{4} h_i y_i = \bar{b}_{34}\,; && \end{aligned} \tag{32}$$

respectiv

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{2}(h_i + h'_i) = h'_{12}\,; \\ &\sum_{i=3}^{4}(h_i + h'_i) = h'_{34}\,; \\ &\sum_{i=1}^{2}(h_i x_i^2 + h'_i x_i'^2) = \bar{c}'_{12}\,; \\ &\sum_{i=3}^{4}(h_i x_i^2 + h'_i x_i'^2) = \bar{c}'_{34}\,. \end{aligned} \tag{33}$$

Pentru sistemele (30) și (31) vom lua soluții de forma

$$\begin{aligned} w &= A_1\,\mathrm{e}^{\lambda t}, \\ \theta &= A_2\,\mathrm{e}^{\lambda t}, \\ w_{12} &= A_3\,\mathrm{e}^{\lambda t}, \\ w_{34} &= A_4\,\mathrm{e}^{\lambda t}, \end{aligned} \tag{34}$$

respectiv

$$\begin{aligned} \varphi &= C_1\, e^{\mu t}, \\ \varphi_{12} &= C_2\, e^{\mu t}, \\ \varphi_{34} &= C_3\, e^{\mu t}. \end{aligned} \tag{35}$$

În urma înlocuirilor corespunzătoare obținem următoarele două sisteme de ecuații algebrice :

$$\begin{aligned} &(M\lambda^2 + h\lambda + K)\, A_1 + (b\lambda + b)\, A_2 - (h_{12}\,\lambda + k_{12})\, A_3 - (h_{34}\,\lambda + k_{34})\, A_4 = 0 \\ &(\bar{b}\lambda + b)\, A_1 + (I_x\,\lambda^2 + d\lambda + d)\, A_2 - (\bar{b}_{12}\,\lambda + b_{12})\, A_3 - (\bar{b}_{34}\,\lambda + \\ &\qquad + b_{34})\, A_4 = 0 \\ &-(h_{12}\,\lambda + k_{12})\, A_1 - (\bar{b}_{12}\,\lambda + b_{12})\, A_2 + (m_{12}\,\lambda^2 + h'_{12}\,\lambda + k_{12})\, A_3 = 0. \\ &-(h_{34}\,\lambda + k_{34})\, A_1 - (\bar{b}_{34}\,\lambda + b_{34})\, A_2 + (m_{34}\,\lambda^2 + h'_{34}\,\lambda + k_{34})\, A_4 = 0, \end{aligned} \tag{36}$$

respectiv

$$\begin{aligned} &(I_y\,\mu^2 + \bar{c}\mu + c)\, C_1 - (\bar{c}_{12}\,\mu + c_{12})\, C_2 - (\bar{c}_{34}\,\mu + c_{34})\, C_3 = 0 \\ &-(\bar{c}_{12}\,\mu + c_{12})\, C_1 + (i_{12_y}\,\mu^2 + \bar{c}'_{12}\,\mu + c'_{12})\, C_2 = 0 \\ &-(\bar{c}_{34}\,\mu + c_{34})\, C_1 + (i_{34_y}\,\mu^2 + \bar{c}'_{34}\,\mu + c'_{34})\, C_3 = 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Din condiția de compatibilitate a fiecăruia din aceste două sisteme rezultă două ecuații caracteristice ale căror rădăcini, în general complexe, formează spectrul frecvențelor proprii ale sistemului oscilant cu amortizare considerat. După cum se știe, rădăcinile acestor ecuații caracteristice pot fi determinate exact, fiind în general de forma

$$\begin{aligned} \lambda_j &= -\,\varepsilon_j + ip_j,\ \lambda_j^* = -\,\varepsilon_j - ip_j,\ (j = 1, 2, 3, 4) \\ \mu_k &= -\,\delta_k + i\,\omega_k,\ \mu_k^* = -\,\delta_k - i\omega_k,\ (k = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

unde $i = \sqrt{-1}$.

Ca urmare, soluțiile (34) și (35) capătă forma :

$$\begin{aligned} w &= \sum_{j=1}^{4} (\bar{A}_{1j}\, e^{(-\varepsilon_j + ip_j)t} + \bar{A}_{1j}^*\, e^{(-\varepsilon_j - ip_j)t}), \\ \theta &= \sum_{j=1}^{4} (\bar{A}_{1j}\, \bar{q}_{2j}\, e^{(-\varepsilon_j + ip_j)t} + \bar{A}_{1j}^*\, \bar{q}_{2j}^*\, e^{(-\varepsilon_j - ip_j)t}), \\ w_{12} &= \sum_{j=1}^{4} (\bar{A}_{1j}\, \bar{q}_{3j}\, e^{(-\varepsilon_j + ip_j)t} + \bar{A}_{1j}^*\, \bar{q}_{3j}^*\, e^{(-\varepsilon_j - ip_j)t}), \\ w_{34} &= \sum_{j=1}^{4} (\bar{A}_{1j}\, \bar{q}_{4j}\, e^{(-\varepsilon_j + ip_j)t} + \bar{A}_{1j}^*\, \bar{q}_{4j}^*\, e^{(-\varepsilon_j - ip_j)t}), \end{aligned} \tag{38}$$

respectiv

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \sum_{k=1}^{3} (\overline{C}_{1k}\, \mathrm{e}^{(-\delta_k + i\omega_k)t} + \overline{C}^{*}_{1k}\, \mathrm{e}^{(-\delta_k - i\omega_k)t}),\\
\varphi_{12} &= \sum_{k=1}^{3} (\overline{C}_{1k}\, \overline{s}_{2k}\, \mathrm{e}^{(-\delta_k + i\omega_k)t} + \overline{C}^{*}_{1k}\, \overline{s}^{*}_{2k}\, \mathrm{e}^{(-\delta_k - i\omega_k)t}),\\
\varphi_{34} &= \sum_{k=1}^{3} (\overline{C}_{1k}\, \overline{s}_{3k}\, \mathrm{e}^{(-\delta_k + i\omega_k)t} + \overline{C}^{*}_{1k}\, \overline{s}^{*}_{3k}\, \mathrm{e}^{(-\delta_k - i\omega_k)t}),
\end{aligned}
\tag{39}
$$

unde am notat cu $\overline{A}_{1j}$, $\overline{A}^{*}_{1j}$, $\overline{C}_{1k}$, $\overline{C}^{*}_{1k}$ amplitudinile complexe ale oscilațiilor de pompaj şi ruliu ale corpului autovehiculului iar cu $\overline{q}_{2j}$, $\overline{q}_{3j}$, $\overline{q}_{4j}$ respectiv $\overline{s}_{2k}$, $\overline{s}_{3k}$ coeficienții complecşi de distribuție.

Dacă punem

$$
\begin{aligned}
\overline{A}_{1j} &= A_{1j} - iB_{1j},\\
\overline{q}_{lj} &= q_{ij}\, \mathrm{e}^{i\varkappa_{lj}},\\
\overline{C}_{1k} &= C_{1k} - i\, D_{1k},\\
\overline{s}_{mk} &= s_{mk}\, \mathrm{e}^{i\nu_{mk}},
\end{aligned}
$$

unde

$$j = 1, 2, 3, 4\,;\ k = 1, 2, 3,\,;\ l = 2, 3, 4\,;\ m = 2, 3.$$

Soluțiile (36) respectiv (37) devin

$$
\begin{aligned}
w &= \sum_{j=1}^{4} \mathrm{e}^{-\varepsilon_j t} \{A_{1j} \operatorname{Cos} p_j t + B_{1j} \operatorname{Sin} p_j t\},\\
\theta &= \sum_{j=1}^{4} \mathrm{e}^{-\varepsilon_j t}\, q_{2j}\, \{A_{1j} \operatorname{Cos}(p_j t + x_{2j}) + B_{1j} \operatorname{Sin}(p_j t + x_{2j})\},\\
w_{12} &= \sum_{j=1}^{4} \mathrm{e}^{-\varepsilon_j t}\, q_{3j}\, \{A_{1j} \operatorname{Cos}(p_j t + x_{3j}) + B_{1j} \operatorname{Sin}(p_j t + x_{3j})\},\\
w_{34} &= \sum_{j=1}^{4} \mathrm{e}^{-\varepsilon_j t}\, q_{4j}\, \{A_{1j} \operatorname{Cos}(p_j t + x_{4j}) + B_{1j} \operatorname{Sin}(p_j t + x_{4j})\},
\end{aligned}
\tag{40}
$$

respectiv

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \sum_{k=1}^{3} \mathrm{e}^{-\delta_k t} \{C_{1k} \operatorname{Cos} \omega_k t + D_{1k} \operatorname{Sin} \omega_k t\},\\
\varphi_{12} &= \sum_{k=1}^{3} \mathrm{e}^{-\delta_k t}\, s_{2k}\, \{C_{1k} \operatorname{Cos}(\omega_k t + \nu_{2k}) + D_{1k} \operatorname{Sin}(\omega_k t + \nu_{2k})\},\\
\varphi_{34} &= \sum_{k=1}^{3} \mathrm{e}^{-\delta_k t}\, s_{3k}\, \{C_{1k} \operatorname{Cos}(\omega_k t + \nu_{3k}) + D_{1k} \operatorname{Sin}(\omega_k t + \nu_{3k})\}.
\end{aligned}
\tag{41}
$$

Constantele $A_{1j}$, $B_{1j}$, $C_{1k}$ şi $D_{1k}$ se determină cu ajutorul condiţiilor iniţiale. Coeficienţii de distribuţie complecşi $\bar{q}_{ij}$ şi $\bar{s}_{mk}$ se determină cu ajutorul sistemelor (36), respectiv (37), în care înlocuim $\lambda$ cu $\lambda_j$, respectiv $\mu$ cu $\mu_k$.

## 4. OSCILAŢIILE FORŢATE

Problema oscilaţiilor autovehiculelor, o dată cu reducerea ei la studiul oscilaţiilor a două sisteme oscilante echivalente cu patru, respectiv trei grade de libertate, poate fi considerată ca rezolvată *); din acest motiv ne vom rezuma numai la menţionarea oscilaţiilor forţate ale autovehiculului sub acţiunea forţelor perturbatoare de la bordul acestuia (motor, compresor etc.).

Mai importantă este problema oscilaţiilor provocate de denivelările drumului. Pentru determinarea acestora vom reveni la relaţiile (7) care în acest caz se scriu :

$$\delta_i' = w_{12} - \varphi_{12}\, x_i' - f_i \qquad \text{pentru } i = 1,\ 2,$$

$$\delta_i' = w_{34} - \varphi_{34}\, x_i' - f_i \qquad \text{pentru } i = 3,\ 4,$$

unde $f_i\,(t)$ reprezintă denivelarea corespunzătoare fiecărei roţi, considerată ca o funcţie de timp dată. Înlocuind în (4′) şi apoi în sistemele (2) şi (3) vom obţine în final două sisteme, care se mai obţin din (16) sau (30) adăugînd în partea dreaptă a ultimelor două ecuaţii termenii

$$\begin{matrix} k_1' f_1 + k_2' f_2 \\ k_3' f_3 + k_4' f_4 \end{matrix} \tag{42}$$

şi respectiv din (17) sau (31) adăugînd în partea dreaptă a ultimelor două ecuaţii termenii

$$\begin{matrix} -\, x_1' k_1' f_1 - x_2' k_2' f_2 \\ -\, x_3' k_3' f_3 - x_4' k_4' f_4 \end{matrix} \tag{43}$$

Trebuie menţionat că determinarea funcţiilor $f_i(t)$ este dificilă datorită caracterului dezordonat al denivelărilor. Mai eficace ar fi adoptarea unui punct de vedere statistic în această problemă.

Vom putea însă evalua într-o anumită măsură efectul neregularităţilor drumului în două cazuri limită.

*a*) În cazul denivelărilor mari, la trecerea cărora viteza autovehiculului este mică, se poate considera că roţile urmăresc continuu profilul drumului. În acest caz se pot stabili, în anumite cazuri, expresiile analitice pentru funcţiile corespunzătoare unui interval mic de drum. În anumite cazuri funcţiile $f_i(t)$ se pot defini pe porţiuni, în cadrul unui interval de drum convenabil ales, astfel devenind indicată găsirea soluţiilor cu ajutorul transformatei Laplace. Pentru exemplificare vom trata cazul în care $f_i(t)$ are forma din figura 3 iar $f_2 = f_3 = f_4 = 0$. Acest caz ar corespunde situației în care o roată din față ar intra la momentul $t = 0$ într-o groapă de adîncime $H$ prin care ar merge un timp şi după care ar reveni la poziția inițială.

---

*) [4], p. 310.

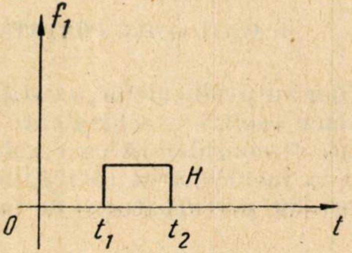


Fig. 3

În realitate această denivelare, datorită dimensiunilor roții, nu prezintă discontinuitățile curbei reprezentată în figura 3. Calitativ însă efectul este acelaşi, astfel încît vom determina soluțiile următoarelor sisteme de ecuații de mişcare (fără considerarea amortizării) :

$$M \frac{d^2 w}{dt^2} + kw + b\theta - k_{12} w_{12} - k_{34} w_{34} = 0$$

$$I_x \frac{d^2 \theta}{dt^2} + bw + d\theta - b_{12} w_{12} - b_{34} w_{34} = 0$$

$$m_{12} \frac{d^2 w_{12}}{dt^2} + k'_{12} w_{12} - k_{12} w - b_{12} \theta = k'_1 f_1 \tag{44}$$

$$m_{34} \frac{d^2 w_{34}}{dt^2} + k'_{34} w_{34} - k_{34} w - b_{34} \theta = 0,$$

respectiv

$$I_y \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + c\varphi - c_{12} \varphi_{12} - c_{34} \varphi_{34} = 0$$

$$i_{12y} \frac{d^2 \varphi_{12}}{dt^2} + c'_{12} \varphi_{12} - c_{12} \varphi = - x'_1 k'_1 f_1 \tag{45}$$

$$i_{34y} \frac{d^2 \varphi_{34}}{dt^2} + c'_{34} \varphi_{34} - c_{34} \varphi = 0.$$

Considerăm funcţia de denivelare, reprezentată grafic în figura 3, ca rezultînd din suprapunerea a două funcţii de tip Heaviside, reprezentate în figura 4.

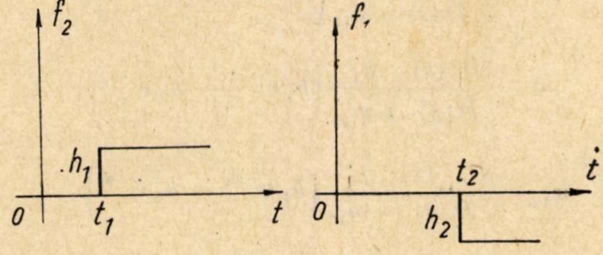


Fig. 4

Aplicînd transformarea Laplace [5] sistemelor (44) şi (45), în ipoteza condiţiilor iniţiale nule, obţinem :

$$
\begin{aligned}
&\left(s^2+\frac{K}{M}\right)\overline{w}+\frac{b}{M}\,\overline{\theta}-\frac{k_{12}}{M}\,\overline{w}_{12}-\frac{k_{34}}{M}\,\overline{w}_{34}=0\\
&\frac{b}{I_x}\,\overline{w}+\left(s^2+\frac{d}{I_x}\right)\overline{\theta}-\frac{b_{12}}{I_x}\,\overline{w}_{12}-\frac{b_{34}}{I_x}\,\overline{w}_{34}=0\\
&-\frac{k_{12}}{m_{12}}\,\overline{w}-\frac{b_{12}}{m_{12}}\,\overline{\theta}+\left(s^2+\frac{k'_{12}}{m_{12}}\right)\overline{w}_{12}=\frac{k'_1}{s\,m_{12}}\left(h_1\,\mathrm{e}^{-st_1}-h_2\,\mathrm{e}^{-st_2}\right)\\
&-\frac{k_{34}}{m_{34}}\,\overline{w}-\frac{b_{34}}{m_{34}}\,\overline{\theta}+\left(s^2+\frac{k'_{34}}{m_{34}}\right)\overline{w}_{34}=0,
\end{aligned}
\tag{46}
$$

respectiv

$$
\begin{aligned}
&\left(s^2+\frac{c}{I_v}\right)\overline{\varphi}-\frac{c_{12}}{I_v}\,\overline{\varphi}_{12}-\frac{c_{34}}{I_v}\,\overline{\varphi}_{34}=0\\
&-\frac{c_{12}}{\dot{i}_{12v}}\,\overline{\varphi}+\left(s^2+\frac{c'_{12}}{\dot{i}_{12v}}\right)\overline{\varphi}_{12}=-\frac{x'_1\,k'_1}{s\,\dot{i}_{12v}}\left(h_1\,\mathrm{e}^{-st_1}-h_2\,\mathrm{e}^{-st_2}\right)\\
&-\frac{c_{34}}{\dot{i}_{34v}}\,\overline{\varphi}+\left(s^2+\frac{c'_{34}}{\dot{i}_{34v}}\right)\overline{\varphi}_{34}=0,
\end{aligned}
\tag{47}
$$

unde am notat prin $\overline{w}$, $\overline{\varphi}\,\ldots,\overline{\varphi}_{34}$, transformatele Laplace ale funcţiilor $w$, $\varphi$, $\ldots$, $\varphi_{34}$.

Rezolvînd sistemele precedente în raport cu aceste transformate vom obţine :

$$\bar{w} = \frac{D_{\bar{w}}(s)}{D(s)} \frac{k'_1}{s\,m_{12}} \left(h_1\, e^{-st_1} - h_2\, e^{-st_2}\right),$$

$$\bar{\theta} = \frac{D_{\bar{\theta}}(s)}{D(s)} \frac{k'_1}{s\,m_{12}} \left(h_1\, e^{-st_1} - h_2\, e^{-st_2}\right),$$

$$\bar{w}_{12} = \frac{D_{\bar{w}_{12}}(s)}{D(s)} \frac{k'_1}{s\,m_{12}} \left(h_1\, e^{-st_1} - h_2\, e^{-st_2}\right), \tag{48}$$

$$\bar{w}_{34} = \frac{D_{\bar{w}_{34}}(s)}{D(s)} \frac{k'_1}{s\,m_{12}} \left(h_1\, e^{-st_1} - h_2\, e^{-st_2}\right),$$

respectiv

$$\bar{\varphi} = -\frac{\mathfrak{D}_{\bar{\varphi}}(s)}{\mathfrak{D}(s)} \frac{x_1 k'_1}{s\,i_{12v}} \left(h_1\, e^{-st_1} - h_2\, e^{-st_2}\right),$$

$$\bar{\varphi}_{12} = -\frac{\mathfrak{D}_{\bar{\varphi}_{12}}(s)}{\mathfrak{D}(s)} \frac{x_1 k'_1}{s\,i_{12v}} \left(h_1\, e^{-st_1} - h_2\, e^{-st_2}\right), \tag{49}$$

$$\bar{\varphi}_{34} = -\frac{\mathfrak{D}_{\bar{\varphi}_{34}}(s)}{\mathfrak{D}(s)} \frac{x_1 k'_1}{s\,i_{12v}} \left(h_1\, e^{-st_1} - h_2\, e^{-st_2}\right);$$

unde $D(s)$ şi $\mathfrak{D}(s)$ sînt determinanţii principali ai sistemelor (46) şi (47) iar $D_{\bar{w}}(s)$, $D_{\bar{\varphi}}(s), \ldots, \mathfrak{D}_{\bar{\varphi}_{12}}(s)$, $\mathfrak{D}_{\bar{\varphi}_{34}}(s)$ sînt minori ai determinanţilor principali, obţinuţi prin înlocuirea coloanei corespunzătoare necunoscutei respective cu coloana formată din termenii liberi ai sistemului respectiv şi rezolvînd în raport cu elementul nenul al acestei coloane.

Ţinînd seama de (22) şi (23) se observă că putem pune :

$$\frac{1}{D(s)} = \frac{1}{(s^2+p_1^2)(s^2+p_2^2)(s^2+p_3^2)(s^2+p_4^2)} =$$

$$= \frac{\alpha_1}{s^2+p_1^2} + \frac{\alpha_2}{s^2+p_2^2} + \frac{\alpha_3}{s^2+p_3^2} + \frac{\alpha_4}{s^2+p_4^2}, \tag{50}$$

$$\frac{1}{\mathfrak{D}(s)} = \frac{1}{(s^2+\omega_1^2(s^2+\omega_2^2)(s^2+\omega_3^2)} = \frac{\beta_1}{s^2+\omega_1^2} + \frac{\beta_2}{s^2+\omega_2^2} + \frac{\beta_3}{s^2+\omega_3^2},$$

unde $p_j$ şi $\omega_k$ sînt frecvenţele proprii ale sistemului oscilant în absenţa amortizării.

Coeficienții $\alpha_l$ și $\beta_m$ sînt dați de relațiile :

$$\alpha_l = \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{4} (-p_l^2 + p_j^2)},$$

$$\beta_m = \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{2} (-\omega_m^2 + \omega_k^2)}, \tag{51}$$

unde $j \neq l$ și $k \neq m$.

Pentru obținerea soluțiilor aplicăm transformarea Laplace inversă. Ținînd seama de (50) și utilizînd teorema reziduurilor obținem :

$$w(t) = \sum_{l=1}^{4} \frac{\alpha_l}{p_l^2} \frac{k_1'}{m_{12}} \{h_1 \chi_w^{(l)} (t - t_1) - h_2 \chi_w^{(t)} (t - t_2)\},$$

$$\theta(t) = \sum_{l=1}^{4} \frac{\alpha_l}{p_l^2} \frac{k_1'}{m_{12}} \{h_1 \chi_\theta^{(l)} (t - t_1) - h_2 \chi_\theta^{(l)} (t - t_2)\},$$

$$w_{12}(t) = \sum_{l=1}^{4} \frac{\alpha_l}{p_l^2} \frac{k_1'}{m_{12}} \{h_1 \chi_{w_{12}}^{(l)} (t - t_1) - h_2 \chi_{w_{12}}^{(l)} (t - t_2)\}, \tag{52}$$

$$w_{34}(t) = \sum_{l=1}^{4} \frac{\alpha_l}{p_l^2} \frac{k_1'}{m_{12}} \{h_1 \chi_{w_{34}}^{(l)} (t - t_1) - h_2 \chi_{w_{34}}^{(l)} ( - t_2)\}$$

pentru sistemul (44), respectiv

$$\varphi(t) = - \sum_{m=1}^{3} \frac{\beta_m}{\omega_m^2} \frac{x_1' k_1'}{i_{12\nu}} \{h_1 \psi_\varphi^{(m)} (t - t_1) - h_2 \psi_\varphi^{(m)} (t - t_2)\},$$

$$\varphi_{12}(t) = - \sum_{m=1}^{3} \frac{\beta_m}{\omega_m^2} \frac{x_1' k_1'}{i_{12\nu}} \{h_1 \psi_{\varphi_{12}}^{(m)} (t - t_1) - h_2 \psi_{\varphi_{12}}^{(m)} (t - t_2)\}, \tag{53}$$

$$\varphi_{34}(t) = - \sum_{m=1}^{3} \frac{\beta_m}{\omega_m^2} \frac{x_1' k_1'}{i_{12\nu}} \{h_1 \psi_{\varphi_{34}}^{(m)} (t - t_1) - h_2 \psi_{\varphi_{34}}^{(m)} (t - t_2)\},$$

unde am notat :

$$\chi_x^{(l)} (t - t_1) = D_x(0) - \frac{1}{2} D_x(ip_l) \, e^{ip_l(t-t_1)} - \frac{1}{2} D_x(-ip_l) \, e^{-ip_l(t-t_1)}, \tag{54}$$

indicele $x$ înlocuindu-se de la caz la caz cu $\overline{w}$, $\overline{\theta}$, $\overline{w}_{12}$, $\overline{w}_{34}$,

$$\Psi_y^{(m)} (t - t_1) = \mathfrak{D}_y(0) - \frac{1}{2} \mathfrak{D}_y(i\omega_m) \, e^{i\omega_m(t-t_1)} - \frac{1}{2} \mathfrak{D}_y(-i\omega_m) \, e^{-i\omega_m(t-t_1)} \tag{55}$$

indicele $y$ înlocuindu-se respectiv cu $\varphi$, $\varphi_{12}$, $\varphi_{34}$.

Ținînd seamă de faptul că

$$D_x(ip_l) = D_x(-i\,p_l) \quad \text{și} \quad \mathfrak{D}_y(i\,\omega_m) = \mathfrak{D}_y(-i\,\omega_m),$$

(54) și (55) devin:

$$\chi_x^{(l)}(t - t_1) = D_x(0) - D_x(i\,p_l)\,\mathrm{Cos}\,p_l(t - t_1), \tag{54'}$$

$$\psi_y^{(m)}(t - t_1) = \mathfrak{D}_y(0) - \mathfrak{D}_y(i\,\omega_m)\,\mathrm{Cos}\,\omega_m(t - t_1). \tag{55'}$$

Funcțiile $\chi_x^{(l)}(t - t_1)$ și $\psi_y^{(m)}(t - t_1)$ sînt definite pentru $t > t_1$, iar $\chi_x^{(l)}(t - t_2)$ și $\psi_y^{(m)}(t - t_2)$ pentru $t > t_2$.

Am obținut astfel soluțiile sistemelor de ecuații (44) și (45) care țin seama de efectul unei denivelări, utilizînd transformata Laplace, care poate fi întrebuințată și în cazul altor tipuri de denivelări.

*b*) Dacă denivelările sînt mici, la viteză mare a autovehiculului, roțile nu mai pot urmări continuu profilul drumului fără desprinderi. Soluția exactă este practic imposibilă. Totuși, se pot obține cîteva indicații calitative considerînd denivelările de formă dreptunghiulară de înălțime $h_n$ și lățime $2\tau_n$ care depinde de viteza de deplasare a autovehiculului.

Soluțiile ecuațiilor de mișcare se obțin din soluțiile precedente în care vom face cîteva modificări. Notînd

$$\begin{aligned} t_1 &= t_{h_n} - \tau_n, \\ t_2 &= t_{h_n} + \tau_n \end{aligned} \tag{56}$$

și ținînd seamă de (54′), prima soluție din (52) pentru $t > t_2 = t_{h_n} + \tau_n$, deci după trecerea denivelării, va căpăta forma

$$w(t) = \sum_{l=1}^{4} \frac{\alpha_l}{p_l^2}\frac{k_1'}{m_{12}} h_n D_{\overline{w}}(ip_l)\{\mathrm{Cos}\,p_l(t - t_{h_n} - \tau) - \mathrm{Cos}\,p_l(t - t_{h_n} + \tau)\} =$$

$$= \sum_{l=1}^{4} \frac{\alpha_l}{p_l^2}\frac{k_1'}{m_{12}} D_{\overline{w}}(ip_l)\; 2h_n\,\mathrm{Sin}\,p_l(t - t_{h_n}).\,\mathrm{Sin}\,p_l\tau, \tag{57}$$

care corespunde evident unei singure denivelări. În mod analog se pot scrie și celelalte soluții (52) și (53). Influența diferiților parametri caracteristici construcției respective asupra comportării autovehiculului la trecerea peste denivelări, se poate stabili analizînd relația (57) și analogele ei. Se observă proporționalitatea directă cu raportul $\frac{k_1'}{m_{12}}$ ce caracterizează elasticitatea și masa roții. Determinanții $D_{\overline{w}}(ip_l)$, $D_{\overline{\theta}}(ip_l)$, $D_{\overline{w}_{12}}(ip_l)$, ..., $\mathfrak{D}_{\overline{\varphi}_{34}}(i\omega_m)$, au semnificația unor coeficienți de influență. În ceea ce privește influența denivelării se observă proporționalitatea cu $2h_n$ și $\mathrm{Sin}\,p_l\tau$ ce caracterizează mărimea denivelării. Valorile pozitive pentru $h_n$ corespund gropilor iar cele negative obstacolelor. În legătură cu dispoziția acestora pe drumul parcurs de autovehicul, datorită caracterului întîmplător al distribuției acestora, se poate adopta un punct de vedere statistic. Dînd distribuția acestor denivelări se pot construi soluțiile corespunzătoare utilizînd soluțiile pentru o singură denivelare de tipul (57). Această chestiune necesită însă dezvoltări suplimentare asupra cărora nu ne oprim.

Ne-am limitat la studiul efectului denivelărilor asupra autovehiculului în absența amortizării pentru motive de simplitate a calculelor. Considerarea acestora nu prezintă nici o dificultate conducînd doar la calcule ceva mai laborioase.

Cu aceasta putem considera rezolvată problema determinării mișcării autovehiculului în mers rectiliniu, sub acțiunea denivelărilor drumului, a cărui carcasă a fost presupusă absolut rigidă.

## 5. DETERMINAREA FORȚELOR CARE ACȚIONEAZĂ ASUPRA STRUCTURII, ÎN VEDEREA CALCULULUI DE REZISTENȚĂ ȘI DE VIBRAȚII AL ACESTEIA

Menținîndu-ne în ipoteza mișcării rectilinii cu viteza constantă $V_0$, calculul accelerațiilor provenite din mișcarea de pompaj, ruliu și tangaj, ce se presupun acum cunoscute, se poate efectua imediat.

Viteza oricărui punct aparținînd autovehiculului este dată de formula

$$\bar{V} = \bar{V}_0 + \dot{\bar{w}} + \bar{\omega} \wedge \bar{r}\,, \tag{58}$$

unde s-a notat :

$\dot{\bar{w}} = \dfrac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}t}$ — vectorul accelerației din mișcarea de pompaj,

$\bar{\omega} = \bar{\imath}\,\dot{\theta} + \bar{\jmath}\,\dot{\varphi}$ — vectorul vitezei de rotație,

$\bar{r} = \bar{\imath}x + \bar{\jmath}y + \bar{k}z$ — vectorul de poziție,

iar $\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}$ și $\bar{k}$ versorii axelor sistemului de referință mobil cu originea în centrul de greutate.

Vectorul $\bar{r}$ variază în timp numai ca direcție, astfel că $\dfrac{\mathrm{d}\bar{r}}{\mathrm{d}t} = \bar{\omega} \wedge \bar{r}$. Accelerația va fi dată de relația

$$\bar{a} = \frac{\mathrm{d}\bar{V}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\bar{w}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}\bar{\omega}}{\mathrm{d}t} \wedge \bar{r} + \bar{\omega} \wedge (\bar{\omega} \wedge \bar{r})\,. \tag{59}$$

Încă de la început s-a presupus că amplitudinile oscilațiilor sînt mici astfel că accelerația de pompaj poate fi considerată că este orientată aproximativ după direcția axei $Oz$ a sistemului mobil, adică $\dfrac{\mathrm{d}^2\bar{w}}{\mathrm{d}t^2} \cong \bar{k}\,\dfrac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2}$. Ținînd seamă de această observație și de notațiile precedente (59) se va scrie sub forma

$$\begin{aligned}\bar{a} = \bar{\imath}\,[z\ddot{\varphi} - x\dot{\varphi}^2 + y\dot{\theta}\dot{\varphi}] + \bar{\jmath}\,[-z\ddot{\theta} - y\dot{\theta}^2 + x\dot{\theta}\dot{\varphi}] &+ \\ + \bar{k}\left[y\ddot{\theta} - x\ddot{\varphi} - z(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) + \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2}\right]&\cdot\end{aligned} \tag{60}$$

Cunoscînd cîmpul accelerațiilor se poate determina distribuția forțelor de inerție ce acționează asupra elementelor structurii autovehiculului. Aceste forțe de inerție, datorite mișcării de rigid a corpului autovehiculului determinată cu ajutorul funcțiilor $w(t)$, $\theta(t)$ și $\varphi(t)$, pot fi considerate ca forțe exterioare aplicate asupra elementelor elastic deformabile ale structurii.

Calculul de rezistență și de vibrații al acestor elemente care pot fi asimilate cu bare, plăci drepte sau curbe cu structură de obicei ortotropă, nu face obiectul prezentului articol. Un astfel de calcul poate fi găsit în [6]. Privită în acest mod problema calculului de rezistență și vibrații a structurii autovehiculelor, oferă mari posibilități pentru o dimensionare rațională și economică, datorită unei apropieri sensibile față de realitate în stabilirea solicitărilor.

*Primită la redacție la 17 iulie 1961*

## К ЗАДАЧЕ КОЛЕБАНИЙ АВТОМАШИН ПРИ ПРЯМОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ

### РЕЗЮМЕ

В настоящей статье рассматриваются колебания автомашин с упругой подвеской, с тележкой, состоящей из двух мостиков с возможностью обобщения для случая любого числа мостиков.

Реальная колебательная система уподобляется осцилляторам с семью степенями свободы, которая благодаря симметрии конструкции является эквивалентной двум независимым системам, из которых одна с четырьмя, а другая с тремя степенями свободы. Были определены собственные частоты с трением и без него и исследованы вынужденные колебания, обусловленные неровностями дороги. Затем указывается способ установления поля ускорений в движении автомашины как жесткого тела, действующего на элементы деформируемой упругой конструкции, ввиду их расчета на прочность и колебания.

## CONSIDÉRATIONS SUR LE PROBLÈME DES OSCILLATIONS DES AUTOMOBILES EN MOUVEMENT RECTILIGNE À VITESSE CONSTANTE

### RÉSUMÉ

Dans cet article, l'auteur étudie les oscillations des automobiles à suspension élastique, dont le train est constitué par deux ponts, tout en offrant la possibilité d'une généralisation dans le cas d'un nombre quelconque de ponts.

Il a assimilé le système oscillant réel à un oscillateur possédant sept degrés de liberté et qui par suite de la symétrie de la construction est équivalent à deux systèmes indépendants, dont le premier aurait quatre degrés de liberté et le second, trois. Il en a déterminé les fréquences propres, avec et sans frottement, et a étudié les oscillations forcées dues aux irrégularités de la route. Il indique, enfin, comment, de la considération du mouvement comme un corps rigide du corps de l'automobile on peut déduire le champ des accélérations agissant sur les éléments de la structure élastique déformable, ce qui permet de calculer leurs résistances et leurs vibrations.

## BIBLIOGRAFIE

1. S. P. TIMOSHENKO, *Théorie des vibrations*. Ch. Béranger, Paris-Liège, 1947.
2. Y. ROCARD, *Dynamique générale des vibrations* (2$^e$ édition). Masson Comp., Paris, 1949.
3. П. Б. РОТЕНБЕРГ, *Теория подвески автомобиля*. Машгиз, Москва, 1951.
4. S. P. STRELKOV, *Teoria oscilațiilor*, Ed. tehnică, București, 1954.
5. И. СННЕДОН, *Преобразования Фурье*. Издательство Иностранной литературы, Москва, 1955.
6. V. VISARION, *Calculul dinamic al unor părți componente ale carcaselor autobuzelor prin utilizarea teoriei plăcilor ortotrope curbe*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, **XI**. *3* (1960).

# STUDII

## TEHNOLOGIA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

# GEOMETRIA SCULEI AŞCHIETOARE PENTRU PRELUCRAREA OŢELURILOR CARBON

DE

M. P. POPOV, I. MITRICĂ şi E. D. DECIU

Fenomenele ce se produc în cursul procesului de aşchiere a metalelor sînt condiţionate de o serie de parametri dintre care fac parte şi parametrii geometrici ai părţii active a sculei aşchietoare. Alegerea geometriei sculei se face avînd în vedere atît forma piesei şi metodele de prelucrarea ei, cît şi fenomenele de aşchiere, care condiţionează durabilitatea. În acest fel se ajunge la concluzia că studiul geometriei prezintă în acelaşi timp o importanţă ştiinţifică şi una economică, datorită consecinţelor ce le are în producţie.

În lucrarea de faţă, pe baza cercetărilor întreprinse la Institutul de mecanică aplicată „Traian Vuia'', se urmăreşte problema geometriei cuţitului de strung în cazul prelucrărilor ce se fac pe piese din oţel carbon obişnuit prelucrat la cald (STAS 500-49) şi din oţel carbon de calitate prelucrat la cald (STAS 880-49). Au fost alese pentru efectuarea cercetărilor de faţă oţelurile carbon deoarece ele au o largă utilizare în industria constructoare de maşini.

Se defineşte ca geometrie optimă a unui cuţit de strung, acea geometrie care în aceleaşi condiţii de aşchiere asigură o durabilitate maximă [2], [3], [4], [5] şi [6].

Lucrarea de faţă se bazează pe urmărirea evoluţiei uzurii în timp, pînă la atingerea plafonului de uzură $\delta_{\alpha_1} = 1$ mm pe faţa de aşezare secundară [1]...[10]. La fel ca şi în lucrările precedente rezultatele sînt prezentate cu ajutorul coeficienţilor $\tau$ de corecţie ai durabilităţii, care sînt mărimi adimensionale [2], [4], [6].

Stabilirea geometriei optime este determinată de deformările şi frecările care au loc în cursul aşchierii. Astfel frecarea apare atît pe planurile de alunecare ale aşchiei, cît şi pe suprafeţele de contact dintre piesă, aşchie şi sculă.

Cercetarea a fost concentrată asupra principalelor unghiuri ale părții active a cuțitului de strung și anume : unghiul de degajare $\gamma$, unghiurile de așezare principal $\alpha$ și secundar $\alpha_1$, unghiurile de atac principal $\varkappa$ și secundar $\varkappa_1$, precum și unghiul de înclinație a muchiei principale tăietoare $\lambda$ (fig. 1).

Dintre unghiurile cuțitului, cel mai mult influențat de proprietățile mecanice ale materialului prelucrat este unghiul de degajare [6]. De valoarea acestui unghi depinde gradul de deformare al zonei de așchiere și unghiul făcut de planul de alunecare al elementului de așchie cu direcția de așchiere. În figurile 2 și 3 sînt date variațiile coeficientului $\tau_\gamma$ în funcție de unghiul $\gamma$ de degajare, pentru oțelurile carbon obișnuite (STAS 500-49) și de calitate (STAS 880-49). Aceste diagrame confirmă cele afirmate mai sus.

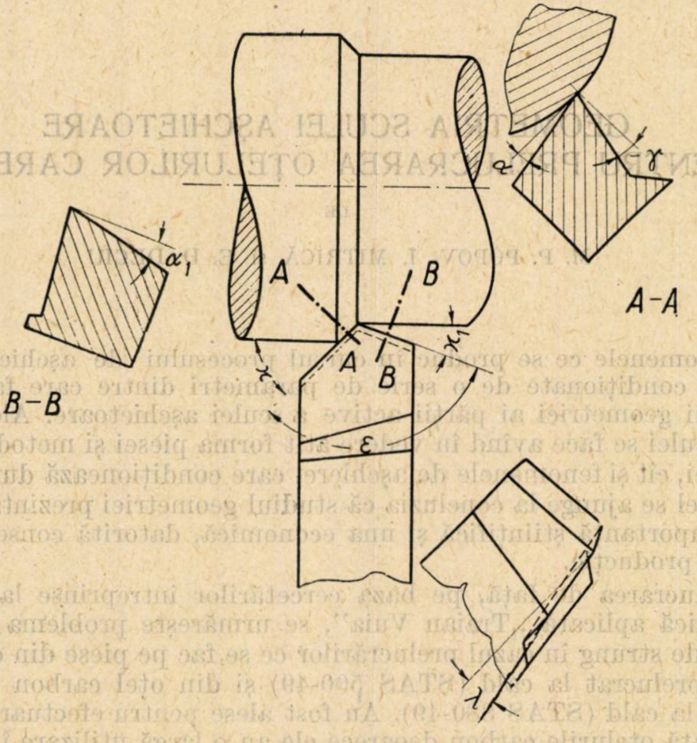


Fig. 1. — Unghiurile cuțitului de strung.

Din figurile 2 și 3 se vede că valoarea optimă a unghiului de degajare este funcție de proprietățile mecanice ale oțelurilor prelucrate și anume unghiul $\gamma$ scade pe măsură ce rezistența de rupere la tracțiune crește.

Înainte de a analiza variația unghiului de degajare în funcție de rezistența de rupere la tracțiune se vor urmări fenomenele ce se petrec cînd rezistenţa oţelului rămîne constantă şi se schimbă numai valoarea unghiului $\gamma$.

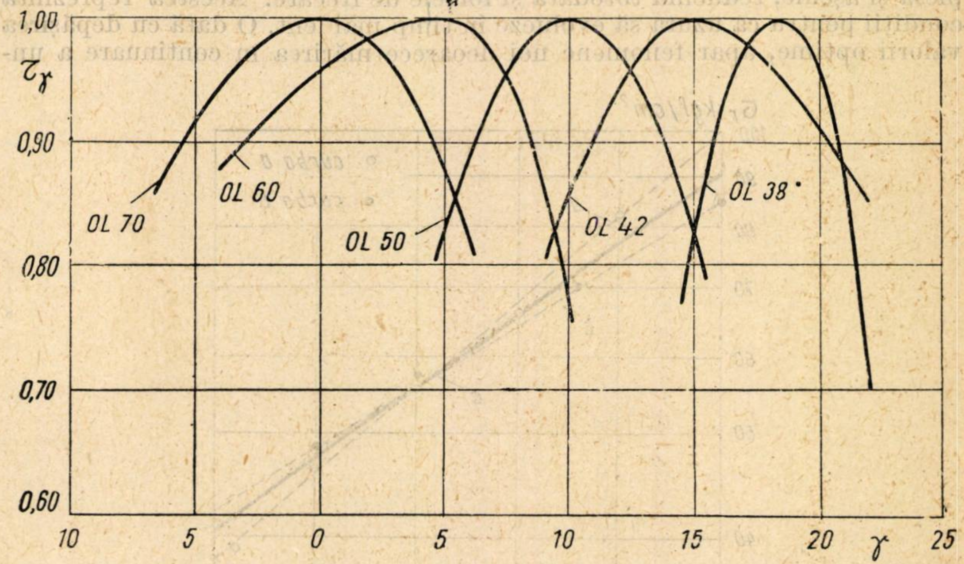


Fig. 2. — Variaţia coeficientului $\tau_\gamma$ în funcţie de $\gamma$ la oţelurile carbon obişnuite.

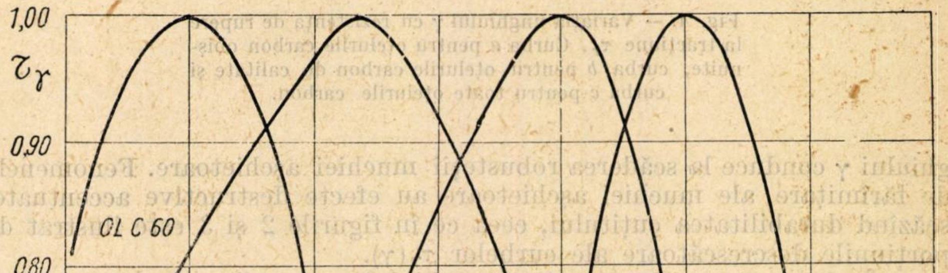


Fig. 3. — Variaţia coeficientului $\tau_\gamma$ în funcţie de $\gamma$ la oţelurile carbon de calitate.

Curbele $\tau_\gamma(\gamma)$ prezintă cîte un maximum, care corespunde valorii optime. Porţiunea crescătoare a acestor curbe se justifică prin aceea că eforturile de aşchiere scad o dată cu creşterea unghiului $\gamma$, ceea ce are drept efect scăderea presiunii pe suprafeţele de contact dintre sculă, piesă şi aşchie, reducînd totodată şi forţele de frecare. Acestea reprezintă condiţii pentru ca uzura să evolueze în timp mai lent. O dată cu depăşirea valorii optime, apar fenomene noi deoarece mărirea în continuare a unghiului $\gamma$ conduce la scăderea robusteţii muchiei aşchietoare. Fenomenele de fărîmiţare ale muchiei aşchietoare au efecte destructive accentuate, scăzînd durabilitatea cuţitului, ceea ce în figurile 2 şi 3 este ilustrat de porţiunile descrescătoare ale curbelor $\tau_\gamma(\gamma)$.

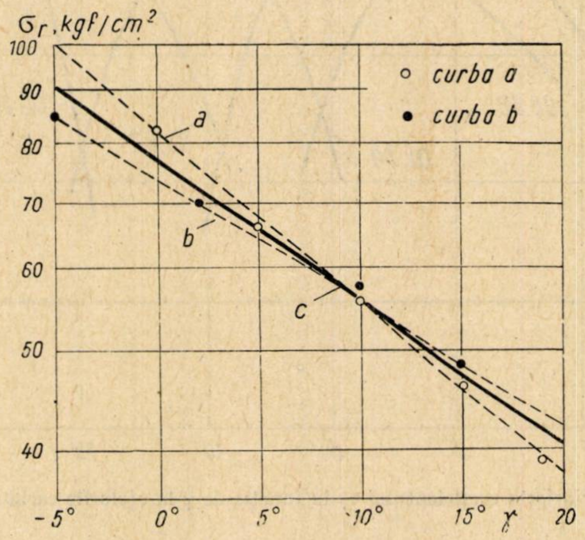


Fig. 4. — Variaţia unghiului $\gamma$ cu rezistenţa de rupere la tracţiune $\tau_r$. Curba *a* pentru oţelurile carbon obişnuite, curba *b* pentru oţelurile carbon de calitate şi curba *c* pentru toate oţelurile carbon.

În figura 4 este dată variaţia unghiului $\gamma_{opt}$ ca funcţie de rezistenţa de rupere la tracţiune a materialelor prelucrate, iar în figura 5 este reprezentată dependenţa valorii optime a unghiului de degajare de duritatea Brinell, atît pentru oţelurile carbon obişnuite, cît şi pentru cele de calitate.

În figura 4, rezultatele experimentale sînt prezentate în scară semilogaritmică. Curba *a* reprezintă dependenţa unghiului de degajare faţă de valoarea rezistenţei medii de rupere la tracţiune a oţelului carbon obişnuit (STAS 500-49) iar curba *b* aceeaşi dependenţă pentru oţelul carbon de calitate (STAS 880-49). Curbele din figura 5 au aceeaşi semnificaţie cu deosebirea că ele reprezintă dependenţa unghiului de degajare faţă de valoarea durităţii medii Brinell pentru aceleaşi oţeluri.

Aşa după cum se poate uşor constata din figura 4 în scară semilogaritmică, dependenţa dintre rezistenţa de rupere la tracţiune şi unghiul $\gamma_{opt}$ are o variaţie liniară pentru toate oţelurile experimentate, care poate fi exprimată într-una din următoarele forme matematice, cu ajutorul logaritmilor zecimali

$$\gamma = 71{,}43 \log \frac{77{,}36}{\sigma_r}, \qquad (1)$$

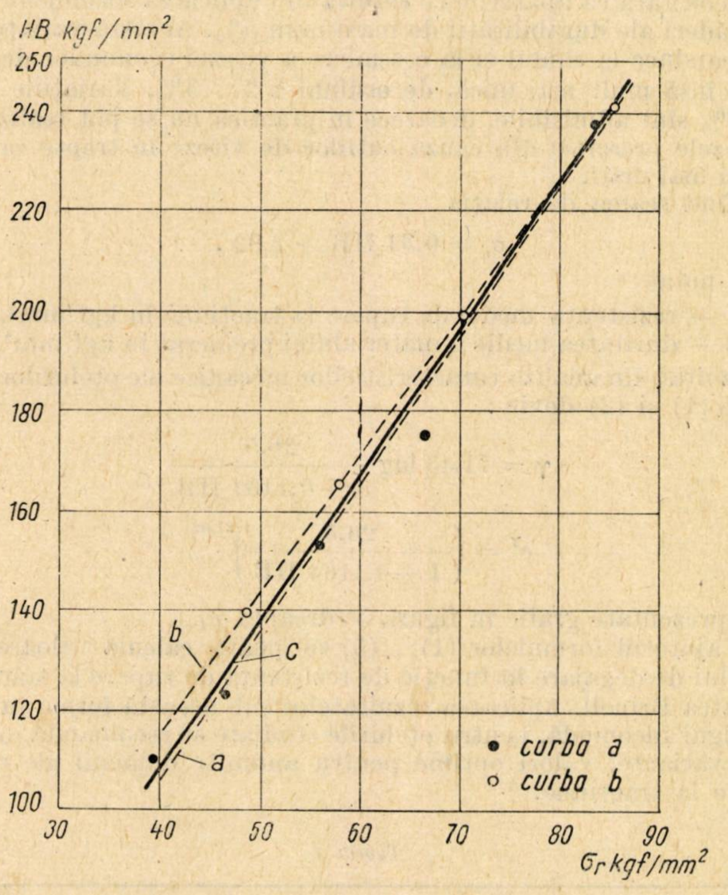


Fig. 5. — Variaţia unghiului γ cu duritatea Brinell. Curba *a* pentru oţelurile carbon obişnuite, curba *b* pentru oţelurile carbon de calitate şi curba *c* pentru toate oţelurile carbon.

sau prin intermediul logaritmilor naturali

$$e^{\gamma} = \left(\frac{77{,}36}{\sigma_r}\right)^{31{,}02}, \qquad (2)$$

unde s-a notat :

$\gamma$ — unghiul de degajare în grade,

$\sigma_r$ — rezistenţa medie de rupere la tracţiune a materialului prelucrat în kgf/mm².

Formulele (1), (2) reprezintă soluţia generalizată pentru ambele tipuri de oţeluri studiate şi ele reprezentate grafic ne dau curba *c* din figura 4, care în scară semilogaritmică este o dreaptă. Din aceeaşi diagramă se poate observa cu uşurinţă că generalizarea făcută dă erori mai mari la limitele intervalului studiat pentru rezistenţele de rupere.

Se constată că abaterile ce rezultă din aplicarea formulelor (1) şi (2) duc la scăderi ale durabilităţii de maximum 5%. Această variaţie a durabilităţii conduce la rîndul ei la o scădere a vitezei economice de aşchiere, care este însă mult mai mică, de ordinul a 2...3%. Variaţiile de viteză de 2...3% sînt admisibile, deoarece în practică nu se pot realiza cu precizie vitezele prescrise din cauza cutiilor de viteze în trepte care impun variaţii şi mai mari.

Ţinînd seama de relaţia

$$\sigma_r = 0{,}34\ \mathrm{HB} + 2{,}92\ , \tag{3}$$

unde s-a notat

$\sigma_r$ — rezistenţa medie de rupere la tracţiune în kgf/mm$^2$,
HB — duritatea medie a materialului prelucrat în kgf/mm$^2$,

care a rezultat din analiza caracteristicilor mecanice ale oţelurilor studiate, expresiile (1) şi (2) devin:

$$\gamma = 71{,}43 \log \frac{26{,}5}{1 + 0{,}1164\ \mathrm{HB}} \tag{4}$$

$$e^{\gamma} = \left(\frac{26{,}5}{1 + 0{,}1164\ \mathrm{HB}}\right)^{31{,}02} \tag{5}$$

şi sînt reprezentate grafic în figura 5 (dreapta *c*).

Cu ajutorul formulelor (1)...(5) se poate calcula valoarea optimă a unghiului de degajare în funcţie de rezistenţa de rupere la tracţiune sau de duritatea Brinell. Aplicarea rezultatelor sub această formă în industrie fiind desigur incomodă, pentru oţelurile studiate se recomandă în tabela 1, în două variante, valori optime pentru anumite domenii ale rezistenţei de rupere la tracţiune.

*Tabela 1*

| | Varianta I | | | | Varianta a II-a | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma_r$ (kgf/mm$^2$) | 35...45 | 45...55 | 55...70 | 70...90 | 38...50 | 50...65 | 65...90 |
| $\gamma$ | 20° | 14° | 7° | −2° | 17°...18° | 9°...10° | −1°...0° |

Valorile unghiurilor optime recomandate în tabela 1 asigură durabilitatea maximă pentru valoarea medie din fiecare interval de variaţie a lui $\sigma_r$. Abaterile maxime de la durabilitatea corespunzătoare unghiului optim calculat cu ajutorul formulelor (1)...(5) vor apare la marginile intervalelor. Examinînd cele două variante prezentate în tabela 1, se poate uşor constata că varianta a II-a este mai comodă pentru întreprinderile industriale deoarece nu implică o gamă prea variată de scule, dar faţă de prima variantă conduce la un consum de scule ceva mai ridicat datorită creşterii frecvenţei reascuţirilor.

Analizînd în continuare valorile optime ale unghiului de degajare, rezultate interesante se pot obţine şi din interpretarea legăturii dintre aceste valori şi conţinutul de carbon al oţelurilor prelucrate.

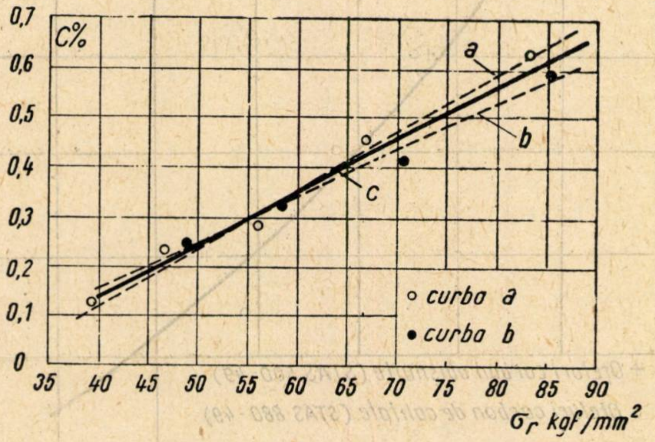


Fig. 6. — Reprezentarea grafică a dependenţei dintre rezistenţa de rupere la tracţiune şi conţinutul de carbon al oţelurilor. Curba *a* pentru oţelurile carbon obişnuite, curba *b* pentru oţelurile carbon de calitate şi curba *c* pentru toate oţelurile.

Dependenţa dintre rezistenţa de rupere la tracţiune $\sigma_r$ şi conţinutul de carbon $C$ obţinută experimental este dată în figura 6 şi poate fi exprimată cu formula

$$\sigma_r = 96{,}15\,C + 26{,}73\,, \tag{6}$$

unde

$\sigma_r$ — rezistenţa medie de rupere la tracţiune în kgf/mm²;
$C$ — conţinutul de carbon al oţelului în %.

Utilizînd expresia (6), formula (1) devine

$$\gamma = 71{,}43 \log \frac{0{,}805}{C + 0{,}278}\,. \tag{7}$$

Rezultatele cercetărilor exprimate cu ajutorul formulei (7) scot în relief legătura dintre unghiul de degajare şi conţinutul de carbon al oţelului prelucrat. Se poate constata deci, că o dată cu creşterea conţinutului de carbon pentru a se realiza o îndepărtare a aşchiei în condiţii optime, este necesar o scădere a valorii unghiului de degajare.

Reprezentarea grafică a dependenţei dintre unghiul de degajare şi conţinutul de carbon în procente, este arătată în figura 7, unde linia ce trece printre puncte reprezintă valorile obţinute cu formula (7).

Pentru a ușura alegerea unghiului optim de degajare se prezintă tabelul 2 care conține o variantă generalizată a tabelei 1.

Tabela 2 dă posibilitatea să se aleagă unghiul de degajare optim în funcție de cei trei parametri mai frecvenți care caracterizează oțelul și anume rezistența de rupere la tracțiune, duritatea Brinell și conținutul de carbon în procente.

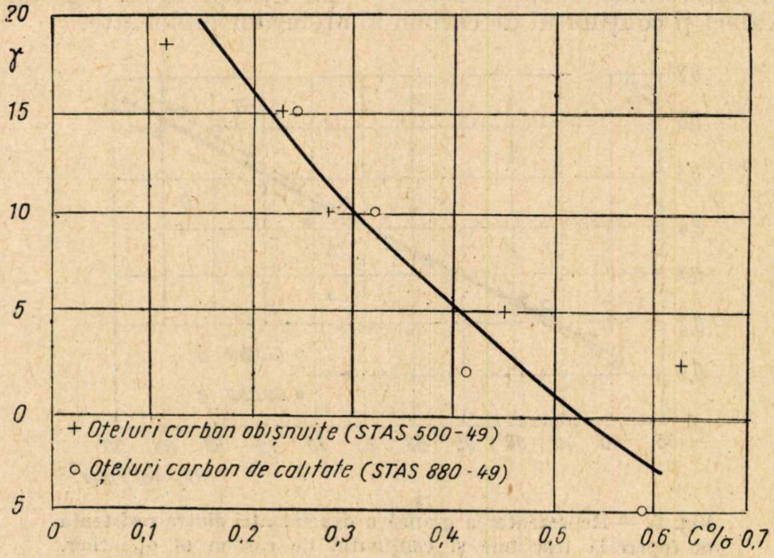


Fig. 7. — Dependența unghiului optim de degajare față de conținutul de carbon în procente al oțelului.

*Tabela 2*

| | Varianta I | | | | Varianta a II-a | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma_r$ kgf/mm² | 35...45 | 45...55 | 55...70 | 70...90 | 38...50 | 50...65 | 65...90 |
| HB kgf/mm² | 95...125 | 125...150 | 150...200 | 200...250 | 105...140 | 140...180 | 180...250 |
| C % | 0,09...0,19 | 0,19...0,29 | 0,29...0,45 | 0,45...0,63 | 0,12...0,24 | 0,24...0,40 | 0,40...0,63 |
| γ | 20° | 14° | 7° | −2° | 17°...18° | 9°...10° | −1°...0° |

În cazul cînd din anumite condiții locale nu pot fi utilizate valorile optime indicate pentru unghiul de dagajare, se va obține o uzură mai rapidă a sculei, aceasta ducînd la micșorarea durabilității. Durabilitatea cuțitului de strung scade cu atît mai mult cu cît ne depărtăm de valoarea optimă a unghiului γ și acest lucru se poate observa în figurile 2 și 3. Pentru a scoate în evidență mai bine acest lucru, se prezintă tabela 3, unde este dată valoarea coeficientului de corecţie al durabilităţii $\tau_\gamma$ pentru toate oţelurile studiate în cazul unei abateri de la valoarea optimă a unghiului de degajare.

*Tabela 3*

| Material aşchiat | γ° | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | −10 | −5 | 0 | 2 | 5 | 10 | 15 | 17 | 18<br>19 | 20 | 22 |
| OL 38 | — | — | — | — | — | — | 0,81 | — | 1 | — | 0,76 |
| O1 42 | — | — | — | — | — | 0,86 | 1 | — | — | 0,92 | — |
| OL 50 | — | — | — | — | 0,81 | 1 | 0,84 | — | — | — | — |
| OL 60 | 0,74 | 0,87 | 0,94 | — | 1 | 0,78 | — | — | — | — | — |
| OL 70 | — | 0,92 | 1 | — | 0,87 | — | — | — | — | — | — |
| OL C 25 | — | — | — | — | — | 0,65 | 1 | 0,70 | — | — | — |
| OL C 35 | — | — | — | — | 0,85 | 1 | 0,70 | — | — | — | — |
| OL C 45 | 0,79 | 0,84 | 0,92 | 1 | 0,88 | 0,74 | — | — | — | — | — |
| OL C 60 | 0,77 | 1 | 0,75 | — | — | — | — | — | — | — | — |

Tabela 3 ca şi figurile 2 şi 3 pot folosi pentru a cunoaşte cu cît creşte consumul de scule în cadrul unei ascuţiri incorecte. Din tabelă se poate observa cu uşurinţă că pentru o abatere de numai 5° de la valoarea optimă a unghiului de degajare, consumul de scule poate fi mai mare cu o valoare cuprinsă între $6 \div 41\%$ în funcţie de calitatea oţelului. Această diferenţiere de la oţel la oţel a consumului este dictată de variaţia pe care o are coeficientul de frecare dinamic dintre plăcuţă şi material prelucrat.

Toate consideraţiile făcute pînă acum ca şi cele ce vor urma au la bază experienţele efectuate pe oţelurile din STAS 500-49 şi STAS 880-49, care au fost laminate la cald şi nu au suferit nici un fel de tratament termic ulterior laminării.

Literatura de specialitate dă soluţii pentru alegerea unghiului de degajare optim, care sînt contradictorii. Pentru a ilustra acest lucru, în figura 8 sînt arătate valorile acceptate în R.D.G. după Technische Hochschule Dresden, [14], curba *a*, cele care au fost obţinute după formula lui M. N. Larin [12]

$$\gamma_{\text{opt}} \approx \frac{25.10^{14}}{\sigma_r^{\,8}}, \quad (\sigma_r < 80 \text{ kgf/mm}^2), \tag{8}$$

curba *b* şi cele obţinute după formula I.M.A (1) curba *c*.

În toate cele trei cazuri este vorba de oţel carbon cu o rezistenţă de rupere la tracţiune mai mică de 80—90 kgf/mm². Norma sovietică pentru ramura construcţiilor de maşini recomandă pentru oţelul cu rezistenţă pînă la 80 kgf/mm² un unghi de degajare optim de 10° dreapta *d* (fig. 8).

Este evident că eroarea cea mai mare o dă cazul *d*, care după cum se poate observa în figura 8 consumul minim de meterial de sculă îl dă pentru cazul oţelului cu o rezistenţă de rupere de la 55...63 kgf/mm². Formula lui M. N. Larin poate fi utilizată şi la oţelurile romîneşti, însă într-un domeniu foarte restrîns anume pentru rezistențe de rupere de la 65...75 kgf/mm². Zona de valabilitate a indicațiilor din R.D.G. în cazul oțelurilor carbon romînești este și mai restrînsă și anume pentru $\sigma_r = 53...60$ kgf/mm².

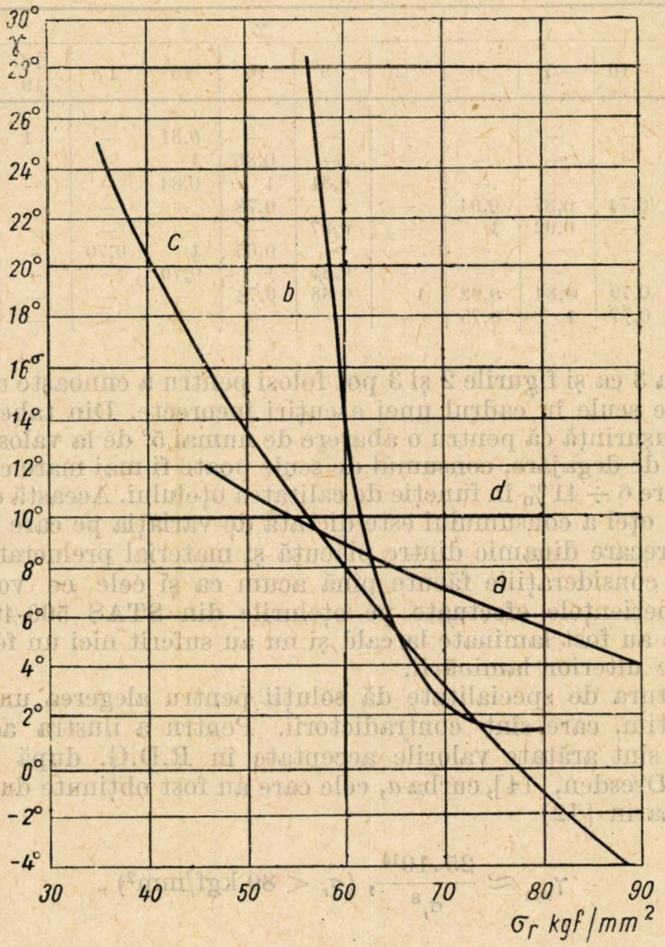


Fig. 8. — Comparație între rezultatele I.M.A. (curba *c*) cele din R.D.G. (curba *a*) și U.R.S.S. (curbele *b* și *d*).

Diagrama din figura 8 dovedește o dată în plus necesitatea studierii fenomenelor ce iau naștere în procesul de așchiere, legate de variația parametrilor geometrici.

Continuînd analizarea unghiurilor cuțitului de strung, se constată că unghiurile de așezare principal $\alpha$ și așezare secundar $\alpha_1$, au roluri similare în procesul așchierii. Datorită deformațiilor ce se produc, iau naștere suprafeţe de contact între piesa prelucrată şi suprafeţele de aşezare principală şi secundară.

O dată cu creşterea unghiurilor $\alpha$ şi $\alpha_1$, vor scădea suprafeţele de contact. Menţinînd constante regimul de aşchiere şi unghiul de degajare, se poate considera că eforturile de aşchiere ca şi deformaţiile ce iau naştere sînt la rîndul lor constante. Admiţînd această ipoteză, rezultă că variaţia celor două unghiuri $\alpha$ şi $\alpha_1$ va face ca suprafeţele reale de contact să crească sau să scadă, ceea ce are ca urmare o variaţie în sens invers a presiunilor ce se exercită pe aceste suprafeţe.

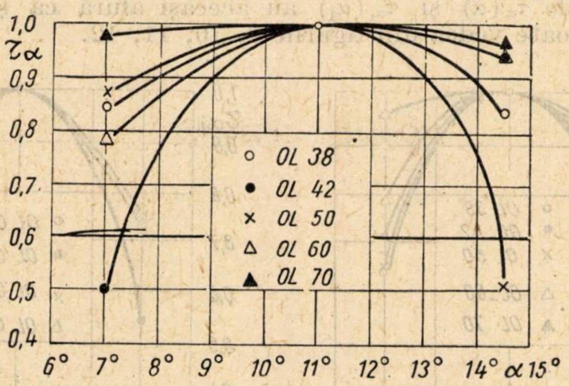


Fig. 9. — Variaţia coeficientului $\tau_\alpha$ în funcţie de $\alpha$ pentru oţelurile carbon obişnuite.

În figurile 9, 10, 11, 12 sînt arătate rezultatele experimentale obţinute la examinarea celor două unghiuri de aşezare pentru toate oţelurile studiate.

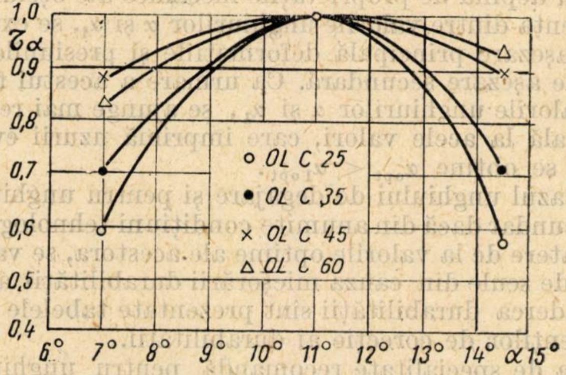


Fig. 10. — Variaţia coeficientului $\tau_\alpha$ în funcţie de $\alpha$ pentru oţelurile carbon de calitate.

La valori mici ale unghiurilor $\alpha$ şi $\alpha_1$, se formează suprafeţe mari de contact şi ca atare uzura se manifestă iniţial pe o suprafaţă mare şi din această cauză uzura plafon este atinsă într-un timp scurt. Mărind unghiurile $\alpha$ şi $\alpha_1$ suprafeţele de contact vor scădea şi ca urmare uzura va evolua mai lent. Scăderea suprafețelor de contact are însă ca efect și o creștere a presiunilor. Atunci cînd presiunile ating valori suficient de ridicate, vor accelera evoluția uzurii. Prin urmare unghiurile de așezare principal și secundar, mai mari decît valorile lor optime, conduc la o durabilitate scăzută. Curbele $\tau_\alpha(\alpha)$ și $\tau_{\alpha_1}(\alpha_1)$ au aceeași alură ca și curbele $\tau_\gamma(\gamma)$ după cum se poate vedea din figurile 9, 10, 11, 12.

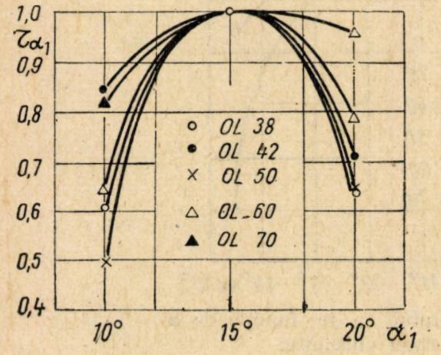


Fig. 11. — Variația coeficientului $\tau_{\alpha_1}$ în funcție de $\alpha_1$ pentru oțelurile carbon obișnuite.

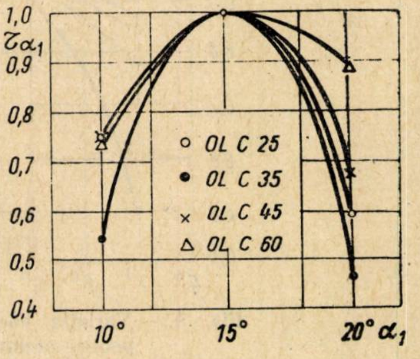


Fig. 12. — Variația coeficientului $\tau_{\alpha_1}$ în funcție de $\alpha_1$ pentru oțelurile carbon de calitate.

Pe baza rezultatelor experimentale s-a constatat că valorile optime sînt

$$\alpha = 11^\circ \quad \text{și} \quad \alpha_1 = 15^\circ \tag{9}$$

și ele practic nu depind de proprietățile mecanice ale oțelurilor, în limitele studiate. Diferența dintre valorile unghiurilor $\alpha$ și $\alpha_1$, se explică prin aceea că pe fața de așezare principală deformațiile și presiunile sînt mai mari decît pe fața de așezare secundară. Ca urmare a acestui fapt, pe măsură ce se măresc valorile unghiurilor $\alpha$ și $\alpha_1$, se ajunge mai repede pe fața de așezare principală la acele valori, care imprimă uzurii evoluția cea mai lentă, și astfel se obține $\alpha_{\text{opt}} < \alpha_{1\,\text{opt}}$.

Ca și în cazul unghiului de degajare și pentru unghiurile de așezare principal și secundar dacă din anumite condițiuni tehnologice este necesar să se facă o abatere de la valorile optime ale acestora, se va obține un consum mai mare de scule din cauza micșorării durabilității acesteia. Pentru a se aprecia căderea durabilității sînt prezentate tabelele 4 și 5, care dau valorile coeficienților de corecție ai durabilității.

Literatura de specialitate recomandă pentru unghiurile de așezare principal și secundar aceeași valoare, ceea ce s-a demonstrat mai înainte că sporește consumul de scule.

M. N. Larin [12] recomandă următoarele valori:

$$\alpha_{\text{opt}} = \alpha_{1\,\text{opt}} = 15^\circ \ldots 20^\circ \text{ pentru } \sigma_r = 68 \ldots 78 \text{ kgf/mm}^2,$$

$$\alpha_{\text{opt}} = \alpha_{1\,\text{opt}} = 13^\circ \qquad \text{pentru } \sigma_r = 95 \ldots 100 \text{ kgf/mm}^2.$$

Normele R.D.G. [16] recomandă pentru oţel carbon $\alpha = 5°$ iar catalogul de scule armate cu plăcuţe din carburi metalice, U.R.S.S. [15] recomandă :

$$\alpha_{\text{opt}} = \alpha_{1\,\text{opt}} = 8°...12°.$$

*Tabela 4*

| Materialul aşchiat | $\alpha$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 3,5 | 5,6 | 7 | 11 | 14,5 |
| OL 38 | — | — | 0,84 | 1 | 0,83 |
| OL 42 | — | — | 0,50 | 1 | 0,94 |
| OL 50 | — | — | 0,87 | 1 | 0,51 |
| OL 60 | — | — | 0,78 | 1 | 0,94 |
| O1 70 | 0,62 | — | 0,98 | 1 | 0,96 |
| OLC 25 | — | — | 0,59 | 1 | 0,57 |
| OLC 35 | — | — | 0,70 | 1 | 0,71 |
| OLC 45 | — | 0,86 | 0,88 | 1 | 0,89 |
| OLC 60 | — | — | 0,83 | 1 | 0,94 |

*Tabela 5*

| Materialul aşchiat | $\alpha_1^0$ | | |
|---|---|---|---|
| | 10 | 15 | 20 |
| OL 38 | 0,61 | 1 | 0,64 |
| OL 42 | 0,84 | 1 | 0,71 |
| OL 50 | 0,50 | 1 | 0,65 |
| OL 60 | 0,65 | 1 | 0,79 |
| OL 70 | 0,82 | 1 | 0,96 |
| OLC 25 | 0,75 | 1 | 0,59 |
| OLC 35 | 0,54 | 1 | 0,46 |
| OLC 45 | 0,75 | 1 | 0,68 |
| OLC 60 | 0,74 | 1 | 0,89 |

Cluşin M. I., în lucrarea sa [17], recomandă la prelucrarea oţelului

$$\alpha = \alpha_1 = 8° \quad \text{pentru} \quad s \leqslant 0{,}3 \text{ mm/rot},$$

$$\alpha = 12° \quad \text{pentru} \quad s > 0{,}3 \text{ mm/rot}.$$

Ca şi în cazul unghiului de degajare şi pentru unghiurile de aşezare, în literatura de specialitate se observă acelaşi lucru şi anume se fac recomandări diferite pentru prelucrarea oţelurilor carbon. Utilizarea indicaţiilor amintite duc la micşorarea durabilităţii sculei, după cum se poate uşor constata din tabelele 4 şi 5, figurile 9—12. Din motive economice, este bine ca să se respecte pentru unghiurile $\alpha$ şi $\alpha_1$ valorile indicate (9).

Unghiul de atac secundar $\varkappa_1$ are o importanţă deosebită asupra calităţii suprafeţei prelucrate. Cum însă acesta depinde şi de alţi parametri, ca de exemplu avansul, se va urmări unghiul $\varkappa_1$ legat numai de aspectul durabilităţii. Din acest punct de vedere se poate stabili o valoare optimă în sensul celor tratate pînă acum. Analizînd fenomenele, se disting două cazuri :

*a*) Cînd $\varepsilon > 90°$ și unghiul de atac principal $\varkappa$ are valori în jurul a 45°, creșterea unghiului $\varkappa_1$ în limitele uzuale, atrage după sine o micșorare a suprafeței de contact dintre fața de așezare secundară și cea de așchiere secundară. Fenomenul este analog ca în cazul unghiului $\alpha_1$ de așezare secundar și nu se mai revine asupra lui, curbele $\tau_{\varkappa_1}(\varkappa_1)$ avînd același caracter.

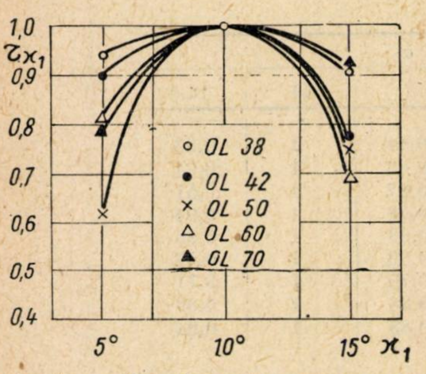


Fig. 13. — Variația coeficientului $\tau_{\varkappa_1}$ în funcție de $\varkappa_1$ pentru oțelurile carbon obișnuite.

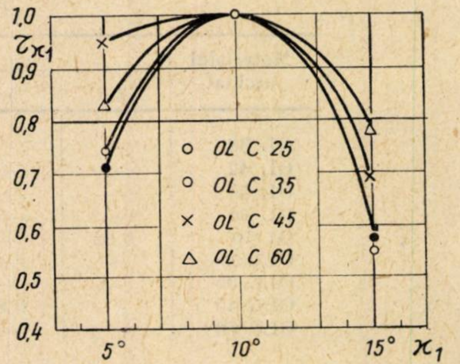


Fig. 14. — Variația coeficientului $\tau_{\varkappa_1}$ în funcție de $\varkappa_1$ pentru oțelurile carbon de calitate.

*b*) Cînd $\varepsilon < 90°$, pentru orice creștere a lui $\varkappa_1$ se obține o creștere a suprafeței de contact. Legea de variație a lui $\tau_{\varkappa_1}(\varkappa_1)$ rămîne aceeași ca și în cazul *a*), numai că interpretarea fenomenelor se face ca și cum în primul caz se analizează ce se întîmplă cînd unghiul $\varkappa_1$ scade în valoare.

În figurile 13 și 14 sînt arătate rezultatele experimentale care au condus la analiza precedentă.

Pentru ca să se poată aprecia care este scăderea durabilității în cazul cînd nu se respectă valoarea optimă a unghiului de atac secundar se dă tabela 6, unde sînt prezentate valorile coeficientului de corecție al durabilității $\tau_{\varkappa_1}$ pentru toată gama oțelurilor studiate.

*Tabela 6*

| Materialul așchiat | $\varkappa_1^0$ | | |
|---|---|---|---|
| | 5 | 10 | 15 |
| OL 38 | 0,94 | 1 | 0,91 |
| OL 42 | 0,90 | 1 | 0,77 |
| OL 50 | 0,62 | 1 | 0,75 |
| OL 60 | 0,81 | 1 | 0,69 |
| OL 70 | 0,70 | 1 | 0,92 |
| OLC 25 | 0,74 | 1 | 0,55 |
| OLC 35 | 0,72 | 1 | 0,56 |
| OLC 45 | 0,95 | 1 | 0,69 |
| OLC 60 | 0,83 | 1 | 0,87 |

Rezultatele experimentale obținute pe toate oțelurile experimentate au demonstrat că valoarea optimă pentru unghiul de așezare secundar este practic independentă de proprietățile mecanice ale oțelurilor și este

$$\varkappa_1 = 10^\circ . \tag{10}$$

Literatura de specialitate și în acest caz dă recomandări diferite astfel :

*a*) M. N. Larin [12] recomandă $\varkappa_{1\,\mathrm{opt}} = 12^\circ$ sau pentru cuțite de strung normale și de interior $\varkappa_1 = 15^\circ$.

*b*) Normele R.D.G. [16] recomandă $\varkappa_{1\,\mathrm{opt}} = 30^\circ - 15^\circ$.

Ca și în cazurile precedente utilizarea valorilor recomandate de literatură la prelucrarea oțelului carbon romînesc dă naștere la un consum superior de scule decît în cazul valorii recomandate și anume

$$\varkappa_1 = 10^\circ .$$

Acest lucru este evident dacă se consultă fig. 13 și 14 precum și tabela 6.

Din relațiile (9) și (10) se reține că proprietățile mecanice ale oțelurilor carbon studiate nu influențează asupra valorilor optime ale unghiurilor $\alpha$, $\alpha_1$ și $\varkappa_1$. Influența acestor proprietăți se manifestă numai asupra durabilității cuțitului. Astfel, lucrînd cu un regim de așchiere constant, durabilitatea sculei scade pe măsură ce rezistența de rupere crește.

Unghiul de atac principal $\varkappa$ reprezintă de asemenea aspecte comune pentru toate oțelurile experimentate. Creșterea unghiului $\varkappa$ atrage după sine o scădere a suprafeței de contact dintre suprafața de așezare principală și cea a piesei. Rezultă de aici că în același timp vor crește și presiunile ce lucrează pe această suprafață de contact, ceea ce duce la scăderea durabilității sculei.

Rezultatele experimentale obținute pentru oțelurile studiate sînt prezentate în figurile 15 și 16 și confirmă cele afirmate mai înainte, demonstrînd că în domeniul uzual $\varkappa = 30^\circ \ldots 90^\circ$, curbele nu prezintă un maxim. În aceste condiții s-a admis $\tau_\varkappa = 1$ pentru $\varkappa = 45^\circ$.

Tabela 7 dă posibilitatea de a aprecia care este căderea durabilității cu creșterea unghiului de atac principal.

*Tabela 7*

| Material așchiat | $\varkappa^\circ$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 30 | 45 | 60 | 90 |
| OL 38 | 1,13 | 1 | — | 0,45 |
| OL 42 | 1,09 | 1 | — | 0,50 |
| OL 50 | 1,03 | 1 | — | 0,66 |
| OL 60 | 1,13 | 1 | 0,81 | 0,27 |
| OL 70 | 1,04 | 1 | 0,95 | 0,83 |
| OLC 25 | 1,29 | 1 | — | 0,10 |
| OLC 35 | 1,29 | 1 | — | 0,12 |
| OLC 45 | 1,08 | 1 | 0,89 | 0,37 |
| OLC 60 | 1,23 | 1 | — | 0,52 |

Ţinînd seama de influenţa unghiului de atac principal asupra durabilităţii cuţitului, unghiul ϰ se alege în funcţie de rigiditatea piesei, forma ei etc., deoarece condiţiile tehnologice sau constructive în acest caz au cuvîntul hotărîtor în alegerea acestui unghi.

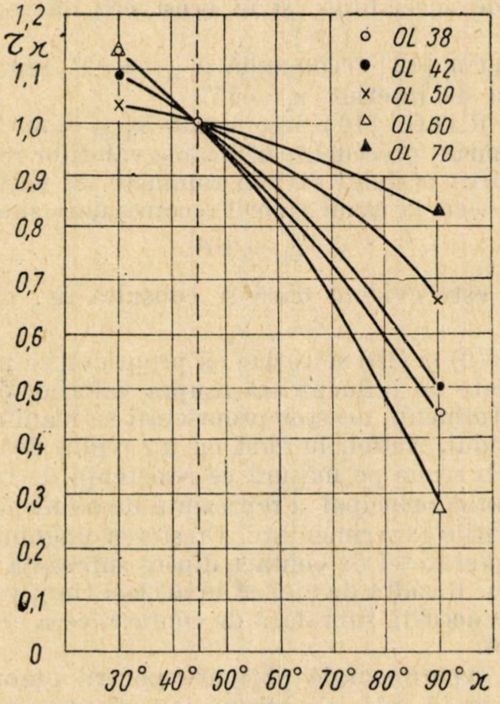


Fig. 15. — Variaţia coeficientului $\tau_{\varkappa}$ în funcţie de ϰ pentru oţelurile carbon obişnuite.

Valorile mici ale unghiului de atac principal, adică $\varkappa = 30°...45°$ se recomandă pentru sisteme sculă-piesă-maşină-unealtă rigide, iar valorile mari, adică $\varkappa = 60...90°$ se recomandă pentru sisteme sculă-piesă-maşină-unealtă mai puţin rigide.

Unghiul de înclinaţie al muchiei principale aşchietoare atunci cînd variază între limitele uzuale $\lambda = -5°...+5°$ nu influenţează sensibil asupra durabilităţii sculei. Ca atare, consemnînd că $\lambda = 0°$ reprezintă valoarea optimă, se reţine că în domeniul $\lambda = -5...+5°$ se poate alege orice valoare, fără a dăuna practic durabilităţii sculei.

Coeficienţii de corecţie ai durabilităţii funcţie de valoarea unghiului studiat nu sînt independenţi în raport cu materialul piesei şi al sculei. Acest lucru se datoreşte în special coeficientului dinamic al frecării. Tabelele cu coeficienţi de corecţie ai durabilităţii scot în relief această constatare. Pentru a uşura munca tehnologilor în aprecierea durabilităţii recomandate a sculei, s-a încercat să se generalizeze valoarea acestor coeficienţi pe întreaga gamă a oţelurilor studiate.

Tabelele 8. . .12 cuprind coeficienţi de corecţie ai durabilităţii pentru principalele unghiuri ale cuţitului de strung armat cu plăcuţe din carburi metalice la prelucrarea oţelurilor carbon (STAS 500-49 şi STAS 880-49).

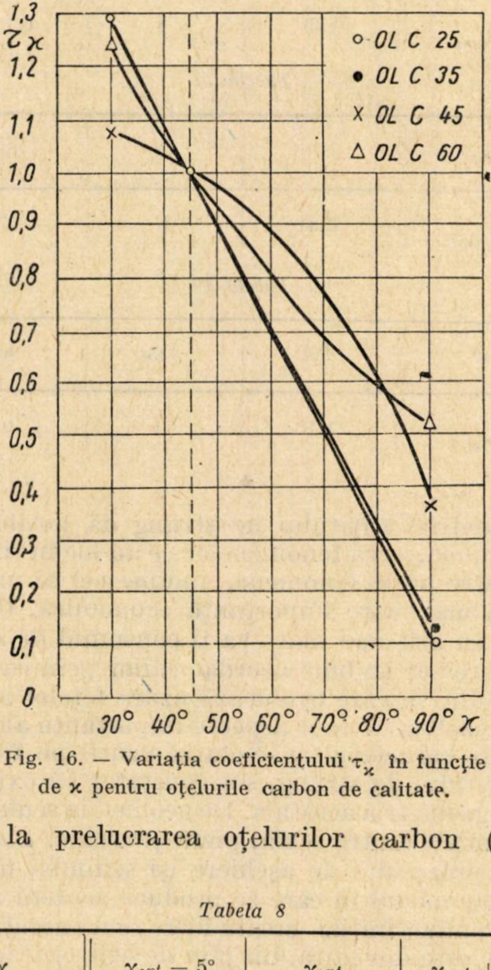


Fig. 16. — Variaţia coeficientului $\tau_\varkappa$ în funcţie de $\varkappa$ pentru oţelurile carbon de calitate.

*Tabela 8*

| $\gamma$ | $\gamma_{opt} - 5°$ | $\gamma_{opt}$ | $\gamma_{opt} + 5°$ |
|---|---|---|---|
| $\tau_{\gamma_{med}}$ | 0,82 | 1 | 0,77 |

*Tabela 9*

| $\alpha$ | 7° | 11° | 15° |
|---|---|---|---|
| $\tau_{\alpha_{med}}$ | 0,77 | 1 | 0,81 |

*Tabela 10*

| $\alpha_1$ | 10° | 15° | 20° |
|---|---|---|---|
| $\tau_{\varkappa 1_{med}}$ | 0,69 | 1 | 0,71 |

*Tabela 11*

| $\varkappa_1$ | 5° | 10° | 15° |
|---|---|---|---|
| $\tau_{\varkappa_{1_{med}}}$ | 0,81 | 1 | 0,75 |

*Tabela 12*

| $\varkappa$ | 30° | 45° | 90° |
|---|---|---|---|
| $\tau_{\varkappa_{med}}$ | 1,15 | 1 | 0,42 |

★

Studiul geometriei cuţitului de strung dă posibilitatea să se facă un pas înainte în cunoaşterea fenomenelor ce au loc în timpul procesului de aşchiere. Unul dintre acele fenomene, anume cel al uzurii feţelor active ale sculei, are cea mai mare importanţă economică. Cu cît uzura avansează mai repede, cu atît mai mare va fi consumul de scule. Rezultă deci de aici marele interes ce trebuie acordat căilor prin care se poate ajunge la micşorarea ritmului în care evoluează uzura feţelor active. Lucrarea de faţă dă soluţii în rezolvarea unor aspecte importante ale acestei probleme. Astfel analizîndu-se caracterul şi evoluţia uzurii pe fiecare din cele trei feţe active ale cuţitului de strung, s-a constatat că există o strînsă legătură între uzură şi geometria acestuia. De geometria sculei depinde mărimea suprafeţelor de contact dintre sculă, piesă şi aşchie. Desigur că aceste suprafeţe în timpul procesului de aşchiere îşi schimbă mărimea o dată cu creşterea uzurii, dar modul în care se produce această schimbare depinde de suprafeţele de contact iniţial create între scula ascuţită, piesă şi aşchie. Această constatare este dovedită din plin de cele cîteva mii de experienţe efectuate la Institutul de Mecanică aplicată „Traian Vuia'' pentru determinarea unghiurilor optime ale cuţitului de strung. Aceste unghiuri au valoarea, care duce la realizarea unor suprafeţe de contact iniţiale, între sculă, piesă şi aşchie, favorabilă celei mai lente evoluţii a uzurii. Denumim suprafeţe optime de contact acele suprafeţe iniţiale care corespund unghiurilor optime.

Pe baza experienţelor expuse mai sus, se poate afirma că suprafeţele optime de contact corespund unei repartiţii a presiunilor specifice (înţelegînd prin aceasta acele presiuni iniţiale), care dau naştere la cea mai lentă distrugere a feţelor active.

Studiul unghiului de degajare a dus la concluzia că mărimea lui depinde de intensitatea deformaţiilor ce iau naştere în materialul piesei în zona aşchierii. Aceste deformaţii sînt cu atît mai mari cu cît unghiul este mai mic. Rezultă evident că şi forţele de aşchiere sînt dependente de valoarea acestui unghi şi anume ele vor creşte cu scăderea mărimii unghiului de degajare. Revenind la problema suprafeţelor de contact şi deci a presiunilor specifice se poate spune că în cazul unui anumit oţel există o singură valoare a unghiului de degajare care creează condiţiile unei evoluţii cît mai lente a uzurii. De la un oţel la altul, caracteristicile mecanice sînt diferite şi din această cauză va fi nevoie de o forţă de aşchiere mai mică sau mai mare, după cum rezistenţa de rupere a oţelului este mai mică sau mai mare. Aceasta duce la concluzia că pentru a avea o suprafaţă iniţială de contact optimă în fiecare caz de oţel prelucrat în parte va fi necesar să avem un alt unghi de degajare. Verificările experimentale arătate anterior dovedesc acest lucru. Interpretarea rezultatelor experimentale a dus la formula (1) care este funcţie de rezistenţa la rupere şi la formula (4) care este funcţie de duritatea Brinell. Este cunoscută influenţa pe care o are conţinutul de carbon asupra durităţii oţelurilor. Experienţa a dovedit că se poate exprima valoarea optimă a unghiului de degajare în funcţie de conţinutul în procente de carbon (7). Utilizarea acestor formule în practică fiind greoaie, se propune întrebuinţarea tabelei 2 care pune la dispoziţia tehnologului şi sculerului două variante de valori.

Examinîndu-se din acelaşi punct de vedere şi celelalte unghiuri ale cuţitului de strung, s-a constatat că ele prezintă de asemenea valori optime şi anume pentru cele nouă oţeluri studiate s-a obţinut :

$$\alpha = 11^\circ,\ \alpha_1 = 15^\circ,\ \varkappa = 45^\circ,\ \varkappa_1 = 10^\circ,\ \lambda \approx 0.$$

Este interesant de menţionat că aceste valori nu depind de natura materialului prelucrat în cazul oţelurilor experimentate. Trebuie menţionat că în cazul unghiului de atac principal nu se poate vorbi de o valoare optimă ca în cazul celorlalte unghiuri. Acest unghi cu cît este mai mic în valoare cu atît va da o durabilitate mai mare a sculei. Alegerea valorii lui se va face în funcţie de profilul piesei de prelucrat cu tendinţa de a-l alege cît mai mic posibil. Un alt parametru, care limitează posibilitatea de alegere a mărimii unghiului de atac principal este rigiditatea sistemului piesă-maşină-unealtă, şi anume cu cît rigiditatea sistemului este mai mică, cu atît mai mare trebuie aleasă valoarea unghiului $\varkappa$, căci numai astfel, se vor putea evita vibraţiile.

O altă concluzie importantă constă în faptul că la durităţi apropiate ale sculei, materialul din care este confecţionat cuţitul nu influenţează asupra unghiurilor optime. Rezultatele experienţelor obţinute pe diferite tipuri de carburi metalice şi materiale mineralo-ceramice au dovedit că într-un interval de 10—15 unităţi HRC materialul sculei nu influenţează sensibil asupra unghiurilor optime. Aceasta se datoreşte faptului că pentru o diferenţă de duritate ca cea menţionată, deformaţiile pe care le suportă scula practic nu diferă. De aceea şi suprafeţele iniţiale optime de contact nu se modifică şi deci evoluţia uzurii va fi cea mai lentă, specifică însă materialului din care este confecţionată scula, de exemplu, altfel va evolua uzura în cazul unei plăcuţe din carburi metalice $T_{15}$ $K_6$ decît în cazul plăcuţei mineralo-ceramice ENC.

S-a arătat importanţa pe care o are mărimea suprafeţei de contact iniţiale în evoluţia uzurii, trebuie menţionat însă că şi calitatea iniţială a acestor suprafeţe influenţează asupra durabilităţii. Într-adevăr o cale prin care se poate obţine o creştere a durabilităţii este gradul superior de finisare a suprafeţelor acestor scule. Acest lucru se poate obţine prin rodarea, lepuirea sau şlefuirea suprafeţelor. Realizîndu-se o calitate de suprafaţă iniţial superioară, se obţine şi o mai bună repartiţie a presiunilor pe suprafaţa de contact, ceea ce creează condiţii mai bune pentru creşterea durabilităţii sculei, deci pentru o evoluţie mai lentă a uzurii.

O ascuţire corectă se poate realiza numai într-o ascuţitorie centralizată dotată cu un utilaj bine pus la punct şi încadrată cu muncitori specializaţi în această problemă. Aceasta este singura cale ce va permite utilizarea cu succes a parametrilor optimi ai sculelor care duc aşa cum s-a arătat, la o importantă micşorare a consumului de scule.

*Primită la redacţie la 29 iulie 1961.*

# ГЕОМЕТРИЯ РЕЖУЩЕГО ИНСТРУМЕНТА ДЛЯ ОБРАБОТКИ УГЛЕРОДИСТЫХ СТАЛЕЙ

## РЕЗЮМЕ

В работе дается обобщение результатов по оптимальной геометрии токарного резца, применяемого при резании обыкновенных и высококачественных углеродистых сталей, изготовленных в РНР.

Кроме оптимальных значений углов резца, приводятся также и поправочные коэффициенты для стойкости.

Результаты исследований представлены в виде диаграмм, таблиц или формул.

## ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Углы токарных резцов.

Рис. 2. — Изменение коэффициента $\tau_\gamma$ в зависимости от $\gamma$ для обыкновенных углеродистых сталей.

Рис. 3. — Изменение коэффициента $\tau_\gamma$ в зависимости от $\gamma$ для высококачественных углеродистых сталей.

Рис. 4. — Изменение угла $\gamma$ с сопротивлением разрыву $\sigma_r$. Кривая *a* для обыкновенных углеродистых сталей, кривая *b* для высококачественных углеродистых сталей и кривая *c* для всех углеродистых сталей.

Рис. 5. — Изменение угла $\gamma$ с твердостью по Бринеллю. Кривая *a* для обыкновенных углеродистых сталей, кривая *b* для высококачественных углеродистых сталей, кривая *c* для всех углеродистых сталей.

Рис. 6. — Графическое изображение зависимости между сопротивлением разрыву и содержанием углерода в стали. Кривая *a* для обыкновенных углеродистых сталей, кривая *b* для высококачественных углеродистых сталей и кривая *c* для всех сталей.

Рис. 7. — Зависимость оптимального переднего угла от процентного содержания углерода в стали.

Рис. 8. — Сравнение результатов полученных в Институте прикладной механики (кривая *c*) с полученными в ГДР (кривая *b*) и в СССР (кривые *a* и *d*).

Рис. 9. — Изменение коэффициента $\tau_\alpha$, в зависимости от $\alpha$ для обыкновенных углеродистых сталей.

Рис. 10. — Изменение коэффициента $\tau_\alpha$, в зависимости от $\alpha$ для высококачественных сталей.

Рис. 11. — Изменение коэффициента $\tau_{\alpha_1}$, в зависимости от $\alpha_1$ для обыкновенных углеродистых сталей.

Рис. 12. — Изменение коэффициента $\tau_{\alpha_1}$, в зависимости от $\alpha_1$ для высококачественных углеродистых сталей.

Рис. 13. — Изменение коэффициента $\tau_{\varkappa_1}$, в зависимости от $\varkappa$ для обыкновенных углеродистых сталей.

Рис. 14. — Изменение коэффициента $\tau_{\varkappa_1}$, в зависимости от $\alpha$ для высококачественных углеродистых сталей.

Рис. 15. — Изменение коэффициента $\tau_\varkappa$, в зависимости от $\varkappa$ для обыкновенных углеродистых сталей.

Рис. 16. — Изменение коэффициента $\tau_\varkappa$, в зависимости от $\varkappa$ для высококачественных углеродистых стелей.

# DIE GEOMETRIE DES WERKZEUGES ZUR ZERSPANUNG VON KOHLENSTAHLWERKSTOFFEN

## ZUSAMMENFASSUNG

Es werden die früher erzielten Ergebnisse für die günstigsten geometrischen Parameter der Drehmeißel, die zur Zerspanung der in der RVR erzeugten gewöhnlichen und Qualitäts-Kohlenstahlwerkstoffe verwandt werden, verallgemeinert.

Außer den günstigsten Werten für die Schneidenwinkel werden Umrechnungszahlen für die Standzeit angegeben.

Die Ergebnisse der Untersuchungen sind in Form von Diagrammen, Tabellen und Formeln dargestellt.

## ERKLÄRUNG DER BILDER

Bild 1. — Schneidenwinkel am Drehwerkzeug.

Bild 2. — Änderung des Koeffizienten $\tau_\gamma$ in Abhängigkeit von $\gamma$ bei gewöhnlichen Kohlenstählen.

Bild 3. — Änderung des Koeffizienten $\tau_\gamma$ in Abhängigkeit von $\gamma$ bei Qualitätskohlenstählen.

Bild 4. — Änderung des Winkels $\gamma$ in Abhängigkeit von der Bruchfestigkeit $\sigma_r$. Kurve *a* für gewöhnliche Kohlenstähle, Kurve *b* für Qualitätskohlenstähle und Kurve *c* für alle Kohlenstahlwerkstoffe.

Bild 5. — Änderung des Winkels $\gamma$ mit der Brinell-Härte. Kurve *a* für gewöhnlicheKohlenstähle, Kurve *b* für Qualitätskohlenstähle und Kurve *c* für alle Kohlenstahlwerkstoffe.

Bild 6. — Graphische Darstellung der Abhängigkeit zwischen der Bruchfestigkeit und dem Kohlengehalt des Stahls. Kurve *a* für gewöhnliche Kohlenstähle, Kurve *b* für Qualitätskohlenstähle und Kurve *c* für alle Kohlenstahlwerkstoffe.

Bild 7. — Abhängigkeit des Wertes des Spanwinkels vom Kohlegehalt in Prozenten des Stahls.

Bild 8. – Vergleich zwischen den vom Institut für angewandte Mechanik, Bukarest (Kurve *c*), den in der DDR (Kurve *b*) und den in der UdSSR (Kurven *a* und *d*) erzielten Ergebnissen.

Bild 9. – Änderung des Koeffizienten $\tau_\alpha$ in Abhängigkeit von $\alpha$ für gewöhnliche Kohlenstähle.

Bild 10. – Änderung des Koeffizienten $\tau_\alpha$ in Abhängigkeit von $\alpha$ für Qualitätskohlenstähle.

Bild 11. – Änderung des Koeffizienten $\tau_{\alpha_1}$ in Abhängigkeit von $\alpha_1$ für gewöhnliche Kohlenstähle.

Bild 12. – Änderung des Koeffizienten $\tau_{\alpha_1}$ in Abhängigkeit von $\alpha_1$ für Qualitätskohlenstähle.

Bild 13. – Änderung des Koeffizienten $\tau_{\varkappa_1}$ in Abhängigkeit von $\varkappa_1$ für gewöhnliche Kohlenstähle.

Bild 14. – Änderung des Koeffizienten $\tau_{\varkappa_1}$ in Abhängigkeit von $\varkappa_1$ für Qualitätskohlenstähle.

Bild 15. – Änderung des Koeffizienten $\tau_\varkappa$ in Abhängigkeit von $\varkappa$ für gewöhnliche Kohlenstähle.

Bild. 16. – Änderung des Koeffizienten $\tau_\varkappa$ in Abhängigkeit von $\varkappa$ für Qualitätskohlenstähle.

## BIBLIOGRAFIE

1. M. POPOV, D. PAVELESCU, I. MITRICĂ, E. DECIU, M. CALCIU, N. PASCU, *Cu privire la parametrii geometrici ai cuţitului armat cu plăcuţă de carburi metalice*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, VIII, *2* (1957).
2. M. POPOV, I. MITRICĂ, E. DECIU, *Studiu comparativ al parametrilor geometrici ai cuţitelor de strung cu plăcuţe mineralo-ceramice şi din carburi metalice*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **IX,** *4* (1958).
3. — *Сравнительное исследование условия обработки резанием на токарном станке резцами, оснащенными минерало-керамическими пластинками и пластинками из твердых сплавов.* Revue de mécanique apliquée, VI, 1 (1959).
4. — *Studii asupra parametrilor aşchierii cu cuţite de strung din oţel rapid romînesc.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **X,** *2* (1959).
5. — *Некоторые стороны вопроса резания металлов токарными резцами из быстрорежущей стали.* Revue de mécanique apliquée, IV, 4 (1959).
6. — *Rezistenţa la uzură a sculei în funcţie de parametrii geometrici ai acesteia.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **XI,** *4* (1960).
7. — *Studiul puterii necesare aşchierii oţelurilor carbon obişnuite.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **XI,** *6* (1960).
8. — *Contributions to the study on the cutting of carbon steels.* Revue de mécanique appliquée, **V,** *6* (1960).
9. — *Aspecte ale cercetării ştiinţifice în domeniul aşchierii metalelor în R.P.R.* Metalurgia şi construcţia de maşini, **XI,** *10* (1960).
10. — *Geometria optimă a cuţitului de strung armat cu plăcuţe din carburi metalice pentru aşchierea oţelurilor OLC 45*, OL *70 şi OL 60.* Metalurgia şi construcţia de maşini, **XII,** *6* (1960).
11. — *Calităţile aşchietoare ale unor oţeluri rapide romîneşti.* Metalurgia şi constructia de maşini, **XIII,** *3* (1961).
12. М. Н. ЛАРИН, *Оптимальные геометрические параметры режущей части инструментов.* Оборонгиз, Москва, 1953.
13. Н. Н. ЗОРЕВ, *Вопросы механики процесса резания металлов.* Машгиз, Москва, 1956.
14. * * * *Richtwerte für wirtschaftliche Zerspanung Drehen.* Verlag Tehnik, Berlin, 1952.
15. * * * *Твердые сплавы для обработки металлов.* Каталоги и инструкции № 12. Союзный трест промышленности твердых сплавов. СССР, Москва.
16. * * * *Katalog Harith,* Hartmetall.
17. М. Т. КЛУШИН, *Резание металлов.* Машгиз, Москва, 1953.

# — REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE —

# CALCULUL LINIILOR DE INFLUENȚĂ A PODURILOR PE BOLȚI CU TABLIERUL SUSȚINUT PRIN PEREȚI

DE

IACOB HARGHEL [1])

## INTRODUCERE

Utilizarea în proiectarea curentă a unui calcul care să țină seama de conlucrarea tuturor elementelor în cazul podurilor pe bolți nu se face, din cauza numărului mare de necunoscute precum și a numeroaselor ipoteze de încărcare.

Metodele simplificatoare de calcul, folosite curent în practică, conduc la o apreciere aproximativă a eforturilor și deformațiilor, confirmate de numeroasele cercetări efectuate în Elveția de prof. Ros, care a dovedit că săgeata măsurată este în medie 60 % din cea calculată iar eforturile reale sînt între 50 și 75 % din cele de calcul.

De-abia după propunerea făcută de prof. Beggs a unei metode mecanice de stabilirea liniilor de influență pe modele executate din celuloid, s-a putut trece la o proiectare corectă a acestui gen de structuri. În general, aceste metode mecanice nu se pot folosi în birourile de proiectare și de aceea o metodă de calcul simplă apare mult mai indicată.

Scopul lucrării este de a prezenta o metodă de calcul care să poată fi folosită curent în proiectare și care să permită realizarea unor structuri mult mai raționale, prin considerarea conlucrării tuturor elementelor. Astfel printr-o neînsemnată majorare a înălțimii nervurilor și a reducerii grosimii bolții, eforturile de încovoiere sînt preluate de lonjeron.

## BAZELE TEORIEI

Vom folosi ipotezele de bază a structurilor static nedeterminate din mecanica construcțiilor. Vom considera două cazuri de rezemare a tablierului pe boltă și anume :

— lonjeroane continui, rezemînd pe boltă prin intermediul pereților iar în porțiunea de la cheia bolții sînt întrerupte și încastrate în boltă ;

---

[1]) IPROMIN.

— lonjeroane continui pe tot podul, rezemînd pe boltă prin intermediul pereţilor iar în porţiunea de la cheia bolţii reazemă în mod continuu pe boltă.

Cazurile care se întîlnesc în practică pot fi asimilate cu unul din aceste două moduri de rezemare.

În expunerea teoriei ne vom referi la primul caz de rezemare şi vom arăta la urmă corecţiile care trebuie făcute pentru cazul doi de rezemare.

În calcule vom folosi metoda mixtă.

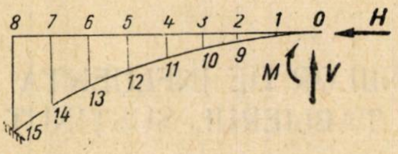


Fig. 1

În acest scop, alegem ca sistem de bază în metoda eforturilor jumătatea de boltă tăiată la cheie şi solicitată de eforturile:

— $H$, $V$, $M$, eforturi necunoscute în cazul bolţilor dublu încastrate;

— $H$ efort necunoscut, $V$ şi $M$ eforturi cunoscute, de legătură, în cazul bolţilor dublu articulate;

— $H$, $V$ eforturi cunoscute, de legătură, în cazul bolţilor triplu articulate.

În cazul bolţilor dublu încastrate, naşterea bolţii se consideră perfect încastrată, iar pentru bolţile dublu şi triplu articulate, naşterea bolţii se va considera ca un nod curent de cadru care se poate roti.

Pentru a stabili ecuaţia care ne dă eforturile necunoscute de legătură de la cheie, va trebui să stabilim deformaţiile jumătăţii de pod pentru sarcina $P = 1\ t$, mobilă pe pod, precum şi pentru eforturile unitare, purtate de-a lungul eforturilor necunoscute $H$, $V$, $M$, în cazul bolţilor dublu încastrate şi $H$ în cazul bolţilor dublu articulate.

Stabilirea eforturilor precum şi a deformaţiilor pentru jumătatea de pod o vom face cu ajutorul metodei deformaţiilor, considerînd ca necunoscute pentru rotiri o serie de rotiri grupate, convenabil alese, pentru a reduce volumul calculului [1].

În calcule vom elimina necunoscutele care dau deformaţiile liniare ale nodurilor, aşa încît ecuaţiile finale pe care le vom obţine vor fi scrise în raport cu rotirile grupate necunoscute.

Rezolvarea sistemului de ecuaţii o vom face prin iteraţie, după o schemă de transmisie.

Pentru o scriere comodă a sistemului de ecuaţii vom folosi ca rotiri necunoscute, conform lucrării [2], rotirile efective înmulţite cu 4 iar ca deplasări liniare necunoscute, deplasările efective înmulţite cu 12.

În figura 2 sînt indicate rotirile grupate necunoscute, aferente nodurilor $m$ şi $n$. Valorile coeficienţilor $\alpha_m$ şi $\beta_n$ le vom stabili impunînd condiţia ca o serie de coeficienţi secundari ai sistemului de ecuaţii în rotiri, în care deplasările liniare au fost eliminate, să fie nuli.

În figurile 3 şi 4 sînt indicate deplasările liniare alese. Ele se compun dintr-o rotire a întregului sistem, considerat rigid, în jurul naşterii şi din deplasările $m$, conform figurii 4.

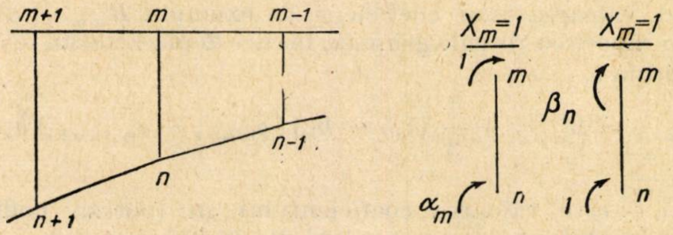


Fig. 2

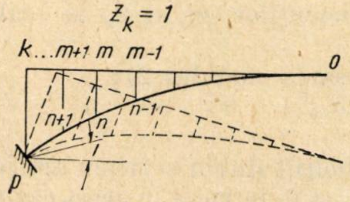


Fig. 3

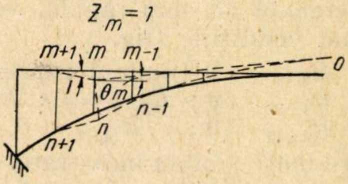


Fig. 4

În deplasarea $m$, barele $m \quad m+1$ şi $n \quad n+1$, suferă o rotire egală cu unitatea, iar structura $m-1$, $n-1$, $o$, o rotire egală cu $\theta_m$.

Valoarea acestei rotiri este :

$$\theta_m = \frac{l_{n\,n+1}}{l_{nm}} \sin \varphi_{n\,n+1}, \tag{1}$$

unde $\varphi_{n\,n+1}$ este unghiul făcut cu orizontala de bara $n \quad n+1$.

## STABILIREA ECUAŢIILOR DE CALCUL

Notînd cu $\rho$ rigidităţile barelor, ecuaţiile deplasărilor $Z$, ale nodurilor $k$, $k-1$ şi ale unui nod curent $m$, în raport cu rotirile grupate alese sînt :

$$\frac{1}{3}(\rho_{kp} + \rho_{p\,p-1}) Z_k + \left(0{,}5 + \frac{1}{6}\theta_{k-1}\right)\rho_{p\,p-1} Z_{k-1} - 0{,}5\,\rho_{kp} X_k - \\ - 0{,}5\,\rho_{p\,p-1}\,\alpha_{k-1} X_{k-1} - 0{,}5\,\rho_{p\,p-1} X_{p-1} - L_{kp} = 0, \tag{2}$$

$$(1 + \theta_{k-1} + \theta^2_{k-1})(\rho_{k\,k-1} + \rho_{p\,p-1}) Z_{k-1} + \left(0{,}5 + \frac{1}{6}\theta_{k-1}\right)\rho_{p\,p-1} Z_k - \\ - (1{,}5 + 0{,}5\,\theta_{k-1})\rho_{k\,k-1} X_k - (1{,}5 + \theta_{k-1})(\rho_{k\,k-1} + \alpha_{k-1}\rho_{p\,p-1}) X_{k-1} - \\ (1{,}5 + \theta_{k-1})(\rho_{p\,p-1} + \beta_{p-1}\rho_{k\,k-1}) X_{p-1} - L_{k-1\,p} = 0, \tag{3}$$

$$(1 + \theta_m + \theta^2_m)(\rho_{m\,m+1} + \rho_{n\,n+1}) Z_m - (1{,}5 + 0{,}5\,\theta_m)(\rho_{m\,m+1} + \\ + \alpha_{m+1}\rho_{n\,n+1}) X_{m+1} - (1{,}5 + 0{,}5\,\theta_m)(\rho_{n\,n+1} + \beta_{n+1}\rho_{m\,m+1}) X_{n+1} - \\ - (1{,}5 + \theta_m)(\rho_{m\,m+1} + \alpha_m\rho_{n\,n+1}) X_m - (1{,}5 + \theta_m)(\rho_{n\,n+1} + \\ \beta_n\rho_{m\,m+1}) X_n - L_{mp} = 0. \tag{4}$$

După ce s-au scris ecuațiile tuturor deplasărilor, se explicitează. Fie $Z_m$ scris sub formă explicită :

$$Z_m = b_{m\,m+1} X_{m+1} + b_{m\,n+1} X_{n+1} + b_{mm} X_m + b_{mn} X_n + Z_{m0}. \qquad (5)$$

Atunci, valoarea unui coeficient, de exemplu $R_{m\,m+1}$, al sistemului de ecuații în raport cu rotirile grupate, în care deplasările au fost eliminate, va avea forma :

$$R_{m\,m+1} = \overset{\circ}{R}_{m\,m+1} + \frac{1}{3}(1{,}5 + \theta_m)(\rho_{m\,m+1} + \alpha_m \rho_{n\,n+1})\, b_{m\,m+1},$$

unde

$\overset{\circ}{R}_{m\,m+1}$ — este valoarea coeficientului în ipoteza nodurilor fixe, obținut după procedeul dat în lucrarea [1].

În vederea obținerii unei scheme de transmisie simplă și avînd o convergență cît mai rapidă, valorile coeficienților $\alpha_m$ și $\beta_n$ se stabilesc punînd condițiile (fig. 1) :

$$\begin{aligned} &R_{9-1} = 0 \text{ (unde I reprezintă deplasarea nodului 2)};\\ &R_{3-9} = 0;\ R_{2-9} = 0;\ R_{3-10} = 0;\ R_{10-4} = 0; \qquad (6)\\ &R_{4-11} = 0; \ldots R_{14-7} = 0, \end{aligned}$$

pentru bolțile dublu încastrate, iar pentru bolțile dublu și triplu articulate, aceleași condiții la care se adaugă și $R_{15-8} = 0$, întrucît în acest caz nodul 15 este un nod obișnuit de cadru. La condițiile (6) s-a ajuns printr-o serie de încercări, căutîndu-se schema de transmisie cu convergența cea mai bună.

Odată stabilită schema de transmisie, se trece la calculul deformațiilor și al eforturilor, pentru o forță $P = 1$ t, mobilă pe pod, precum și pentru forțele unitare, purtate în lungul eforturilor necunoscute, de legătură, de la cheie.

Cunoscînd deformațiile, în urma calculului din prima etapă, se poate trece la stabilirea sistemului de ecuații în $H$, $V$, $M$ și deci obținem liniile de influență respective, folosind metoda forțelor. Avînd liniile de influență $H$, $V$, $M$, ordonata liniei de influență a unui efort $M_{m\,m+1}$ este :

$$M_{m\,m+1} = \overset{\circ}{M}_{m\,m+1} + M^{H=1}_{m\,m+1} H + M^{M=1}_{m\,m+1} M + M^{V=1}_{m\,m+1} V, \qquad (7)$$

unde

$\overset{\circ}{M}_{m\,m+1}$ — este valoarea efortului calculat pentru jumătatea de pod în consolă, pentru o poziție oarecare a efortului $P = 1$ t pe pod ;

$M^{H=1}_{m\,m+1}$ — același efort pentru o forță unitară purtată de-a lungul lui $H$.

Pentru cazul doi de rezemare, cînd tablierul se sprijină în mod continuu pe boltă, pe porțiunea *0 — 1*, putem scrie că săgețile celor două elemente de construcții sînt egale :

$$Y_t = Y_b.$$

Derivînd de două ori obținem : $\dfrac{M_t}{I_t} = \dfrac{M_b}{I_b \cos\varphi} = \dfrac{M_t + M_b}{\left(I_b + \dfrac{I_t}{\cos\varphi}\right)\cos\varphi}$ .

Deci și în acest caz calculul se reduce la primul caz de rezemare, cu deosebirea că pe porțiunea *0 — 1* momentul de inerție al bolții are valoarea $I_b + \frac{I_t}{\cos\varphi}$ iar valoarea momentului încovoietor de la cheie este suma momentelor încovoietoare din tablier și boltă. Valorile momentelor din boltă și tabliere se obțin din acest moment total cu ajutorul formulei (8).

## CONCLUZII

Considerarea în calcul a conlucrării bolții cu tablierul și pereții dă posibilitatea proiectantului de a varia dimensiunile secțiunilor în limite destul de largi, ceea ce nu era posibil în cazul unui calcul clasic.

Apreciind că deschiderea bolții este împărțită de pereți în zece intervale și limitînd grosimea bolții din considerente de flambaj local la $\frac{1}{18}$ din lungimea unui interval, rezultă grosimea bolții de $\frac{l}{180}$, față de $\frac{l}{60}$ în cazul unui calcul simplificator, pentru podurile de șosea.

Alegînd pentru tablier o secțiune în nervuri, se poate lua înălțimea tablierului de $\frac{l}{45}$, față de $\frac{l}{120}$ în cazul obișnuit de proiectare.

Se obține astfel sistemul de poduri cu bolți flexibile și grindă de rigidizare. În cazul acestor structuri, bolțile lucrează exclusiv la compresiune, afară de secțiunile de la naștere, necesitînd astfel o armare constructivă. Momentele încovoietoare rezultate numai din sarcinile mobile (în cazul bolților trasate după curba de presiune pentru sarcinile permanente) se scurg în lonjeroane, care prin secțiunea lor în nervuri, avînd un braț de pîrghie mare, le preiau ducînd la un spor mic de beton și armătură.

Reducerea consumului de beton duce la o micșorare a sarcinii permanente a podului și deci la infrastructuri mai ușoare. Micșorarea grosimii bolții, de cca. trei ori, permite utilizarea de cintre elastice, fără sprijiniri în albie, capabile să preia greutatea bolții turnate și împreună cu bolta deja turnată să lucreze la sarcinile date de betonul turnat în tablier.

Scăderea volumului de beton pe metrul liniar de pod, considerînd lățimea bolții de 5,50 m și că tablierul este format diin patru nervuri de 0,30 m lățime fiecare (în cazul podurilor de șosea), este de $l/21{,}20$ $\text{m}^3/\text{m}$ l.

Reducerea armăturii, considerînd 120 kg/$\text{m}^3$ beton, este de 5,65 l kg/m l.

În cazul unui pod de șosea, avînd $l = 60$ m, consumul de beton armat este cu 2,80 $\text{m}^3/\text{m}$ l mai puțin și de armătură cu 340 kg/ml. Pentru un beton armat vibrat rezultă o sarcină permanentă cu 7,30 t/ml mai mică și care la o pleoștire a podului de 1/7, duce la o reducere a împingerii orizontale cu 380 t.

Micşorarea împingerii orizontale pune problema turnării podurilor cu mai multe deschideri, treptat, pe cîte o singură deschidere, refolosind cintrele elastice de la o deschidere la alta.

Pentru însuşirea practică a acestor metode de calcul, dăm mai jos un exemplu.

## EXEMPLU DE CALCUL

Se dă jumătatea de pod din figura 5, avînd trecute toate rigidităţile, suma rigidităţilor pe noduri şi panouri, precum şi elementele geometrice.

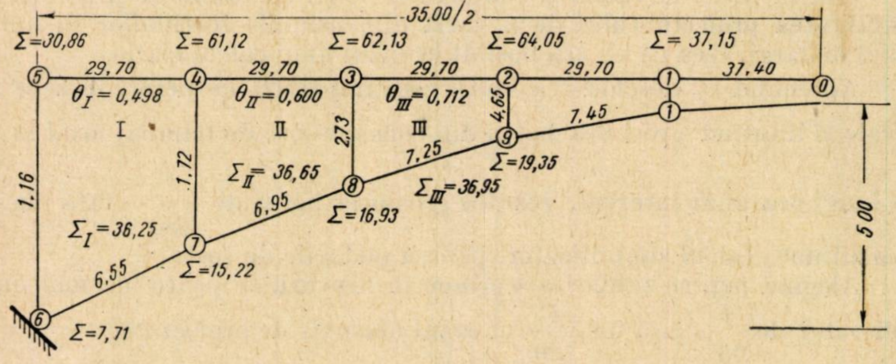

35.00/2
Σ=30,86
Σ=61,12
Σ=62,13
Σ=64,05
Σ=37,15
⑤
29,70
④
29,70
③
29,70
②
29,70
①
37,40
⓪
θ_I = 0,498
θ_II = 0,600
θ_III = 0,712
I
II
III
4,65
2,73
1,72
1,16
7,45
①
⑨
7,25
Σ=19,35
Σ_II = 36,65
⑧
Σ_III = 36,95
6,95
Σ=16,93
Σ_I = 36,25
⑦
6,55
Σ=15,22
⑥
Σ=7,71
5 00

Fig. 5

a. *Ecuaţiile deplasărilor liniare în funcţie de coeficienţii* $\varkappa_m$ şi $\beta_m$

$$\frac{1}{3} \times 7{,}71\, Z_0 - 0{,}58\, X_5 - 3{,}275\, \varkappa_4\, X_4 - 3{,}275\, X_7 + (0{,}5 + \frac{1}{6} \times$$

$$\times\, 0{,}498)\; 6{,}55\, Z_{\mathrm{I}} - L_{0p} = 0,$$

$$36{,}25\; (1{,}498 + \frac{1}{3} \times 0{,}498^{\,2})\, Z_{\mathrm{I}} - 1{,}749 \times 29{,}70\, X_5 - 1{,}998\, (29{,}70 + 6{,}55\, \alpha_4)\, X_4 -$$

$$- 1{,}998\, (6{,}55 + 29{,}70\, \beta_7)\, X_7 + 3{,}820\, Z_0 - L_{\mathrm{I}p} = 0.$$

Explicitez valorile lui $Z_0$ şi $Z_{\mathrm{I}}$ în funcţie de rotiri şi avem :

$$Z_0 = - 1{,}249\, X_5 + (1{,}035\, \alpha_4 - 1{,}71)\, X_4 + (1{,}035 - 1{,}71\, \beta_7)\, X_7 +$$

$$+ 0{,}432\, L_{0_p} - 0{,}0288\, L_{\mathrm{I}_p} = 0,$$

$$Z_{\mathrm{I}} = 0{,}990\, X_5 + (1{,}150 + 0{,}1595\, \alpha_4)\, X_4 + (\, 0{,}1595 + 1{,}150\, \beta_7)\; X_7 +$$

$$+ 0{,}01953\, L_{\mathrm{I}_p} - 0{,}0288\, L_{0_p} = 0,$$

$$(1{,}600 + \frac{1}{3} \times 0{,}600^2)\; 36{,}65\, Z_{\mathrm{II}} - 1{,}80\, (29{,}70 + 6{,}95\, \alpha_4)\, X_4 -$$

$$- 1{,}80 + (6{,}95 + 29{,}70\, \beta_7)\, X_7 - 2{,}100\, (29{,}70 + 6{,}95\, \alpha_3)\, X_3 -$$

$$- 2{,}100\, (6{,}95 + 29{,}70\, \beta_8)\, X_8 - L_{\mathrm{II}_p} = 0,$$

$$Z_{\text{II}} = (0{,}850 + 0{,}198\,\alpha_4)\,X_4 + (0{,}198 + 0{,}850\,\beta_7)\,X_7 + (0{,}992 +$$

$$+ 0{,}232\,\alpha_3)\,X_3 + (0{,}232 + 0{,}992\,\beta_8)\,X_8 + 0{,}01587\,L_{\text{II}_p}\,;\ (1{,}712 + \frac{1}{3} \times$$

$$\times 0{,}712^2)\,36{,}95\,Z_{\text{III}} - 1{,}856\,(29{,}70 + 7{,}25\,\alpha_3)\,X_3 - 1{,}856\,(7{,}25 +$$

$$+ 29{,}70\,\beta_8)\,X_8 - 2{,}212\,(29{,}70 + 7{,}25\,\alpha_2)\,X_2 - 2{,}212 \cdot (7{,}25 +$$

$$+ 29{,}70\,\beta_9)\,X_9 - L_{\text{III}_p} = 0,$$

$$Z_{\text{III}} = (0{,}793 + 0{,}1935\,x_3)\,X_3 + (0{,}1935 + 0{,}793\,\beta_8)\,X_8 + (0{,}945 +$$

$$+ 0{,}231\,\alpha_2)\,X_2 + (0{,}231 + 0{,}945\,\beta_9)\,X_9 + 0{,}0144\,L_{\text{III}_p}.$$

### b. *Determinarea coeficienţilor* $\alpha_m$ şi $\beta_m$

$$R_{\text{III}-9} = 16{,}020 + 65{,}600\,\beta_9 = 0\,;\ \beta_9 = -\frac{16{,}020}{65{,}60} = -0{,}244\,;$$

$$R_{3-9} = -14{,}850 \times 0{,}244 + 3{,}625\,\alpha_3 = 0\,;\ \alpha_3 = \frac{14{,}850 \times 0{,}244}{3{,}625} = 1{,}000\,;$$

$$R_{3-9} = -(64{,}05 + 2{,}325\,\alpha_2)\,0{,}244 + 19{,}35\,\alpha_2 + 2{,}325 = 0\,;$$

$$\alpha_2 = \frac{13{,}325}{18{,}783} = 0{,}710\,;$$

$$R_{3-8} = 62{,}13\,\beta_8 + 1{,}365 + (16{,}930 + 1{,}365\,\beta_8) - (20{,}80 + 4{,}85)$$

$$(0{,}232 + 0{,}992\,\beta_8) - (18{,}400 + 4{,}490)\,(0{,}1935 + 0{,}793\,\beta_8) = 0\,;$$

$$\beta_8 = -\frac{7{,}915}{19{,}895} = -0{,}397\,;$$

$$R_{4-8} = 3{,}475\,\alpha_4 - 0{,}397 \times 14{,}85 - (17{,}50 + 4{,}16\,\alpha_4)\,(0{,}232 - 0{,}992 \times 0{,}397) = 0\,;$$

$$\alpha_4 = \frac{3{,}065}{4{,}150} = 0{,}739\,;$$

$$R_{4-7} = 61{,}12\,\beta_7 + 0{,}86 + (15{,}22 + 0{,}86\,\beta_7)\,0{,}739 - (17{,}85 + 4{,}16 \times 0{,}739)\,(0{,}198 +$$

$$+ 0{,}850\,\beta_7) - 1{,}091 \times 0{,}739\,(1{,}035 - 1{,}71\,\beta_7) - (19{,}75 + 4{,}36 \times 0{,}739)\,(0{,}1595 + 1{,}150\,\beta_7) = 0\,;$$

$$\beta_7 = -\frac{3{,}455}{18{,}935} = -0{,}1824.$$

### c. *Ecuaţiile deplasărilor*

$$2{,}57\,Z_0 - 0{,}58\,X_5 - 2{,}420\,X_4 - 3{,}275\,X_7 + 3{,}820\,X_{\text{I}} - L_{0p} = 0,$$

$$Z_0 = -1{,}249\,X_5 - 0{,}945\,X_4 + 1{,}347\,X_7 + 0{,}432\,L_{0p} - 0{,}0288\,L_{\text{I}p}\,,$$

$$57{,}30\,Z_{\text{I}} - 52\,X_5 - 69{,}09\,X_4 - 2{,}250\,X_7 + 3{,}820\,Z_0 - L_{\text{I}p} = 0,$$

$$Z_{\text{I}} = 0{,}990\,X_5 + 1{,}268\,X_4 - 0{,}0505\,X_7 + 0{,}01935\,L_{\text{I}p} - 0{,}0288\,L_{0p}\,,$$

$$63\,Z_{\text{II}} - 62{,}74\,X_4 - 2{,}75\,X_7 - 77{,}10\,X_3 + 10{,}20\,X_8 - L_{\text{II}p} = 0,$$

$$Z_{\text{II}} = 0{,}995\,X_4 + 0{,}0436\,X_7 + 1{,}225\,X_3 - 0{,}1616\,X_8 + 0{,}01588\,L_{\text{II}p}\,,$$

$$69{,}50\,Z_{\text{III}} - 68{,}55\,X_3 + 8{,}45\,X_8 - 76{,}98\,X_2 - L_{\text{III}p} = 0\,,$$

$$Z_{\text{III}} = 0{,}985\,X_3 - 0{,}1215\,X_8 + 1{,}109\,X_2 + 0{,}0144\,L_{\text{III}p}\,.$$

### d. *Stabilirea ecuațiilor de calcul*

$$(30{,}86 + 0{,}242 - 17{,}150)\, X_5 + (14{,}85 + 0{,}1825 - 22{,}00)\, X_4 + $$
$$+ (-\,2{,}710 - 0{,}260 + 0{,}875)\, X_7 + M_5 - 0{,}0835\, L_{0p} + 0{,}00556\, L_{\mathrm{I}p} -$$
$$-\,0{,}3355\, L_{\mathrm{I}p} + 0{,}499\, L_{0p} = 0,$$

$$X_5 = 0{,}499\, X_4 + 0{,}150\, X_7 - 0{,}0716\, M_5 - 0{,}0298\, L_{0p} + 0{,}0236\, L_{\mathrm{I}p} = 0,$$

$$(61{,}755 + 8{,}950 + 0{,}763 - 29{,}20 - 20{,}80)\, X_4 - 6{,}9675\, X_5 + (14{,}85 +$$
$$+ 2{,}565 - 25{,}60)\, X_3 + M_4 + 0{,}739\, M_7 - 0{,}349\, L_{0p} + 0{,}0232\, L_{\mathrm{I}p} -$$
$$0{,}445\, L_{\mathrm{I}p} + 0{,}664\, L_{0p} - 0{,}3324\, L_{\mathrm{II}p} = 0,$$

$$X_4 = 0{,}324\, X_5 + 0{,}380\, X_3 - 0{,}0465\, M_4 - 0{,}0344\, M_7 - 0{,}01465\, L_{0p} +$$
$$+ 0{,}01963\, L_{\mathrm{I}p} + 0{,}01545\, L_{\mathrm{II}p} = 0,$$

$$(15,\,063 + 1{,}880 - 1{,}470 + 0{,}038 - 0{,}040)\, X_7 - 2{,}095\, X_5 + (3{,}475 +$$
$$1{,}075 + 0{,}148)\, X_8 + (-\,2{,}710 + 3{,}475 - 1{,}125)\, X_3 + M_7 - 0{,}1824\, M_4$$
$$-\,0{,}472\, L_{0p} + 0{,}03145\, L_{\mathrm{I}p} - 0{,}0145\, L_{\mathrm{I}p} + 0{,}0216\, L_{0p} - 0{,}01455\, L_{\mathrm{II}p} = 0,$$

$$X_7 = 0{,}1354\, X_5 - 0{,}303\, X_8 + 0{,}0232\, X_3 - 0{,}0646\, M_7 + 0{,}01175\, M_4 +$$
$$+ 0{,}0291\, L_{0p} - 0{,}0011\, L_{\mathrm{I}p} + 0{,}00094\, L_{\mathrm{II}p},$$

$$(63{,}495 + 18{,}295 - 31{,}50 - 22{,}50)\, X_3 - 8{,}185\, X_4 - 0{,}360\, X_7$$
$$+ (14{,}850 + 2{,}580 - 25{,}40)\, X_2 - 0{,}409\, L_{\mathrm{II}p} - 0{,}329\, L_{\mathrm{III}p} = 0,$$

$$X_3 = 0{,}295\, X_4 + 0{,}01295\, X_7 + 0{,}2865\, X_2 + 0{,}0147\, L_{\mathrm{II}p} + 0{,}01183\, L_{\mathrm{III}p},$$

$$(16{,}388 + 9{,}250 - 0{,}550 - 0{,}342)\, X_8 + 4{,}698\, X_7 + (3.625 + 1{,}440)\, X_9 +$$
$$+ (2{,}580 - 5{,}900 + 3{,}120)\, X_2 + M_8 - 0{,}397\, M_3 + 0{,}054\, L_{\mathrm{II}p} + 0{,}0405\, L_{\mathrm{III}p} = 0,$$

$$X_8 = -\,0{,}1895\, X_7 - 0{,}205\, X_9 + 0{,}0081\, X_2 - 0{,}0404\, M_8 + 0{,}0160\, M_3 -$$
$$-\,0{,}00218\, L_{\mathrm{II}p} - 0{,}001635\, L_{\mathrm{III}p},$$

$$(65{,}702 + 11{,}400 - 28{,}450)\, X_2 - 7{,}970\, X_3 - 0{,}200\, X_8 + (14{,}850 +$$
$$+ 2{,}650)\, X_1 + M_2 - 0{,}710\, M_9 - 0{,}370\, L_{\mathrm{III}p} = 0,$$

$$X_2 = 0{,}1635\, X_3 + 0{,}0041\, X_8 - 0{,}359\, X_1 - 0{,}02055\, M_2 + 0{,}01455\, M_9 + 0{,}0076\, L_{\mathrm{III}p},$$

$$(18{,}782 + 3{,}260)\, X_9 + 5{,}065\, X_8 + (3{,}725 - 3{,}630)\, X_1 + M_9 - 0{,}244\, M_2 = 0,$$

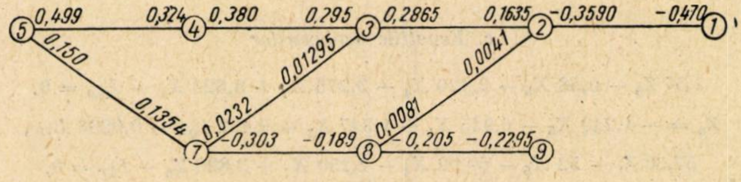


Fig. 6

$$X_9 = -\,0{,}2295\, X_8 - 0{,}0452\, M_9 + 0{,}01105\, M_2,$$

$$37{,}15\, X_1 + 17{,}500\, X_2 + 0{,}095\, X_9 + M_1 = 0,$$

$$X_1 = -\,0{,}470\, X_2 - 0{,}02695\, M_1.$$

În figura 6 este dată schema de transmisie pentru calculele iterative.

Pentru obţinerea momentelor încovoietoare, valorile deplasărilor se multiplică cu următorii coeficienţi :

$$\gamma_{5-4} = 0{,}5 + \frac{1}{6} \times 0{,}498 = 0{,}583\,;\quad \gamma_{4-5} = 0{,}5 + \frac{1}{3} \times 0{,}498 = 0{,}6662\,;$$

$$\gamma_{4-3} = 0{,}5 + \frac{1}{6} \times 0{,}600 = 0{,}600\,;\quad \gamma_{3-4} = 0{,}5 + \frac{1}{3} \times 0{,}600 = 0{,}700\,;$$

$$\gamma_{3-2} = 0{,}5 + \frac{1}{6} \times 0{,}712 = 0{,}6187\,;\quad \gamma_{2-3} = 0{,}5 + \frac{1}{3} \times 0{,}713 = 0{,}737.$$

### e. $V = 1\,000$

$$L_{0p} = 17\,500\,;\ L_{\mathrm{I}p} = (3{,}50 - 14 \times 0{,}498)\,1\,000 = -\,3\,480\,;$$

$$L_{\mathrm{II}p} = (3{,}50 - 10{,}50 \times 0{,}600)\,1\,000 = -\,2\,800\,;\ L_{\mathrm{III}p} = (3{,}50 -$$

$$-\,7{,}00 \times 0{,}712)\,1\,000 = -\,1\,480\,;\ M_{1p} = 3\,500\,;\ \overline{X}_5 = -\,522 - 82 = -\,604\,;$$

$$\overline{X}_4 = -\,257 - 68{,}30 - 43{,}30 = -\,368{,}60\,;\ \overline{X}_7 = 510 + 3{,}83 - 2{,}63 =$$

$$= 511{,}20\,;\ \overline{X}_3 = -\,41{,}10 - 17{,}50 = -\,58{,}60\,;\ \overline{X}_8 = 6{,}10 + 2{,}42 =$$

$$= 8{,}52\,;\ \overline{X}_2 = -\,11{,}25\,;\ \overline{X}_1 = 94{,}200.$$

În paranteze sînt trecute rotirile efective. Valorile momentelor sînt trecute de-a lungul barelor, la noduri.

În figura 7 este făcut calculul iterativ. Cu valorile rotirilor astfel găsite mărimile deplasărilor sînt :

$$Z_0 = 1170 + 750 + 545 + 7\,550 + 100 = 10\,115,$$

$$Z_{\mathrm{I}} = 927 - 1\,005 - 20{,}40 - 505 - 67{,}50 = -\,2\,524{,}90,$$

$$Z_{\mathrm{II}} = 790 + 17{,}65 - 390 + 11{,}80 - 44{,}50 = -\,1\,195{,}05,$$

$$Z_{\mathrm{III}} = -\,314 + 8{,}85 - 129 - 21{,}30 = -\,455{,}45.$$

### f. $M = 1\,000$

$$L_{0p} = 1\,000\,;\ L_{\mathrm{I}p} = -\,498\,;\ L_{\mathrm{II}p} = -\,600\,;\ L_{\mathrm{III}p} = -\,712\,;\ M_{5p} = -\,1\,000$$

$$\overline{X}_5 = -\,29{,}80 - 11{,}80 = -\,41{,}60\,;\ \overline{X}_4 = -\,14{,}65 - 9{,}77 - 9{,}25 = -\,33{,}67\,;$$

$$\overline{X}_7 = 29{,}10 + 0{,}55 - 0{,}56 = 29{,}09\,;\ \overline{X}_3 = -\,8{,}80 - 8{,}44 = -\,17{,}24\,;$$

$$\overline{X}_8 = 1{,}31 + 1{,}165 = 2{,}475\,;\ \overline{X}_2 = -\,5{,}41\,;\ X_1 = 26{,}95.$$

În figura 8 este făcut calculul iterativ. Valorile deplasărilor sînt :

$$Z_0 = 96{,}00 + 72{,}20 + 24{,}25 + 432{,}00 + 14{,}40 = 638{,}85,$$

$$Z_{\mathrm{I}} = 76{,}20 - 96{,}50 - 0{,}91 - 28{,}80 - 9{,}65 = -212{,}06,$$

$$Z_{\mathrm{II}} = -76{,}00 - 58{,}00 + 0{,}785 + 0{,}18 - 9{,}53 = -142{,}565,$$

$$Z_{\mathrm{III}} = -46{,}60 - 30{,}20 + 0{,}135 - 10{,}25 = -86{,}915.$$

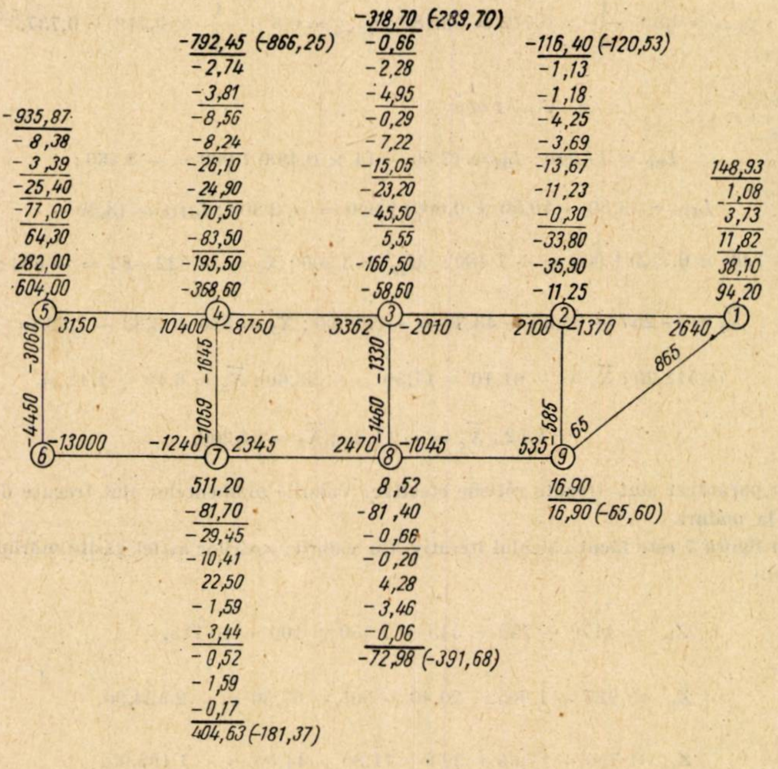

-935,87
- 8,38
- 3,39
-25,40
-77,00
64,30
282,00
604,00
-792,45 (-866,25)
-2,74
-3,81
-8,56
-8,24
-26,10
-24,90
-70,50
-83,50
-195,50
-368,60
-318,70 (-289,70)
-0,66
-2,28
-4,95
-0,29
-7,22
-15,05
-23,20
-45,50
5,55
-166,50
-58,60
-116,40 (-120,53)
-1,13
-1,18
-4,25
-3,69
-13,67
-11,23
-0,30
-33,80
-35,90
-11,25
148,93
1,08
3,73
11,82
38,10
94,20
5
4
3
2
1
6
7
8
9
3150
10400
-8750
3362
-2010
2100
-1370
2640
865
-3060
-4450
-1645
-1059
-1330
-1460
-585
65
-13000
-1240
2345
2470
-1045
535
511,20
-81,70
-29,45
-10,41
22,50
- 1,59
- 3,44
- 0,52
- 1,59
-0,17
404,63 (-181,37)
8,52
-81,40
-0,66
-0,20
4,28
-3,46
-0,06
-72,98 (-391,68)
16,90
16,90 (-65,60)

Fig. 7

g. $H = 1\ 000$

$$L_{0p} = -5\ 000\,;\ L_{\mathrm{I}p} = -0{,}600 \times 1\ 000 \times 0{,}498 = -299\,;$$

$$L_{\mathrm{II}p} = -360\,;\ L_{\mathrm{III}p} = -427{,}5\,;\ \overline{X}_5 = 149 - 7{,}05 = 141{,}95\,;$$

$$\overline{X}_4 = 73{,}25 - 5{,}87 - 5{,}55 = 61{,}83\,;\ \overline{X}_7 = -145{,}50 + 0{,}329 - 0{,}34 =$$

$$= -145{,}511\,;\ \overline{X}_3 = -5{,}30 - 5{,}05 = -10{,}35\,;\ \overline{X}_8 = 0{,}785 + 0{,}700 =$$

$$= 1{,}485\,;\ \overline{X}_2 = -3{,}25.$$

Calculul este făcut în figura 9.

$$Z_0 = -236{,}00 - 125{,}50 - 172{,}00 - 2\,160{,}00 + 8{,}60 = -2\,684{,}90,$$

$$Z_{\mathrm{I}} = 187{,}50 + 168{,}40 + 6{,}45 + 144{,}00 - 5{,}79 = 500{,}56,$$

$$Z_{\mathrm{II}} = 132{,}00 - 5{,}57 + 33{,}70 - 4{,}40 - 5{,}70 = 150{,}03,$$

$$Z_{\mathrm{III}} = 27{,}10 - 3{,}30 + 1{,}225 - 6{,}150 = 18{,}875.$$

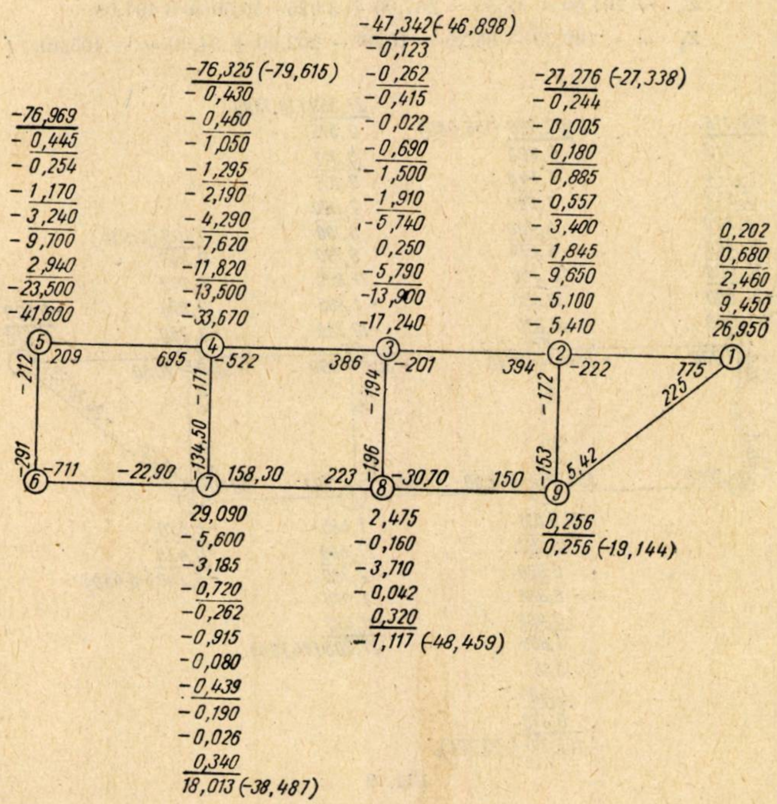

-76,969
- 0,445
- 0,254
- 1,170
- 3,240
- 9,700
2,940
-23,500
-41,600
-76,325 (-79,615)
- 0,430
- 0,460
- 1,050
- 1,295
- 2,190
- 4,290
- 7,620
-11,820
-13,500
-33,670
-47,342 (-46,898)
-0,123
-0,262
-0,415
-0,022
-0,690
-1,500
-1,910
-5,740
0,250
-5,790
-13,900
-17,240
-27,276 (-27,338)
- 0,244
- 0,005
- 0,180
- 0,885
- 0,557
- 3,400
- 1,845
- 9,650
- 5,100
- 5,410
0,202
0,680
2,460
9,450
26,950
5
209
-212
695
4
-522
-171
386
3
-201
-194
394
2
-222
-172
775
225
1
-291
-711
6
-22,90
-134,50
7
158,30
223
-196
8
-30,70
150
-153
9
5,42
29,090
- 5,600
-3,185
- 0,720
-0,262
-0,915
-0,080
-0,439
-0,190
-0,026
0,340
18,013 (-38,487)
2,475
-0,160
-3,710
- 0,042
0,320
- 1,117 (-48,459)
0,256
0,256 (-19,144)

Fig. 8

h. $P = 1\,000\,t$ *în 4*

$$L_{0p} = 3\,500\,;\ L_{\mathrm{I}p} = 3\,500\,;\ \overline{X}_5 = -21{,}70\,;\ \overline{X}_4 = 17{,}50\,;\ \overline{X}_7 = 98{,}00.$$

Calculul este făcut în figura 10

$$Z_0 = -6{,}360 - 21{,}000 + 141{,}30 + 1\,410{,}00 = 1\,523{,}94,$$

$$Z_{\mathrm{I}} = 5{,}050 + 28{,}20 - 5{,}30 - 33{,}10 = -5{,}150\,;$$

$$Z_{\mathrm{II}} = 22{,}100 + 4{,}590 + 10{,}200 + 3{,}360 = 40{,}250,$$

$$Z_{\mathrm{III}} = 8{,}200 + 2{,}520 + 1{,}680 = 12{,}400.$$

i. $P = 1\,000\,t$ *în* $3$

$L_{0P} = 7\,000$ ; $L_{IP} = 3\,500\,(1-0{,}498) = 1\,755$ ; $L_{IIP} = 3\,500$ ;

$\overline{X}_5 = -\,208{,}50 + 41{,}50 = -\,167{,}00$ ; $\overline{X}_4 = -\,102{,}50 + 34{,}45 + 54{,}00 =$

$-\,14{,}05$ ; $\overline{X}_7 = 204{,}00 - 1{,}93 + 3{,}29 = 205{,}36$ ; $\overline{X}_3 = 51{,}50$ : $\overline{X}_8 = -\,7{,}64$.

**Calculul este făcut în figura 11.**

$Z_0 = 204{,}00 + 48{,}55 + 267{,}00 + 3\,025 - 50{,}50 = 3\,494{,}05,$

$Z_I = -\,162{,}20 - 65{,}20 - 10{,}00 - 202{,}00 + 34{,}00 = -\,405{,}40,$

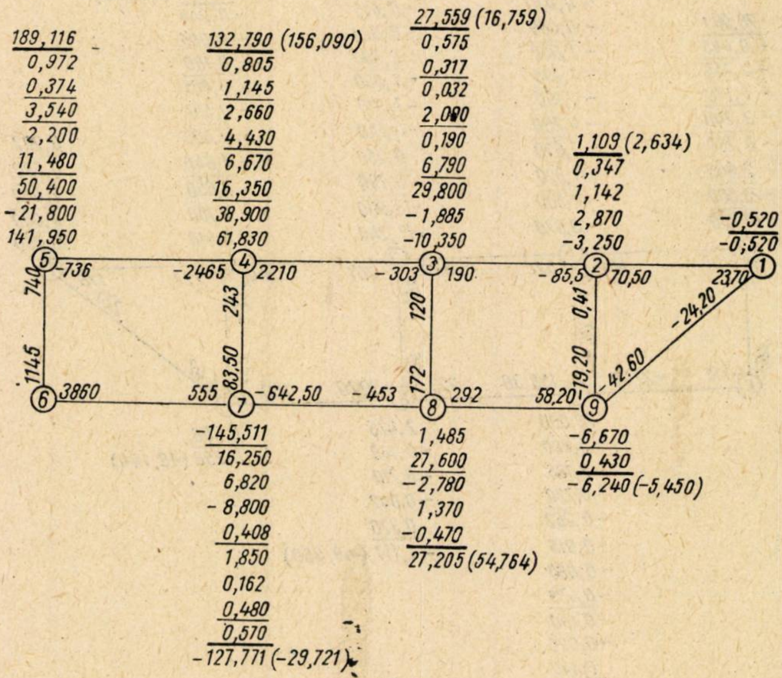

189,116
0,972
0,374
3,540
2,200
11,480
50,400
-21,800
141,950
132,790 (156,090)
0,805
1,145
2,660
4,430
6,670
16,350
38,900
61,830
27,559 (16,759)
0,575
0,317
0,032
2,080
0,190
6,790
29,800
-1,885
-10,350
1,109 (2,634)
0,347
1,142
2,870
-3,250
-0,520
-0,520
5
-736
740
1145
4
-2465
2210
243
83,50
3
-303
190
120
172
2
-85,5
70,50
0,41
19,20
1
2370
-24,20
-42,60
6
3860
555
7
-642,50
-453
8
292
58,20
9
-145,511
16,250
6,820
-8,800
0,408
1,850
0,162
0,480
0,570
-127,771 (-29,721)
1,485
27,600
-2,780
1,370
-0,470
27,205 (54,764)
-6,670
0,430
-6,240 (-5,450)

Fig. 9

$Z_{II} = -\,51{,}20 + 8{,}65 + 50{,}30 + 7{,}60 + 55{,}50 = 70{,}850.$

$Z_{III} = 40{,}50 + 5{,}72 + 8{,}90 = 55{,}12.$

j. $P = 1\,000\,t$ *în* $2$

$L_{0P} = 10\,500$ ; $L_{IP} = 3\,500\,(1 - 2 \times 0{,}498) = 14$ ; $L_{IIP} = 3\,500\,(1-0{,}60) =$

$= 1\,400$ ; $L_{IIIP} = 3\,500$ ; $\overline{X}_5 = -\,313{,}00 + 0{,}33 = -\,312{,}67$ ;

$\overline{X}_4 = -\,153{,}50 + 0{,}275 + 21{,}60 = -\,131{,}625$ ; $\overline{X}_7 = 305{,}00 - 0{,}015 +$

$+ 1{,}315 = 306{,}300$ ; $\overline{X}_3 = 20{,}60 + 41{,}50 = 62{,}10$ ; $\overline{X}_8 = -\,3{,}05 - 5{,}72$

$= -\,8{,}77$ ; $\overline{X}_2 = 26{,}60.$

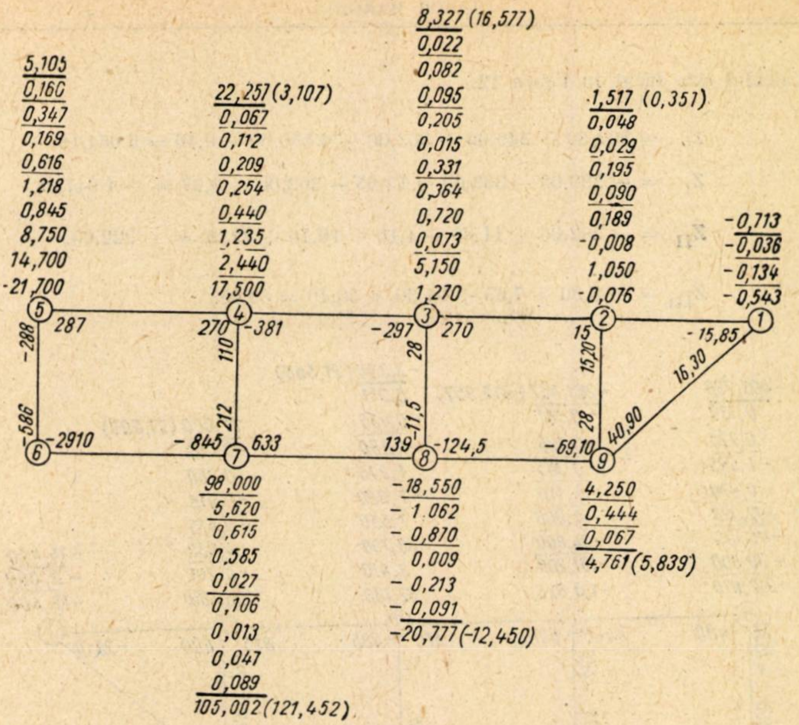

5,105
0,160
0,347
0,169
0,616
1,218
0,845
8,750
14,700
-21,700
22,257 (3,107)
0,067
0,112
0,209
0,254
0,440
1,235
2,440
17,500
8,327 (16,577)
0,022
0,082
0,095
0,205
0,015
0,331
0,364
0,720
0,073
5,150
1,270
1,517 (0,351)
0,048
0,029
0,195
0,090
0,189
-0,008
1,050
-0,076
-0,713
-0,036
-0,134
-0,543
5
4
3
2
1
287
270
-381
-297
270
15
-15,85
-288
110
28
15,20
16,30
-586
212
-11,5
28
40,90
-2910
-845
633
139
-124,5
-69,10
6
7
8
9
98,000
5,620
0,615
0,585
0,027
0,106
0,013
0,047
0,089
105,002 (121,452)
-18,550
- 1.062
- 0,870
0,009
- 0,213
- 0,091
-20,777 (-12,450)
4,250
0,444
0,067
4,761 (5,839)

Fig. 10

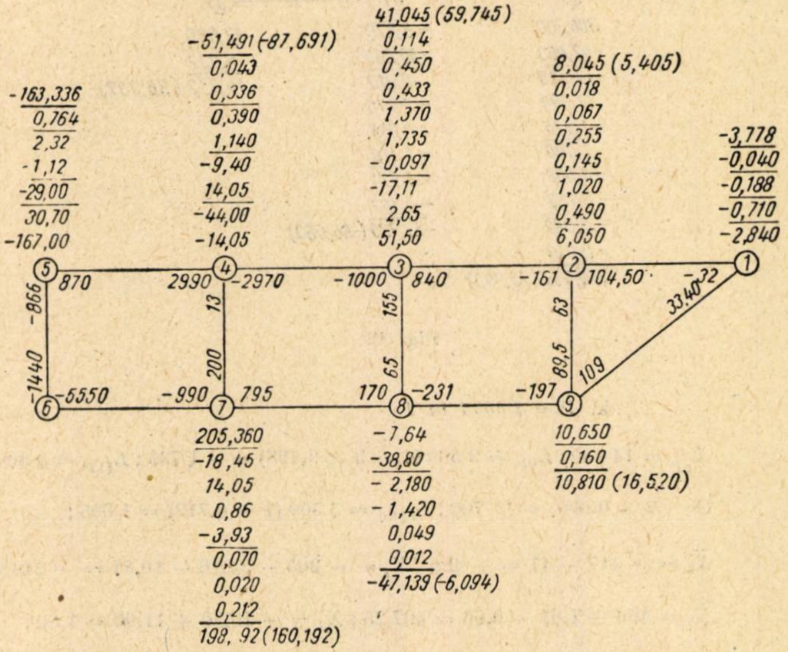

-163,336
0,764
2,32
-1,12
-29,00
30,70
-167,00
-51,491 (-87,691)
0,043
0,336
0,390
1,140
-9,40
14,05
-44,00
-14,05
41,045 (59,745)
0,114
0,450
0,433
1,370
1,735
-0,097
-17,11
2,65
51,50
8,045 (5,405)
0,018
0,067
0,255
0,145
1,020
0,490
6,050
-3,778
-0,040
-0,188
-0,710
-2,840
5
4
3
2
1
870
2990
-2970
-1000
840
-161
104,50
-32
-866
13
155
63
33,40
-1440
200
65
89,5
109
-5550
-990
795
170
-231
-197
6
7
8
9
205,360
-18,45
14,05
0,86
-3,93
0,070
0,020
0,212
198,92 (160,192)
-7,64
-38,80
- 2,180
- 1,420
0,049
0,012
-47,139 (-6,094)
10,650
0,160
10,810 (16,520)

Fig. 11

Calculul este făcut în figura 12.

$$Z_0 = 502{,}50 + 249{,}00 + 363{,}00 + 4\,550{,}00 - 0{,}40 = 5\,664{,}10,$$

$$Z_I = -399{,}00 - 333{,}00 - 13{,}65 - 302{,}00 + 0{,}27 = -1\,047{,}38,$$

$$Z_{II} = -262{,}00 + 11{,}80 - 4{,}10 + 10{,}10 + 22{,}20 = -222{,}00,$$

$$Z_{III} = -3{,}30 + 7{,}65 + 34{,}30 + 50{,}40 = 89{,}05.$$

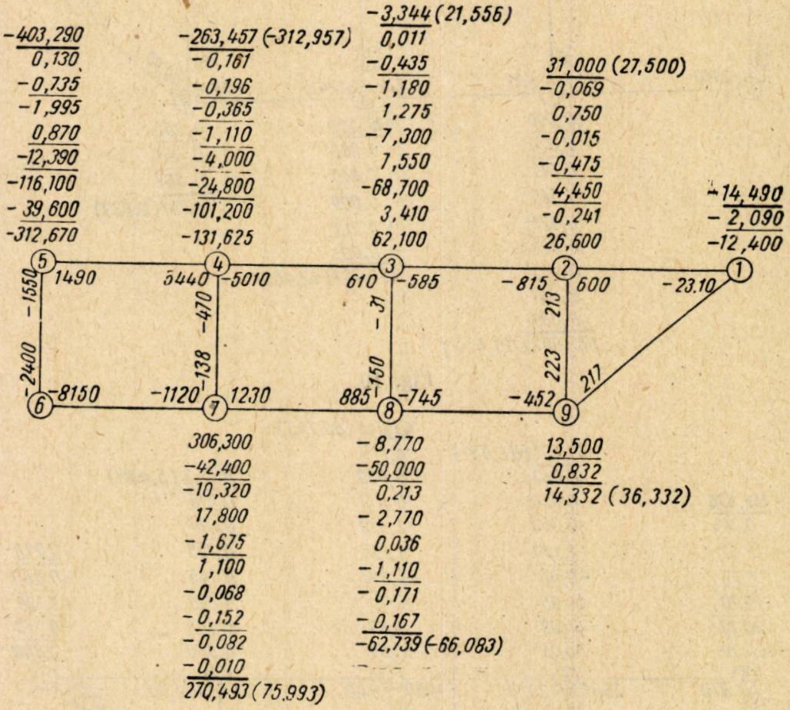

-403,290
0,130
-0,735
-1,995
0,870
-12,390
-116,100
-39,600
-312,670
-263,457 (-312,957)
-0,161
-0,196
-0,365
-1,110
-4,000
-24,800
-101,200
-131,625
-3,344 (21,556)
0,011
-0,435
-1,180
1,275
-7,300
7,550
-68,700
3,410
62,100
31,000 (27,500)
-0,069
0,750
-0,015
-0,475
4,450
-0,241
26,600
-14,490
-2,090
-12,400
5
1490
-1550
-2400
4
5440
-5010
-470
-138
3
610
-585
-31
-150
2
-815
600
213
223
217
1
-23.10
6
-8150
7
-1120
1230
8
885
-745
9
-452
306,300
-42,400
-10,320
17,800
-1,675
1,100
-0,068
-0,152
-0,082
-0,010
270,493 (75.993)
-8,770
-50,000
0,213
-2,770
0,036
-1,110
-0,171
-0,167
-62,739 (-66,083)
13,500
0,832
14,332 (36,332)

Fig. 12

k. $P = 1\,000\,t$ în 1

$L_{0P} = 14\,000$ ; $L_{IP} = 3\,500\,(1 - 3 \times 0{,}498) = -1\,735$ ; $L_{IIP} = 3\,500$ $(1 - 2 \times 0{,}600) = -700$ ; $L_{IIIP} = 3\,500\,(1 - 0{,}712) = 1\,005$ ;

$\overline{X}_5 = -417 - 41 = -485$ ; $\overline{X}_4 = -205 - 34{,}10 - 10{,}81 = -249{,}91$ ;

$\overline{X}_7 = 406 + 1{,}91 - 0{,}66 = 407{,}25$ ; $\overline{X}_3 = -10{,}30 + 11{,}90 = 1{,}60$ ;

$\overline{X}_8 = 1{,}52 - 1{,}645 = -0{,}125$ ; $\overline{X}_2 = 7{,}65$.

*Tabela 1*

**Ordonatele deformaţiilor unitare şi δ HP**

| $P = 1$t în | $Z_0 = 1$ | $Z_I = 1$ | $Z_{II} = 1$ | $Z_{III} = 1$ | $\delta_H^0$ | $-224 \times$ $Z_0 = 1$ | $41{,}60 \times$ $Z_I = 1$ | $12{,}50 \times$ $Z_{II} = 1$ | $1{,}57 \times$ $Z_{III} = 1$ | $\delta HP$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5′ *) | 1,75 | 1,75 | — | — | 3,62 | – 392,00 | 72,80 | — | — | – 315,58 |
| 4 | 3,50 | 3,50 | — | — | — | – 784 | 145,50 | — | — | – 638,50 |
| 4′ | 5,25 | 2,627 | 1,75 | — | 15,25 | – 1 175 | 109,50 | 21,90 | — | – 1 028,35 |
| 3 | 7,00 | 1,76 | 3,50 | — | — | – 1 565 | 73,30 | 43,80 | — | – 1 447,90 |
| 3′ | 8,75 | 0,88 | 2,45 | 1,75 | 1,55 | – 1 960 | 36,70 | 30,60 | 2,75 | – 1 888,40 |
| 2 | 10,50 | 0,02 | 1,40 | 3,50 | — | – 2 350 | 0,83 | 17,50 | 5,50 | – 2 326,17 |
| 2′ | 12,25 | – 0,85 | 0,35 | 2,255 | 0,345 | – 2 740 | – 35,40 | 4,38 | 3,53 | – 2 767,14 |
| 1 | 14,00 | – 1,73 | – 0,70 | 1,01 | — | – 3 130 | – 72,00 | – 8,76 | 1,59 | – 3 209,17 |
| 1′ | 15,75 | – 2,60 | – 1,75 | – 0,24 | — | – 3 530 | – 108,00 | – 21,90 | – 0,38 | – 3 660,28 |
| 0 | 17,50 | – 3,48 | – 2,80 | – 1,48 | — | – 3 920 | – 145,00 | – 35,00 | – 2,32 | – 4 102,32 |
| $H = 1$ | – 5,00 | – 0,299 | – 0,36 | – 0,4275 | — | 1 120 | – 12,45 | – 4,50 | – 0,67 | + 2 204,76 |
| $M = 1$ | 1,00 | – 0,498 | – 0,60 | – 0,712 | — | – 224 | – 20,80 | – 7,50 | – 1,12 | – 506,84 |

*) Prin punctul 5′ se înţelege jumătatea distanţei dintre 5 şi 4 şi aşa mai departe.

*Tabela 2*

**δ *MP* şi liniile de influenţă ale lui $M_{tot}$**

| $P = 1$t în | $\delta_M^0$ | $53{,}25 \times$ $Z_0 = 1$ | $-17{,}70 \times$ $Z_I = 1$ | $-11{,}87 \times$ $Z_{II} = 1$ | $-7{,}25 \times$ $Z_{III} = 1$ | $\delta_{MP}$ | $0{,}230 \times$ $\delta_{HP}$ | $\delta_{MP}$ final | $M_{tot}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5′ | 0,29 | 93,00 | – 31,00 | — | — | 62,29 | – 72,50 | – 10,21 | 0,0965 |
| 4 | — | 186,50 | – 62,00 | — | — | 124,50 | – 147,00 | – 22,50 | 0,2125 |
| 4′ | – 3,57 | 280,00 | – 46,50 | – 20,80 | — | 209,13 | – 236,00 | – 26,87 | 0,2540 |
| 3 | — | 373,00 | – 31,10 | – 41,50 | — | 300,40 | – 333,00 | – 32,60 | 0,3080 |
| 3′ | – 2,14 | 466,00 | – 15,60 | – 29,10 | – 12,70 | 406,46 | – 435,00 | – 28,54 | 0,2700 |
| 2 | — | 560,00 | – 0,35 | – 16,60 | – 25,40 | 517,65 | – 535,00 | – 17,35 | 0,1640 |
| 2′ | – 7,33 | 652,50 | 15,00 | – 4,15 | – 16,32 | 639,70 | – 636,00 | 3,70 | – 0,0350 |
| 1 | — | 745,00 | 30,60 | + 8,30 | – 7,32 | 776,58 | – 738,00 | 38,58 | – 0,364 |
| 1′ | 29,16 | 839,00 | 46,00 | 20,80 | 1,74 | 936,70 | – 842,00 | 94,70 | – 0,895 |
| 0 | 81,95 | 932,00 | 61,50 | 33,30 | 10,72 | 1 119,47 | – 945,00 | 174,47 | – 1,650 |
| $H = 1$ | — | – 266,00 | 5,30 | 4,27 | 3,10 | – 506,66 | — | — | — |
| $M = 136{,}85$ | — | 53,25 | 8,80 | 7,12 | 5,17 | 222,38 | – 116,50 | 105,88 | — |

$$\xi = -\frac{\delta_{MH}}{\delta_{HH}} = \frac{506{,}75}{2\,204{,}76} = 0{,}230$$

*Tabela 3*

**Linia de influență a lui** *H* **și** *V*

| $P = 1\text{t}$ în | $\delta_{HP}$ | $2{,}28 \times \delta_{MP}$ | $\delta_{HP}$ final | $H$ | $\delta_V^0$ | $845 \times Z_0 = 1$ | $-211 \times Z_I = 1$ | $-99{,}5 \times Z_{II} = 1$ | $-38 \times Z_{III} = 1$ | $\delta_{VP}$ final | $V$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5′ | − 315,58 | 142,00 | − 173,58 | 0,165 | − 7,62 | 1 480 | −369 | — | — | 1 103,38 | 0,0347 |
| 4 | − 638,50 | 283,00 | − 355,50 | 0.339 | — | 2 960 | −740 | — | — | 2 220,00 | 0,070 |
| 4′ | −1 028,35 | 475,00 | − 553,35 | 0,530 | − 63,00 | 4 440 | −555 | − 174 | — | 3 648 | 0,115 |
| 3 | −1 447,90 | 685,00 | − 762,90 | 0,725 | — | 5 920 | −371 | − 348 | — | 5 201 | 0,1640 |
| 3′ | −1 888,40 | 925,00 | − 963,40 | 0,917 | − 18,50 | 7 400 | −186 | − 244 | − 66,50 | 6 885 | 0,2170 |
| 2 | −2 326,17 | 1 180,00 | −1 146,17 | 1,095 | — | 8 900 | −422 | − 139 | −133 | 8 623,78 | 0,272 |
| 2′ | −2 767,15 | 1 455,00 | −1 312,15 | 1,250 | − 29,50 | 10 350 | 179 | − 34,80 | − 85,50 | 10 379,20 | 0,327 |
| 1 | −3 209,17 | 1 770,00 | −1 439,17 | 1,370 | — | 11 810 | 365 | + 69,60 | − 38,40 | 12 206,20 | 0,385 |
| 1′ | −3 660,28 | 2 140,00 | −1 520,28 | 1,450 | − 31,00 | 13 300 | 550 | 174 | 9,10 | 14 033,10 | 0,441 |
| 0 | −4 102,32 | 2.550,00 | −1 552,32 | 1,480 | − 103,00 | 14 800 | 735 | 279 | 56,20 | 15 870,20 | 0,500 |
| *H* | 2 204,76 | −1 155,00 | 1 049,76 | — | — | — | — | — | — | — | — |

$$\varphi = \frac{\delta_{MH}}{\delta_{MM}} = \frac{506{,}84}{222{,}38} = 2{,}28$$

### *Tabela 4*

**Liniile de influență a momentelor încovoietoare**

| Expresia momentelor | $P = 1t$ în | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1″ *) | 2″ | 3″ | 4″ |
| $M^0_{5-4}$ | 0,287 | 0,868 | 1,520 | 2,305 | 3,105 | — | — | — | — |
| $-3{,}105\ V$ | −0,217 | −0,510 | −0,845 | −1,195 | −1,552 | 1,195 | 0,845 | 0,510 | 0,217 |
| $0{,}210\ M$ | 0,045 | 0,064 | 0,034 | −0,076 | −0,347 | −0,076 | 0,034 | 0,064 | 0,045 |
| $-0{,}738\ H$ | −0,250 | −0,535 | −0,810 | −1,010 | −1,095 | −1,010 | −0,810 | −0,535 | −0,250 |
| $M_{5-4}$ | −0,135 | −0,113 | −0,101 | −0,024 | −0,111 | −0,109 | 0,069 | 0,039 | 0,022 |
| $M^0_{3-8}$ | 0,028 | 0,155 | −0,027 | −0,640 | −1,330 | — | — | — | — |
| $1{,}33\ V$ | 0,093 | 0,218 | 0,362 | 0,513 | 0,665 | −0,513 | −0,362 | −0,218 | −0,093 |
| $-0{,}192\ M$ | −0,040 | −0,059 | −0,031 | 0,070 | 0,317 | 0,070 | −0,031 | −0,059 | −0,040 |
| $0{,}120\ H$ | 0,040 | 0,087 | 0,131 | 0,164 | 0,177 | 0,164 | 0,131 | 0,087 | 0,040 |
| $M_{3-8}$ | 0,121 | 0,401 | 0,435 | 0,107 | −0,171 | −0,279 | −0,262 | −0,190 | −0,093 |
| $M^0_{4-7}$ | 0,110 | −0,013 | −0,468 | −1,056 | −1,645 | — | — | — | — |
| $1{,}645\ V$ | 0,115 | 0,270 | 0,446 | 0,634 | 0,823 | −0,634 | −0,446 | −0,270 | −0,115 |
| $-0{,}172\ M$ | −0,036 | −0,053 | −0,028 | 0,062 | 0,284 | 0,062 | −0,028 | −0,053 | −0,036 |
| $0{,}244\ H$ | 0,082 | 0,177 | 0,267 | 0,334 | 0,361 | 0,334 | 0,267 | 0,177 | 0,082 |
| $M_{4-7}$ | 0,271 | 0,381 | 0,217 | −0,026 | −0,177 | −0,238 | −0,207 | −0,146 | −0,069 |
| $M^0_{6-7}$ | −2,920 | −5,550 | −8,130 | −10,600 | −13,020 | — | — | — | — |
| $13{,}02\ V$ | 0,912 | 2,130 | 3,530 | 5,000 | 6,510 | −5,000 | −3,530 | −2,130 | −0,912 |
| $-0{,}711\ M$ | 0,151 | −0,219 | −0,117 | 0,259 | 1,175 | 0,259 | −0,117 | −0,219 | −0,151 |
| $3{,}860\ H$ | 1,310 | 2,800 | 4,220 | 5,280 | 5,700 | 5,280 | 4,220 | 2,800 | 1,310 |
| $M_{6-7}$ | −0,849 | −0,839 | −0,497 | −0,061 | 0,365 | 0,539 | 0,573 | 0,451 | 0,247 |
| $M^0_{2-3}$ | −0,015 | −0,163 | −0,814 | 0,681 | 2,092 | — | — | — | — |
| $-2{,}092\ V$ | −0,146 | −0,343 | −0,570 | −0,805 | −1,046 | 0,805 | 0,570 | 0,343 | 0,146 |
| $0{,}394\ M$ | 0,084 | 0,121 | 0,064 | −0,143 | −0,650 | −0,143 | 0,064 | 0,121 | 0,084 |
| $-0{,}080\ H$ | −0,027 | −0,058 | −0,087 | −0,109 | −0,118 | −0,109 | −0,087 | −0,058 | −0,027 |
| $M_{2-3}$ | −0,104 | −0,443 | −1,407 | −0,376 | 0,278 | 0,553 | 0,547 | 0,406 | 0,203 |

---

*) Prin punctele 1″, 2″... se înțeleg simetricele punctelor 1, 2, ... față de cheia bolții. În același mod pot fi calculate toate liniile de influență.

Calculul este făcut în figura 13.

$$Z_0 = 835{,}00 + 495{,}00 + 448{,}00 + 6\,050{,}00 + 50{,}00 = 7\,878{,}00,$$

$$Z_{\mathrm{I}} = -\,663{,}00 - 663{,}00 - 16{,}80 - 402{,}00 - 33{,}60 = -\,1778{,}40,$$

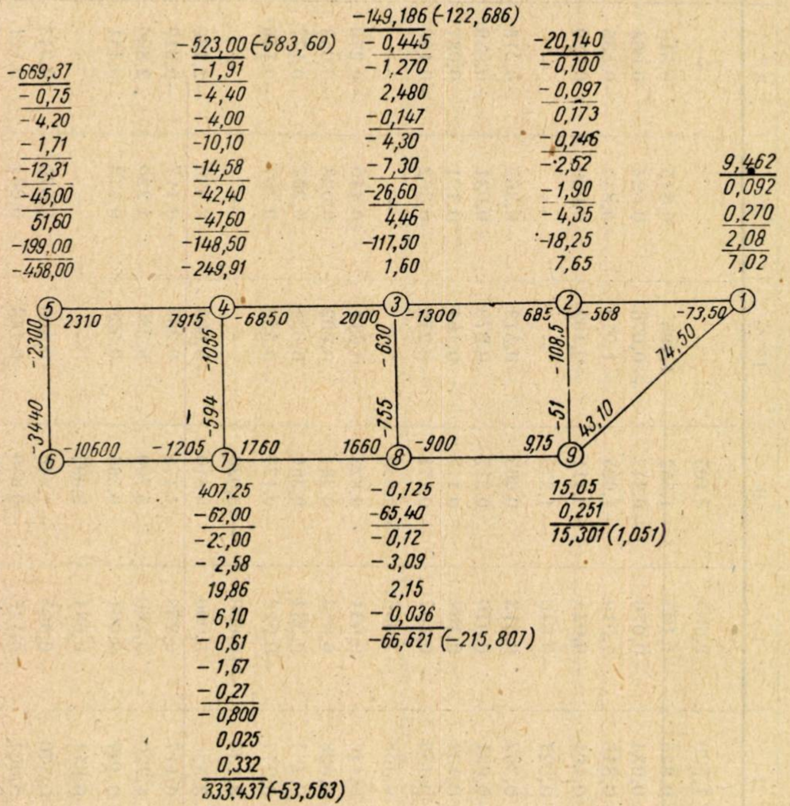

-669,37
-0,75
-4,20
-1,71
-12,31
-45,00
51,60
-199,00
-458,00
-523,00 (-583,60)
-1,91
-4,40
-4,00
-10,10
-14,58
-42,40
-47,60
-148,50
-249,91
-149,186 (-122,686)
-0,445
-1,270
2,480
-0,147
-4,30
-7,30
-26,60
4,46
-117,50
1,60
-20,140
-0,100
-0,097
0,173
-0,746
-2,52
-1,90
-4,35
-18,25
7,65
9,462
0,092
0,270
2,08
7,02
5
2310
7915
4
-6850
2000
3
-1300
685
2
-568
-73,50
1
-2300
-1055
-630
-108,5
74,50
-3440
-594
-755
-51
43,10
6
-10600
-1205
7
1760
1660
8
-900
9,75
9
407,25
-62,00
-25,00
-2,58
19,86
-6,10
-0,61
-1,67
-0,27
-0,800
0,025
0,332
333,437 (-53,563)
-0,125
-65,40
-0,12
-3,09
2,15
-0,036
-66,621 (-215,807)
15,05
0,251
15,301 (1,051)

Fig. 13

$$Z_{\mathrm{II}} = -\,520{,}00 + 14{,}52 - 183{,}00 + 10{,}78 - 11{,}12 = -\,688{,}82,$$

$$Z_{\mathrm{III}} = -\,147{,}00 + 8{,}10 - 22{,}30 + 14{,}40 = -\,146{,}80.$$

*Primită la redacție la 18 februarie 1960*

# РАСЧЕТ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ АРОЧНЫХ МОСТОВ С ПРОЛЕТНЫМ СТРОЕНИЕМ, ПОДДЕРЖИВАЕМЫМ СТЕНКАМИ

## РЕЗЮМЕ

Автор излагает метод для расчета арочных мостов с пролетным строением, поддерживаемым стенками. Рассматриваются два случая упирания главных балок на своде, а именно:

— неразрезные главные балки, упирающие постоянно свод в области замочного камня;

— главные балки, прерванные у замочного камня и заделанные в своде.

В расчетах для установления неизвестных внутренних усилий в замочном камне применяется метод усилий.

Единичные перемещения, необходимые для установления этих уравнений, определяются методом деформаций для половины моста.

Этой систематизацией расчета неизвестные линейные перемещения можно легко исключить, причем расчет проводится путем итерации в одной ступени. Сходимость итераций улучшается применением группированных колес.

Изложенную теорию сопровождает полный расчетный пример.

## DIE BERECHNUNG DER EINFLUSSLINIEN DER BOGENBRÜCKEN MIT WANDARTIG GESTÜTZTER FAHRBAHN

### ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser stellt eine Berechnungsmethode für Bogenbrücken mit wandartig gestützter Fahrbahn auf. Es werden zwei Auflagefälle der Längsträger auf dem Bogen betrachtet, und zwar :

— die ununterbrochenen Längsträger, die ohne Unterbrechung in der Schlüsselgegend auf dem Bogen aufliegen,

— die am Schlüssel unterbrochenen und im Bogen eingespannten Längsträger.

Bei der Berechnung wird zur Bestimmung der unbekannten inneren Spannungen des Schlüssels die Spannungsmethode angewandt.

Die zur Aufstellung dieser Gleichungen erforderlichen Einheitsverschiebungen werden mit Hilfe der Deformationsmethode für eine Brückenhälfte bestimmt.

Durch diese Systematisierung der Rechnungen können die unbekannten Linearverschiebungen leicht eliminiert und die Rechnung iterativ in einer einzigen Stufe durchgeführt werden. Die Konvergenz der Iterationen wird durch Anwendung der Gruppenverdrehungen verbessert.

Die theoretischen Ausführungen sind durch ein durchgerechnetes Zahlenbeispiel illustriert.

### BIBLIOGRAFIE

1. I. HARGHEL, *Utilizarea rotirilor grupate în calculul cadrelor cu noduri deplasabile*. Industria construcţiilor şi materialelor de construcţii, *7* (1957).
2. G. AZNAVORIAN, R. AGENT, *O metodă iterativă de calcul a cadrelor cu noduri deplasabile. Metoda nodurilor fictive*, Industria construcţiilor şi materialelor de construcţii, *12* (1956).
3. I. P. PROCOFIEV, Statistica construcţiilor. II. OPED CFR, Bucureşti, 1951.
4. I. HARGHEL, *Calculul podurilor pe bolţi cu tablier continuu*. I. Revista transporturilor, *3* (1955).
5. — *Calculul podurilor pe bolţi cu tablier continuu*. II. Revista transporturilor, *4* (1956).

# NOTE

## ÎNCOVOIEREA UNEI BARE PRISMATICE AVÎND SECȚIUNEA TRANSVERSALĂ MĂRGINITĂ DE LEMNISCATA LUI BOOTH

DE

E. DEUTSCH

Lemniscata lui Booth este curba inversă a unei elipse în raport cu centrul ei [1] (fig. 1). Dacă notăm cu $a'$, $b'$ ($a' > b'$) semiaxele unei elipse, atunci ecuația carteziană a lemniscatei lui Booth se poate scrie

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = (x^2 + y^2)^2.$$

Problema torsiunii barelor avînd secțiunea mărginită de lemniscata lui Booth a fost rezolvată de Mushelișvili [2], [3].

În această lucrare vom rezolva problema încovoierii barelor omogene și izotrope, avînd secțiunea mărginită de lemniscata lui Booth. Vom aplica metoda funcției de încovoiere a lui Milne-Thomson [4].

### 1. NOTAȚII

Notăm cu :

$O$ — originea axelor, luată în centrul extremității fixe a barei ;
$Ox, Oy$ — axele de simetrie ale extremității fixe ;
$z = x + iy$ ($i = \sqrt{-1}$) ;
$OZ$ — axa barei ;
$l$ — lungimea barei ;
$R$ — domeniul secțiunii de capăt $Z = l$ ;
$C$ — conturul domeniului $R$ ;
$O'$ — intersecția axei barei cu planul $Z = l$ ;
$O'x, O'y$ — axele de simetrie ale domeniului $R$ ;
$A$, $B$ — momentele de inerție ale domeniului $R$ în raport cu axele $O'x, O'y$ ;

$I = A + B$

$\delta = B - A$

$W$ — sarcină aplicată în planul $Z = l$, printr-o distribuţie de forţe tangenţiale;

$$\left.\begin{array}{l} W_x, W_y \text{ — forţe ce acţionează în } O' \\ M \text{ — moment în raport cu } OZ \end{array}\right\} \text{echivalent cu sistemul } W;$$

$\mu$ — modulul de elasticitate transversală;

$\eta$ — coeficientul lui Poisson;

$E$ — modulul de elasticitate;

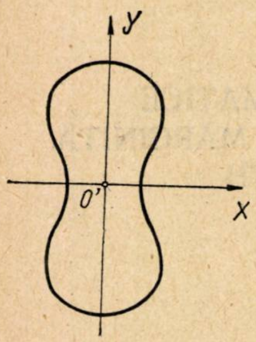


Fig. 1

$$\alpha_x = \frac{W_x}{EB}, \ \alpha_y = \frac{W_y}{EA};$$

$$\beta = \alpha_x + i\alpha_y = \frac{AW_x + iBW_y}{EAB};$$

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ — eforturi unitare normale;

$\tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{xy}$ — eforturi unitare tangenţiale.

## 2. INTRODUCERE

În acest paragraf vom da rezultatele metodei lui Milne-Thomson [4], particularizate pentru cazul cînd axele de coordonate sînt axe de simetrie ale secţiunii.

Eforturile unitare neidentic nule sînt date de:

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = \mu\,[\Phi(z) - i\tau\bar{z} - q\bar{z}^2 - rz\bar{z}], \tag{2.1}$$

$$\sigma_z = E(Z - l)\,(\alpha_x x + \alpha_y y), \tag{2.2}$$

unde

$$q = \frac{1}{4}(1 + 2\eta)\,\beta, \qquad r = \frac{1}{2}\,\bar{\beta}, \tag{2.3}$$

$\Phi(z)$ este funcţia încovoierii, iar $\tau$ este o constantă ce reprezintă gradul de răsucire în centrul secţiunii.

În cazul în care

$$z = \omega(\zeta) \tag{2.4}$$

este funcţia care realizează reprezentarea conformă a domeniului secţiunii transversale pe cercul unitate $\gamma : |\zeta| \leqslant 1$ dintr-un plan $\zeta$, atunci funcţia încovoierii $\Phi(z)$ este dată de formula

$$\psi(\zeta)\,\omega'(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{H(\sigma)\,d\sigma}{\sigma - \zeta}, \tag{2.5}$$

unde

$$\psi(\zeta) = \Phi\,[\omega(\zeta)] = \Phi(z) \tag{2.6}$$

iar

$$H(\sigma) = [i\tau + q\overline{\omega}(\bar{\sigma}) + r\omega(\sigma)]\overline{\omega}(\bar{\sigma})\,\omega'(\sigma) +$$
$$+ \frac{1}{\sigma^2}[-i\tau + \bar{q}\omega(\sigma) + \bar{r}\overline{\omega}(\bar{\sigma})]\omega(\sigma)\,\overline{\omega}'(\bar{\sigma}). \tag{2.7}$$

Valoarea lui $\tau$ se determină din relația

$$\frac{2M}{\mu} = \frac{1}{2}(K + \overline{K}) + 2\tau I, \tag{2.8}$$

unde

$$K = 2i\iint_R z\Phi(z)\,dR = \int_C z\bar{z}\Phi(z)\,dz. \tag{2.9}$$

## 3. FUNCȚIA REPREZENTĂRII CONFORME

Se știe [3] că domeniul mărginit de lemniscata lui Booth se reprezintă conform pe cercul unitate $|\zeta| \leqslant 1$, cu ajutorul funcției

$$z = \frac{k\zeta}{\zeta^2 + a}, \tag{3.1}$$

unde

$$a = \frac{a' + b'}{a' - b'} > 1, \quad k = \frac{2}{a' - b'} > 0.$$

Pentru valorile lui $a$ apropiate de unitate, domeniul diferă puțin de figura formată de două cercuri tangente.

Avem deci

$$\begin{aligned} \omega(\sigma) &= \frac{k\sigma}{\sigma^2 + a}, & \overline{\omega}(\bar{\sigma}) &= \frac{k\sigma}{1 + a\sigma^2}, \\ \omega'(\sigma) &= k\frac{a - \sigma^2}{(\sigma^2 + a)^2}, & \overline{\omega}'(\bar{\sigma}) &= \frac{k\sigma^2(a\sigma^2 - 1)}{(a\sigma^2 + 1)^2}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

## 4. FUNCȚIA ÎNCOVOIERII

Din (2.5), (2.7) și (3.2) se găsește

$$\psi(\zeta)\,\omega'(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{j=1}^{5} L_j(\sigma)\,d\sigma, \tag{4.1}$$

unde

$$L_1(\sigma) = 2ak^2 i\tau \frac{\sigma(1-\sigma^4)}{(1+a\sigma^2)^2(\sigma^2+a)^2(\sigma-\zeta)},$$

$$L_2(\sigma) = qk^3 \frac{\sigma^2(a-\sigma^2)}{(1+a\sigma^2)^2(\sigma^2+a)^2(\sigma-\zeta)},$$

$$L_3(\sigma) = rk^3 \frac{\sigma^2(a-\sigma^2)}{(1+a\sigma^2)(\sigma^2+a)^3(\sigma-\zeta)},$$

$$L_4(\sigma) = \bar{q}k^3 \frac{\sigma^2(a\sigma^2-1)}{(1+a\sigma^2)^2(\sigma^2+a)^2(\sigma-\zeta)},$$

$$L_5(\sigma) = \bar{r}k^3 \frac{\sigma^2(a\sigma^2-1)}{(1+a\sigma^2)^3(\sigma^2+a)(\sigma-\zeta)}.$$

Polurile funcției $L_j(\sigma)$ $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$, interioare cercului $\gamma$, sînt $\zeta$, $\sigma_1$, $\sigma_2$, unde $\sigma_1$, $\sigma_2$ sînt rădăcinile ecuației $a\sigma^2 + 1 = 0$.

Calculînd integralele funcțiilor $L_j(\sigma)$ cu ajutorul teoremei reziduurilor, găsim din (4.1) funcția încovoierii:

$$\psi(\zeta) = \frac{k}{(a^2-1)^3(a-\zeta^2)} \sum_{j=1}^{5} \psi_j(\zeta), \tag{4.2}$$

unde

$$\begin{aligned}
\psi_1(\zeta) &= -2i\tau a(a^2-1)^2\zeta,\\
\psi_2(\zeta) &= -akq\,[(a^2+3)\zeta^2+1+3a^2],\\
\psi_3(\zeta) &= kr\,\frac{(a^2+1)(\zeta^4+a^4)-a(a^4-6a^2+1)\zeta^2}{\zeta^2+a},\\
\psi_4(\zeta) &= -k\bar{q}\,[(3a^2+1)\zeta^2+a^3(a^2+3)],\\
\psi_5(\zeta) &= -k\bar{r}a(a^2+1)(a+\zeta^2).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Valoarea lui $\tau$ se determină din (2.8). Avem

$$I = \iint_R z\bar{z}\,dR = -\frac{i}{4}\int_C z\bar{z}^2\,dz = \frac{1}{4i}\int_\gamma \omega(\sigma)\,\overline{\omega}^2(\bar{\sigma})\,d\omega(\sigma)$$

sau, ținînd seamă de (3.2)

$$I = \frac{k^4}{4i}\int_\gamma \frac{\sigma^3(a-\sigma^2)}{(\sigma^2+a)^3(1+a\sigma^2)^2}\,d\sigma.$$

Aplicînd teorema reziduurilor, obținem

$$I = \frac{\pi k^4(a^4+4a^2+1)}{2(a^2-1)^4}. \tag{4.4}$$

Avem mai departe

$$K = \int_C z\bar{z}\Phi(z)\,dz = \int_\gamma \omega(\sigma)\,\overline{\omega}(\bar{\sigma})\,\psi(\sigma)\,\omega'(\sigma)\,d\sigma$$

sau

$$K = -\frac{2ai\tau k^4}{a^2-1}\int_\gamma \frac{\sigma^3 d\sigma}{(\sigma^2+a)^3(1+a\sigma^2)},$$

ceea ce ne dă

$$K = -\frac{4a^2\pi\tau k^4}{(a^2-1)^4}.$$

Relația (2.8) devine

$$M = \frac{\pi\mu\tau k^4(a^4+1)}{2(a^2-1)^4}. \tag{4.5}$$

Observăm că efectul de torsiune este produs numai de momentul $M$, ceea ce rezultă și din faptul că originea $O$ este centrul de încovoiere al domeniului $R$.

Pentru a găsi mărimile $q$ și $r$, este necesar să cunoaștem momentele de inerție $A$ și $B$. Avem, deoarece axele sînt axe principale de inerție,

$$\delta = \frac{1}{2i}\int_C z^2\bar{z}dz = \frac{1}{2i}\int_\gamma \omega^2(\sigma)\,\overline{\omega}(\bar{\sigma})\,d\omega(\sigma) = \frac{k^4}{2i}\int_\gamma \frac{\sigma^3(a-\sigma^2)}{(\sigma^2+a)^4(1+a\sigma^2)}\,d\sigma$$

sau, aplicînd teorema reziduurilor,

$$\delta = -\pi k^4\frac{a(a^2+1)}{(a^2-1)^4}. \tag{4.6}$$

Din (4.4) și (4.6) avem

$$A = \frac{\pi k^4(a^4+2a^3+4a^2+2a+1)}{4(a^2-1)^4},$$

$$B = \frac{\pi k^4(a^4-2a^3+4a^2-2a+1)}{4(a^2-1)^4}.$$

Acum $q$ și $r$ se pot calcula din (2.3), unde

$$\beta = \frac{W_x}{EB} + i\,\frac{W_y}{EA}.$$

## 5. CAZUL TORSIUNII

În acest caz $W_x = W_y = 0$, $M \neq 0$ și deci $\beta = 0$, iar din (2.3), $q = r = 0$.

Relațiile (2.1) și (4.2) devin

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = \mu[\Phi(z) - i\tau\bar{z}], \tag{5.1}$$

$$\psi(\zeta) = \frac{2aik\tau}{a^2-1}\,\frac{\zeta}{\zeta^2-a}. \tag{5.2}$$

Dacă punem

$$\Phi(z) = \tau f'(z),$$

$$f_0(\zeta) = f[\omega(\zeta)],$$

atunci relațiile (5.1) și (5.2) se pot scrie :

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = \mu\tau [f'(z) - i\bar{z}], \tag{5.3}$$

$$f'(\zeta) = -\frac{2aik^2}{a^2-1}\,\frac{\zeta}{(\zeta^2+a)^2}\,. \tag{5.4}$$

Din (5.3) rezultă că $f(z)$ este funcția complexă a torsiunii [3], [5] iar din (5.4) obținem

$$f_0(\zeta) = \frac{iak^2}{(a^2-1)(\zeta^2+a)} + \text{const.} \tag{5.5}$$

ceea ce coincide cu rezultatul găsit de Mushelișvili [2], [3] și mai tîrziu de Higgins [6].

Din (4.5) găsim pentru rigiditatea la torsiune

$$D = \frac{\pi\mu k^4 (a^4+1)}{2(a^2-1)^4},$$

ceea ce de asemenea este un rezultat cunoscut.

*Primită la redacție la 2 decembrie 1960, completată la 3 august 1961*

## ИЗГИБ ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ С ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ, ОГРАНИЧЕННЫМ ЛЕМНИСКАТОЙ БУТА

### РЕЗЮМЕ

Решается задача изгиба однородных и изотропных стержней, с сечением, ограниченным лемнискатой Бута.

Применяется метод Мильна-Томсона, причем сечение стержня отображается конформно на единичный круг при помощи функции (3.1). Нетождественно равные нулю напряжения даны соотношениями (2.1) и (2.2), причем функция изгиба $\Phi(z)$ определяется соотношениями (2.6), (4.2) и (4.3). Степень закручивания определяется из соотношения (4.5). Путем применения к частным случаям силовой системы, приложенной в плоскости свободного сечения, получаются усилия соответствующие кручению.

# FLEXION D'UNE BARRE PRISMATIQUE DONT LA SECTION TRANSVERSALE EST LIMITÉE PAR LA LEMNISCATE DE BOOTH

## RÉSUMÉ

L'auteur résout le problème de la flexion des barres homogènes et isotropes dont la section est limitée par la lemniscate de Booth.

Il applique la méthode de Milne-Thomson, la section de la barre étant représentée, de manière conforme, sur un cercle de rayon 1, au moyen de la fonction (3.1). Les tensions non-identiquement nulles sont fournies par les formules (2.1) et (2.2) ; la fonction de la flexion $\Phi(z)$ est donnée par les relations (2.6), (4.2) et (4.3). Le degré de torsion $\tau$ est déduit de la relation (4.5). La particularisation du système de forces, appliqué dans le plan de la section libre, permet d'obtenir les tensions dues à la torsion.

## BIBLIOGRAFIE

1. А. А.Савелов, *Плоские кривые*. Гос. изд. Физ.-Мат. Лит., Москва, 1960.
2. N. I. Mushelisvili, *Sur le problème de torsion des cylindres élastiques isotropes*. Rendic. Accad. dei Lincei, 6 ser., **IX**, 295—300 (1929).
3. Н. И. Мусхелишвилли, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*. Изд. АН СССР, Москва, 1954.
4. L. M. Milne-Thomson, *Flexure*. Trans. Amer. Math. Soc., **90**, 143—160 (1959).
5. I. S. Sokolnikoff, *Mathematical Theory of Elasticity*. ed. a 2-a, Mc. Graw-Hill, 1956.
6. T. J. Higgins, *The Torsion of a Prism with Cross Section the Inverse of an Ellipse*. J. Appl. Phys., **13**, 457—459 (1942).

## [illegible]

### RÉSUMÉ

[illegible] de la fraction des [illegible] gouttes [illegible]

[illegible] de la [illegible]

[illegible]

# RECENZII

GH. BUZDUGAN, *Rezistența materialelor*. Vol. II, ed. a II-a, Ed. tehnică, București, 1960, 452 pag.

Volumul întîi al cursului de rezistența materialelor al prof. Gh. Buzdugan este destinat noțiunilor de bază, adresîndu-se tuturor categoriilor de ingineri. Problemele mai speciale, în forma care interesează în primul rînd pe inginerul constructor, sînt cuprinse în *Rezistența materialelor,* vol. II de A. A. Beleş și R.P. Voinea. Lucrarea de față, apărută ca rod al experienței mai multor ediții litografiate, tratează probleme mai deosebite de rezistența materialelor, care interesează în special pe inginerul mecanic, precum și unele probleme specifice ingineriei mecanice. Menționăm că a doua ediție a acestui volum prezintă îmbunătățiri și adăugiri substanțiale, restructurarea fiind mai accentuată la capitolele specifice inginerului mecanic.

Lucrarea cuprinde 16 capitole, ultimul dintre acestea fiind introdus în ultima ediție.

Capitolul I este destinat flambajului barelor drepte. Se dau formulele lui Euler și Tetmajer-Iasinski, continuîndu-se cu unele probleme speciale. Dintre acestea menționăm considerarea influenței forței tăietoare și flambajul lateral (din încovoiere).

Următoarele două capitole cuprind probleme de deformație a construcțiilor alcătuite din bare. Se dau metode energetice de calcul și se stabilește un număr de teoreme generale, care se aplică la calculul deplasărilor și rotirilor. Pe baza acestor rezultate, cît și în mod direct, se trece la cercetarea sistemelor static nedeterminate, insistîndu-se — în special — asupra sistemelor supuse în principal la încovoiere. Menționăm astfel rezultate privind grinzile continue, grinzile pe mediu elastic, precum și influența variației de temperatură. Pentru calculul stării de deformație este deosebit de utilă regula lui Vereşceaghin.

În capitolul al IV-lea este cuprinsă problema barelor curbe. Se dă modul de calcul al diagramelor de eforturi și se prezintă calculul aproximativ al stării de tensiune pentru bare de curbură mică și pentru bare de curbură mare. Starea de deformație ca și calculul la flambaj sînt de asemenea considerate.

Capitolele V și VI sînt destinate unor probleme cu caracter dinamic. Se dă modul de calcul la diferite solicitări dinamice : solicitări axiale, solicitări din încovoiere și solicitări de răsucire ; de asemenea se ia în considerare influența forțelor de inerție. O atenție deosebită se acordă vibrațiilor sistemelor elastice : vibrații longitudinale, vibrații transversale, vibrații torsionale ale barelor. Se dau unele rezultate și cu privire la vibrațiile sistemelor cu mai multe grade de libertate. De asemenea se ia în considerare și masa proprie a barei. Un paragraf special este destinat vibrației coardelor.

În capitolele VII și VIII se studiază cîteva probleme care interesează în special pe inginerii mecanici. Se dau astfel rezultate cu privire la concentrarea tensiunilor și la tensiuni de contact : concentrări în placa găurită, concentrări în punctele de aplicație ale sarcinilor concentrate, problema lui Hertz. De asemenea se face un calcul de rezistență la solicitări variabile. Se introduce noțiunea de oboseală, dîndu-se pe larg explicații de natură fizică. În special se calculează coeficientul de siguranță la solicitări simple sau compuse, produse de sarcini variabile ciclice — dîndu-se diferite metode, inclusiv metode moderne de calcul.

Răsucirea barelor drepte de secțiune oarecare este cuprinsă în capitolul al IX-lea. Se folosesc metode de teoria elasticității, prezentîndu-se problema după B. de St Venant. Rezultatele obținute se aplică la barele de secțiune circulară, regăsindu-se rezultatele cunoscute, la barele de secțiune eliptică și la barele de secțiune dreptunghiulară. Remarcăm analogia cu membrana și aplicarea ei la cazul barelor tubulare cu pereți subțiri.

Următoarele trei capitole tratează probleme de plăci : plane și curbe. Se dau astfel rezultate cu caracter general privitoare la *plăcile plane subțiri* [1]), pentru care una din dimensiuni (grosimea) este mai mică decît celelalte două dimensiuni cuprinse în planul median. După ce se cercetează unele cazuri elementare, se trece la plăcile circulare, acționate axial simetric, și la plăcile dreptunghiulare. Pentru plăcile dreptunghiulare se iau în considerație și probleme de vibrații și stabilitate. Prin analogie cu firele și curbele funiculare, se consideră și vasele de rotație cu pereți subțiri. Se insistă asupra vaselor sferice și cilindrice și se dau rezultate privitoare la flambajul tuburilor subțiri. Se consideră de asemenea și tuburile cu pereți groși, precum și cilindrii fretați. Se dau unele rezultate și cu privire la discurile circulare de grosime constantă și de egală rezistență, în mișcare de rotație.

Capitolele XIII și XIV sînt destinate unor probleme de plasticitate și reologie. Se fac astfel unele considerații cu caracter general privitoare la calculul de rezistență dincolo de limita de elasticitate și se dau unele rezultate, prin metode de rezistența materialelor, în legătură cu barele drepte supuse la încovoiere sau la răsucire. Se dau, de asemenea, unele noțiuni cu privire la fenomenele de fluaj și relaxare. Bazîndu-se pe diferite teorii de fluaj, autorul indică unele metode de calcul.

Încercările mecanice ale materialelor sînt cuprinse în capitolul al XV-lea. Se descriu diferite mașini pentru încercări statice și dinamice, încercări de duritate, șoc, oboseală, fluaj. Autorul dă și unele noțiuni de fotoelasticitate. Menționăm un paragraf destinat realizărilor romînești în tehnica încercării materialelor.

Ultimul capitol al lucrării cuprinde problema răsucirii și încovoierii profilelor subțiri. Se fac ipotezele de calcul, se dau ecuațiile de echilibru și ecuația diferențială a deformației de răsucire, precum și modul ei de integrare ; se introduc mărimile sectoriale, momentele de încovoiere-răsucire, bimomentele etc., folosind teoria lui V. Z. Vlasov, pentru profile deschise cu pereți subțiri.

Toate chestiunile tratate sînt însoțite de numeroase exemple cu caracter teoretic sau numeric, insistîndu-se asupra necesităților pe care le are inginerul mecanic. Unele probleme, care în mod normal ar fi trebuit să fie cuprinse în această lucrare, au fost omise, găsindu-se în *Probleme de rezistența materialelor*, vol. I și II, scoasă de Gh. Buzdugan împreună cu un grup de colaboratori.

Cartea prof. Gh. Buzdugan cuprinde un material deosebit de bogat, fiind scrisă cu multă claritate și conciziune. Ea se adresează în primul rînd studenților institutelor politehnice, însă poate fi folosită cu succes de toţi inginerii, în special mecanici, care au nevoie să-şi lămurească diferite probleme mai delicate de rezistenţa materialelor.

---

[1]) Nu putem fi de acord cu denumirea de *plăci plane groase*, dată de autor, deoarece în acest caz grosimea este de același ordin de mărime cu celelalte două dimensiuni.

*P. P. Teodorescu*

C. CORDUNEANU, *Funcţii aproape-periodice*, Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1961, 192 p.

Bazele teoriei funcţiilor aproape-periodice au fost puse în 1923—1925 de către matematicianul danez Harald Bohr, această ramură a matematicii fiind relativ tînără. Ulterior (1925), V. V. Stepanov generalizează clasa funcţiilor aproape-periodice în sensul lui Bohr, renunţînd la ipoteza continuităţii, iar, în 1933, S. Bochner defineşte şi studiază funcţiile aproape-periodice cu valori în spaţii Banach; bazat pe aceste rezultate, J. von Neumann (1934) elaborează teoria funcţiilor aproape-periodice pe grupuri. Ulterior aceste funcţii se dovedesc deosebit de utile în probleme privind fizica matematică. Astfel S. L. Sobolev (1945) stabileşte aproape-periodicitatea soluţiilor ecuaţiei undelor, N. N. Bogoliubov leagă cercetările sale de mecanică neliniară de aceste funcţii etc.

În această lucrare se prezintă rezultatele principale ale acestei teorii, precum şi o orientare în ceea ce priveşte aplicaţiile sale; de asemenea autorul, el însuşi cercetător experimentat în această direcţie, include şi un număr de studii şi cercetări recente cu un caracter mai special.

Lucrarea cuprinde şase capitole.

După o scurtă introducere cu privire la seriile Fourier şi funcţiile periodice, se trece în capitolul I la studiul funcţiilor numerice aproape-periodice. După ce se dau definiţiile şi proprietăţile fundamentale, se introduce seria Fourier asociată unei funcţii aproape-periodice şi se studiază convergenţa şi modul de sumare al ei.

Capitolul al II-lea tratează funcţiile aproape-periodice depinzînd de parametri iar capitolul al III-lea cuprinde funcţiile analitice aproape-periodice. Menţionăm studiul funcţiilor aproape-periodice în medie şi introducerea seriei Dirichlet asociată unei funcţii analitice aproape-periodice.

În capitolul al IV-lea se dau soluţiile aproape-periodice ale unor ecuaţii diferenţiale, considerîndu-se sistemele liniare cu coeficienţi constanţi şi sistemele cvasiliniare. Menţionăm un paragraf dedicat ecuaţiei oscilaţiilor neliniare. Capitolul al V-lea cuprinde studiul soluţiilor aproape-periodice ale unor ecuaţii cu derivate parţiale. În această ordine de idei se dau rezultate cu privire la funcţiile armonice şi poliarmonice aproape-periodice şi cu privire la soluţiile aproape-periodice ale ecuaţiilor iperbolice.

Diferite generalizări ale funcţiilor aproape-periodice, în sens Muckenhoupt şi în sens Stepanov, considerarea funcţiilor aproape-periodice cu valori într-un spaţiu Banach etc. sînt date în capitolul al VI-lea.

O scurtă anexă este destinată teoremei lui Weierstrass.

Lucrarea este însoţită de o bibliografie deosebit de bogată (453 titluri) şi completă. Aproape fiecare capitol este urmat de note bibliografice extinse, în care se face şi un scurt istoric al problemei corespunzătoare.

Monografia lui C. Corduneanu se caracterizează printr-o conciziune şi claritate deosebite, fiind rodul unei munci intense de cercetare şi sistematizare. Ea este utilă atît celor ce fac cercetări în domeniul matematicilor pure cît şi tuturor celor ce aplică aceste rezultate în cadrul problemelor moderne ale fizicii matematice.

*P. P. Teodorescu*

* * * *Труды института машиноведения.* (Lucrările Institutului de mașini. Seminarul de teoria mașinilor și mecanismelor). Tom XXI, fascicula 83—84, Izdatelstvo Akademii Nauk SSSR, Moskva, 1961, 133 p.

Ediția de față a revistei cuprinde fasciculele 83—84 incluse în același volum.

Fascicula 83 cuprinde 6 lucrări tratînd mai mult probleme de dinamica mașinilor, iar fascicula 84 cuprinde 5 articole, dezbătînd probleme mai generale, de analiză și sinteză a mecanismelor.

1. I. I. ARTOBOLEVSKI, *Problemele de bază actuale ale dinamicii mașinilor.* În această lucrare sînt trecute în revistă de către savantul sovietic acad. I. I. Artobolevski, conducătorul științific al Seminarului de teoria, mașinilor și mecanismelor, rezultatele cercetărilor științifice ale cercetătorilor sovietici și străini din domeniul dezvoltării problemelor de dinamică a mașinilor din ultimul deceniu.

Articolul cuprinde 12 capitole în care sînt tratate pe rînd diferite probleme specifice ale dinamicii mașinilor, arătîndu-se pentru fiecare contribuția diferiților cercetători.

Sînt trecute în revistă o serie de rezultate remarcabile din domeniul teoriei vibrațiilor mașinilor, teoriei mașinilor cu acțiune prin șoc, dinamicii agregatelor de mașini, dinamicii mașinilor și mecanismelor cu elemente elastice și a mecanismelor hidraulice și pneumatice, a proiectării mașinilor și mecanismelor ținînd seama de mișcarea mașinilor sub influența forțelor depinzînd de poziție, viteză și timp și din domeniul problemelor de precizie dinamică a diferitelor sisteme de agregate, cît și încă o serie întreagă de alte probleme foarte importante pentru etapa actuală a dinamicii mașinilor. Sînt analizate într-un capitol separat și rezultatele din domeniul cercetărilor experimentale ale dinamicii mașinilor.

La sfîrșit este dată o listă de lucrări cuprinzînd 190 de titluri de lucrări numai din domeniul dinamicii mașinilor, de autori sovietici și străini.

Lucrarea este foarte utilă pentru cercetători și proiectanți.

2. S. I. ARTOBOLEVSKI, *Asupra unor dependențe de bază ale mecanicii mișcărilor intermitente și utilizarea lor în calculul mașinilor.* În lucrare sînt expuse rezultatele cercetărilor autorului asupra problemelor teoriei generale a mișcărilor intermitente, bazate pe larga utilizare a metodelor teoriei similitudinei și dimensionale. Sînt deduse formule pentru calculul de proiectare cinematic și energetic al acționărilor organelor de execuție ale mașinilor tehnologice în condiții date.

Într-o tabelă este dată clasificarea acționărilor pentru mișcări intermitente în funcție de caracteristicile structurale și cinematice de bază ale lor.

Lucrarea este foarte utilă pentru proiectanții de mașini unelte.

3. I. I. BLEHMAN, *Lucrul simultan al cîtorva vibratoare sincrone mecanice.* În această lucrare sînt obținute condițiile de existență și stabilitate a unei clase determinate de soluții a sistemului de ecuații diferențiale neliniare, ce redau mișcarea simultană a organului de lucru a unei mașini vibratoare și care are montat pe el un număr oarecare de vibratoare mecanice (debalansoare) acționate cu motoare electrice sincrone bipolare.

Se arată că în cazul îndeplinirii unor anumite condiții se poate obține orice combinație dinainte stabilită, a alunecării fazelor unghiului de rotație al vibratoarelor în regim de mișcare stabilizat, prin metoda orientării înfășurării statorilor electromotoarelor în raport cu organul de lucru al mașinii.

4. R. E. BRUNSTEIN, A. E. KOBRINSKI, *Asupra cercetării dinamice și stabilității sistemelor cu vibrații prin șoc.* În acest articol sînt prezentate rezultatele cercetărilor asupra dinamicii și stabilității regimurilor de mișcare periodice ale sistemelor vibratoare cu șoc. Ca bază a analizei stabilității dinamice, autorii au folosit o nouă metodă care a dus pînă la urmă la utilizarea ecuațiilor cu diferențe finite.

Cercetarea dinamicii sistemelor vibratoare prin șoc prezintă un deosebit interes, mai ales pentru faptul că mașinile și mecanismele la care ciocnirea reciprocă dintre anumite elemente constituie efectul de bază în procesul tehnologic pe care îl au de îndeplinit, sînt foarte răspîndite în tehnică. În acest sens, lucrarea autorilor este o contribuție prețioasă pentru dinamica mașinilor vibratoare cu șoc.

5. S. G. KISLIȚIN, *Despre găsirea perioadei și formei procesului de autovibrație cu ajutorul aplicării limitate a corecției metodei lui Newton.* În acest articol este tratată problema abaterii soluției aproximative periodice a ecuației neliniare de ordinul doi. Luînd inițial ca admisibil un anumit grad de aproximare, autorul ajunge să precizeze acest grad de aproximare folosindu-se de metoda lui Newton și aducînd și unele completări.

6. S. N. KOJEVNIKOV, *Utilizarea instalațiilor de modelare electronice la cercetarea acționărilor laminoarelor.* În această lucrare sînt expuse rezultatele utilizării instalațiilor de modelare electronice la analiza modului de lucru al laminoarelor. Se arată că se pot cerceta relativ destul de simplu procesele tranzitorii și nestabilizate la mașinile grele.

*Fascicula 84* cuprinde 5 lucrări.

1. P. A. LEBEDEV, *Determinarea pozițiilor mecanismelor spațiale, formate din grupe de două elemente de conducere.* În această lucrare este prezentată metoda analitică elaborată de autor pentru determinarea pozițiilor elementelor mecanismelor spațiale formate din mai multe bare articulate (cît de asemenea și patrulaterele) și în alcătuirea cărora intră grupe cinematice spațiale cu cuple inferioare.

2. N. I. LEVIȚSKI, *Sinteza aproximativă a mecanismelor cu două grade de libertate.* În articolul lui N. I. Levițski este dată o metodă analitică pentru determinarea parametrilor cinematici ai celui mai simplu mecanism articulat cu două grade de libertate din condiția reproducerii funcției de două variabile. Metoda propusă poate fi folosită la proiectarea dispozitivelor de calcul.

3. F. I. LITVIN, *Metodă analitică pentru cercetarea angrenajelor spațiale.* În articolul lui F. I. Litvin este expusă metoda generală de cercetare a angrenajelor spațiale. Se arată că la transmisiile ale căror axe se intersectează și la care suprafața dinților uneia din roți este elicoidală normalele în punctele de contact ale suprafețelor dinților intersectează două drepte fixe. Această observație este utilizată pentru elaborarea unei metode de cercetare mult simplificată.

4. T. A. TÎBÎLOV, *Influența amortizorului cu frecare uscată asupra oscilațiilor dispozitivului pendular de suspensie al unei caroserii.* În această lucrare este cercetată influența amortizorului cu frecare uscată asupra oscilațiilor caroseriilor de cale ferată. În lucrare se studiază oscilațiile caroseriilor în raport cu șasiul, considerînd întreg ansamblul ca un sistem cu două grade de libertate. Cercetările corespund nevoilor actuale din construcția de locomotive în condițiile acționării electrice și la viteze mari și dotate cu dispozitive de suspensie oscilante și cu amortizoare cu frecare uscată.

5. S. A. CERKUDINOV, *Curbele lui Burmester în cazul în care trei poziţii ale figurii plane sînt infinit apropiate.* În lucrarea lui S. Cerkudinov sînt cercetate curbele lui Burmester, în cazul particular în care sînt date cele patru poziţii ale figurii plane care se mişcă în planul său şi anume, trei din aceste patru poziţii să fie infinit apropiate. Este arătată utilizarea acestor curbe ale lui Burmester la determinarea parametrilor mecanismului cu mai multe elemente articulate, cu pauză, format prin alăturarea succesivă de mecanisme patrulatere articulate.

*L. Calmaciuc*

GRÖBER-ERK-GRIGULL, *Die Grundgesetze der Wärmeübertragung.* (Legile fundamentale ale transmisiei căldurii), Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1961, IV + 430 p.

Noua reeditare a prelucrării de către prof. dr. ing. U. Grigull a cunoscutului tratat redactat iniţial de H. Gröber şi S. Erk, conţine o trecere în revistă a principalelor probleme legate de subiectul prezentat. Într-adevăr, în cele trei părţi ale tratatului sînt studiate pe rînd transmisia căldurii prin conductibilitate, prin convecţie şi prin radiaţie.

În prima parte, după ce se deduce ecuaţia diferenţială a lui Fourier, se defineşte problema generală a teoriei analitice a căldurii şi se precizează diferitele condiţii la limite şi iniţiale care apar în problemele de transmisie a căldurii prin conductibilitate. Trecîndu-se apoi la expunerea metodelor de rezolvare, se insistă în mod special asupra procedeului de separare a variabilelor. Urmează studiul cîmpurilor de temperaturi variabile în timp, fără surse de căldură, în cadrul căruia sînt prezentate problemele clasice ale plăcii, cilindrului, sferei şi a corpului infinit sau semi-infinit. O atenţie specială este acordată problemelor cu condiţii la limite periodice în timp, care prezintă importanţă practică în funcţionarea maşinilor termice. Se indică apoi posibilitatea utilizării procedeului de calcul cu diferenţe finite pentru rezolvarea problemelor la limite legate de ecuaţia căldurii şi se prezintă principiul analogiei electrice.

Problema cîmpurilor de temperatură staţionare fără sau cu surse de căldură este tratată pe scurt, dîndu-se numai cîteva exemple. Urmează apoi prezentarea unor probleme speciale, dintre care reţinem pe aceea a transmisiei căldurii prin corpuri neomogene sau anizotrope.

În general vorbind, partea din lucrare referitoare la transmisia căldurii prin conductibilitate este relativ puţin dezvoltată, numărul problemelor tratate fiind oarecum redus. De asemenea, nu se aminteşte nimic despre unele metode matematice curent utilizate în rezolvarea ecuaţiei lui Fourier, ca de pildă acelea ale calculului operaţional.

Mult mai dezvoltată, ocupînd peste jumătate din întregul volum, este partea referitoare la transmisia căldurii prin convecţie. După ce sînt stabilite ecuaţia de continuitate, ecuaţia de mişcare a fluidelor vîscoase şi ecuaţia energiei, se trece la studiul similitudinii fenomenelor de transmisie a căldurii, definindu-se parametrii adimensionali ce intervin în diferite probleme. Capitolele următoare sînt consacrate transmisiei căldurii prin convecţie forţată (într-un fluid în mişcare) în regim laminar şi în regim turbulent, stratul limită termic bucurîndu-se de o atenţie deosebită. Se remarcă de asemenea preocuparea constantă de a se da formule utilizabile pentru aplicaţiile practice, la aceasta ajungîndu-se prin utilizarea unui mare număr de cercetări experimentale.

Se trece apoi la studiul transmisiei căldurii, la scurgerea în jurul corpurilor de forme geometrice simple (cilindru, sferă etc.) şi la prezentarea unor rezultate privind scurgerile cu viteze mari. Problema convecţiei libere este tratată într-un capitol separat, care se încheie cu prezentarea rezultatelor utilizabile în calculele practice. Destul de amplu este prezentată apoi transmisia căldurii în fenomenele de condensare şi de vaporizare. Ultimul capitol al acestei părţi conţine o serie de consideraţii asupra transferului de materie. Analogia dintre fenomenele de transport de impuls, de căldură şi de materie permite o reprezentare comună a celor trei categorii de fenomene. Deşi această analogie nu este riguroasă decît în puţine cazuri speciale, rezultatele experimentale arată că valoarea ei practică este destul de considerabilă.

Ultima parte a cărţii conţine o prezentare rezumativă a teoriei transmisiei căldurii prin radiaţie. Sînt date astfel noţiunile fundamentale şi teoria radiaţiei corpului negru, după care se trece la studiul schimbului de căldură prin radiaţie între corpurile solide. Ultima problemă tratată este aceea a radiaţiei gazelor şi vaporilor.

În anexă sînt trecute mai multe tabele cu valori ale constantelor fizice precum şi alte tabele ajutătoare.

Intenţia mărturisită a autorilor este aceea de a da un manual pentru ingineri uşor utilizabil în scopuri practice. Credem că acest scop a fost atins prin felul în care s-a făcut dozarea între problemele cu caracter pur teoretic, datele experimentale şi indicaţiile cu caracter aplicativ. Fără a se neglija nimic fundamental şi fără a se renunţa la rigoarea necesară, materialul teoretic a fost condensat cît mai mult cu putinţă. Poate că în anumite locuri s-a mers chiar puţin prea departe în această direcţie dar, în schimb, bogăţia şi amploarea materialului experimental prezentat şi grija permanentă de a se extrage toate rezultatele aplicabile în problemele practice compensează omisiunile amintite. În felul acesta, s-a ajuns la un manual a cărui valoare este de netăgăduit şi care poate fi utilizat cu folos chiar şi pentru unele probleme de cercetare.

*T. Oroveanu*

W. ALBRING, *Angewandte Strömungslehre*. Verlag von Theodor Steinkopff, Dresden und Leipzig, 1961, XII + 380 p, 438 fig.

Această lucrare se adresează inginerilor care se lovesc în practică de diverse probleme de mecanica fluidelor şi care le rezolvă în mod obişnuit fie recurgînd la date empirice (uneori învechite), fie la soluţii matematice proprii (rareori corecte). Cartea prof. W. Albring oferă, pe baza a numeroase exemple şi rezultate experimentale, un îndrumar în soluţionarea practică a diverselor probleme de scurgerea fluidelor şi de multe ori chiar soluţia căutată. Ea permite celui care o foloseşte să abordeze în mod corect o problemă şi să-i cunoască posibilităţile de rezolvare în lumina cercetărilor ştiinţifice moderne, aşa cum atestă bogata şi interesanta bibliografie consultată.

Scrisă în acest sens, cartea nu va conţine demonstraţiile riguroase ale formulelor propuse şi nici analiza detaliată a fenomenelor fizice fundamentale; însă va reprezenta o colecţie de rezultate cîştigate deja în diferitele domenii ale mecanicii fluidelor, expuse astfel ca să îmbrăţişeze aproape întregul domeniu aplicativ al acestei discipline (aeronautică, turbine, ungere, conducte etc.). În plus, se găsesc numeroase exerciţii cu soluţiile respective care clarifică şi servesc direct capitolul prezentat.

Cuprinsul este repartizat următoarelor 27 capitole:

Introducere; hidrostatică; dinamica fluidului ideal; scurgerea bidimensională; metoda singularităţilor; calculul repartiţiei presiunilor pe profile; calculul profilelor şi al distribuţiei de viteze după Helmbold şi Keune; transformare conformă; aripa portantă de anvergură finită;

mişcarea valurilor pe suprafaţă liberă ; capilantele, cavitaţie şi anumite forme de scurgere speciale ; analogii cu scurgerea hidrodinamică plană ; bazele dinamicii gazelor, ; unde de şoc ; aplicarea scurgerii unidimensionale la reţelele de profile ; scurgerea compresibilă bidimensională ; scurgerea supersonică ; expansiunea scurgerii supersonice ; studiul reţelelor de profile în scurgere supersonică ; metode de trasare şi calcul aproximativ al reţelelor de profile în scurgerea incompresibilă şi compresibilă ; scurgerea cu frecare ; scurgerea cu frecare spaţială ; scurgerea cu termenii iniţiali neglijabili în ecuaţia Navier-Stokes ; strat limită bidimensional staţionar ; strat limită cu gradient de presiune ; tranziţia laminar-turbulent ; influenţa stratului limită asupra portanţei şi rezistenţei.

Din acest bogat cuprins sînt de remarcat capitolele privitoare la calculul practic al repartiţiei presiunilor şi vitezelor pe profile, cu exemple tratate numeric, de asemeni cele relative la calculul reţelelor de profile în scurgere supersonică unde se găsesc cîteva cazuri rezolvate complet. În afară de acestea, de un deosebit interes sînt datele experimentale privitoare la scurgerea în coturi la 90°, cele relative la scurgerea în difuzoare, precum şi unele date referitoare la absorbţia prafului industrial prin camere ciclon şi la influenţa rugozităţii în scurgerea prin conducte.

Oricît de ciudată ar părea la prima vedere succesiunea acestor capitole diverse, ele îmbracă suficient de bine cîmpul de activitate al inginerilor şi cercetătorilor care construiesc aparataj şi maşini în domeniul mecanicii fluidelor şi de aceea cartea se impune pentru consultare şi utilizare practică.

*St. N. Săvulescu*

---

ROBERT R. LONG, *Mechanics of Solids and Fluids* (Mecanica solidelor şi fluidelor), Prentice-Hall, 1961, 156 p.

Prezentată sub un titlu poate prea cuprinzător, această lucrare reprezintă o bună introducere în mecanica mediilor continue deformabile. Caracterul indicat se vădeşte încă din primul capitol, în care autorul prezintă noţiunile fundamentale de calcul vectorial şi tensorial necesar pentru dezvoltările ulterioare. Capitolul următor este dedicat studiului tensiunilor dintr-un mediu continuu şi se încheie du deducerea ecuaţiilor de mişcare în componente de tensiuni. Urmează, în mod natural, tratarea problemei deformaţiilor, în cadrul căreia se demonstrează şi ecuaţia de continuitate. După această primă parte, care se referă la comportarea unui mediu continuu teoretic, autorul face o incursiune în studiul proprietăţilor mecanice ale diferitelor materiale reale, solide şi fluide, dar în continuare reţine dintre acestea numai două categorii şi anume solidele elastice şi fluidele newtoniene. Capitolul ce urmează conţine astfel generalizarea legii lui Hooke şi deducerea ecuaţiilor de mişcare şi echilibru ale solidelor elastice, inclusiv ecuaţiile de compatibilitate. Autorul tratează apoi cîteva probleme de elasticitate liniară şi introduce noţiunile de stare de deformaţie plană şi stare de tensiune plană şi axial-simetrică. Ultimele două capitole sînt consacrate mecanicii fluidelor, începînd cu deducerea ecuaţiilor Navier-Stokes şi continuînd cu cîteva probleme din hidrostatică, dinamica fluidelor ideale şi dinamica fluidelor vîscoase, inclusiv o foarte scurtă privire asupra teoriei stratului limită. Fiecare capitol este însoţit de un număr de exerciţii, destinate familiarizării cititorului cu problemele expuse.

Expunerea, făcută cu ajutorul unui aparat matematic modern, este clară şi concisă şi poate fi utilizată cu succes pentru însuşirea noţiunilor fundamentale ale mecanicii mediilor continue deformabile. Alegerea problemelor concrete tratate este făcută oarecum arbitrar, fapt ce se poate explica prin caracterul introductiv al lucrării.

*T. Oroveanu*

VL. KOLOUŠEK, *Dynamika stavebních konstrukcí, III část. Vybrané stati* (Dinamica construcțiilor, partea a III-a, culegere de articole), Státní nakladatelství technické l iteratury, Praha, 1961, 410 p.

Prima parte a tratatului de dinamica construcțiilor al prof. Vl. Koloušek este destinată problemelor cu caracter general, partea a doua cuprinzînd teoria grinzilor continue și a sistemelor de cadre. Aceste lucrări, apărute la un interval destul de mare de timp una de cealaltă, au fost deosebit de frumos apreciate în literatura de specialitate, fiind traduse și în alte limbi.

Partea a treia a acestui tratat este destinată unor probleme cu caracter special, fiind intitulată modest : culegere de articole. De fapt este o culegere de mici monografii, care formează un tot închegat. Cele nouă capitole ale lucrării sînt scrise de mai mulți autori, sub redactarea generală a prof. Vl. Koloušek, specialist recunoscut și cu o bogată activitate în această direcție.

Primele două capitole sînt scrise de Vl. Koloušek. Primul dintre acestea este destinat sistemelor continue cu elemente periodice. Dintre aceste sisteme continue cităm : grinzile drepte pe mai multe reazeme, arcele periodice, grinzile continue cu vute. Se dau rezultate de natură teoretică, calculele fiind apoi duse pînă la exemple numerice. Capitolul al doilea tratează problemele dinamice legate de podurile de cale ferată, în special metalice ; se consideră și podurile de beton armat, formate din grinzi continue pe mai multe reazeme.

Capitolul al III-lea, scris de L. Frýba, se ocupă de dinamica balastului pentru calea ferată. Problema este considerată atît din punct de vedere experimental cît și din punct de vedere teoretic. Ecuațiile diferențiale ale problemei sînt integrate cu ajutorul transformatelor Fourier, soluțiile exprimîndu-se prin funcții gama. Exemple numerice de calcul, tabele și diagrame completează aceste rezultate.

I. Babuška și Vl. Koloušek redactează capitolul al IV-lea, care cuprinde teoria liniară a vibrației sistemelor elastice cu frecare interioară. Se folosește o ipoteză a lui E. S. Sorokin și se dau în special rezultatele primului dintre autori. Din punct de vedere matematic este utilizată metoda funcțiilor de o variabilă complexă, considerîndu-se atît sisteme periodice cît și aperiodice.

Capitolul al V-lea, scris de J. Jeřábek, este destinat cercetărilor teoretice și experimentale cu privire la propagarea undelor în bare drepte. Subliniem în special însemnătatea studiilor de natură experimentală, care au fost inițiate de Prof. Vl. Koluošek la Catedra de Mecanica construcțiilor a Institutului de căi de comunicație din Praga. S-a imaginat astfel un sistem de înregistrare electronică a vitezei de propagare a undelor și s-a studiat influența coeficientului de restituire pentru un sistem de bile, care imaginează bara dreaptă.

M. Novák este autorul capitolului al VI-lea, care se ocupă de problema conlucrării terenului de fundație cu fundația propriu-zisă, din punct de vedere al comportării la sarcini dinamice.

Capitolul al VII-lea, scris de V. Horák, și capitolul al VIII-lea, redactat de J. Henrych, se ocupă de probleme de rezonanță parametrică a construcțiilor (stabilitate dinamică). Studiile sînt, în special, de natură teoretică, considerîndu-se atît cazul liniar cît și problema neliniară.

Se discută astfel ecuaţiile diferenţiale neliniare ale lui Hill şi Mathieu. Cel de-al doilea dintre autori tratează mai ales problema grinzilor cu zăbrele şi a cadrelor. Menţionăm şi cazul grinzilor continue.

În capitolul al IX-lea se dau diferite tabele de funcţii, care intervin în probleme dinamice, foarte utile pentru practica de calcul, multe din acestea fiind publicate pentru prima dată.

Fiecare capitol este însoţit de o bibliografie foarte bogată. Trebuie să menţionăm de asemenea că, pe lîngă sinteza rezultatelor cunoscute, fiecare din aceste monografii prezintă multe rezultate noi, obţinute de şcoala cehoslovacă de dinamica construcţiilor.

În felul acesta, partea a treia a tatatului de dinamica construcţiilor este utilă nu numai inginerilor şi proiectanţilor constructori, ci poate şi trebuie să fie folosită şi de cercetătorii ştiinţifici în acest domeniu.

*P. P. Teodorescu*

# PUBLICAŢII PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE

A. N. SEDOV, *Ob osnovnîh prinţipah mehaniki sploşnoi sredî.* 1961, 26 p.

A. I. ARIKOVA, R. J. JULAEV, *Ulucişennîi tip vodozabora s donnoi reşeciatori galereici.* Alma Ata, 1961, 81 p.

A. V. BRICIKIN, V. V. LOSIŢKI, *Razrabotke mestorojdenii nebolşimi karierami.* Alama Ata, 1959, 188 p.

N. N. STRELKOVA, *Opisanie sistemî komand elektronnoi vîcislitelnoi maşini ,,Strela-3''.* Moscova, 1961, 50 p.

* * * *Trudî Novocerkasskogo Politehniceskogo Instituta.* Tom 111, 1961, Novocerkassk,

* * * *Serghei Ivanovici Vavilov.* Moscova, 1961, 165 p.

* * * *Moskovskoe vîsşee tehniceskoe ucilişce im. N. E. Baumana.* Sbornik 77/1958, Moscova.

* * * *Vsesoiuznoe soveşcianie po primeneniiam metodov teorii funkţii kompleksnogo peremennogo k zadaciam matematiceskoi fiziki.* Tibilisi, 1961, 70 p.

* * * *Trudî Instituta neftehimiceskoi i gazovoi promîşlennosti.* Tom 33, 34, 35/1961, Moscova.

* * * *Sbornik vysokenho uceni tehniceskeho v Brne*, 1960, 1—2.

* * * *Sbornik statni vyzkumny ustav tepelne techniky.* Praha, 1957, 1958.

M. GYALCKAY, *Odvodnenie zitného ostrova.* Bratislava, 1960, 129 p.

J. NĚMEC, *Tuhost a pevnost ocelovych části.* Praha, 1961, 567 p.

* * * *Izentropiceskoe tecenie gazov.* Isentropic Gas Flow, Praga, 1961, 643 p.

K. V. KAMATH, *Spannungskorrosion von a-Messing* (*Einfluss der chemischen Zusammensetzung, Verformung und Anlassglühung*). Berlin (R.D.G.), 1961, 98 p.

G. ZOUHAR, *Umformungskräfte beim Walzen in Streckkaliberreihen.* Berlin, (R.D.G.), 1960, 201 p.

T. VON LANGENDONCK, *Lajes continuas de pontes.* Rio de Janeiro, 1961, 33 p.

L. A. SACKMANN, *Science et technique hydrauliques à travers les âges.* Strassbourg, 1960, 29 p.

* * * *Annales de la Faculté des Sciences de Marseille.* , 1960.

## Lucrări primite de la Hydraulic Research Station, Wallingford (Anglia)

J. M. BURGERS, *Stream-gauging in upland waters.* 1961, 60 p.

M. KESTNER, *Short-term changes in the distribution of fine sediments in estuaries.* 1961, 30 p.

P. ACKERS, *The hydraulic resistance of drainage conduits.* 1961, 30 p.

R. C. H. RUSSELL, *The use of fluorescent tracers for the measurement of littoral drift.* 1961, 26 p.

BUDAPESTI MŰSZAKI

### Disertaţii primite de la Institutul Politehnic Aachen

R. M. STERN, *Untersuchungen der Resonanzdämpfung der Versetzungen*. 1961, 91 p.

Ch. SHAH, *Methode für den Entwurf optimaler, ebener Verzögerungsgitter in inkompressibler Strömung bei gegebenem Geschwindigkeitsdreieck*. 1961, 133 p.

A. KARMAKAR, *Untersuchungen an Gleitführungen von Werkzeugmaschinen*. 1961, 111 p.

H. GRÖNIG, *Elektronenverteilung an starken Stosswellen*. 1961, 84 p.

H. E. LENK, *Instrumentelle Verfahren zur harmonischen Analyse der Bewegungsfunktionen periodischer Getriebe*. 1961, 71 p.

### Disertaţii primtie de la Institutul Politehnic Braunscheig

K. TROEGER, *Über die Wiederverstörkung von Lichtbogenstrecken nach dem Stromnullwerden wandernder Wechselstromlichtbogen in engen Spalten*. 1960, 63 p.

H. G. SCHÜTTE, *Über den Einfluss von Strömungsvorgängen auf die Lichtbogenwanderung in engen Spalten*. 1961, 75 p.

### Lucrări primite de la "Institute of Aerophysics"

(University of Toronto, Canada)

E. P. MUNTZ, *Measurement of rotational temperature, vibrational temperature and molecule concentration, in non-radiating flows of low density nitrogen*. UTIA-Report no. 71/1961.

E. ETKIN, *Theory of the flight of airplanes in isotropic turbulence*; *review and extension*. UTIA-Report, No. 72/1961.

S. R. SWANSON, *Systematic axial load fatigue tests using unnotched aluminium alloy 2024-T 4 extruded bar specimens*. UTIA Technical, Note No. 35/1960.

R. COLLINS, *Some methods of generating cylindrical explosions*. UTIA Technical, Note No. 43/1960.

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

# STUDII ŞI CERCETĂRI
# DE
# MECANICĂ APLICATĂ

Tomul XII 1961

## INDEX ALFABETIC

### STUDII

Nr. Pag.

*CINEMATICA ŞI DINAMICA SOLIDULUI*

BRĂDEANU PETRE, Consideraţii asupra traiectoriei rachetelor . . . . . . 1 27
TIPEI N. şi CONSTANTINESCU V. N., Traiectoriile fugoide ale avioanelor de mare viteză . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 11
TIPEI N., Asupra mişcării rachetei în mediu rezistent. I. Ascensiunea rachetei 3 475
TIPEI N. şi IONESCU V., Studiul unei clase de mişcări plane ale avioanelor 4 743

*AEROMECANICĂ*

LIMBERG H., Scurgerea de intrare laminară într-un canal convergent . . . . 1 47
MATEESCU DAN, Scurgerea supersonică în jurul unei aripi trapezoidale prevăzute cu două carene conice . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 61
PATRAULEA N. N., Aripi inelare cu jet de bord de fugă . . . . . . . . . 5 1075
PATRAULEA N. N., Analogia reoelectrică tridimensională fără influenţa frontierelor . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6 1187
PETRE A., STĂNESCU C. şi LIBRESCU L., Divergenţa aeroelastică a aripilor cheson ţinînd seama de restrîngerile de fixare . . . . . . . . . . . . 4 755
PETRE AUGUSTIN şi STĂNESCU CRISTIAN, Distribuţia aeroelastică a sarcinilor aerodinamice pentru suprafeţele portante de secţiune constantă, ţinînd seama de restrîngerile de fixare . . . . . . . . . . . . . 6 1193
SĂVULESCU ŞT. N., Distribuţia mărimilor turbulente în scurgerea unidimensională prin conducte de secţiune oarecare . . . . . . . . . . . . . 4 765

*DINAMICA GAZELOR*

ANDREI ŞT., Studiu critic al generatoarelor de gaze motocompresoare pentru antrenarea pneumatică a rotorului de elicopter . . . . . . . . . . . 2 363
KMONIČEK V., Scurgerea subsonică în difuzoare conice . . . . . . . . . . 2 383
PASCAL H., Curgerea tranzitorie a gazelor în conducte magistrale . . . . . . 2 391

*HIDROMECANICĂ*

DUMITRESCU D., IAMANDI C. şi IONESCU D. GH., Cercetări asupra canalelor cu evacuare laterală . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6 1205
DUMITRESCU D. şi IANCU C. M., Contribuţii la studiul deversoarelor cu muchie ascuţită . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6 1219
HARNAJ V., Contribuţii la studiul filtraţiilor prin barajele neomogene realizate prin fracţionare hidraulică . . . . . . . . . . . . . . . . . 4 795
MOISIL GR. C., Observaţii asupra ecuaţiilor liniarizate ale fluidelor vîscoase compresibile . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 41

| | Nr. | Pag. |
|---|---|---|
| PRIŞCU RADU şi STOIAN ALEX., Studiu asupra barajelor cu contraforţi-ciupercă | 4 | 783 |
| RĂZVAN E., Metodica de studiu a mişcării macroturbulente a fluidelor grele şi unele rezultate obţinute | 5 | 1081 |

*SCURGERI PRIN MEDII POROASE*

| | Nr. | Pag. |
|---|---|---|
| OROVEANU T., Consideraţii asupra scurgerii lichidelor compresibile prin medii poroase neomogene | 2 | 405 |
| OROVEANU T., Asupra unei probleme de scurgere printr-un mediu poros fisurat | 3 | 633 |
| RANGA RAO M. P., Curgerea radială nestaţionară şi nedarcyană a unui lichid printr-un mediu poros | 2 | 413 |

*UNGERE – FRECARE – UZURĂ*

| | Nr. | Pag. |
|---|---|---|
| CONSTANTINESCU V. N., Criterii de similitudine în funcţionarea lagărelor lubrificate cu lichide sau gaze | 2 | 343 |
| CONSTANTINESCU V. N., Calculul lagărelor cu alunecare, funcţionînd în regim turbulent | 3 | 573 |
| CONSTANTINESCU V. N., Asupra scurgerii cu frecare a unui gaz între două plăci paralele | 4 | 809 |
| CONSTANTINESCU V. N., Consideraţii asupra determinării distribuţiei presiunilor în lagărele alimentate sub presiune | 5 | 1101 |
| CONSTANTINESCU V. N., Determinarea distribuţiei presiunilor în lagărele alimentate sub presiune, prin utilizarea unei analogii hidrodinamice | 6 | 1239 |
| MARCU V. şi PASCU N., Consideraţii asupra măririi rezistenţei la uzură a supapelor de la motoare | 5 | 1133 |
| NICA AL. şi BARBU C-TIN, Studiul unor materiale antifricţiune zinc-aluminiu de înlocuire pentru lagărele cu alunecare | 4 | 827 |
| PAVELESCU D., ILIUC I. şi BARBUL SANDA, Studiul unei metode radioactive pentru aprecierea calităţilor lubrifiante a uleiurilor aditivate, prin prisma uzurii suprafeţelor | 2 | 311 |
| PAVELESCU D. şi ILIUC I., Metode pentru măsurarea grosimii filmului de lubrifiant la lagăre circulare | 5 | 1117 |
| POPINCEANU N. G. şi GAFIŢEANU M. D., Contribuţii în problema legăturii dintre rugozitate, procedeu de prelucrare, dimensiune, clasa de precizie şi funcţiune în construcţia de maşini | 2 | 323 |

*TEORIA MECANISMELOR*

| | Nr. | Pag. |
|---|---|---|
| BĂRĂNESCU G., Determinarea dimensiunilor principale ale unui mecanism bielă-manivelă general | 6 | 1293 |
| BRAIER ALFRED, Studiul grafic al mişcării unor oscilatori neliniari cu două grade de libertate | 4 | 883 |
| BUGAJEWSKI EUG., Asupra determinării momentului redus | 1 | 79 |
| HAIN K., Raportul de transmisie în mecanisme cu came cu mai multe elemente | 3 | 617 |
| MANGERON D. şi DRĂGAN C., Studiul mecanismelor spaţiale prin metoda mecanismelor reduse. I. Mecanisme spaţiale cu patru organe | 5 | 1025 |
| MANGERON D. şi DRĂGAN C., Studiul cinematic al mecanismelor spaţiale cu patru organe prin metoda matricială-tensorială | 6 | 1257 |
| MANOLESCU N. I., Asupra mecanismelor formate din lanţuri cinematice de diferite familii | 3 | 589 |
| PELECUDI CHR., BOGDAN R. C. şi CALMACIUC L., Asupra solicitărilor şi deformaţiilor la încovoiere ale capacelor la mecanismele bielă-manivelă | 5 | 1047 |
| PELECUDI CHR., Reprezentarea funcţiilor cu ajutorul arcelor de came de rotaţie şi tachet de translaţie | 6 | 1271 |
| SZEKELY IMRE, Studiu asupra blocului conic dinţat compus din roţi dinţate conico-evolventice | 5 | 1057 |

Nr. Pag.

*ELASTICITATE—PLASTICITATE—REZISTENŢA MATERIALELOR*

BĂLAN ŞTEFAN, RĂUTU SANDU şi PETCU VALERIU, Scheme de rupere la grinzi static nedeterminate cu secţiunea variabilă . . . . . . . . . 5 949
BRILLA J., Probleme de contact ale semiplanului elastic anizotrop . . . . . . 5 959
FLORIAN VIRGILIU, Contribuţii privind calculul de rezistenţă a sapelor cu lame . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6 1305
IFRIM M., Concepţii moderne privind determinarea forţelor seismice . . . . 2 255
IOSIPESCU N., Studiul experimental al plăcilor plane prin metoda interferenţelor mecanice . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 111
IOSIPESCU N., Studiul fotoeleastic spaţial al fundaţiilor de sub stîlpi izolaţi prin metoda îngheţării eforturilor . . . . . . . . . . . . . . . . . 3 519
LIBRESCU LIVIU, Vibraţiile structurilor elastice subţiri de formă cilindrică circulară, plasate într-un curent fluid supersonic . . . . . . . . . . . 1 139
LIBRESCU LIVIU, Asupra problemei elastodinamice a structurilor subţiri, neomogene . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4 861
MIŞICU M. şi DINCĂ FL., Încovoierea dinamică a barelor cu proprietăţi vîscoelastice. I . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 239
MIŞICU M. şi DINCĂ FL., Încovoierea dinamică a barelor cu proprietăţi vîscoelastice. II . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3 487
PETCU VALERIU, Sarcina de rupere a grinzilor static nedeterminate de beton armat cu secţiunea variabilă . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4 853
PETCU VALERIU, Un principiu fundamental în proiectarea structurilor static nedeterminate din beton armat în domeniul plastic . . . . . . . . . 5 1017
PETCU VALERIU, Calculul grinzilor continue din beton armat în domeniul plastic . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6 1321
PETRE A., Vibraţii aeroelastice produse de vîrtejuri alternate . . . . . . . 3 511
PÎRVULESCU N. S., Ţevi grele de extracţie pentru pompajul de adîncime . . . 4 841
PÎRVULESCU N. S., Smulgerea burlanelor din filet conic . . . . . . . . . 5 1005
SANDI H., Plăci rezemate pe un semispaţiu solid, solicitate dinamic . . . . . 2 293
SANDI H., Proprietăţi statistice ale capacităţii portante a structurilor static nedeterminate . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3 563
SANDI H., Asupra efectului elementelor vibroizolante . . . . . . . . . . . 4 877
SCHMIDT G., Aplicarea teoriei ecuaţiilor integrale neliniare în elastodinamică 1 89
SOARE M., O metodă generală de rezolvare a plăcilor dreptunghiulare . . . . 2 277
STĂNCULESCU GEORGETA şi TEODORESCU NATALIA, Asupra unor proprietăţi fizico-mecanice ale betoanelor armate cu oţeluri superioare . 3 545
TANNENBAUM M., Unele probleme în legătură cu calculul şi proiectarea betonului precomprimat în R.P.R. . . . . . . . . . . . . . . . . . 5 989

*TEHNOLOGIA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE*

FLORESCU C. I., BĂJESCU N., ALEXANDRESCU I. şi VASILESCU M., Posibilităţi de clasificare a tipurilor de sol şi de determinare a efectelor lucrărilor cu ajutorul unor mărimi fizico-mecanice. II. . . . . . . . . 3 653
POPOV M. P., DECIU E. D. şi MITRICĂ I., Asupra utilizării plăcuţelor mineralo-ceramice romîneşti ENC . . . . . . . . . . . . . . . . . 3 641
POPOV M. P., MITRICĂ I. şi DECIU E. D., Geometria sculei aşchietoare pentru prelucrarea oţelurilor carbon . . . . . . . . . . . . . . 6 1357

*MECANICA PĂMÎNTURILOR*

BALLY R. J. şi ANTONESCU I., Procesul de electroosmoză aplicat la ameliorarea pămînturilor . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 165
LITWINISZYN J., Noi cercetări teoretice şi experimentale în mecanica corpurilor granulare, tratate ca medii caracterizate prin ecuaţii stochastice. . 1 157

*VIBRAŢII*

MANEA V., Consideraţii asupra problemei oscilaţiilor autovehiculelor în mers rectiliniu cu viteza constantă . . . . . . . . . . . . . . . . . 6 1335

Nr. Pag.

*METODE DE CALCUL*

IONESCU D. V., Integrarea numerică a ecuaţiei integrale de tip Volterra 1 175
RIPIANU A., Contribuţie la calculul aproximativ al coeficienţilor seriei Fourier a unei funcţii periodice . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 423

*TEHNICA MĂSURĂTORILOR*

JAKAB I., ZAHARESCU A. şi DUMITRESCU L., Metodă pentru măsurarea vitezei de propagare a undelor de şoc . . . . . . . . . . . . . . . . 1 195
LISOWSKI A., Măsurarea vibraţiilor pe modele de plăci curbe subţiri şi pe modele tridimensionale de sisteme de bare cu ajutorul unui aparat electronic . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 433
PROCOPOVICI E. şi DUMITRESCU L., Măsurarea presiunilor aerodinamice în tubul de şoc . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 185

*NOTE*

DEUTSCH E., Încovoierea unei bare prismatice avînd secţiunea transversală mărginită de lemniscata lui Booth . . . . . . . . . . . . . . . . . 6 1399
MIŞICU M. şi DINCĂ FL., Unele rezultate experimentale în legătură cu încovoierea dinamică a barelor . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4 899
MUNTEANU GH. D., Efectele dinamice corespunzătoare acceleraţiilor de ordin oarecare . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3 675
OROVEANU T., Asupra formulei generalizate a lui Dupuit . . . . . . . . . 5 1147

*REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE*

BIŢĂ O. şi DINCĂ I., Date noi în tehnica rodării motoarelor cu ardere internă 5 1150
HARGHEL IACOB, Calculul liniilor de influenţă al podurilor pe bolţi cu tablierul susţinut prin pereţi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6 1379
MARIN GH., Instalaţie de laborator pentru măsurarea debitelor şi temperaturilor uleiului la lagărele arborilor cotiţi de la motoarele cu ardere internă 3 693
PECULEA MARIUS, Studiul şi determinarea principiilor de proiectare ale compresoarelor şi pompelor cu membrane metalice . . . . . . . . . . . 3 681
PONOMAREV K. K., O metodă matricială pentru calculul vibraţiilor grinzilor 1 207
STROESCU I şi MARINESCU AL., Cercetări experimentale asupra sufleriei aerodinamice subsonice a Institutului de mecanică aplicată „Traian Vuia" al Academiei R.P.R. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4 909

*MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE*

* * * Consfătuirea asupra tehnicii aşchierii metalelor şi tehnicii rodajului . . 1 215
MÉTRAL A. R., Răspunderile economice, culturale şi tehnice în întreprinderile din domeniul mecanicii, în ultima parte a secolului al XX-lea . . . . 3 701

*DIN ISTORIA TEHNICII ROMÎNEŞTI*

ANDONIE G. ŞT., Inginerul arhitect Alex. Costinescu, primul profesor de mecanică populară, predată la noi în limba romînă (1812—1872) . . . 2 441

*RECENZII*

*LISTA PUBLICAŢIILOR PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE*

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ „ТРАЯН ВУЯ“

# ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том XII 1961

---

## АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

**СТАТЬИ** № Стр.

### *КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ТВЕРДЫХ ТЕЛ*

БРЭДЯНУ ПЕТРЕ, О траектории ракет . . . . . . . . . . . . . 1 27
ТИПЕЙ Н. и КОНСТАНТИНЕСКУ В. Н., Фугоидальные траектории быстроходных самолетов . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 11
ТИПЕЙ Н., О движении ракеты в сопротивляющейся среде. I. Подъем ракеты. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3 475
ТИПЕЙ Н. и ИОНЕСКУ В., Исследование одного класса плоских движений самолета . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4 743

### *АЭРОМЕХАНИКА*

ЛИМБЕРГ Х., Ламинарное течение при входе в сходящийся канал 1 47
МАТЕЕСКУ ДАН, Сверхзвуковое обтекание трапецоидального крыла, предусмотренного двумя коническими обтекателями . . . . 1 61
ПАТРАУЛЯ Н. Н., Кольцевые крылья со струей задней кромки. 5 1073
ПАТРАУЛЯ Н. Н., Трехмерная реоэлектрическая аналогия без влияния границ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6 1187
ПЕТРЕ А., СТЭНЕСКУ К. и ЛИБРЕСКУ Л., Аэроупругая дивергенция кесонных крыльев с учетом ограничений закрепления . . . . . 4 75
ПЕТРЕ АУГУСТИН и СТЭНЕСКУ КРИСТИАН, Аэроупругое распределение аэродинамических сил для несущих поверхностей постоянного сечения с учетом ограничений закрепления . . . . 6 1193
СЭВУЛЕСКУ Ш. Н., Распределение турбулентных величин при одномерном течении в трубопроводáх произвольного сечения . . . 4 765

### *ГАЗОВАЯ ДИНАМИКА*

АНДРЕЙ Ш., Критическое исследование мотокомпрессорных газовых генераторов для пневматического привода несущего винта вертолета . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 363
КМОНИЧЕК В., Дозвуковое течение в конических диффузорах . 2 383
ПАСКАЛ Х., Переходное течение газов в магистралях . . . . . . 2 391

№ Стр

## *ГИДРОМЕХАНИКА*

ДУМИТРЕСКУ Д., ЯМАНДИ К. и ИОНЕСКУ Д., Исследование каналов с боковым отводом . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6 1205
ДУМИТРЕСКУ Д. и ЯНКУ К. М., К исследованию водосливов с острым ребром . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6 1219
МОЙСИЛ Г. К., Замечания о линеаризированных уравнениях вязких сжимаемых жидкостей . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 41
ПРИШКУ РАДУ и СТОЯН А., Исследование массивно-ребристых плотин . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4 783
РЭЗВАН Е., Методика исследования макротурбулентного движения и некоторые полученные результаты . . . . . . . . . . . . . 5 1079
ХАРНАЖ В., К исследованию фильтраций через неоднородные плотины, осуществленные путем гидравлического фракционирования . . 4 795

## *ТЕЧЕНИЯ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ*

ОРОВЯНУ Т., Соображения о течении сжимаемых жидкостей в неоднородных пористых средах . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 405
ОРОВЯНУ Т., Об одной задаче течения в трещиноватой пористой среде . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3 633
РАНГА РАО М. П., Нестационарное радиальное течение жидкости, не подчиняющееся закону Дарси, в пористой среде . . . . . . 2 413

## *СМАЗКА—ТРЕНИЕ—ИЗНОС*

КОНСТАНТИНЕСКУ В. Н., Критерии подобия для работы подшипников при жидкостной или газовой смазке . . . . . . . . . . 2 343
КОНСТАНТИНЕСКУ В. Н., Расчет подшипников скольжения, работающих в турбулентном режиме . . . . . . . . . . . . . . . . 3 573
КОНСТАНТИНЕСКУ В. Н., О течении газа с трением между двумя параллельными поверхностями . . . . . . . . . . . . . . . . 4 809
КОНСТАНТИНЕСКУ В. Н., К определению распределения давлений в подшипниках питаемых под давлением . . . . . . . . . . . 5 1101
КОНСТАНТИНЕСКУ В. Н., Определение распределения давлений в подшипниках, питаемых под давлением, путем применения гидродинамической аналогии . . . . . . . . . . . . . . . . . 6 1239
МАРКУ В. и ПАСКУ Н., К увеличению износостойкости клапанов двигателей . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3 113
НИКА А. и БАРБУ К., Исследование некоторых заменяющих антифрикционных материалов цинк-алюминий для подшипников скольжения . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4 27
ПАВЕЛЕСКУ Д., ИЛЮК И. и БАРБУЛ САНДА, Исследование радиоактивного метода для оценки смазочных свойств масел с присадками по износу поверхностей . . . . . . . . . . . . . . . 2 311
ПАВЕЛЕСКУ Д. и ИЛЮК И., Методы измерения толщины смазочной пленки круглых подшипников . . . . . . . . . . . . . . . . . 5 1115
ПОПИНЧАНУ Н. Г. и ГАФИЦАНУ Н. Д., Связь между шероховатостью, способом обработки, размером, классом точности и назначением в машиностроении . . . . . . . . . . . . . . . 2 323

## *ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ*

БРАЙЕР АЛЬФРЕД, Графическое исследование движения нелинейных осцилляторов с двумя степенями свободы . . . . . . . 4 883
БУГАЕВСКИЙ Е., К определению приведенного момента механизма . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 79
БЭРЭНЕСКУ ДЖЕОРДЖЕ, Определение основных размеров общего кривошипно-шатуный механизма . . . . . . . . . . . . . . . 6 1293

№ Стр.

МАНДЖЕРОН Д. и ДРЭГАН К., Исследование пространственных механизмов методом приведенных ускорений. I. Четырехзвенные пространственные механизмы . . . . . . . . . . . . . . . 5 1025

МАНДЖЕРОН Д. и ДРЭГАН К., Кинематическое исследование новым матрично-тензорным методом четырехзвенных пространственных механизмов . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6 1257

МАНОЛЕСКУ Н. И., О механизмах, составленных из кинематических цепей различных семейств . . . . . . . . . . . . . . . . . 3 589

ПЕЛЕКУДИ КР., БОГДАН Р. К. и КАЛМАЧУК Л., О нагрузках и деформациях изгиба головок кривошипно-шатунных механизмов 5 1047

ПЕЛЕКУДИ К., Изображение функций при помощи дуг вращательных кулачков с толкателем, исполняющим поступательное движение . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6 1271

СЕКЕЛИ ИМРЕ, Исследование зубчатого конического блока, составленного из конусно-эвольвентных шестерен . . . . . . . 5 1055

ХАЙН К., Передаточное отношение многозвенных кулачковых механизмов . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3 617

### *УПРУГОСТЬ-ПЛАСТИЧНОСТЬ-СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ*

БАЛАН ШТЕФАН, РЭУТУ САНДУ и ПЕТКУ ВАЛЕРИУ, Схемы разрушения статически неопределимых балок переменного сечения . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5 949

БРИЛЛА И., Контактная задача упругой анизотропной полуплоскости . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5 959

ИОСИПЕСКУ Н., Экспериментальное исследование плоских пластинок методом механических интерференций . . . . . . . . . . 1 111

ИОСИПЕСКУ Н., Пространственное фотоупругое исследование фундаментов под изолированными стойками при помощи метода „замораживания" . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3 519

ИФРИМ М., Современные представления в связи с определением сейсмических сил . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 255

ЛИБРЕСКУ ЛИВИУ, Колебания упругих слоистых оболочек круглой цилиндрической формы, расположенных в потоке сверхзвуковой жидкости . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 139

ЛИБРЕСКУ ЛИВИУ, К упруго-динамической задаче неоднородных тонких конструкций . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4 869

МИШИКУ М. и ДИНКЭ Ф., Динамический изгиб стержней с вязкоупругими свойствами. I. . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 213

МИШИКУ М. и ДИНКЭ Ф., Динамический изгиб стержней, обладающих вязко-упругими свойствами. II . . . . . . . . . . . . . 3 487

ПЕТКУ ВАЛЕРИУ, Несущая способность статически неопределимых железобетонных балок переменного сечения . . . . . . . . . 4 853

ПЕТКУ ВАЛЕРИУ, Основной принцип при проектировании железобетонных статически неопределимых конструкций в пластической области . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5 1017

ПЕТКУ ВАЛЕРИУ, Расчет неразрезных железобетонных балок в пластической области . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6 1321

ПЕТРЕ А., Аэроупругие колебания, вызываемые чередующимися вихрями . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3 511

ПЫРВУЛЕСКУ Н. С., Тяжелые насосные трубы для глубинной откачки . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4 841

ПЫРВУЛЕСКУ Н. С., Выдергивание обсадных труб из конической резьбы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5 1005

САНДИ Х., Пластинки, опирающиеся на твердую полуплоскость, подверженные динамическим нагрузкам. . . . . . . . . . . . . 2 293

САНДИ Х., Статистические свойства несущей способности статически неопределимых систем . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3 563

№ Стр.
САНДИ Х., Об эффекте виброизолирующих элементов . . . . . . . 4 877
ШМИДТ Г., Применение теории нелинейных интегральных уравнений в эластодинамике . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 89
СОАРЕ М., Общий метод решения прямоугольных пластинок . . . 2 277
СТЭНКУЛЕСКУ ДЖЕОРДЖЕТА и ТЕОДОРЕСКУ НАТАЛИЯ, Об одном физико-механическом свойстве железобетонов, армированных высококачественными сталями . . . . . . . . . . . . 3 545
ТАННЕНБАУМ М., Некоторые задачи в связи с предельным состоянием прочности элементов из предварительно напряженного бетона . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5 989
ФЛОРИАН ВИРДЖИЛИУ, К расчету на прочность лопастных долот . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6 1305

### *ТЕХНОЛОГИЯ СПЛОШНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ*

ПОПОВ М.П., ДЕЧИУ Е.Д. и МИТРИКЭ И., О применении румынских минерало-керамических пластинок EŅC . . . . . . . . . . . 3 641
ПОПОВ М.П., МИТРИКЭ И. и ДЕЧИУ Е.Д., Геометрия режущего инструмента для обработки углеродистых сталей . . . . . . . . 6 1357
ФЛОРЕСКУ К. И., БЭЖЕСКУ Н., АЛЕКСАНДРЕСКУ И. и ВАСИЛЕСКУ М., Возможности классификации грунтов и определения эффектов работ при помощи физико-механических величин. II . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3 653

### *МЕХАНИКА ГРУНТОВ*

БАЛЛИ Р. Ж. и АНТОНЕСКУ И., Процесс электроосмоза, примененный для улучшения грунтов . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 165
ЛИТВИНИШИН И., Новые теоретические и экспериментальные исследования в механике зернистых тел, рассматриваемых как среды, характеризующиеся стохастическими уравнениями . . . . . . 1 157

### *КОЛЕБАНИЯ*

МАНЯ В., К задаче колебаний автомашин при прямолинейном движении с постоянной скоростью . . . . . . . . . . . . . . . . 6 1335

### *МЕТОДЫ РАСЧЕТА*

ИОНЕСКУ Д. В., Численное интегрирование интегрального уравнения типа Вольтерра . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 175
РИПЯНУ А., К приближенному расчету коэффициентов ряда Фурье периодической функции . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 423

### *ТЕХНИКА ИЗМЕРЕНИЙ*

ЛИСОВСКИЙ А., Измерение колебаний на моделях тонких оболочек и на трехмерных моделях стержневых систем при помощи электронного аппарата . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 433
ПРОКОПОВИЧ Е. и ДУМИТРЕСКУ Л., Измерение аэродинамического давления в ударной трубе . . . . . . . . . . . . . . . 1 185
ЯКАБ И., ЗАХАРЕСКУ А. и ДУМИТРЕСКУ Л., Метод измерения скорости распространения ударных волн . . . . . . . . . . 1 195

### *ЗАМЕТКИ*

ДЕЙЧ Е., Изгиб призматического стержня с поперечным сечением, ограниченным лемнискатой Бута . . . . . . . . . . . . . . 6 1399
МИШИКУ М. и ДИНКЭ Ф., Некоторые экспериментальные результаты в связи с динамическим изгибом стержней . . . . . . . . . 4 899
МУНТЯНУ Г. Д., Динамические эффекты, соответствующие ускорениям произвольного порядка . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3 675
ОРОВЯНУ Т., К обощенной формуле Дюпуи . . . . . . . . . . . 5 1145

№ Стр.

### НАУЧНЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕФЕРАТЫ

БИЦЭ О. и ДИНКЭ И., Новые данные о притирке двигателей внутреннего сгорания . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5 1149

МАРИН Г., Лабораторная установка для измерения расходов и температур масла в подшипниках коленчатых валов двигателей внутреннего сгорания. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3 693

ПЕКУЛЯ МАРИУС, Исследование и определение принципов проектирования компрессоров и насосов с металлическими мембранами. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3 681

ПОНОМАРЕВ К. К., Матричный метод расчета колебаний балок . . . 1 207

СТРОЕСКУ И. и МАРИНЕСКУ А., Экспериментальные исследования дозвуковой аэродинамической трубы Института прикладной механики имени Траяна Вуя Академии РНР . . . . . . . . 4 909

ХАРГЕЛ ЯКОБ, Расчет линий влияния арочных мостов с пролетным строением, поддерживаемым стенками . . . . . . . . . . 6 1379

### ИЗ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ИНСТИТУТА ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

*** Совещание о технике резания металлов и технике обкатки . 1 215

МЕТРАЛ А.Р., Экономические, культурные и технические обязанности предприятий в области механики во второй половине XX века . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 701

### ИЗ ИСТОРИИ РУМЫНСКОЙ ТЕХНИКИ

АНДОНИЕ Г. Ш., Инженер-архитектор Александру Костинеску — первый профессор, преподававший элементарную механику на румынском языке (1812—1872 гг. ) . . . . . . . . . . . . . 2 441

### РЕЦЕНЗИИ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

### ПУБЛИКАЦИИ, ПОСТУПИВШИЕ В РЕДАКЦИЮ

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE «TRAIAN VUIA»

# ÉTUDES ET RECHERCHES
# DE
# MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome XII 1961

---

## INDEX ALPHABÉTIQUE

**ÉTUDES** Nº Page

*CINÉMATIQUE ET DYNAMIQUE DU SOLIDE*

BRĂDEANU PETRE, Sur les trajectoires des fusées . . . . . . . . . . . 1 27
TIPEI N. and CONSTANTINESCU V. N., Phugoid paths of high-speed aircrafts . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 11
TIPEI N., On the motion of rockets in resisting medium. I. Ascending motion . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3 475
TIPEI N. and IONESCU V., Study of a class of plane motions of aircrafts 4 743

*AÉROMÉCANIQUE*

LIMBERG H., Der laminare Einlauf einer Strömung in einem konvergenten Kanal . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 47
MATEESCU DAN, Supersonic flow around a trapezoidal wing fitted with two conical bodies . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 61
PATRAULEA N. N., Annular wings with jet-flap . . . . . . . . . . . . . 5 1075
PATRAULEA N. N., Three-dimensional rheoelectric analogy without the influence of boundaries . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6 1187
PETRE A., STĂNESCU C. and LIBRESCU L., Aeroelastic divergence of box beam wings taking into consideration build-in restraints . . . . . . . . 4 755
PETRE AUGUSTIN and STĂNESCU CRISTIAN, Aeroelastic distribution of aerodynamic loads for lifting surfaces of constant cross-section, taking into consideration the end restraints . . . . . . . . . . . . . . . . 6 1193
SĂVULESCU ŞT. N., Distribution of turbulent mean characteristics in the one-dimensional flow through conduits of arbitrary cross-section . . . . . 4 765

*DYNAMIQUE DES GAZ*

ANDREI ŞT., Critical study on gas generators with reciprocating engine driven compressors for pressure jet helicopter rotor propulsion . . . . . . . . 2 363
KMONIČEK V., Unterschallströmung in Kegeldiffusoren. . . . . . . . . . . 2 383
PASCAL H., Transient flow of gases through main pipelines . . . . . . . . 2 391

*HYDROMÉCANIQUE*

DUMITRESCU D., IAMANDI C. and IONESCU D. GH., Investigations on channels with lateral evacuation . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6 1205
DUMITRESCU D. et IANCU C. M., Contribution à l'étude des déversoirs en mince paroi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6 1219

Nº Page

HARNAJ V., Beiträge zum Studium der Filtration durch nichthomogene mittels hydraulischer Fraktionierung erzielter Erddämme . . . . . . . . . 4 795
MOISIL GR. C., Observations sur les équations linéarisées des fluides visqueux compressibles . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 41
PRIŞCU RADU et STOIAN ALEX., Étude sur les barrages à contreforts-champignon . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4 783
RĂZVAN E., Méthodes pour l'étude du mouvement macroturbulent des fluides lourds et quelques-uns des résultats obtenus . . . . . . . . . . . . . 5 1081

### *ÉCOULEMENTS À TRAVERS DES MILIEUX POREUX*

OROVEANU T., Considérations sur l'écoulement des liquides compressibles dans les milieux poreux non homogènes. . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 405
OROVEANU T., Sur un problème d'écoulement dans un milieu poreux présentant des fissures . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3 633
RANGA RAO M. P., Non-Darcian unsteady radial flow of compressible liquids through a porous medium . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 413

### *LUBRIFICATION — FROTTEMENT — USURE*

CONSTANTINESCU V. N., Similarity conditions for the liquid or gas bearings 2 343
CONSTANTINESCU V. N., Le calcul des paliers lisses fonctionnant en régime turbulent . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3 573
CONSTANTINESCU V. N., On the flow of a viscous gas between two parallel surfaces . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4 809
CONSTANTINESCU V. N., Considerations on the pressure distribution in hydrostatic bearings . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5 1101
CONSTANTINESCU V. N., Determination of the pressure distribution in hydrostatic bearings by using a hydrodynamic analogy . . . . . . . . . . . 6 1239
MARCU V. et PASCU N., Considérations sur l'augmentation de la résistance à l'usure des soupapes de moteurs . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5 1133
NICA AL. and BARBU C., Study of some zinc-aluminium anti-friction materials to be used for journal bearings . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4 827
PAVELESCU D., ILIUC I. and BARBUL SANDA, Study on a radioactive method for estimating the lubricating qualities of compound oils by means of friction parts . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 311
PAVELESCU D. and ILIUC I., Methods for measuring the lubricant film thickness in journal bearings . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5 1117
POPINCEANU N. G. und GAFIŢEANU M. D., Zum Problem des Zusammenhanges zwischen Rauheit, Bearbeitungsweise, Dimension, Qualitätsklasse und Funktion im Maschinenbau . . . . . . . . . . . . . . . 2 323

### *THÉORIE DES MÉCANISMES*

BĂRĂNESCU G., Détermination des dimensions principales d'un mécanisme bielle-manivelle général . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6 1293
BRAIER ALFRED, Graphische Untersuchung der Bewegung von nichtlinearen Oszillatoren mit zwei Freiheitsgraden . . . . . . . . . . . . . . 4 883
BUGAJEWSKI EUG., Über die Bestimmung des reduzierten Momentes eines Getriebes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 79
HAIN K., Das Übersetzungsverhältnis in mehrgliedrigen Kurvengetrieben . . . 3 617
MANGERON D. et DRĂGAN C., Étude des mécanismes dans l'espace par la méthode des accélérations réduites. I. Mécanismes dans l'espace à quatre organes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5 1025
MANGERON D. et DRĂGAN C., Étude cinématique des mécanismes dans l'espace à quatre organes, par une nouvelle méthode matricielle-tensorielle 6 1257
MANOLESCU N. I., Über Getriebe aus kinematischen Ketten verschiedener Familien . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3 589
PELECUDI CHR., BOGDAN R. C. und CALMACIUC L., Über die Biegebelastungen und Verformungen der Deckel bei Kurbelgetrieben . . . . . 5 1047

| | Nº | Page |
|---|---|---|
| PELECUDI CHR., Representation of functions with the aid of arcs of rotation cams and translation tappets | 6 | 1271 |
| SZEKELY IMRE, Untersuchung des aus Kegel-Evolventen-Zahnrädern gebildeten Blockes | 5 | 1057 |

*ÉLASTICITÉ — PLASTICITÉ — RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX*

| | | |
|---|---|---|
| BĂLAN ŞTEFAN, RĂUTU SANDU and PETCU VALERIU, Failure schemes for statically indeterminate beams of variable cross-section | 5 | 949 |
| BRILLA J., Contact problems of an elastic anisotropic half-plane | 5 | 959 |
| FLORIAN VIRGILIU, Contributions au calcul de la résistance des trépans à lames | 6 | 1305 |
| IFRIM M., Modern conception on the determination of seismic forces | 2 | 255 |
| IOSIPESCU N., Étude expérimentale des plaques planes par la méthode des interférences mécaniques | 1 | 111 |
| IOSIPESCU N., Étude photo-élastique à trois dimensions des fondations sous des colonnes isolées, par la méthode du figeage des contraintes | 3 | 519 |
| LIBRESCU LIVIU, Vibrations des structures élastiques en forme de cylindre circulaire situées dans un courant fluide supersonique | 1 | 139 |
| LIBRESCU LIVIU, On the elasto-dynamic problem of thin multilayer shells | 4 | 861 |
| MIŞICU M. et DINCĂ FL., Flexion dynamique des barres à propriétés visco-élastiques. I. | 2 | 239 |
| MIŞICU M. and DINCĂ FL., Dynamic bending of bars with viscoelastic properties. II. | 3 | 487 |
| PETCU VALERIU, Ultimate load of redundant reinforced concrete beams of variable cross-section | 4 | 853 |
| PETCU VALERIU, A basic principle for the design of statically indeterminate reinforced concrete structures in the plastic range | 5 | 1017 |
| PETCU VALERIU, Plastic analysis of reinforced concrete continuous beams | 6 | 1321 |
| PETRE A., Aeroelastic vibrations induced by alternating vortices | 3 | 511 |
| PÎRVULESCU N. S., Le tubing lourd pour le pompage de profondeur | 4 | 841 |
| PÎRVULESCU N. S., La force d'arrachement du filet conique des tubes pour le tubage des sondes | 5 | 1005 |
| SANDI H., Plaques dynamiquement sollicitées, appuyées sur un demi-espace solide | 2 | 293 |
| SANDI H., Propriétés statistiques de la capacité portante des structures hyperstatiques | 3 | 563 |
| SANDI H., On the effect of vibration insulating elements | 4 | 877 |
| SCHMIDT G., Anwendung der Theorie nichtlinearer Integralgleichungen in der Elastokinetik | 1 | 89 |
| SOARE M., Une méthode générale pour la solution des dalles rectangulaires | 2 | 277 |
| STĂNCULESCU GEORGETA et TEODORESCU NATALIA, Sur certaines propriétés physico-mécaniques des bétons armés d'aciers à haute résistance | 3 | 545 |
| TANNENBAUM M., Quelques problèmes soulevés par le calcul à l'état-limite de la résistance des éléments de béton précontraint | 5 | 989 |

*TECHNOLOGIE DES MILIEUX SOLIDES CONTINUS*

| | | |
|---|---|---|
| FLORESCU C. I., BĂJESCU N., ALEXANDRESCU I. und VASILESCU M., Möglichkeiten zur Klassifizierung der Bodenarten und zur Bestimmung der Bearbeitungswirkungen mittels physikalisch-mechanischer Grössen. II | 3 | 653 |
| POPOV M. P., DECIU E. D. and MITRICĂ I., On the use of Rumanian ENC ceramic tips | 3 | 641 |
| POPOV M. P., MITRICĂ I. und DECIU E. D., Die Geometrie des Werkzeuges zur Zerspanung von Kohlenstahlwerkstoffen | 6 | 1357 |

*MÉCANIQUE DES SOLS*

| | | |
|---|---|---|
| BALLY R. J. and ANTONESCU I., Application of the electro-osmotic process to the improving of soil properties | 1 | 165 |

No Page

LITWINISZYN J., New theoretical and experimental investigations in the mechanics of loose bodies treated as media characterized by stochastic equations . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 157

*VIBRATIONS*

MANEA V., Considérations sur le problème des oscillations des automobiles en mouvement rectiligne à vitesse constante . . . . . . . . . . . . . . 6 1335

*MÉTHODES DE CALCUL*

IONESCU D. V., Intégration numérique de l'équation intégrale du type Volterra . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 175
RIPIANU A., Contribution au calcul approximatif des coefficients de la série de Fourier d'une fonction périodique . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 423

*TECHNIQUE DES MESURES*

JAKAB I., ZAHARESCU A. and DUMITRESCU L., Method for measuring the velocity of propagation of shock waves . . . . . . . . . . . . . . 1 195
LISOWSKI A., Measurement of the vibrations of shell models and three-dimensional models of bar systems by means of an electronic apparatus . . . . 2 433
PROCOPOVICI E. and DUMITRESCU L., Measurement of aerodynamic pressure in the shock tube . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 185

*NOTES*

DEUTSCH E., Flexion d'une barre prismatique dont la section transversale est limitée par la lemniscate de Booth . . . . . . . . . . . . . . . . 6 1399
MIŞICU M. et DINCĂ FL., Flexion dynamique des barres à propriétés viscoélastiques. III . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4 899
MUNTEANU GH. D., Les effets dynamiques correspondant à des accélérations d'un ordre quelconque . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3 675
OROVEANU T., Sur la formule généralisée de Dupuit . . . . . . . . . . 5 1147

*RAPPORTS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES*

BIŢĂ OLGA and DINCĂ I., New data on the running-in of internal combustion engines . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5 1150
HARGHEL IACOB, Die Berechnung der Einflusslinien der Bogenbrücken mit wandartig gestützter Fahrbahn . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6 1379
MARIN GH., Test installation for measuring the oil rate of flow and temperature of crankshaft bearings in internal combustion engines . . . . . . . . . 3 693
PECULEA MARIUS, Étude et détermination des principes pour l'élaboration des projets de compresseurs et de pompes à membranes métalliques . . . . 3 681
PONOMAREV K. K., Une méthode matricielle pour le calcul des vibrations des poutres . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 207
STROESCU I. et MARINESCU AL., Recherches expérimentales sur la soufflerie aérodynamique subsonique de l'Institut de Mécanique Appliquée « Traian Vuia » de l'Académie de la République Populaire Roumaine . . . . . . 4 909

*MANIFESTATIONS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES*

* * * Conférence sur la technique du tournage des métaux et sur la technique du rodage . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 315
MÉTRAL A. R., Les responsabilités économiques, culturelles et techniques dans les entreprises s'occupant de la mécanique, dans la dernière partie du XX$^{e}$ siècle . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3 701

*DE L'HISTOIRE DE LA TECHNIQUE ROUMAINE*

ANDONIE G. ŞT., L'ingénieur-architecte Alexandru Costinescu, le premier professeur ayant enseigné la mécanique en roumain (1812—1872) . . . . . 2 441

*REVUE BIBLIOGRAPHIQUE*

*PUBLICATIONS REÇUES À LA RÉDACTION*

*Pentru a vă asigura o colecţie completă şi primirea la timp a revistei, reînnoiţi abonamentul Dvs. pentru anul 1962.*

ABONAMENTELE SE FAC LA OFICIILE POŞTALE, AGENŢIILE POŞTALE, FACTORII POŞTALI ŞI DIFUZORII VOLUNTARI DIN ÎNTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII.